

Министерство образования и науки Российской Федерации

Государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования

**«Санкт-Петербургский государственный технологический  
университет растительных полимеров»**

---

**М.А. Готовский, В.А. Суслов**

# **Тепломассообмен в технологических установках ЦБП**

**Учебное пособие**

**Часть I**

Санкт-Петербург  
2010

УДК 621.184.64 (075)

ББК 31.31я 7

С 904

Готовский М.А., Суслов В.А. Теплообмен в технологических установках ЦБП: учебное пособие / СПбГТУРП. СПб., 2010.-88 с: ил. 74.- ISBN 5-230-14398-3

Учебное пособие содержит основные понятия, определения и расчетные уравнения по теплопроводности, теплоотдаче, тепломассообмену, тепловому излучению, классификацию, тепловой и гидродинамический расчет теплообменных аппаратов. Первая часть посвящена вопросам теплопроводности.

Пособие составлено в соответствии с требованиями государственных образовательных стандартов, охватывает минимальный, но необходимый материал по данной дисциплине, и поэтому может быть использовано в качестве конспекта лекций студента – теплоэнергетика по специальностям 140104 «Теплоэнергетика» и 140105 «Энергетика теплотехнологий».

Рецензенты: зав. кафедрой промтеплоэнергетики СПбГПУ, д-р техн. наук, профессор В.М. Боровков;

д-р техн. наук, профессор кафедры промышленной теплоэнергетики СПбГТУРП Л.В.Зысин

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом Санкт-Петербургского государственного технологического университета растительных полимеров в качестве учебного пособия.

ISBN

© Готовский М.А., Суслов В.А., 2010

© ГОУ ВПО Санкт-Петербургский  
государственный технологический  
университет растительных  
полимеров, 2010

## Оглавление

	Введение	5
<b>1</b>	<b>Технологическая схема сульфатного производства</b>	<b>6</b>
<b>2</b>	<b>Основные положения теории теплопроводности</b>	<b>11</b>
2.1	Понятие о размерности, единицы измерения, структура функциональных связей между физическими величинами	11
2.2	Описание процессов теплопроводности	13
2.3	Коэффициенты теплопроводности различных веществ	15
2.3.1	Коэффициент теплопроводности газов	15
2.3.2	Коэффициент теплопроводности жидкостей	15
2.3.3	Коэффициент теплопроводности металлов	16
2.3.4	Коэффициент теплопроводности строительных материалов	16
2.4	Дифференциальное уравнение теплопроводности	17
2.4.1	Вывод дифференциального уравнения теплопроводности	17
2.4.2	Условия однозначности для процессов теплопроводности	21
2.5	Понятие о термических сопротивлениях	22
2.6	Теплопроводность плоской стенки	23
2.6.1	Граничные условия первого рода	23
2.6.2	Граничные условия третьего рода для однослойной пластины	26
2.7	Передача теплоты через цилиндрическую стенку	27
2.7.1	Граничные условия первого рода	27
2.7.2	Граничные условия третьего рода	29
2.7.3	Критический диаметр цилиндрической стенки	29
2.7.4	Критический диаметр тепловой изоляции	30
2.8	Передача теплоты через сферическую стенку	31
2.8.1	Граничные условия первого рода	31
2.8.2	Граничные условия третьего рода	33
2.9	Теплопроводность при наличии внутренних источников теплоты	33
2.9.1	Теплопроводность однородной неограниченной пластины	34
2.9.2	Теплопроводность однородного цилиндра	35
2.10	Примеры с решениями	35
<b>3</b>	<b>Нестационарные процессы теплопроводности</b>	<b>40</b>
3.1	Нестационарная задача теплопроводности для пластины	41
3.2	Регулярный режим процессов теплопроводности	46
3.3	Нестационарное температурное поле в объеме, где осуществляются химические процессы	47
3.4	Использование метода подобия для решения нестационарного уравнения теплопроводности	49
3.5	Задача теплопроводности для полубесконечного тела с периодическими граничными условиями на поверхности	52
3.6	Продвижение фронта фазового превращения	54
3.7	Численные методы решения задач теплопроводности	56
3.7.1	Метод контрольного объема	56
3.7.2	Основные правила построения разностных аналогов	58

3.7.2.1	Соответствие потоков на границах объема	60
3.7.2.2	Положительность коэффициентов	60
3.7.2.3	Отрицательность коэффициента при линеаризации источника члена $b_0$	
3.7.2.4	Сумма соседних коэффициентов	60
3.7.3	Нестационарная одномерная теплопроводность	61
3.7.3.1	Обобщенный дискретный аналог	61
3.7.3.2	Явная, Кранка-Николсона и полностью неявная схемы	62
3.8	Об одном, относительно простом, методе получения приближенных решений нестационарных задач теплопроводности	63
<b>4</b>	<b>Некоторые специальные вопросы, связанные с описанием процесса теплопроводности</b>	<b>69</b>
4.1	Контактное термическое сопротивление	69
4.2	Термическое сопротивление отложений на теплообменной поверхности трубы	72
4.3	Развитие поверхности теплообмена	73
4.3.1	Теплопроводность в стержне с постоянным поперечным сечением	74
4.3.2	Теплопередача через плоскую ребристую стенку	75
4.3.3	Теплопроводность круглого ребра постоянной толщины	77
4.3.4	Простейшие методы интенсификация теплопередачи	78
4.4	Особенности кондуктивного теплопереноса в микро- и наносистемах	79
4.4.1	Теплопроводность разреженных газов	79
4.4.2	Теплопроводность твердых и конденсированных тел	80
4.5	Примеры с решениями	84

## ВВЕДЕНИЕ

Производство целлюлозы и бумаги состоит из последовательно протекающих теплотехнологических процессов, основанных на многократном разбавлении растительных волокнистых материалов водными растворами с последующим их обезвоживанием. Современные целлюлозно-бумажные предприятия (ЦБП) обладают сложным теплотехнологическим оборудованием, в котором реализуются эти и многие другие физико-химические процессы. Они связаны с потреблением большого количества химикатов и природного топлива. В связи с этим на этих предприятиях особо актуальными являются мероприятия по улучшению экологии, регенерации теплоты и химических реагентов.

Целлюлозно-бумажная промышленность является быстро развивающейся, наукоемкой отраслью, базирующейся в основном, к сожалению, на импортном оборудовании. Для ослабления зависимости от импорта и в целях освоения отечественных технологий изготовления новейшего бумагоделательного оборудования должны реконструироваться и создаваться отечественные машиностроительные заводы.

Совершенствование отрасли связано с повышением степени использования растительного сырья, интенсификацией производства, внедрением агрегатов повышенной единичной мощности, повышением коэффициента использования вторичных низкопотенциальных ресурсов, улучшением системы нормирования и контроля расхода топливно-энергетических ресурсов.

Для эффективного решения всех этих вопросов в настоящее время применяется системный анализ процессов, который учитывает различную ценность энергоресурсов и их тепловой потенциал. Указанный подход к исследованию и анализу эффективности работы теплотехнологического оборудования и протекающих в нем процессов позволяет обобщить основные разделы знаний по тепло- и массообмену в области теплотехнологии производства целлюлозы и бумаги.

В результате разработано уникальное и весьма эффективное теплотехнологическое оборудование, которое прошло стадию освоения на предприятиях отрасли. Описание ряда процессов и устройств, где протекают эти процессы, приведено в предлагаемом учебном пособии.

Пособие может быть полезным при подготовке инженеров-теплоэнергетиков, механиков и химиков-технологов в области теплотехнологии, владеющих навыками проектирования и эксплуатации современного теплотехнологического оборудования.

## 1. ТЕХНОЛОГИЧЕСКАЯ СХЕМА СУЛЬФАТНОГО ПРОИЗВОДСТВА

Основной задачей целлюлозно-бумажного производства является получение из растительного (древесного) сырья целлюлозы и на ее основе многочисленных видов бумаги и картона.

**Древесина** – это продукт растительного происхождения, представляющий сложный полимерный комплекс и состоящий на 99 % из **органических** и до 1 % из **минеральных** веществ.

**Органические** вещества представлены более чем на 90 % **структурными компонентами**, в основном состоящими из высокомолекулярных соединений, и до 3 – 4 % **экстрактивными веществами**, представляющими собой низкомолекулярные соединения.

Структурные компоненты подразделяются на **углеводную** и **ароматическую** части. Углеводная часть древесины, представляющая собой комплекс полисахаридов, называется **холоцеллюлозой**. В состав холоцеллюлозы входят ее основной компонент **целлюлоза** и нецеллюлозные полисахариды – **гемицеллюлозы** в количестве 10 ÷ 25 %. Целлюлоза является основной частью стенок клеток растений. Поэтому иногда ее называют клетчаткой. Содержание целлюлозы в древесине составляет 50 ÷ 60 %.

Ароматическую часть древесины представляет лигнин, являющийся смесью ароматических полимеров родственного строения фенольной природы. Массовая доля лигнина в древесине составляет 20 ÷ 30 %.

Растительная ткань содержит также вещества, которые не входят в состав клеточной стенки. К ним относятся смоляные и жирные кислоты, их соли, эфирные масла и т. д. Содержание их в древесине 2 ÷ 6 %.

В целях выделения целлюлозы из растительных тканей, последние подвергают механической, химической и химико-механической обработке. Древесину для более качественного проведения последующих теплехимических процессов предварительно перерабатывают в щепу на специальных рубительных машинах. Далее целлюлозу извлекают из древесины с помощью варки в растворе (щелоче), в процессе которой сопутствующие целлюлозе вещества переходят из древесины в щёлок. В результате получают полуфабрикаты: техническую целлюлозу, или полуцеллюлозу (выход из древесины более 60 %).

В настоящее время в промышленности применяются в основном сульфатный (90 %) и сульфитные (10 %) способы варки.

Сульфитные способы варки в зависимости от величины рН исходного варочного раствора подразделяются на нейтрально-сульфитный (моноссульфитный) (рН 9 ÷ 11), бисульфитный (рН 3 ÷ 6) и кислый бисульфитный (сульфитный – рН 1,5 ÷ 2).

При нейтрально-сульфитном способе варочный раствор содержит в качестве активного реагента смесь сульфита и, например, карбоната натрия  $Na_2SO_3 + Na_2CO_3$  в соотношении (5 ÷ 8):1. Нейтрально-сульфитным способом, как правило, перерабатывают листовенные породы древесины.

При бисульфитном способе варки щепы варится в растворе, содержащем в качестве активного реагента один из бисульфитов:  $Mg(HSO_3)_2$ ,  $NaHSO_3$  или  $NH_4HSO_3$ .

При кислом бисульфитном (сульфитном) способе щепу варят варочной кислотой, содержащей в качестве активного реагента  $SO_2$ , растворенный в смеси с каким-либо бисульфитом:  $Ca(HSO_3)_2 + SO_2 + H_2O$ .

При бисульфитном и сульфитным способами производятся перерабатываются малосмолистые хвойные породы (ель, пихта) и лиственные (берёза, бук, тополь, осина).

Сульфатным способом (рис. 1) можно перерабатывать все виды растительного сырья, имеющие промышленное значение (различные породы древесины,

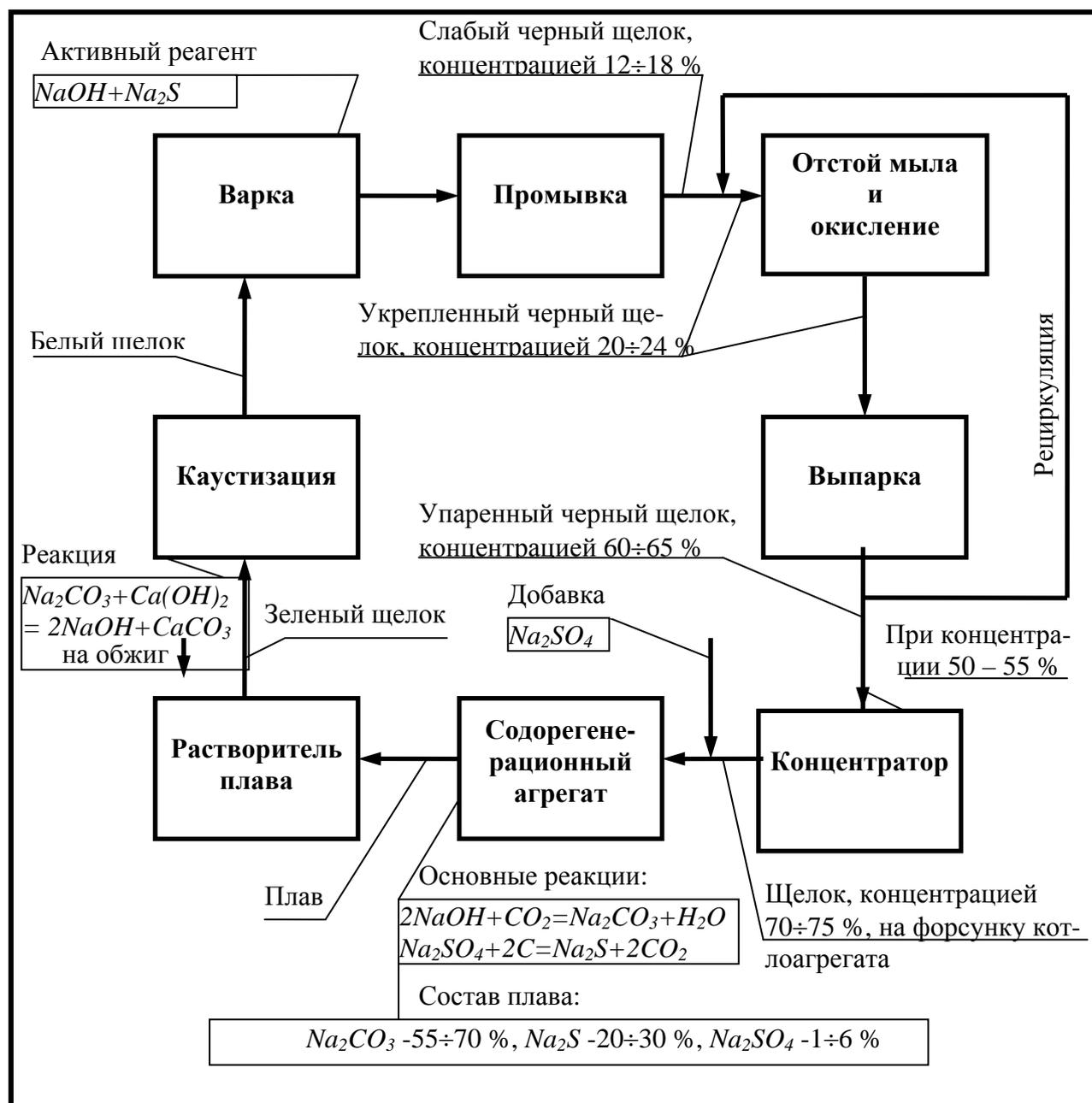
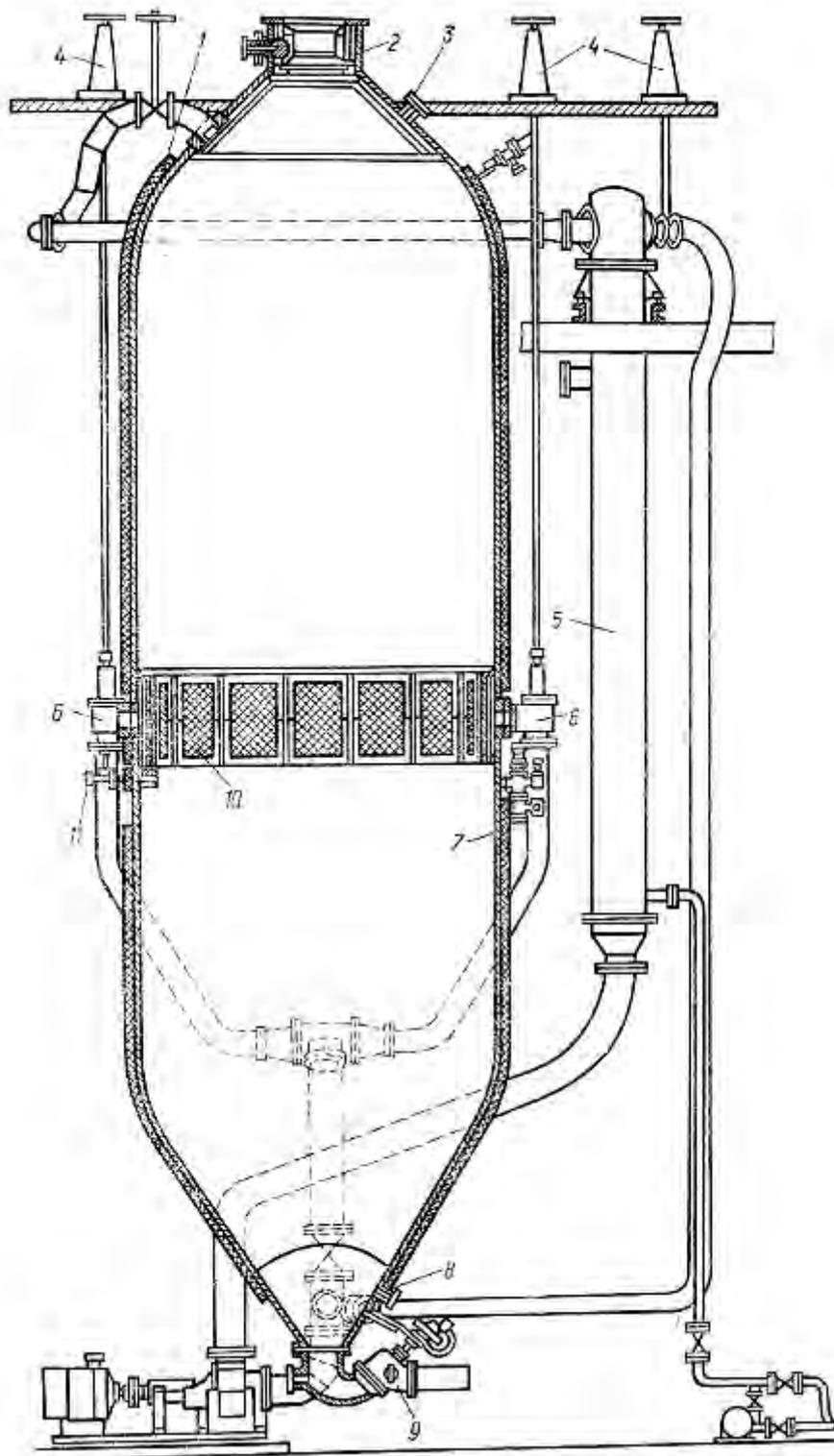


Рис. 1. Технологическая схема потока химикатов при сульфатном способе производства

тростник, солому). Щепу варят с белым щелоком, содержащим в качестве актив-



ного реагента смесь едкого натра и сульфида натрия  $NaOH + Na_2S$  обычно в соотношении 70 % и 30 %. Общая концентрация активной щелочи в белом щелоке составляет  $\approx 10\%$ .

*Рис. 1.2. Котел периодической варки*[1]:

- 1 – корпус котла;
- 2 – верхняя горловина;
- 3 – воздушный штуцер;
- 4 – маховики;
- 5 – подогреватель;
- 6 – заборный штуцер;
- 7 – пробоотборник;
- 8 – штуцер для подачи пара;
- 9 – выдувной клапан;
- 10 – циркуляционная сетка;
- 11 – контрольный штуцер

В процессе варки в варочных котлах из щепы лигнин и другие органические соединения переходят в белый щелок. При этом раствор темнеет, и поэтому щелок, содержащий растворившиеся в нем органические соединения, называют

черным.

После варки в варочных котлах периодического типа целлюлозу направляют на барабанные фильтры, прессы или промывные диффузоры, где отделяют от неё чёрный щелок и промывают по противоточной схеме, подавая на последнюю ступень промывки чистую горячую воду. В установках непрерывной варки основное

количество черного щелока удаляют непосредственно из варочного котла. В прямоточных котлах осуществляется и большая часть промывки. Вне котла осуществляется обычно лишь домывка целлюлозы с использованием чистой горячей воды. В процессе промывки черный щелок стремятся выделить как можно полнее с минимальным разбавлением и максимальной температурой.

Для уменьшения загрязнения труб, насосов, коммуникаций и выпарных аппаратов щелок должен быть максимально очищен от волокна. Его максимальная концентрация не должна превышать 50 мг на литр раствора. Для этого устанавливаются дополнительные фильтры тонкой очистки. Уловленное на них волокно возвращается в поток непромытой целлюлозы или добавляется к выпаренному черному щелоку, подающемуся для сжигания в содорегенерационные котлоагрегаты.

Предварительно укрепленный до 20 ÷ 24 % концентрации сухого вещества раствор, путем добавки к слабому щелоку части крепкого, выпаренного выпарной станцией, проходит стадии мылоотделения и окисления. Отделение мыла производится перед выпариванием и в процессе выпаривания между ступенями выпарной установки. Освобождение щелока от мыла обычно производится в специальных баках-отстойниках с целью устранения пенообразования. Кроме того, сульфатное мыло является ценным побочным продуктом, спрос на который постоянно растет.

Для уменьшения потери серы в цикле и предохранения от загрязнения воздушного бассейна проводят окисление черного щелока. Окисление щелока производится путем продувки его воздухом или кислородом в специальных окислительных установках. В процессе окисления происходит превращение содержащихся в щелоке неустойчивых летучих серосодержащих соединений в устойчивые нелетучие. Укрепленный щелок при продувке воздухом в окислительной установке образует значительно меньше пены, чем слабый. После разрушения образовавшейся в окислительной установке пены черный щелок подается насосом на выпарную станцию.

В современных выпарных установках щелок выпаривается двухстадийно до концентрации сухих веществ 70 ÷ 80 %. С 20 до 55 % - на традиционных выпарных станциях производительностью от 100 т/ч до 600 т/ч по выпаренной влаге, а далее до 80 % в концентраторах и суперконцентраторах до состояния, пригодного к эффективному сжиганию. Ранее выпаривание щелока на выпарных установках производилось до концентрации сухих веществ 45 ÷ 55 %. Дальнейшее уплотнение осуществлялось в газоконтактном испарителе, устанавливаемом непосредственно в газоходе содорегенерационного котлоагрегата. Однако при непосредственном контакте щелока с дымовыми газами в них увеличивалось содержание дурнопахнущих серосодержащих соединений, загрязняющих воздушный бассейн, вследствие чего в настоящее время газоконтактные испарители сняты с эксплуатации.

Далее выпаренный щелок насосами подается на форсунки содорегенерационного котлоагрегата, где сжигается. Для возмещения потерь щелочи в цикле перед сжиганием к щелоку добавляют порошкообразный сульфат натрия  $Na_2SO_4$ . Из-за этого способ получил название "сульфатный".

Сухое вещество черного сульфатного щелока состоит на  $1/3$  из неорганических и на  $2/3$  из органических веществ.

Из неорганических веществ в щелоке присутствуют едкий натр и соли натрия: карбонат, сульфат, тиосульфат и др.

Органическая часть черного щелока представляет собой продукты разрушения древесины.

Низшая теплотворная способность сухого остатка хвойного щелока составляет  $\sim 15000$  кДж/кг, при концентрации около 55 % - 7200 кДж/кг.

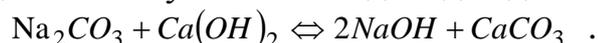
При сжигании черного сульфатного щелока протекают следующие основные химические процессы:

- 1) едкий натр переходит в соду по реакции  $2NaOH + CO_2 = Na_2CO_3 + H_2O$ ;
- 2) большая часть сульфата натрия за счет кокса, образующегося при термическом разложении органических веществ, восстанавливается в сульфид  $Na_2SO_4 + 2C = Na_2S + SO_2$ .

Плав, образующийся на поду топки содорегенерационного котлоагрегата, содержит в качестве основных компонентов карбонат и сульфид натрия, невосстановленный сульфат, а также незначительное количество сульфита и тиосульфата натрия, силикатов и алюминатов кальция, магния, железа и сернистых соединений железа.

Плав с пода топки вытекает через лётки в растворитель плава, представляющий собой закрытый металлический бак с вертикальной мешалкой. В растворитель подают слабый белый щелок из каустизационного отдела. Раствор плава называют зеленым щелоком, так как содержащиеся в нем соединения железа придают ему зеленый цвет.

Для перевода карбоната натрия в активный едкий натр зеленый щелок подвергается каустизации известью при температуре 95 °С. Реакция каустизации медленная и в производственных условиях не доходит до конца:



В результате каустизации получается белый щелок, который направляется на варку.

Осадок, выпадающий при каустизации  $CaCO_3$ , называют каустизационным шламом. Его подвергают обжигу.  $CaCO_3$  разлагается на  $CaO$  и  $CO_2$ . Негашеную известь  $CaO$  переводят в гашеную  $Ca(OH)_2$  и снова используют для каустизации зеленого щелока.

Этим замыкается основной цикл оборота химикатов в сульфатном способе производства.

Указанное описание схемы может дать определенное представление о видах процессов теплообмена и гидродинамики с которыми приходится встречаться при разработке и конструировании теплотехнологических установок целлюлозно-бумажного производства. Основные разделы теплотехнического курса будут изложены в предлагаемом пособии.

## 2. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Перенос теплоты теплопроводностью осуществляется в стенках корпусов технологического оборудования и теплообменных аппаратов, трубопроводов, в стенах и перекрытиях зданий производственных помещений предприятий. Основная цель расчета процессов теплопроводности – на основании определения температурных полей в указанных элементах установок и сооружений рассчитать значения тепловых потоков. Такие расчеты позволяют определить подводимые тепловые мощности к установкам и рассчитать их основные размеры так, чтобы температуры рабочих материалов и оболочек установок не превышали допустимых значений, найти величину и характер температурных напряжений деформаций в элементах машин и механизмов. Распределение температур в неподвижной среде, и в частности в твердых телах, описывается уравнением теплопроводности.

Процессы переноса теплоты осуществляются различным образом в различных условиях и в различных средах. Традиционно, в первую очередь, рассматривается теория теплопроводности твердых тел. Мы приступим к изложению некоторых общих вопросов, которые в равной мере касаются всех видов теплообмена.

### 2.1. Понятие о размерности, единицы измерения, структура функциональных связей между физическими величинами

Величины, числовое значение которых зависит от принятых масштабов, то есть от систем единиц измерения, называются *размерными*, а величины, числовое значение которых не зависит от выбранной системы единиц, называются *безразмерными*. Примерами размерных величин являются длина, время, масса, энергия и многие другие. Примерами безразмерных величин являются углы (в радианах), а также величины отношений одномерных величин – отношение периметра окружности к диаметру (число  $\pi$ ), отношение кинетической энергии к потенциальной, квантовое число и т.д.

Различные физические величины связаны между собой определенными соотношениями. Если часть из них принять за основные и установить для них определенные единицы измерения, то остальные величины можно выразить через них и назвать их производными.

На практике достаточно установить единицы измерения для трех величин, которые могут выбираться по-разному. В настоящее время наиболее распространенной является система единиц СИ (System International). За основные механические единицы в ней приняты метр, килограмм и секунда. Кроме них, в системе содержатся единица силы тока – ампер, единица термодинамической температуры – кельвин (К), единица силы света – кандела и единица количества вещества – моль. Надо заметить, что выбор дополнительных единиц является в значительной степени элементом удобства. Например, поскольку температура является мерой энергии тела, можно было бы использовать для определения температуры уравнение состояния идеального газа  $RT = pv$ .

Поскольку  $R$ - постоянная величина, то  $RT$  могло бы стать мерой нагретости тела и имело бы размерность Дж/кг, то есть энергии на единицу массы. Однако на практике использование температуры значительно удобнее, поскольку  $T$  позволяет выделить тепловые процессы.

В старых системах присутствовала еще и отдельная единица для количества теплоты – калория, но оказалось, что эта величина может быть опущена. При этом формулы термодинамики и газовой динамики упростились, поскольку из них исчезла постоянная - механический эквивалент теплоты.

Выражение производной единицы измерения через основные единицы измерения называется размерностью. В соответствии с английскими названиями основных единиц - длины, массы и времени для их обозначения используются следующие латинские буквы -  $L$ ,  $M$ ,  $T$ . Размерность можно представить в виде степенной формулы:

$$[\varphi] = L^{n_1} M^{n_2} T^{n_3} \theta^{n_4} I^{n_5} j^{n_6} . \quad (2.1)$$

Например, для размерности силы в системе СИ мы будем писать  $[F] = MLT^{-2}$ . Формулы размерности удобны для пересчета числового значения размерной величины при переходе от одной системы единиц к другой.

Размерности физических величин, входящих в формулы, выражающие дополнительные связи, необходимые для описания рассматриваемых процессов, определяются в соответствии с указанными формулами. Так, например, определяются размерности коэффициентов теплопроводности и вязкости из выражений для закона Фурье и закона Ньютона.

В системе СИ (как, впрочем, и в других системах) формулы размерности (2.1) имеют вид степенного одночлена, поскольку такой вид определяется физическим условием, когда отношение двух значений любой производной величины не должно зависеть от выбора масштабов для основных единиц измерения.

Физические закономерности, устанавливаемые теоретически или экспериментально, представляют собой функциональные связи между величинами, характеризующими рассматриваемое явление. Они выражают собой физические факты, которые не должны зависеть от единиц измерения, хотя численные значения самих величин будут, естественно, зависеть от системы единиц. Поэтому функциональные зависимости должны обладать структурой, обеспечивающей выполнение указанного требования.

Рассмотрим некоторые общие характеристики выражений, удовлетворяющих изложенным требованиям.

Пусть мы имеем размерную величину  $a$ , которая является функцией независимых между собой размерных величин  $a = f(a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n)$ . (2.2)

Пусть среди размерных величин  $a_1, a_2, \dots, a_n$  первые  $k$  величин имеют независимые размерности (число основных единиц измерения должно быть  $\geq k$ ). Это означает, что ни одна из первых  $k$  размерностей не может быть выражена через остальные.

Связь между размерными величинами (2.2) может быть представлена в виде связи между безразмерными величинами:

$$P = f(P_1, \dots, P_{n-k}) . \quad (2.3)$$

Таким образом, связь между  $n+1$  размерными величинами можно представить в виде соотношения между  $n + 1 - k$  безразмерными комплексами. Этот вывод известен под названием  $\pi$ -теоремы, или теоремы Букингема.

Очевидно, что чем меньше число параметров, определяющих изучаемую величину, по отношению к числу независимых размерностей, тем проще вести ее исследование. Это, в частности, определяет целесообразность сохранения некоторых дополнительных размерностей без появления дополнительных физических размерных постоянных, о которых упоминалось ранее.

Выше были установлены размерности основных величин, которые определяют процессы теплообмена и тех конечных интегральных величин, которые определяются либо в результате получения решений конкретных задач, либо в результате эксперимента. Для сохранения независимости определяющих (определяющих физическое явление) и определяемых величин (выражающихся через первичные на основании физических законов) от выбора единиц измерения, каждая из этих величин должна войти в некоторые безразмерные комплексы.

На практике, тем не менее, допускается использование размерных выражений для искомых величин. Они могут использоваться лишь в ограниченном интервале изменения входящих в них величин. При этом должно быть указано, в каких единицах подставляются фигурирующие в них аргументы и в каких единицах выражается определяемая величина. Такие выражения постепенно выходят из употребления.

Важно отметить, что если мы даже не вводим таких безразмерных переменных величин при теоретической постановке задачи, то они сами появляются из решения и граничных условий.

К изложенному материалу тесно примыкает теория подобия. Однако авторы сочли более разумным последовательно изложить этот вопрос несколько позже, где его проще будет привязать к конкретным проблемам описания процессов тепло- и массообмена.

## 2.2. Описание процессов теплопроводности

Традиционно начнем наше изложение с теории теплопроводности твердых тел. Прежде всего, определим некоторые основные величины.

**Теплопроводность** – процесс молекулярного переноса теплоты в сплошной среде, обусловленный наличием градиента температуры. Перенос теплоты теплопроводностью в телах происходит в результате последовательного обмена энергией движения структурных частиц от более нагретых к соседним, менее нагретым.

Основной закон теплопроводности - закон Фурье формулируется следующим образом: вектор плотности теплового потока, передаваемого теплопроводностью, пропорционален вектору градиента температуры в той же точке и тот же момент времени и выражается формулой :

$$q = - \lambda \text{ grad}T . \quad (2.4)$$

Множитель пропорциональности  $\lambda$  называется **коэффициентом теплопроводности** и является одним из физических параметров, характеризующих данное вещество. Из формулы (2.4) следует, что размерность коэффициента теплопроводности  $[\lambda] = \text{Вт} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{К}$ . Знак “-“ в (2.4) учитывает противоположное направление вектора  $q$  и вектора  $\text{grad } T$ .



Рис. 2.1. Ж.Б. Фурье

Ж. Б. Фурье (1768-1830) – французский математик и физик. Он вошел в историю как основоположник математической теории теплопередачи. Ж.Б. Фурье жил в бурную эпоху Великой французской революции и наполеоновских войн. Он занимал общественные должности, был мэром Гренобля, участвовал в египетском походе Наполеона. Его научная деятельность была весьма разнообразна. Но наиболее известными его работами являются формулирование закона передачи тепла и вывод уравнения теплопроводности, которое сейчас носит название уравнения Фурье, разработка метода представления функций в виде тригонометрических рядов, которые мы сейчас называем рядами Фурье, и метода разделения переменных, который был долгое время основным методом решения уравнений в частных производных.

Коэффициенты теплопроводности для различных материалов, в основном, определяются экспериментальным путем, например, с использованием формулировки закона Фурье:

$$\lambda = \frac{|q|}{|\text{grad}T|} \quad (2.5)$$

Согласно (2.5)  $\lambda$  численно равен количеству теплоты, которое проходит в единицу времени через единицу изотермической поверхности при  $\text{grad}T = 1$ . Однако существуют и другие способы, в которых  $\lambda$  определяется непрямым методом. Например, его можно определить при исследовании нестационарных явлений, где сначала определяется коэффициент температуропроводности, из которого, зная объемную теплоемкость среды, можно определить  $\lambda$ .

При наличии теплообмена тела в различных точках имеют различную температуру. Поэтому для описания температурного поля необходимо знать зависимость  $\lambda$  от температуры. опыты показывают, что для многих материалов эта зависимость близка к линейной:

$$\lambda = \lambda_0 [1 + b (T - T_0)], \quad (2.6)$$

где  $\lambda_0$  – коэффициент теплопроводности при  $T_0$ ;  $b$  – опытная постоянная.

## 2.3. Коэффициенты теплопроводности различных веществ

### 2.3.1. Коэффициент теплопроводности газов

Согласно кинетической теории газ при обычных давлениях и температурах рассматривается как совокупность молекул, находящихся в хаотическом движении и сталкивающихся между собой. При элементарном рассмотрении теплопроводность определяется соотношением

$$\lambda = \frac{\bar{w} \cdot l \cdot c_v \cdot \rho}{3}, \quad (2.7)$$

где  $\bar{w}$  – средняя скорость теплового движения молекул газа;  $l$  – длина свободного пробега молекул;  $c_v$  – теплоемкость при  $v = const$ ;  $\rho$  – плотность.

При увеличении давления  $\rho$  увеличивается, а  $l$  – уменьшается. При этом произведение  $l\rho$  постоянно. Поэтому  $\lambda$  остается постоянным при изменении давления. Однако это утверждение справедливо лишь при невысоких давлениях. С ростом давления свойства газов все более отклоняются от идеального, и теплопроводность начинает возрастать. С увеличением температуры  $\bar{w}$  и  $c_v$  – увеличиваются. Поэтому  $\lambda$  также увеличивается.

Аналогичная формула получается и для вязкости. Отличие состоит лишь в множителе  $c_v$ . При этом связь между коэффициентами теплопроводности и вязкости выражается формулой  $\lambda = c_v \mu$ , где  $\mu$  – коэффициент вязкости.

Более тщательное рассмотрение процессов передачи энергии и импульса показывает, что на самом деле в формуле (2.7) для  $\lambda$  появляются дополнительные численные множители. В частности, для модели идеального газа, молекулы которого представляют собой твердые шарики (одноатомный газ), множитель оказывается равным 2,5. Для многоатомных газов этот множитель зависит от отношения  $c_p / c_v = k$ . В этом случае в формуле (2.7) появляется множитель, который обычно называют поправкой Эйкена по фамилии ученого, который получил ее теоретическим путем

$$\lambda = \frac{9k - 5}{4} c_v \mu. \quad (2.8)$$

Для газов  $\lambda$  находится в интервале 0,006–0,6 Вт/(м·К). При этом максимальные величины достигаются при высоких температурах.

Для водяного пара, углекислоты и некоторых других газов, поведение которых существенно отличается от идеальных, отклонения  $\lambda$  в формуле (2.8) имеют место уже при достаточно низких давлениях.

### 2.3.2. Коэффициент теплопроводности жидкостей

Основным механизмом передачи теплоты в жидкости является фононная теплопроводность. Этот механизм справедлив также для диэлектриков. Смысловое содержание фононной модели будет пояснено ниже.

Теплопроводности жидкости можно оценить с помощью уравнения:

$$\lambda = A \frac{c_p \cdot \rho^{4/3}}{M^{1/3}}, \quad (2.9)$$

где  $M$  – молекулярная масса;  $A$  – коэффициент, пропорциональный скорости распространения упругих волн в жидкости, слабо зависящий от температуры. Для оценочных расчетов его принимают равным  $4,26 \cdot 10^{-8}$ . Так как плотность жидкостей  $\rho$  убывает с повышением температуры, то при  $M = \text{const}$ ,  $\lambda$  – убывает. Исключения составляют вода и глицерин. Теплопроводность жидкостей находится в интервале  $0,07 - 0,7 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$ . С возрастанием давления  $\lambda$  увеличивается. В принципе, интервал относительного изменения теплопроводности для конкретной жидкости, в отличие от газа, невелик.

### 2.3.3. Коэффициент теплопроводности металлов

В металлах транспорт теплоты осуществляется двумя механизмами. Это упомянутый выше фононный механизм и свободные электроны, которые движутся из областей более нагретых в менее нагретые и обратно. В первом случае они отдают энергию, во втором – отбирают ее. С повышением температуры в металлах усиливается рассеивание электронов. Поэтому коэффициент теплопроводности уменьшается. При наличии примесей теплопроводность металлов убывает, что определяется структурными неоднородностями металла и связанным с этим увеличением рассеивания электронов. Так, для чистой меди  $\lambda = 396 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$ , а для меди со следами мышьяка –  $142 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$ . Коэффициенты теплопроводности сплавов и диэлектриков с увеличением температуры увеличиваются.

### 2.3.4. Коэффициент теплопроводности строительных материалов

При разработке строительных материалов большое значение имеет обеспечение требуемых при их использовании физических (в большинстве случаев теплоизоляционных) свойств. Многие строительные и теплоизоляционные материалы имеют пористое строение. Поэтому коэффициент теплопроводности  $\lambda$  сильно зависит от их плотности, поскольку поры таких тел заполняют воздух, теплопроводность которого низка. Коэффициент теплопроводности пористых материалов также в значительной степени зависит от их влажности. Так, теплопроводность влажного кирпича –  $1 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$  при  $\lambda$  воды –  $0,6$ , а сухого кирпича –  $0,35 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$ . У строительных материалов коэффициент теплопроводности  $\lambda = 0,023 - 2,9 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$ . Материалы, имеющие  $\lambda < 0,25 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$ , обычно относят к **теплоизоляционным**.

Ниже, на рис. 2.2 приводятся данные изменения теплопроводности для различных материалов и полученных искусственным образом структур. К последним относятся, в частности, различные искусственно созданные структуры, обладающие повышенными теплоизоляционными свойствами или аномально высокой теплопроводностью (например, тепловые трубы).

Перед тем, как перейти к решению конкретных задач теплопроводности, подчеркнем следующее обстоятельство. Мы будем пользоваться, так называемой, концепцией **сплошной среды** или **континуума**. Это означает, что мы игнорируем реальную структуру вещества и ее влияние на физические свойства среды. Ограничения, накладываемые таким подходом, будут рассмотрены ниже.

## 2.4. Дифференциальное уравнение теплопроводности

Для решения задач, связанных с нахождением температурного поля, необходимо иметь дифференциальное уравнение, описывающее процесс теплопроводности. Интегрируя это уравнение, можно получить описание температурного поля для всего рассматриваемого промежутка времени. Это дифференциальное уравнение также было получено Ж.Б.Фурье и носит его имя. Ниже приводится вывод уравнения Фурье в максимально компактном виде. Большинство уравнений, используемых при описании процессов тепло- и массопереноса, являются уравнениями сохранения некоторой физической величины, и поэтому формы их вывода также близки между собой. Приведенный ниже вывод можно рассматривать как пример вывода уравнений подобного типа.

### 2.4.1. Вывод дифференциального уравнения теплопроводности

Для вывода этого уравнения в общем виде воспользуемся уравнениями баланса теплоты в интегральной форме (что соответствует уравнению, выражающему первое начало термодинамики, в предположении, что совершаемая работа равна нулю) и теоремой Остроградского-Гаусса. Такой подход пригоден для поля любой скалярной величины, В данном случае мы рассматриваем поле температур. Выделим в рассматриваемом теле некоторый элементарный объем  $V$ , имеющий наружную поверхность  $F$ , и рассмотрим тепловой баланс указанного объема, отнесенный к единице времени

$$\int_V Q_v dV = \int_V q_v dV - \int_F q_n dF \quad . \quad (2.10)$$

Левая часть уравнения представляет собой количество теплоты, попадающее в объем  $V$  в единицу времени, а правая часть – количество теплоты, попадающее в объем за счет внутреннего тепловыделения с объемной плотностью  $q_v$ , и количество теплоты, покидающее объем за счет его термического взаимодействия со смежными объемами. Здесь  $q_n$  - плотность теплового потока по нормали к поверхности  $F$ . Согласно теореме Остроградского-Гаусса интеграл по поверхности может быть преобразован в объемный по формуле

$$\int_V \operatorname{div} q \cdot dV = \int_F q_n dF \quad . \quad (2.11)$$

Формула (2.11) может рассматриваться как определение дивергенции, если объем  $V$  устремить к нулю

$$\operatorname{div} q = \lim_{V \rightarrow 0} \left( \frac{1}{V} \int_F q_n \cdot dF \right) \quad . \quad (2.12)$$

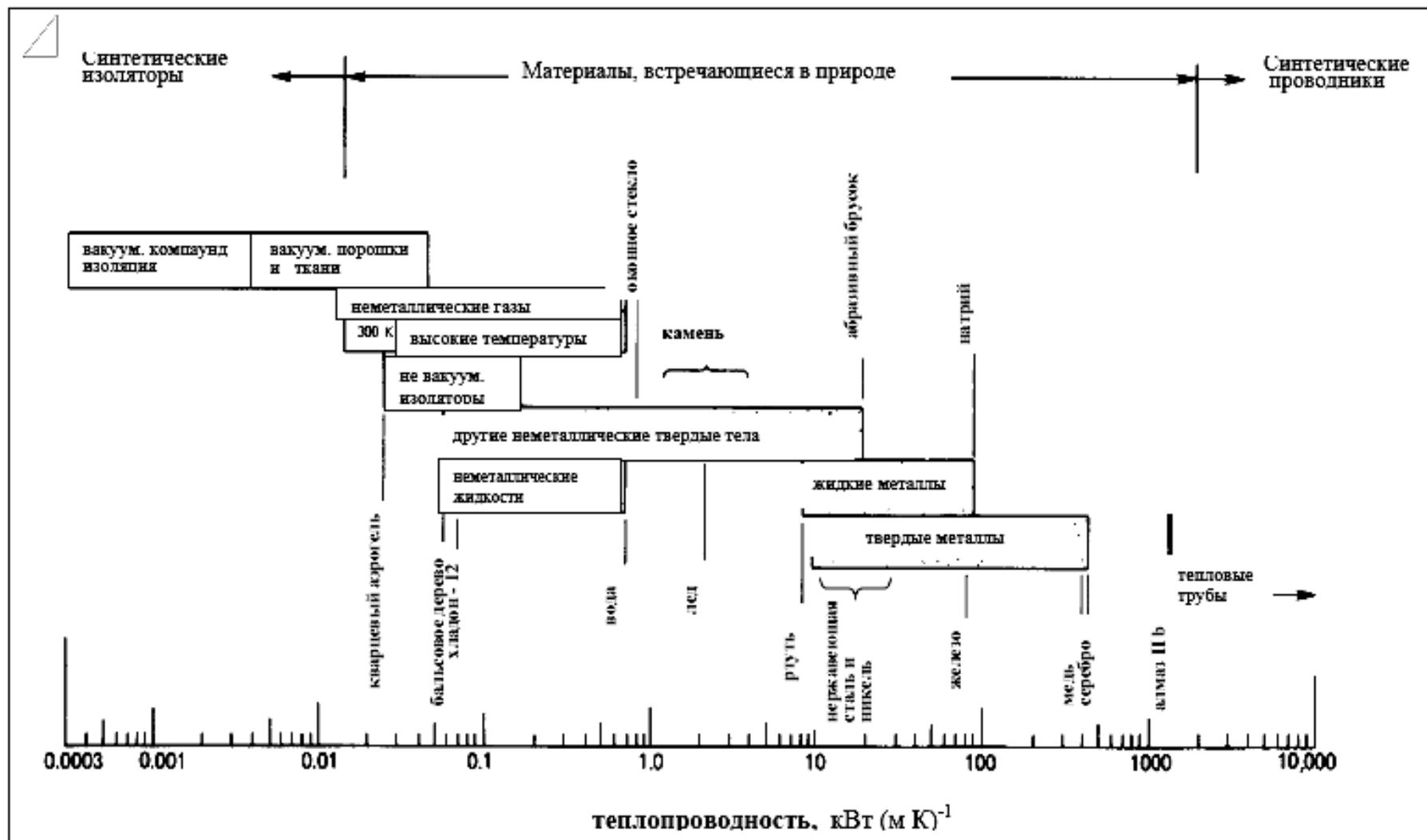


Рис. 2.2. Изменения теплопроводности для различных материалов

Зависимость (2.12) используется при получении конкретных формул для дивергенции в различных системах координат. Таким образом, дивергенция является пределом изменения количества некоторой интенсивной величины в данном объеме за счет ее переноса, отнесенного к этому объему. В отсутствие источников или стоков этой величины и при условии стационарности процесса, дивергенция будет равна нулю. Тогда мы получим

$$\int_V (Q_V - q_V + \text{div}q) dV = 0 \quad (2.13)$$

Откуда следует, что

$$Q_V - q_V + \text{div}q = 0,$$

где  $Q_V$  - скорость изменения энтальпии,  $Q_V = C \cdot \rho \frac{\partial T}{\partial \tau}$ .

Используя уравнение Фурье и имея в виду, что для твердых тел или жидкостей уточнение смысла теплоемкости не имеет значения, поскольку для них практически  $c_p = c_v$ . окончательно получим

$$c \cdot \rho \cdot \frac{\partial T}{\partial \tau} = \text{div}(\lambda \cdot \text{grad}T) + q_V \quad (2.14)$$

Формула (2.14) - общий вид **дифференциального уравнения теплопроводности**. Если теплопроводность  $\lambda$  постоянна, то уравнение может быть переписано в форме

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \cdot \nabla^2 T + \frac{q_V}{C \cdot \rho}, \quad (2.15)$$

где  $a = \frac{\lambda}{c \cdot \rho}$ ,  $[M^2/c]$  - коэффициент температуропроводности, который характеризует скорость изменения температурного поля и является мерой теплоинерционных свойств тела. При росте  $\lambda$  инерционность уменьшается, а с ростом объемной теплоемкости  $c \cdot \rho$  - увеличивается. Наименьшую тепловую инерционность имеют высокотеплопроводные металлы, например, медь и алюминий.

Поясним смысл выражения  $\nabla^2$  в уравнении (2.15). Оператор  $\nabla$  имеет следующий вид:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k,$$

здесь  $i, j, k$  - орты (единичные векторы) координатных осей  $x, y, z$ . Будучи примененным к скалярной функции  $T$ , оператор дает градиент  $T$ . Скалярное произведение  $\nabla \nabla$ , иначе записываемое как  $\nabla^2$ , по определению скалярного произведения векторов дает нам выражение  $\nabla^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ , которое носит название оператора Лапласа или лапласиана. Соответственно выражение  $\nabla^2 T$  - это лапласиан  $T$ .

Для справки приведем здесь формулы для лапласиана  $T$  в основных системах координат:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \nabla^2 T \text{ - декартовы координаты;}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \nabla^2 T \text{ - цилиндрические координаты;}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial T}{\partial R} + \frac{\partial^2 T}{\partial \vartheta^2} + \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \frac{\partial T}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} = \nabla^2 T \text{ - сферические координаты.}$$

В твердых телах и неподвижных жидкостях единственным механизмом передачи теплоты является ее распространение в соответствии с законом Фурье:

$$q = -\lambda \operatorname{grad} T, \text{ а } C_p \approx C_v = C.$$

В декартовых координатах уравнение (2.15) принимает вид

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\lambda}{c \cdot \rho} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{q_v}{c \cdot \rho}. \quad (2.16)$$

Если система тел не содержит внутренних источников теплоты  $q_v=0$ , то

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \cdot \nabla^2 T. \quad (2.17)$$

При стационарном состоянии температурного поля при наличии внутренних источников уравнение (2.16) запишется как

$$\nabla^2 T + \frac{q_v}{\lambda} = 0 \text{ - уравнение Пуассона.} \quad (2.18)$$

При отсутствии внутренних источников  $q_v = 0$  и стационарном режиме (2.18) запишется как

$$\nabla^2 T = 0 \text{ - уравнение Лапласа.} \quad (2.19)$$

Прежде чем продолжить изложение коснемся одного практически важного вопроса – это учет зависимости коэффициента теплопроводности  $\lambda$  от температуры. Как в свое время показал Кирхгоф, для стационарных условий существует достаточно простой метод, позволяющий учесть температурную зависимость  $\lambda$ .

Рассмотрим уравнение теплопроводности (2.16) для стационарных условий в декартовых координатах

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] + q_v = 0. \quad (2.20)$$

Пусть нам известна функциональная зависимость  $\lambda = \lambda(T)$ . Введем новую функцию  $U$ , определяемую интегралом

$$U = \int_0^T \lambda(u) du \quad (2.21)$$

Дифференцируя этот интеграл по  $x, y, z$  получим

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \lambda \frac{\partial T}{\partial x} ; \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \lambda \frac{\partial T}{\partial y} ; \quad \frac{\partial U}{\partial z} = \lambda \frac{\partial T}{\partial z} . \quad (2.22)$$

Подставляя полученные выражения (2.22) в уравнение (2.21), приходим к уравнению Лапласа относительно  $U$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + q_v = 0 \quad (2.23)$$

Функция  $U$  носит название функции Кирхгофа.



Рис. 2.3. Г.Р. Кирхгоф

Густав Роберт Кирхгоф (1824 -1887) - немецкий физик. Наибольшую известность имеют его работы по исследованию излучения. В 1859 г. Кирхгоф занялся анализом связи между процессами испускания и поглощения света. Совместно с Бунзеном создали спектральный анализ и открытие новых элементов – рубидия и цезия. В этом же году он сделал сообщение об открытии закона теплового излучения, согласно которому отношение испускательной способности тела к поглотительной одинаково для всех тел при одной и той же температуре (закон Кирхгофа). В 1862 г. он ввел понятие «абсолютно чёрного тела» и предложил его модель – полость с небольшим отверстием. Разработка этой проблемы привела к созданию квантовой теории излучения. Наряду с этим Кирхгоф внес большой вклад в математическую физику. В частности, ему принадлежит идея изложенного здесь преобразования.

После необходимой трансформации граничных условий можно решить уравнение (2.23), а затем перейти от функции  $f(U)$  к функции  $f(T)$  путем решения относительно  $T$  уравнения (2.19). Ниже будет дана иллюстрация использования функции Кирхгофа для решения задачи теплопроводности с переменным  $\lambda$ .

Далее мы будем рассматривать решения уравнения Фурье лишь для простейших случаев, с целью их достаточно свободного восприятия в процессе изучения предмета. Прежде всего, рассмотрим некоторые понятия, которые будут способствовать расширению наших возможностей при построении решений разнообразных задач.

#### 2.4.2. Условия однозначности для процессов теплопроводности

Явления теплопроводности описываются уравнением теплопроводности (2.14). Для получения конкретного решения по интересующей задаче необходимо ее конкретизировать, то есть к дифференциальному уравнению теплопроводности требуется добавить условия однозначности или, другими словами, дать мате-

математическое описание всех частных особенностей рассматриваемого процесса, включающих в себя:

- **геометрические** – определяют форму и размеры тела, в котором протекает процесс;
- **физические** – характеризуют физические свойства среды и тела, то есть определяют числовые значения всех физических параметров тела, входящих в дифференциальное уравнение;
- **временные** (начальные) – определяют распределение температур в начальный момент времени;
- **граничные** – определяют взаимодействие тела с окружающей средой и могут быть заданы следующим образом:

а) **граничные условия первого рода** характеризуют распределение температуры на поверхности тела для каждого момента времени:

$$T_w = f(x, y, z, \tau);$$

б) **граничные условия второго рода** - распределение плотности теплового потока на поверхности тела:

$$q_w = f(x, y, z, \tau);$$

в) **граничные условия третьего рода** - задаются температура окружающей среды и закон теплообмена между средой и поверхностью тела:

$$q = -\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial n} \right)_w = \alpha (T_f - T_w);$$

г) **граничные условия четвертого рода** характеризуются равенством тепловых потоков, проходящих через поверхность контакта двух тел:

$$\lambda_1 \left| \frac{\partial T}{\partial n} \right|_1 = \lambda_2 \left| \frac{\partial T}{\partial n} \right|_2.$$

## 2.5. Понятие о термических сопротивлениях

Слово «теплопередача» определяет смысл рассматриваемых процессов: условия перемещения теплоты в пространстве. Это перемещение обуславливается наличием температурных градиентов и может происходить в различных средах. Рассматривая граничные условия для уравнения теплопроводности, описывающего перемещение теплоты в твердом теле, в большинстве практических случаев понимаем его как некоторое препятствие этому перемещению. Общая схема в этом случае такова: 1 - 2 - 3.

Теплота из области 1 должна перейти в область 3, преодолев термическое сопротивление твердого тела 2. Граничные условия третьего рода отражают две стадии переходов 1-2 и 2-3 в условиях непрерывности потока теплоты.

Значение коэффициента теплоотдачи  $\alpha$  определяет условия теплообмена на границе 1 – 2, в том числе величину разности температур среды 1 и температуры на границе 1, 2, необходимой для передачи потока теплоты  $Q_{1,2}$ . Очевидно, что при неограниченном росте отношения  $\frac{\alpha}{\lambda}$  ( $\frac{\alpha}{\lambda} \rightarrow \infty$ ) разность стремится к нулю

$((T_1 - T_{1,2}) \rightarrow 0)$ . При этих условиях заданная температура среды  $T_1$  совпадает с температурой на границе  $T_{1,2}$ , то есть мы приходим к граничным условиям первого рода. Если такое же условие имеет место и на границе 2, 3, то сопротивление передаче теплоты определяется свойствами тела 2. Найдя решение уравнения теплопроводности мы сможем определить необходимую разность температур  $T_{1,2}$  и  $T_{2,3}$ . Отношение этой разности к потоку теплоты  $Q_{1,2}$  назовем термическим сопротивлением  $R_{m2}$   $R_{T2} = \frac{T_{1,2} - T_{2,3}}{Q}$ .  $Q = Q_{1,2} = Q_{2,3}$ .

Без учета равенства температуры среды и граничной температуры, имеем

$$Q = \alpha_1(T_1 - T_{1,2})F_{1,2} = \alpha_3(T_3 - T_{2,3})F_{2,3} \quad (2.24)$$

Вместе с тем, можно записать

$$(T_1 - T_{1,2}) + (T_{1,2} - T_{2,3}) + (T_3 - T_{2,3}) = Q (F_{1,2}/\alpha_1 + F_{2,3}/\alpha_3 + R_{m2}) = T_1 - T_3$$

Таким образом, мы связали поток теплоты с разностью температур сред при постоянной температуре вдоль их границ. Отношения  $F_{1,2}/\alpha_1$  и  $F_{2,3}/\alpha_3$  можно назвать термическими сопротивлениями теплоотдачи.

## 2.6. Теплопроводность плоской стенки

### 2.6.1. Граничные условия первого рода

Рассмотрим однородную, изотропную, плоскую пластину, рис. 2.4, толщина которой значительно меньше длины и ширины. На поверхностях пластины поддерживаются постоянные температуры  $t_{c1}$  и  $t_{c2}$ . Теплопроводность материала равна постоянной величине  $\lambda$ . Очевидно, что для рассматриваемых условий плотность теплового потока через пластину постоянна.

Исходя из условий задачи уравнение теплопроводности будет иметь следующий вид:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \quad (2.25)$$

Граничные условия первого рода заданы следующим образом:

$$\text{при } x = 0 \rightarrow T = t_{c1}; \quad \text{при } x = \delta \rightarrow T = t_{c2}.$$

Интегрируя (2.25) по  $x$ , получим  $dt = C_1 dx$ ,

$$t(x) = C_1 x + C_2 \quad (2.26)$$

Из уравнения (2.26) следует, что при  $\lambda = const$  температура в стенке меняется по линейному закону.

Постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  определяем из граничных условий:

$$x = 0; \quad C_2 = T_{c1}.$$

$$x = \delta; \quad t_{c2} = C_1 \delta + t_{c1}.$$

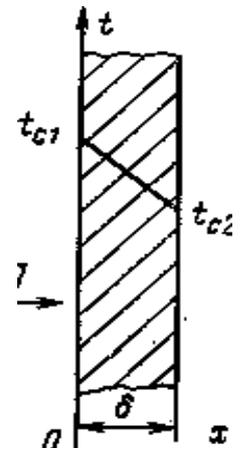


Рис. 2.4

Распределение температуры в плоской стенке

$$C_1 = \frac{t_{c2} - t_{c1}}{\delta} . \quad (2.27)$$

Подставив  $C_1$  в формулу (2.26), получим

$$t_{(x)} = t_{c1} - \frac{t_{c1} - t_{c2}}{\delta} x . \quad (2.28)$$

Используя закон Фурье, находим плотность теплового потока:

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\lambda}{\delta} (t_{c1} - t_{c2}) . \quad (2.29)$$

Из (2.29) следует, что количество теплоты, проходящее через единицу поверхности стенки в единицу времени, прямо пропорционально  $\lambda$ , разности температур на наружных поверхностях стенки и обратно пропорционально толщине стенки. Величина  $\frac{\lambda}{\delta}$  называется **тепловой проводимостью**, а обратная ей -  $\frac{\delta}{\lambda}$  - **термическим сопротивлением стенки**. Последнее представляет собой падение температуры в стенке на единицу плотности теплового потока.

Перепишем (2.29) в виде

$$\frac{q}{\lambda} = \frac{t_{c1} - t_{c2}}{\delta} .$$

Заметим, что в данном случае не было необходимости записывать дифференциальное уравнение (2.19), поскольку в одномерном случае и в отсутствие внутреннего тепловыделения тепловой поток может быть лишь постоянным. Плотность теплового потока должна удовлетворять закону Фурье, а учитывая его постоянство, производную можно заменить отношением разностей

$$q = const = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\lambda}{\delta} (t_{c1} - t_{c2}) . \quad (2.30)$$

Распределение температуры дается отрезком прямой, соединяющей точки  $T(0)=T_{c1}$  и  $T(\delta)=T_{c2}$ . Общее количество теплоты  $Q_\tau$ , которое передается через стенку за промежуток времени  $\tau$ , определяется выражением:

$$Q_\tau = q \cdot F \cdot \tau = \frac{\lambda}{\delta} (t_{c1} - t_{c2}) F \cdot \tau . \quad (2.31)$$

Рассмотрим теплопроводность многослойной стенки, показанной на рис.2.5 и состоящей из  $n$  слоев. Полагаем, что поверхности слоев идеально контактируют, поэтому температура соприкасающихся поверхностей одинакова. При стационарном режиме тепловой поток, проходящий через любую изотермическую поверхность неоднородной стенки, один и тот же. Тогда на основании (2.30):

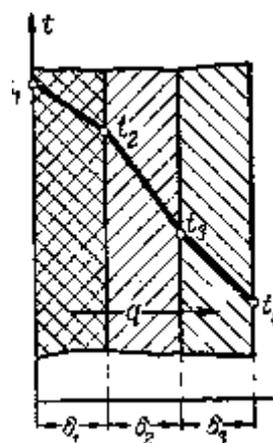


Рис. 2.5. Многослойная плоская стенка

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{\lambda_1}{\delta_2} (t_1 - t_2) \\ q &= \frac{\lambda_2}{\delta_2} (t_2 - t_3) \\ q &= \frac{\lambda_3}{\delta_3} (t_3 - t_4) \end{aligned} \right\} \cdot \quad (2.32)$$

Изменение температуры в каждом слое равно:

$$\left. \begin{aligned} t_1 - t_2 &= q \frac{\delta_1}{\lambda_1} \\ t_2 - t_3 &= q \frac{\delta_2}{\lambda_2} \\ t_3 - t_4 &= q \frac{\delta_3}{\lambda_3} \end{aligned} \right\} \cdot \quad (2.33)$$

Складывая левые и правые части системы (2.33), получим

$$q (\delta_1 / \lambda_1 + \delta_2 / \lambda_2 + \delta_3 / \lambda_3) = t_1 - t_4$$

или

$$q = \frac{t_1 - t_4}{\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{\delta_3}{\lambda_3}} \cdot \quad (2.34)$$

Для многослойной стенки, состоящей из  $n$  слоев по аналогии получим

$$q = \frac{t_1 - t_{n+1}}{\sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i}} \cdot \quad (2.35)$$

где  $n$  – количество слоев в стенке.

Величина  $\sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i}$  – **полное термическое сопротивление теплопроводности многослойной стенки**, равное сумме термических сопротивлений всех слоев.

Из рассмотрения многослойной стенки как однородной и однослойной толщиной  $\sum_{i=1}^n \delta_i$  выводится **эквивалентный коэффициент теплопроводности  $\lambda_{\text{экв}}$  многослойной стенки**. Он равен коэффициенту теплопроводности однородной стенки, толщина которой равна толщине многослойной, а термическое сопротивление равно термическому сопротивлению рассматриваемой многослойной стенки:

$$q = \frac{\lambda_{\text{экв}}}{\sum_{i=1}^n \delta_i} (t_1 - t_{n+1}) \cdot$$

Тогда

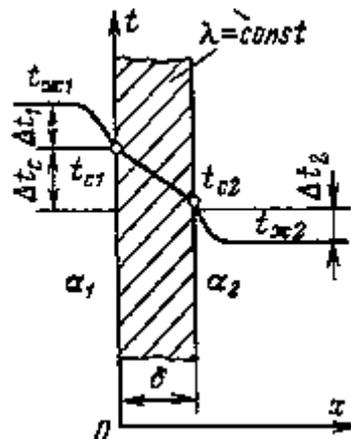
$$\frac{\sum_{i=1}^n \delta_i}{\lambda_{\text{экв}}} = \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i} \rightarrow \lambda_{\text{экв}} = \frac{\sum_{i=1}^n \delta_i}{\sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i}} . \quad (2.36)$$

Из (2.36) следует, что  $\lambda_{\text{экв}}$  зависит только от термических сопротивлений и толщины отдельных слоев.

### 2.6.2. Граничные условия третьего рода для однослойной пластины

Передача теплоты от одного теплоносителя к другому через разделяющую их твердую стенку называется **теплопередачей**. Это сложный теплообмен, включающий теплоотдачу от горячего теплоносителя к стенке, теплопроводность внутри стенки и теплоотдачу от стенки к холодному теплоносителю.

Пусть задана плоская однородная стенка (рис. 2.6) толщиной  $\delta$  значительно меньшей высоты в стационарном режиме с коэффициентом теплопроводности  $\lambda$ , температурами теплоносителей  $t_{ж1}$  и  $t_{ж2}$



и коэффициентами теплоотдачи  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . При заданных условиях необходимо найти тепловой поток от горячей жидкости к холодной и температуры на поверхности стенки. Плотность теплового потока от горячего теплоносителя к стенке определяется уравнением Ньютона – Рихмана:

$$q = \alpha_1 (t_{ж1} - t_{c1}) .$$

При стационарном режиме эта же плотность теплового потока, обусловленная теплопроводностью внутри твердой стенки, определяется уравнением (2.29):

$$q = \lambda / \delta (t_{w1} - t_{w2}) .$$

Эта же плотность теплового потока от стенки к холодному теплоносителю определяется уравнением Ньютона – Рихмана:

$$q = \alpha_2 (t_{c2} - t_{ж2}) .$$

Используя проведенные выкладки в 2.6.1, по аналогии можно записать результат

$$q = \frac{T_{ж1} - T_{ж2}}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}} = K (t_{ж1} - t_{ж2}) , \quad (2.37)$$

где

$$K = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}} - \text{коэффициент теплопередачи.} \quad (2.38)$$

Рис. 2.6. Теплопередача через плоскую стенку

$K$  – численно равен количеству теплоты, которое передается через единицу поверхности стенки в единицу времени от горячего теплоносителя к холодному при разности температур между ними в один градус.

Поскольку граничные поверхности одинаковы  $F_{1,2} = F_{2,3}$ , то  $Q = q F$ .

Температура на границе любых двух слоев определяется по уравнению

$$t_{c(i+1)} = t_{жс1} - q \left( \frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i} \right). \quad (2.39a)$$

Преобразуем выражение (2.38), вынося за скобку термическое сопротивление стенки и вводя безразмерное число Био  $Bi = \frac{\alpha \delta}{\lambda}$ . Тогда получим

$$R = \frac{1}{K} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} = \frac{\delta}{\lambda} \left( \frac{\lambda}{\delta \cdot \alpha_1} + 1 + \frac{\lambda}{\delta \cdot \alpha_2} \right) = \frac{\delta}{\lambda} \left( \frac{1}{Bi_1} + 1 + \frac{1}{Bi_2} \right). \quad (2.39)$$

## 2.7. Передача теплоты через цилиндрическую стенку

### 2.7.1. Граничные условия первого рода

Рассмотрим тонкостенную трубу (рис. 2.7) с внутренним диаметром  $d_1 = 2 r_1$  и наружным  $d_2 = 2 r$ . На поверхностях стенки заданы постоянными температуры  $t_1$  и  $t_2$ . Теплопроводность материала стенки постоянна. Вертикальная ось  $OZ$  совмещена с осью трубы.

Труба задана тонкостенной. Поскольку условия на поверхностях трубы постоянны по полярному углу  $\varphi$ , то температура меняется только в радиальном направлении, а изотермические поверхности – цилиндрические, имеют с трубой общую ось, то второй оператор Лапласа дифференциального уравнения теплопроводности в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} = 0. \quad (2.40)$$

В данном случае постоянным является тепловой поток в радиальном направлении и, следовательно,

$$q_r = 2 \pi r q = \text{const}.$$

Поскольку  $q$  удовлетворяет закону Фурье, то

$$r \cdot \lambda \frac{dt}{dr} = C; \quad \frac{dt}{dr} = \frac{C}{\lambda \cdot r}. \quad (2.41)$$

Проинтегрируем дифференциальное уравнение (2.41). Пусть  $C_1 = C / \lambda$ ,

$$dt = C_1 \frac{dr}{r} \quad \text{или} \quad t = C_1 \ln r + C_2. \quad (2.42)$$

Из (2.42) видно, что в отличие от плоской пластины распределение температуры в цилиндрической стенке носит логарифмический, а не линейный характер.

Константы  $C_1, C_2$  легко определить из граничных условий:

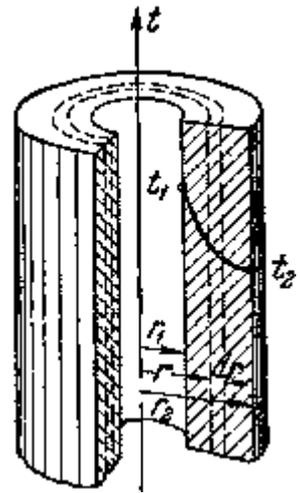


Рис. 2.7. Однородная цилиндрическая стенка

$$t_1 = C_1 \ln r_1 + C_2; \quad t_2 = C_1 \ln r_2 + C_2 .$$

Отсюда находим  $C_1$ :

$$C_1 = \frac{t_1 - t_2}{\ln r_1 / r_2} . \quad (2.43)$$

Подставив  $C_1$  в (2.42), получим

$$T_1 = \frac{t_1 - t_2}{\ln r_1 / r_2} \ln r + C_2, \quad \text{откуда} \quad C_2 = t_1 - (t_1 - t_2) \frac{\ln r_1}{\ln r_1 / r_2} . \quad (2.44)$$

Уравнение температурной кривой  $t(r)$  принимает вид

$$\begin{aligned} t &= (t_1 - t_2) \frac{\ln r}{\ln r_1 / r_2} + t_1 - (t_1 - t_2) \frac{\ln r_1}{\ln r_1 / r_2} = t_1 + (t_1 - t_2) \left( \frac{\ln r}{\ln r_1 / r_2} - \frac{\ln r_1}{\ln r_1 / r_2} \right) \\ &= t_1 - (t_1 - t_2) \frac{\ln r / r_1}{\ln r_2 / r_1} = t_1 - (t_1 - t_2) \frac{\ln d / d_1}{\ln d_2 / d_1} . \end{aligned} \quad (2.45)$$

Пусть  $Q$  - количество теплоты, передаваемое через участок трубы длиной  $l$ . Тогда  $Q = -\lambda \frac{dT}{dr} F$ , где  $F = 2\pi r l$  - площадь цилиндрической поверхности радиуса  $r$ . Проведя необходимые подстановки, получим

$$Q = -\lambda \frac{C_1}{r} F = -\frac{(T_1 - T_2) \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot l}{\ln r_1 / r_2 \cdot r} = \frac{2\pi \cdot \lambda \cdot l}{\ln r_2 / r_1} (T_1 - T_2) . \quad (2.46)$$

Тепловой поток в (2.46) может быть отнесен либо к единице внутренней, либо внешней поверхности, что даст отличные друг от друга результаты, поскольку он, естественно, зависит от радиуса.

С целью унификации отнесем тепловой поток к единице длины трубы

$$\frac{Q}{l} = q_\ell = \frac{\pi(t_1 - t_2)}{\frac{1}{2\lambda} \ln d_2 / d_1} , \quad (2.47)$$

Тепловой поток, отнесенный к единице длины трубы, называется **линейной плотностью теплового потока**. Как видно из (2.47),  $q_\ell$  зависит лишь от отношения  $d_2/d_1$  и теплопроводности материала трубы. Полученный результат имеет большое практическое значение, поскольку цилиндрическая труба является наиболее распространенным элементом теплообменного оборудования.

### 2.7.2. Граничные условия третьего рода

Для определения температурного напора между теплоносителями, учитывая выражения закона Ньютона-Рихмана для обеих поверхностей и по аналогии с 2.6.1, сразу получим

$$t_{ж1} - t_{ж2} = \frac{q_\ell}{\pi} \left( \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2} \right). \quad (2.48)$$

Тогда

$$q_\ell = \frac{\pi(t_{ж1} - t_{ж2})}{\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}} = q_\ell = K_\ell \cdot \pi(t_{ж1} - t_{ж2}), \quad (2.49)$$

где

$$K_\ell = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}}, \quad \frac{Bm}{m \cdot K} \quad (2.50)$$

В (2.50) величина  $K_\ell$  – **линейный коэффициент теплопередачи**. Она характеризует интенсивность передачи теплоты от одного теплоносителя к другому через разделяющую их стенку.

Величина, обратная коэффициенту теплопередачи, называется линейным термическим сопротивлением теплопередачи:

$$R_\ell = \frac{1}{K_\ell} = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}, \quad (2.51)$$

При рассмотрении теплопередачи через многослойную цилиндрическую стенку термическое сопротивление теплопроводности одного слоя в уравнении (2.51) заменяется суммой, учитывающей сопротивления теплопроводности всех слоев. После решения этой системы относительно  $q_\ell$  получим

$$q_\ell = \frac{\pi(t_{ж1} - t_{ж2})}{\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}} = K_\ell \cdot \pi(t_{ж1} - t_{ж2}), \quad (2.52)$$

где

$$\frac{1}{K_\ell} = R_\ell = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i} + \frac{1}{\alpha_2 d_2} - \text{полное термическое сопротивление}$$

**многослойной цилиндрической стенки.**

Температура поверхности слоя трубы может быть найдена по зависимости

$$t_{c(i+1)} = t_{ж1} - \frac{q_\ell}{\pi} \left( \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i} \right). \quad (2.53)$$

### 2.7.3. Критический диаметр цилиндрической стенки

Термическое сопротивление однородной цилиндрической стенки, определяется уравнением (2.51):

$$R_{\ell} = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}.$$

Такая зависимость термического сопротивления от ряда аргументов позволяет ставить некоторые задачи оптимизации. Рассмотрим задачу оптимального выбора наружного диаметра трубопровода. В конкретных условиях эксплуатации трубопровода  $\alpha_1; d_1; \lambda; \alpha_2 = const$ . Поэтому  $R_{\ell} = f(d_2)$ .

Исследуем общее выражение для  $R_{\ell}$ .  $R_{\ell 2} = \frac{1}{\alpha_2 d_2}$  - при увеличении  $d_2$  будет уменьшаться.  $R_{\ell 1} = \frac{1}{\alpha_1 d_1} = const$ .  $R_{\ell c} = \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1}$  - при увеличении  $d_2$  будет возрастать. Таким образом,  $R_{\ell} = f(R_{\ell c}; R_{\ell 2})$ . Возьмем производную от  $R_{\ell}$  по  $d_2$  и приравняем ее нулю:

$$\frac{d(R_{\ell})}{d(d_2)} = \frac{1}{2\lambda d_2} - \frac{1}{\alpha_2 d_2^2} = 0. \quad (2.54)$$

Значение  $d_2$  из (2.54) соответствует экстремальной точке кривой  $R_{\ell} = f(d_2)$ . Из рис. 2.8 видно, что при  $d_2 < d_{кр}$  с увеличением  $d_2$ ,  $R_{\ell}$  - уменьшается. При  $d_2 > d_{кр}$  с увеличением  $d_2$ ,  $R_{\ell}$  - возрастает. При  $d_2 = \frac{2\lambda}{\alpha_2}$  термическое сопротивление теплопередачи будет минимальным. Значение внешнего диаметра трубы, соответствующее минимальному полному термическому сопротивлению, называется **критическим диаметром**  $d_{кр}$ .

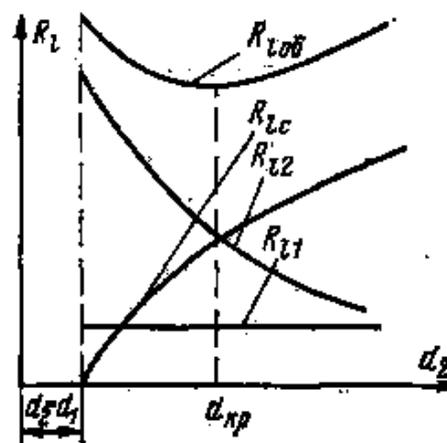


Рис. 2.8. Зависимость термического сопротивления цилиндрической стенки от  $d_2$

Проиллюстрируем практическое значение полученного результата. Положим, что  $\lambda = 40 \frac{Вт}{м \cdot град}$  - материал трубы углеродистая сталь и

- а)  $\alpha_2 = 10 \frac{Вт}{м^2 \cdot град}$  - свободная конвекция;
- б)  $\alpha_2 = 2000 \frac{Вт}{м^2 \cdot град}$  - вынужденная конвекция.

Тогда имеем: а)  $d_{кр} = 8 м$ ; б)  $d_{кр} = 40 мм$ . Очевидно, что первое значение очень велико. Следовательно, при низкой теплоотдаче теплопередача трубы практически всегда растет с ростом наружного диаметра. Второе значение находится в интервале реальных значений диаметра. Поэтому возможны оба варианта изменения термического сопротивления трубы с ростом диаметра и, следовательно, поиск оптимального значения. Но при этом необходимо иметь в виду, что выбор толщины стенки определяется прочностными соображениями.

### 2.7.4. Критический диаметр тепловой изоляции

Термическое сопротивление трубы с изоляцией составляет

$$R_{\ell} = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda_c} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{2\lambda_{из}} \ln \frac{d_n}{d_2} + \frac{1}{\alpha_2 d_n}$$

В данном случае диаметр изоляции совпадает с  $d_2$  в предыдущей задаче и  $q_{\ell} = f(d_{из})$ . Таким образом, критический диаметр изоляции определяется уравнением

$$d_{кр.из} = \frac{2\lambda_{из}}{\alpha_2}, \quad (2.55)$$

но практическое значение этого результата в данном случае совсем иное.

При выборе изоляционного материала необходимо рассчитать критический диаметр по зависимости (2.55). Согласно рис. 2.9, плотность теплового потока с ростом внешнего диаметра  $d_2$  увеличивается, при  $d_2 = d_{2кр}$  достигает максимума и с дальнейшим ростом  $d_2$  уменьшается.

Эту зависимость необходимо учитывать при выборе тепловой изоляции. Если  $d_{кр.из} > d_2$ , применение выбранного материала в качестве изоляционного нецелесообразно. Действительно, если такая ситуация имеет место, то потери с поверхности трубопровода будут с ростом толщины изоляции увеличиваться вплоть до некоторой толщины, соответствующей критическому диаметру.

Для эффективной работы тепловой изоляции должно выполняться условие:  $d_{кр.из} < d_2$ . То есть, при начале изолирования трубопровода, его тепловые потери должны падать. К счастью, из-за низких значений теплопроводности изоляции  $d_{кр.из}$  обычно оказывается небольшим.

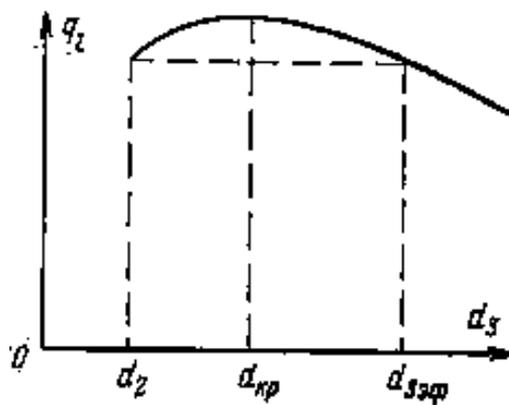


Рис. 2.9. Зависимость тепловых потерь от толщины изоляции трубы

## 2.8. Передача теплоты через сферическую стенку

### 2.8.1. Граничные условия первого рода

Рассмотрим полый шар с радиусами  $r_1$  и  $r_2$ , постоянной теплопроводностью  $\lambda$  и температурами поверхностей  $t_{c1}$  и  $t_{c2}$ , представленный на рис. 2.10. Будем считать, что температура изменяется только в радиальном направлении и процесс теплопроводности стационарен,

Используем метод решения, аналогичный примененному выше для цилиндрической стенки. В данном случае постоянным будет полный тепловой поток, поскольку шар является ограниченным телом. Тогда

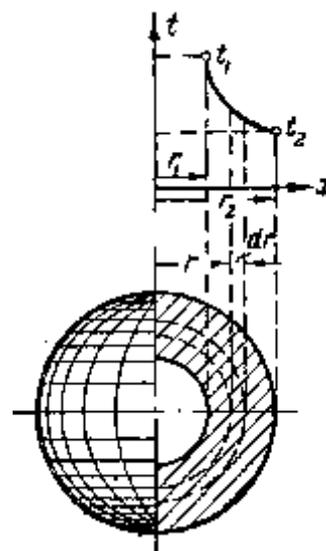


Рис. 2.10. Однородная шаровая стенка

$$q_r = 4\pi r^2 q = \text{const} . \quad (2.56)$$

Поскольку  $q$  удовлетворяет закону Фурье, то

$$r^2 \lambda \frac{dt}{dr} = C ; \quad \frac{dt}{dr} = \frac{C}{\lambda r^2} . \quad (2.57)$$

Проинтегрируем дифференциальное уравнение (2.57)

$$dt = C_1 \frac{dr}{r^2} \text{ или } t = -\frac{C_1}{r} + C_2 \quad (C_1 = C/\lambda) . \quad (2.58)$$

Постоянные интегрирования находим из граничных условий:

$$C_1 = -\frac{t_{c1} - t_{c2}}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} ; \quad C_2 = t_{c1} - \frac{t_{c1} - t_{c2}}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \frac{1}{r_1} . \quad (2.59)$$

Подставим постоянные интегрирования в (2.58):

$$t = t_{c1} - \frac{t_{c1} - t_{c2}}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right) . \quad (2.60)$$

Из (2.58) видно, что температура внутри шаровой стенки изменяется по закону гиперболы. Количество теплоты, проходящее через шар поверхностью  $F = 4\pi r^2$  в единицу времени определяется зависимостью

$$Q = -\lambda \frac{\partial t}{\partial r} F = \frac{4\pi \cdot \lambda \cdot r^2 (t_{c1} - t_{c2})}{r^2 \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)} = \frac{2\pi \cdot \lambda \cdot \Delta t}{\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}} = \pi \cdot \lambda \frac{d_1 d_2}{\delta} \Delta t , \quad (2.61)$$

где  $\delta = \frac{d_2 - d_1}{2}$  - толщина стенки.

Обратим внимание на одно практически важное обстоятельство, связанное с термическим сопротивлением шарового слоя. Предположим, что мы рассматриваем теплоотдачу от сферической поверхности к сферическому слою как теплоотдачу во внешнее пространство. Тогда уравнение теплоотвода будет иметь вид

$$q = \alpha \Delta t = -\lambda \frac{\partial t}{\partial r} = \frac{2 \cdot \lambda \cdot \Delta t}{d_1 \left( \frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right)} , \quad (2.62)$$

где  $d_1$  – диаметр сферической поверхности, а  $d_2$  – внешний диаметр слоя. Коэффициент теплоотдачи  $\alpha$  будет определяться уравнением

$$\alpha = \frac{2 \cdot \lambda \cdot \Delta t}{d_1^2 \left( \frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right)} . \quad (2.63)$$

Пусть  $d_2/d_1$  неограниченно возрастает. Тогда величиной  $1/d_2$  в знаменателе выражения (2.63) можно пренебречь, и мы получим выражение

$$\alpha = \frac{2 \cdot \lambda \cdot \Delta t}{d_1} .$$

(2.64)

Выражение (2.64) можно переписать в виде, который выражает предельный закон для теплоотдачи шара

$$Nu = 2 . \quad (2.65)$$

где  $Nu = \frac{\alpha d_1}{\lambda}$ .

Это выражение применяется для расчета теплоотдачи к сферическим объектам весьма малого размера, когда конвективным переносом тепла можно пренебречь. Например, это значение числа Нуссельта используется для расчетного описания взаимодействия между каплей и паром в двухфазном парожидкостном дисперсном потоке и для теплоотдачи мелкой взвеси в газовом потоке.

Заметим, что если бы мы попытались рассмотреть аналогичную задачу для цилиндрического слоя, то никакого конечного предела бы не нашли, ибо логарифм неограниченно, хотя и медленно, возрастает с ростом аргумента. Разница связана с тем, что рассматривая цилиндр (как и пластину), мы имеем дело с сечением бесконечного тела, тогда как сфера занимает ограниченный объем в пространстве.

### 2.8.2. Граничные условия третьего рода

По аналогии с 2.7.2, получим

$$Q = \frac{\pi(t_{жк1} - t_{жк2})}{\frac{1}{\alpha_1 d_1^2} + \frac{1}{2\lambda} \left( \frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right) + \frac{1}{\alpha_2 d_2^2}} = K_{ш} \pi \cdot \Delta t , \quad (2.66)$$

где  $K_{ш}$  - коэффициент теплопередач шаровой стенки,  $Bm/K$ .

Термическое сопротивление теплопередачи шаровой стенки будет:

$$R_{ш} = \frac{1}{k_{ш}} = \frac{1}{\alpha_1 d_1^2} + \frac{1}{2\lambda} \left( \frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right) + \frac{1}{\alpha_2 d_2^2} , \quad K / Bm. \quad (2.67)$$

## 2.9. Теплопроводность при наличии внутренних источников теплоты

До сих пор мы рассматривали температурное поле внутри тел, сформировавшееся за счет взаимодействия с внешней средой. Теперь рассмотрим случай, когда теплота выделяется (или поглощается) внутри тела. Такие ситуации возникают, например, если в теле протекают экзотермические или эндотермические

химические реакции или процессы с индукционным или диэлектрическим нагревом. В элементах ядерных реакторов происходит выделение теплоты вследствие ядерных реакций. Наконец, подобные же ситуации возникают в системах с фазовыми превращениями. Здесь мы будем рассматривать лишь случай равномерной плотности тепловыделения.

### 2.9.1. Теплопроводность однородной неограниченной пластины

Рассмотрим длинную пластину толщиной  $2\delta$ , малой по сравнению с другими размерами (рис. 2.11). Внутренние источники теплоты равномерно распределены по объему, и их плотность равна  $q_v$ . Температуры обеих поверхностей пластины одинаковы и равны  $T_c$ . Требуется определить температуры на оси пластины  $T_0$ , распределение температуры в пластине и количество теплоты, отданное в окружающую среду. При этих условиях температура пластины изменяется только вдоль оси  $x$ , а дифференциальное уравнение теплопроводности имеет вид

$$\frac{d^2 t}{dx^2} + \frac{q_v}{\lambda} = 0. \quad (2.68)$$

Будем рассматривать одну половину пластины, так как температуры поверхностей одинаковы и имеет место симметрия относительно  $x = 0$ .

Граничные условия:

$$\left. \begin{aligned} x=0; \left( \frac{\partial t}{\partial x} \right)_{x=0} &= 0; \\ x=\delta; -\lambda \left( \frac{\partial t}{\partial x} \right)_{x=\delta} &= \alpha(t_c - t_{жс}) \end{aligned} \right\}. \quad (2.69)$$

Интегрируя (2.68), получим

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{q_v}{\lambda} x + C_1; \quad (2.70)$$

$$t = -\frac{q_v}{2\lambda} x^2 + C_1 x + C_2. \quad (2.71)$$

Постоянные  $C_1$  и  $C_2$  определяются из граничных условий. При  $x = 0$  из (2.70) находим, что  $C_1 = 0$ . При  $x = \delta$ :  $\frac{dt}{dx}_{x=\delta} = -\frac{q_v \delta}{\lambda}$ . Подставим это значение

производной в (2.69):  $\frac{\lambda \cdot q_v \delta}{\lambda} = \alpha(t_c - t_{жс})$ , тогда  $t_c = t_{жс} + \frac{q_v \delta}{\alpha}$ .

Последнее подставим в (2.71) при  $x = \delta$ :

$$t_{жс} + \frac{q_v \delta}{\alpha} = -\frac{q_v}{2\lambda} \delta^2 + 0 + C_2; \quad C_2 = t_{жс} + \frac{q_v \delta}{\alpha} + \frac{q_v}{2\lambda} \delta^2.$$

Подставляя значения постоянных интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  в (2.71), имеем

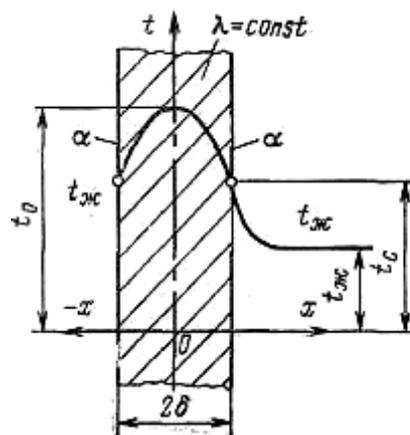


Рис. 2.11. Теплопроводность плоской пластины с внутренними источниками теплоты

$$t = -\frac{q_v}{2\lambda} x^2 + 0 + t_{жс} + \frac{q_v \delta}{\alpha} + \frac{q_v}{2\lambda} \delta^2 = t_{жс} + \frac{q_v \delta}{\alpha} + \frac{q_v \delta^2}{2\lambda} \left[ 1 - \left( \frac{x}{\delta} \right)^2 \right]. \quad (2.72)$$

Уравнение температурного поля (2.72) показывает, что температура в стенке меняется по параболическому закону.

Тепловой поток изменяется по оси  $x$  линейно:  $q = q_v x$ .

При  $x = 0$   $q = 0$ . При  $x = \delta$   $q = \alpha (t_c - t_{жс}) = q_v \delta$ .

Общее количество теплоты, отданное двумя поверхностями пластины в единицу времени:

$$Q = q \cdot F = q_v \delta \cdot 2F_1. \quad (2.73)$$

Перепад температуры между осью симметрии и стенкой:

$$t_0 - t_c = \frac{q_v \delta^2}{2\lambda}.$$

### 2.9.2. Теплопроводность однородного цилиндра

Решая задачу теплопроводности однородного круглого цилиндра при стационарном режиме и  $\lambda = const$  по аналогии с задачей для пластины, найдем распределение температуры в цилиндре:

$$t = t_{жс} + \frac{q_v r_0}{2\alpha} + \frac{q_v}{4\lambda} (r_0^2 - r^2), \quad (2.74)$$

где  $r_0$  и  $r$  – радиус цилиндра и текущий радиус соответственно.

Продемонстрируем в этой задаче использование функции Кирхгофа в случае, когда  $\lambda = f(t)$ . В большинстве практических случаев ограничиваются линейной аппроксимацией функции  $f(t)$ , принимая для нее зависимость

$$\lambda = f(t) = \lambda_0 [1 + b(t - t_0)].$$

В нашем случае удобно за  $t_0$  выбрать температуру наружной поверхности цилиндра. Тогда, обозначая  $t - t_0$  через  $\theta$ , имеем  $\lambda = f(t) = \lambda_0 (1 + b\theta)$ .

Для функции Кирхгофа в соответствии с формулой (2.21) будем иметь

$$U = \int_0^\theta \lambda(u) du = \lambda_0 \theta + \lambda_0 b \theta^2 / 2. \quad (2.75)$$

Выражение (2.75) является квадратным уравнением относительно  $\theta$ . Решение уравнения Пуассона для  $U$  можно построить по аналогии с уравнением (2.74).

Разность  $\theta$  будет равна  $\theta = \frac{q_v r_0}{2\alpha} + \frac{q_v}{4\lambda} (r_0^2 - r^2)$  и, в случае  $\lambda = f(t)$ , может быть представлена следующим уравнением:

$$t = -\frac{1}{b} + \sqrt{\left( T_0 + \frac{1}{b} \right)^2 - \frac{q_v r^2}{2\lambda_0 b}}. \quad (2.76)$$

### 2.10. Примеры с решениями

**Пример 2-1.** Определить потери теплоты от кирпичной стены длиной 10 м, высотой 5 м и толщиной 250 мм. Температуры на поверхностях стенок соответственно равны  $t_1 = 25$  °С и  $t_2 = -30$  °С. Коэффициент теплопроводности кирпича

$$\lambda = 0,7 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{град}}.$$

Согласно уравнению (2.29)

$$q = \frac{\lambda}{\delta} (t_1 - t_2) = \frac{0,7}{0,25} [25 - (-30)] = 154 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2};$$

$$Q = q \cdot F = 154 \cdot 10 \cdot 5 = 7700 \text{ Вт}.$$

**Пример 2-2.** Найти значение коэффициента теплопроводности материала стенки, если  $\delta = 30 \text{ мм}$ ,  $\Delta t = 50 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $q = 200 \text{ кВт/м}^2$ .

$$\lambda = \frac{q \cdot \delta}{\Delta t} = \frac{200000 \cdot 0,03}{50} = 120 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{град}}.$$

**Пример 2-3.** Рассчитать плотность теплового потока, проходящего через стенку котла толщиной  $\delta_1 = 20 \text{ мм}$  и коэффициентом теплопроводности материала  $\lambda_1 = 50 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{град}}$ , если с внутренней стороны стенка покрыта слоем накипи толщи-

ной  $\delta_2 = 2 \text{ мм}$  с коэффициентом теплопроводности  $\lambda_2 = 1,0 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{град}}$ . Температура наружной поверхности  $t_1 = 250 \text{ }^\circ\text{C}$  и внутренней поверхности  $t_2 = 200 \text{ }^\circ\text{C}$ .

$$q = \frac{t_1 - t_2}{\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2}} = \frac{250 - 200}{\frac{0,02}{50} + \frac{0,002}{1,0}} = \frac{50}{0,0024} = 20800 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}.$$

Для определения температуры поверхности железного листа под слоем накипи используем зависимость (2.39а):

$$t_2 = t_1 - q \cdot \frac{\delta_1}{\lambda_1} = 250 - 20800 \cdot 0,0004 = 250 - 8,3 = 241,7 \text{ }^\circ\text{C}.$$

**Пример 2-4.** Найти потери теплоты в окружающую среду от кирпичной обмуровки котла толщиной  $\delta = 250 \text{ мм}$  и ее температуру, с коэффициентом теплопроводности  $\lambda = 0,7 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{град}}$  при температуре дымовых газов  $t_2 = 800 \text{ }^\circ\text{C}$ , температуре наружного воздуха  $t_6 = 15 \text{ }^\circ\text{C}$ , коэффициентах теплоотдачи от дымовых газов к стенке  $\alpha_1 = 40 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{град}}$  и от стенки к окружающей среде  $\alpha_2 = 10 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{град}}$ .

$$\text{Согласно (2.38)} \quad K = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}} = \frac{1}{\frac{1}{40} + \frac{0,25}{0,7} + \frac{1}{10}} = 2,07 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{град}}.$$

Потери теплоты в окружающую среду с одного метра поверхности обмуровки составят:  $q = 2,07(800 - 15) = 1625 \text{ Вт/м}^2$ .

Температура обмуровки котла определяется по зависимости (2.39)

$$t_o = t_6 + q \frac{1}{\alpha_2} = 15 + 1625 \frac{1}{10} = 177,5 \text{ }^\circ\text{C}.$$

**Пример 2-5.** Паропровод диаметром  $170/160$  мм покрыт двухслойной изоляцией. Толщина первого слоя  $\delta_2 = 30$  мм и второго слоя  $\delta_3 = 50$  мм. Коэффициенты теплопроводности трубы и изоляции соответственно равны:  $\lambda_1 = 50$ ,  $\lambda_2 = 0,15$  и  $\lambda_3 = 0,08 \frac{Вт}{м \cdot град}$ . Температура внутренней поверхности паропровода  $t_{вн} = 300$  °С и внешней поверхности изоляции  $t_n = 50$  °С. Определить потерю теплоты  $1$  м трубопровода и температуры на поверхностях раздела отдельных слоев.

По условиям задачи имеем:  $d_1 = 0,16$  м,  $d_2 = 0,17$  м,  $d_3 = 0,23$  м, и  $d_4 = 0,33$  м. Согласно формуле (2.47) получим:

$$q_l = \frac{\pi(t_1 - t_n)}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{2 \cdot \lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i}} = \frac{3,14 \cdot (300 - 50)}{\frac{1}{2 \cdot 50} \ln \frac{170}{160} + \frac{1}{2 \cdot 0,15} \ln \frac{230}{170} + \frac{1}{2 \cdot 0,08} \ln \frac{330}{230}} = 240,6 \frac{Вт}{м};$$

$$t_2 = 300 - \frac{240,6}{2 \cdot 3,14} 0,0006 = 300 - 0,0229 \approx 300 \text{ } ^\circ\text{C};$$

$$t_3 = 50 + \frac{240,6}{2 \cdot 3,14} 4,525 = 50 + 173,3 = 223,3 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

**Пример 2-6.** Стальной паропровод с коэффициентом теплопроводности  $\lambda_1 = 40 \frac{Вт}{м \cdot град}$ , диаметром  $200/216$  мм покрыт слоем изоляции толщиной  $120$  мм ( $\lambda_2 = 0,1 \frac{Вт}{м \cdot град}$ ). Температура пара  $t_n = 300$  °С и окружающего воздуха  $t_в = 25$  °С. Коэффициенты теплоотдачи со стороны пара и воздуха равны соответственно  $\alpha_1 = 100 \frac{Вт}{м^2 \cdot град}$  и  $\alpha_2 = 8,5 \frac{Вт}{м^2 \cdot град}$ . Требуется определить линейный коэффициент теплопередачи  $k_l$ , линейную плотность теплового потока  $q_l$  и температуру изоляции  $t_n$ .

На основании формулы (2.50) имеем

$$k_l = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1 \cdot d_1} + \frac{1}{2\lambda_1} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{2\lambda_2} \ln \frac{d_3}{d_2} + \frac{1}{\alpha_2 \cdot d_3}} =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{100 \cdot 0,2} + \frac{1}{2 \cdot 40} \ln \frac{216}{200} + \frac{1}{2 \cdot 0,1} \ln \frac{456}{216} + \frac{1}{8,5 \cdot 0,456}} =$$

$$= \frac{1}{0,05 + 0,0009 + 3,75 + 0,258} = 0,248 \frac{Вт}{м \cdot град}.$$

На основании (2.49)  $q_l = k_l \cdot \pi(t_n - t_в) = 0,248 \cdot 3,14 \cdot 275 = 214 \frac{Вт}{м \cdot град}$ .

$$t_n = t_в + \frac{q_l}{\pi} \cdot \frac{1}{\alpha_2 \cdot d_3} = 25 + \frac{214}{3,14} 0,258 = 25 + 17,5 = 42,5 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

Используем зависимость (2.38):

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}} = \frac{1}{\frac{1}{40} + \frac{0,25}{0,7} + \frac{1}{10}} = 2,07 \frac{Вт}{м^2 \cdot град}.$$

По зависимости (2.37), получим

$$q = k(t_2 - t_6) = 2,07 \cdot (800 - 15) = 2,07 \cdot 785 = 1624,95 \frac{Вт}{м^2}.$$

Согласно зависимости (2.39.а) находим температуры обмуровки:

$$t_{ст,вн} = t_2 - q \cdot \frac{1}{\alpha_1} = 800 - \frac{1624,95}{40} = 759,4 \text{ } ^\circ\text{C};$$

$$t_{ст,н} = t_6 + q \cdot \frac{1}{\alpha_2} = 15 + \frac{1624,95}{10} = 177,5 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

**Пример 2-7.** Для паропровода диаметром 150/159 мм и длиной  $l = 350$  м, проходящего в закрытом помещении с температурой окружающей среды  $t_{жс} = 10$  °С, требуется рассчитать изоляцию. Пар подается со следующими параметрами: на входе давление и температура пара соответственно равны  $P_1 = 1,5$  МПа,  $t_{n1} = 350$  °С; на выходе –  $P_{n2} = 1,3$  МПа,  $t_{n2} = 330$  °С. Скорость протекания пара равна  $w = 25$  м/с. Трубопровод - сварной, фланцевые соединения отсутствуют. Имеются две задвижки. В течение года паропровод эксплуатируется 7000 ч. Стоимость 1 гДж теплоты составляет 200 руб. Найти годовую экономию от применения изоляции.

Допустимые тепловые потери определяются исходя из заданного падения температуры пара. Часовой расход пара определяется следующей зависимостью:

$$G = \rho \cdot w \cdot f = 7,12 \cdot 25 \cdot \frac{3,14 \cdot 0,15^2}{4} = 3,14 \frac{кг}{с},$$

где  $\rho = 7,12 \frac{кг}{м^3}$  - плотность пара при давлении  $P = 1,4$  МПа.

По таблицам водяного пара при  $p_1 = 1,5$  МПа и  $t_{n1} = 350$  °С находим теплосодержание пара  $i_1 = 3147,6$  кДж/кг; при  $P_2 = 1,3$  МПа и  $t_2 = 330$  °С теплосодержание пара  $i_2 = 3108,5$  кДж/кг.

Допустимые потери тепла на всей длине паропровода

$$Q = G \cdot (i_1 - i_2) = 3,14 \cdot (3147,6 - 3108,5) = 122,8 \text{ кВт}.$$

Потеря теплоты одним вентиляем или задвижкой эквивалентна потере теплоты трубопроводом длиной  $l = 6$  м. Таким образом, для учета потерь теплоты двумя задвижками необходимо к заданной длине паропровода добавить 12 м.

Допустимые потери теплоты с 1 погонного метра длины паропровода составят

$$q_l = \frac{Q}{l_p} = \frac{122,8}{362} = 0,339 \frac{кВт}{м}.$$

При расчете изоляции термическими сопротивлениями теплоотдачи от пара к стенке и самой стенки трубы пренебрегаем. Тогда температура поверхности трубы  $t_c$  будет равна температуре пара  $t_{n1} = 350$  °С.

Дальнейший расчет проведем для совелитовой мастичной изоляции. Пусть температура поверхности изоляции  $t_n = 26 \text{ }^{\circ}\text{C}$ . Тогда средняя температура изоляционного слоя равна  $t_{из} = \frac{t_c + t_n}{2} = \frac{350 + 26}{2} = 188 \text{ }^{\circ}\text{C}$ .

Для мастичного совелита

$$\lambda_{из} = 0,0901 + 0,000087 \cdot t_{из} = 0,0901 + 0,000087 \cdot 188 = 0,106 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{град}}.$$

Количество переданной теплоты  $q_l$  при заданных температурах стенки трубопровода равно  $q_l = \frac{2 \cdot \pi \cdot \lambda_{из} (t_{n1} - t_n)}{\ln \frac{d_n}{d_2}}$ ,

где  $d_2$  — внешний диаметр трубы;  $d_n$  — внешний диаметр изоляции.

$$\text{Тогда } \ln \frac{d_n}{d_2} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \lambda_{из} (t_{n1} - t_n)}{q_l} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 0,106 \cdot (350 - 26)}{339} = 0,636, \quad \frac{d_n}{d_2} = e^{0,636} = 1,902;$$

$$d_n = 1,902 \cdot d_2 = 1,902 \cdot 0,159 = 0,302 \text{ м} \text{ и толщина слоя изоляции } \delta_{из} = \frac{d_n - d_2}{2} = 0,071 \text{ м}.$$

Проверяем температуру наружного слоя изоляции  $t_n$ . При температуре помещения  $t_{жк} = 10 \text{ }^{\circ}\text{C}$  коэффициент теплоотдачи от поверхности изоляции к воздуху составит  $\alpha = 20 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{град}}$ , то  $t_n = t_{жк} + \frac{q_l}{\pi \cdot d_n \cdot \alpha_2} = 10 + \frac{339}{3,14 \cdot 0,302 \cdot 20} = 27,8 \text{ }^{\circ}\text{C}$ .

Потери теплоты неизолированного паропровода по низшей температуре пара  $t_{n2} = 330 \text{ }^{\circ}\text{C}$  могут быть найдены как:  $q_l' = \alpha (t_{n2} - t_{жк}) = 20(330 - 10) = 6400 \text{ Вт/м}$ .

Потери теплоты изолированного паропровода составляют  $q_l = 339 \text{ Вт/м}$ . Тогда экономия теплоты определится из  $\Delta q_l = q_l' - q_l = 6400 - 339 = 6061 \text{ Вт/м}$ .

Для всей длины паропровода экономия теплоты равна  $Q = \Delta q_l \cdot l_p = 6,061 \cdot 363 = 2200,1 \text{ кВт}$  и годовая прибыль от экономии за счет изоляции теплоты

$$Q_{год} = Q \cdot 7000 \cdot 3600 \cdot 200 = 0,0022 \cdot 3600 \cdot 7000 \cdot 200 = 11088504 \text{ руб./год}.$$

### 3. НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Перенос теплоты в условиях, когда температура системы изменяется не только от точки к точке, но и локально с течением времени, называется нестационарным. В ходе этих тепловых процессов всегда происходят локальные изменения внутренней энергии или энтальпии вещества. Нестационарные процессы связаны с прогревом или охлаждением материала и элементов оборудования при пуске, остановке или изменении технологического режима процесса, например, при производстве целлюлозы, стекла, обжиге кирпича, плавлении металла и т.д.

Различают две основные группы нестационарных процессов теплопроводности, которые наиболее широко исследованы аналитически:

- система стремится к тепловому равновесию при прогреве или охлаждении тел, помещенных в среду с заданным тепловым состоянием;
- температура тела претерпевает периодические изменения в периодически действующих подогревателях (регенераторах).

При аналитическом описании процесса теплопроводности используется дифференциальное уравнение теплопроводности с соответствующими начальными и граничными условиями.

В учебной литературе до последнего времени изучение этих вопросов базируется на использовании метода Фурье (метода частных решений), который приводит к необходимости громоздких операций по определению собственных чисел и коэффициентов соответствующих рядов. При этом нахождение собственных чисел часто связано с графическим решением алгебраических уравнений, которое в настоящее время фактически не используется на практике.

Поэтому в данном разделе будут использоваться методы подобия и размерностей для определения общей структуры решения и иллюстрации, характеризующие форму решений. При этом мы проделаем несложные преобразования, целью которых будет определение формы частных решений, выражающих зависимость от времени. Запишем уравнение теплопроводности в общем виде:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = a \cdot \nabla^2 \theta \quad , \quad (3.1)$$

где в соответствии с идеей метода Фурье представим частное решение уравнения (3.1) в виде произведения  $\theta = f(\tau) \cdot \varphi(r)$ , где  $\varphi(r)$  функция координат, а  $f(\tau)$  – функция времени. Подставляя его в уравнение (3.1), получим последовательно

$$\frac{d[f(\tau)]}{d\tau} \varphi(r) = a \cdot f(\tau) \nabla^2 \varphi(r); \quad \frac{1}{a \cdot f(\tau)} \frac{d[f(\tau)]}{d\tau} = \frac{1}{\varphi(r)} \nabla^2 \varphi(r) .$$

Левая часть уравнения зависит от  $\tau$ , правая – только от  $r$ . Две функции от двух разных и не зависящих друг от друга аргументов могут быть равны при любых значениях последних только в том случае, если они постоянны. Величина этих аргументов отрицательна, так как тепловые процессы стремятся к равнове-

сию. Обозначим ее  $K$  и запишем последнее уравнение через два дифференциальных уравнения:

$$\frac{d[f(\tau)]}{a \cdot f(\tau) d\tau} = -k^2 ; \quad \frac{d^2[\varphi(r)]}{dr^2} + K^2 \cdot \varphi(r) = 0 .$$

Преобразуем левое уравнение: 
$$\frac{d[f(\tau)]}{f(\tau)} = -a \cdot k^2 \cdot d\tau .$$

Из последнего уравнения получаем

$$f(\tau) = e^{-ak^2\tau} \quad \text{или} \quad f(\tau) = e^{-k^2 \ell^2 Fo} . \quad (3.2)$$

где  $l$  – характерный линейный размер;  $Fo = a\tau/l^2$  – безразмерный комплекс; носящий название числа Фурье;  $k$  – собственные числа конкретной задачи, которые зависят от формы тела и граничных условий.

Мы не будем отыскивать  $\varphi(r)$  поскольку выражения для нее будут различными для различных форм тел и различных граничных и начальных условий. Но форма функции  $f(\tau)$ , как видим, не зависит от конкретной формы тела, влияние которой проявляется лишь через собственные числа. Общее решение задачи представляет собой сумму вида

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} C_n \cdot R_n \cdot e^{-k_n^2 \ell^2 Fo} . \quad (3.3)$$

Показатель степени быстро растет с ростом  $n$ , а коэффициенты  $C_n$  убывают. Поэтому, уже при не слишком больших числах  $Fo$  в большинстве случаев оказывается возможным ограничиться первым членом ряда.

### 3.1. Нестационарная задача теплопроводности для пластины

Рассмотрим нестационарную задачу теплопроводности для пластины, помещенной в среду с постоянной температурой  $T_{ж}$ , используя лишь метод анализа размерностей. Для упрощения будем считать, что

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha \quad \text{и} \quad T_{c1} = T_{c2} = T_c .$$

При этом в качестве первой группы переменных, имеющих независимые размерности, выберем толщину пластины  $\delta$ , время -  $\tau$  и коэффициент теплопроводности  $\lambda$ . Искомой величиной является температура  $T$ . В перечисленных величинах действительно фигурируют все четыре независимые размерности.

Что касается  $\delta$ ,  $\tau$  и  $T$ , то с независимостью их размерностей все ясно. Вопрос касается лишь коэффициента теплопроводности  $\lambda$ . Его размерность  $Вт/(м \cdot град)$ . Но  $Вт = Дж/с = н \cdot м/с = кг \cdot м^2/с^3$ . Таким образом, в этой величине содержится  $кг$  – четвертая размерность.

Теперь запишем общее выражение для  $T$

$$T = T(\lambda, \tau, \delta, x, a, \alpha, T_0, T_c, T_{ж}) , \quad (3.4)$$

где  $x$  – координата,  $a$  – коэффициент температуропроводности,  $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи на поверхности пластины,  $T_0$  – начальная температура пластины,  $T_c$  – температура стенки пластины,  $T_{жс}$  – температура окружающей среды.

Дальнейшие упрощения связаны с построением безразмерных комплексов. Очевидно, что процесс определяется разностью температур пластины и окружающей среды, а развитие процесса – отклонением температуры от ее начального значения. Поэтому можно записать выражение (3.4) в виде

$$(T - T_{жс}) / (T_0 - T_{жс}) = f(\lambda, \tau, \delta, x, a, \alpha) \quad (3.5)$$

Из аргументов, фигурирующих в правой части (3.5) можно составить 3 безразмерных комплекса

$$x/\delta; (a\tau/\delta^2) = (Fo); (\alpha\delta/\lambda) = (Bi).$$

Первые два из них – это безразмерная координата и безразмерное время, а последний характеризует граничные условия. Последние два имеют общепринятые обозначения, которые указаны в круглых скобках. Это число Фурье ( $Fo$ ) и число Био ( $Bi$ ). Последнее было введено ранее в разделе 2. Обозначая безразмерную температуру через  $\theta$  и безразмерную координату через  $\xi$ , получим

$$\theta = f(\xi, Fo, Bi) \quad (3.6)$$

Заметим, что для установления такой формы зависимости нам не понадобилось привлекать уравнение Фурье. Количество безразмерных аргументов в правой части соответствует даваемому теоремой Букингема (см. раздел 2). Если мы хотим определить температуру для определенного значения координаты (например, на поверхности или в центре), то остаются 2 независимые безразмерные переменные –  $Fo$  и  $Bi$ .

Вообще говоря, дальнейшее продвижение в получении решения без использования дополнительной информации в рамках использованного подхода уже невозможно. Далее можно пытаться получить решение, например, в виде суммы ряда, но мы уже поясняли, почему это не имеет особого смысла. Пожалуй, наиболее явным преимуществом представления решения в виде суммы ряда по собственным функциям является наглядность перехода к регулярному режиму, о котором мы поговорим несколько ниже.

Рассмотрим теперь более простой вариант той же задачи – нахождение распределения температуры для полуплоскости, на поверхности которой задана постоянная плотность теплового потока  $q$ . Тогда имеем

$$T = T(T_0, a, \tau, x, q, \lambda) \quad (3.7)$$

Как и в предыдущей задаче температуру необходимо отсчитывать от  $T_0$ , но ее нельзя использовать в качестве масштаба температуры. Таким образом, решение задачи ищем в виде

$$(T - T_0) = f(a, \tau, x, q, \lambda) \quad (3.8)$$

Из теоремы Букингема следует, что это соотношение можно выразить через два безразмерных комплекса. Чтобы получить эти безразмерные комплексы, необходимо построить масштабы длины и температуры, которые отсутствуют сре-

ди исходных переменных. Первый из них его легко получить, используя  $a$  и  $\tau$ , в форме

$$\{L\} = L_{a\tau} = \sqrt{a \cdot \tau}$$

Для отыскания второго масштаба используем структуру выражения для  $q$

$$q \sim \lambda \{T\} / \{L\}$$

$$\{T\} = q \{L\} / \lambda = q \sqrt{a\tau} / \lambda$$

Тогда выражение (3.8) можно записать в форме

$$\frac{(T - T_0)\lambda}{q\sqrt{a \cdot \tau}} = f\left(\frac{x}{\sqrt{a \cdot \tau}}\right) \quad (3.9)$$

Иначе

$$T - T_0 = \frac{q\sqrt{a \cdot \tau}}{\lambda} f\left(\frac{x}{\sqrt{a \cdot \tau}}\right)$$

Пусть нам необходимо знать лишь изменение температуры поверхности во времени. Тогда последний сомножитель обращается в константу.

$$\text{То есть,} \quad T - T_0 = K \frac{q\sqrt{a \cdot \tau}}{\lambda} \quad (3.10)$$

Вообще говоря, у нас нет оснований считать коэффициент  $K$  сильно отличающимся от единицы. Для подтверждения сопоставим теперь наше выражение с точным решением. Оно имеет вид

$$T - T_0 = \frac{2q\sqrt{a \cdot \tau}}{\sqrt{\pi} \cdot \lambda} \text{ierfc}\left(\frac{x}{\sqrt{a \cdot \tau}}\right), \quad (3.11)$$

где  $\text{ierfc}\left(\frac{x}{\sqrt{a\tau}}\right)$  - некоторая специальная функция, связанная интегралом вероятностей, которая при  $x = 0$  равна единице. Тогда имеем точное выражение

$$T - T_0 = 1,128 \frac{q\sqrt{a \cdot \tau}}{\lambda} \quad (3.12)$$

Таким образом, наше предположение относительно  $K$  оказалось верным.

Теперь продемонстрируем в форме диаграмм конкретные решения, полученные методом Фурье. Здесь в качестве примеров приведены диаграммы для определения температуры центра и поверхности пластины (рис. 3.1 и рис. 3.2).

Эти диаграммы до сих пор часто используются для практических расчетов во всем диапазоне чисел  $Fo$  и  $Bi$ .

В этих диаграммах фигурирует безразмерная температура  $\theta$

$$\theta = (T - T_{жс}) / (T_0 - T_{жс})$$

Здесь  $T_0$  - начальная температура, а  $T_{жс}$  - температура окружающей среды.

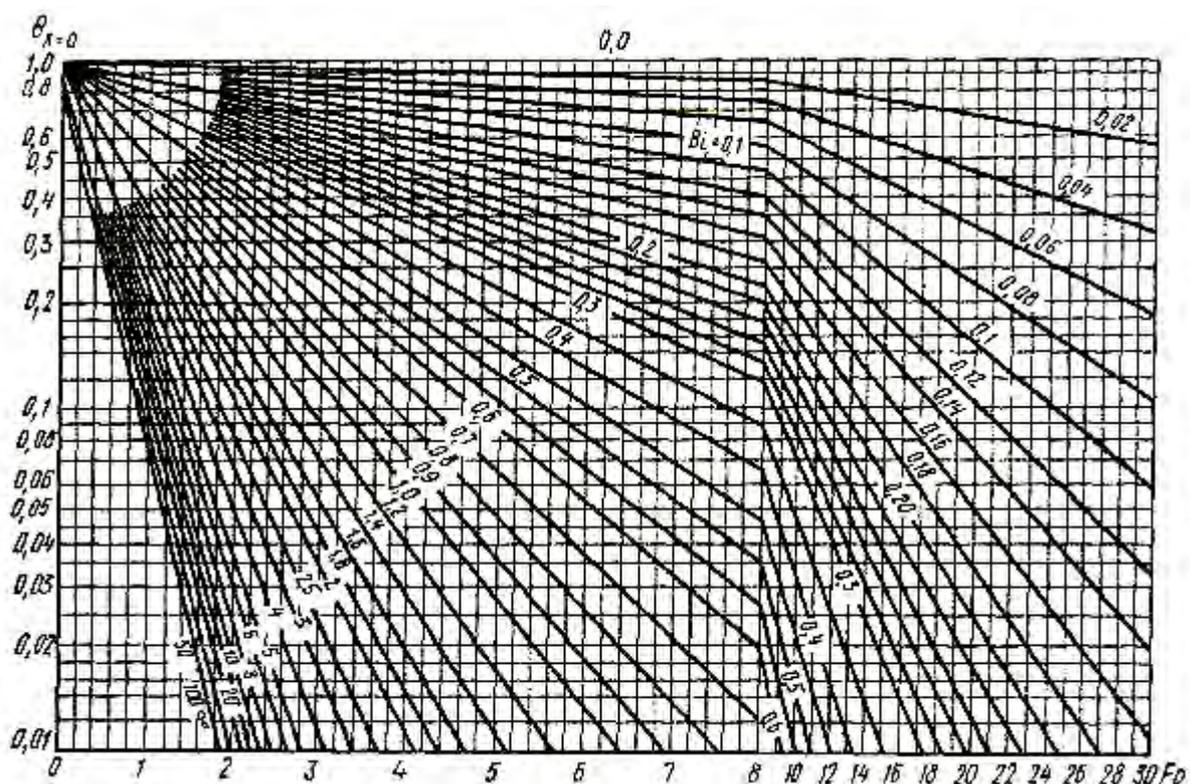


Рис. 3.1. Зависимость безразмерного перепада температур от чисел Фурье и Био для середины пластины

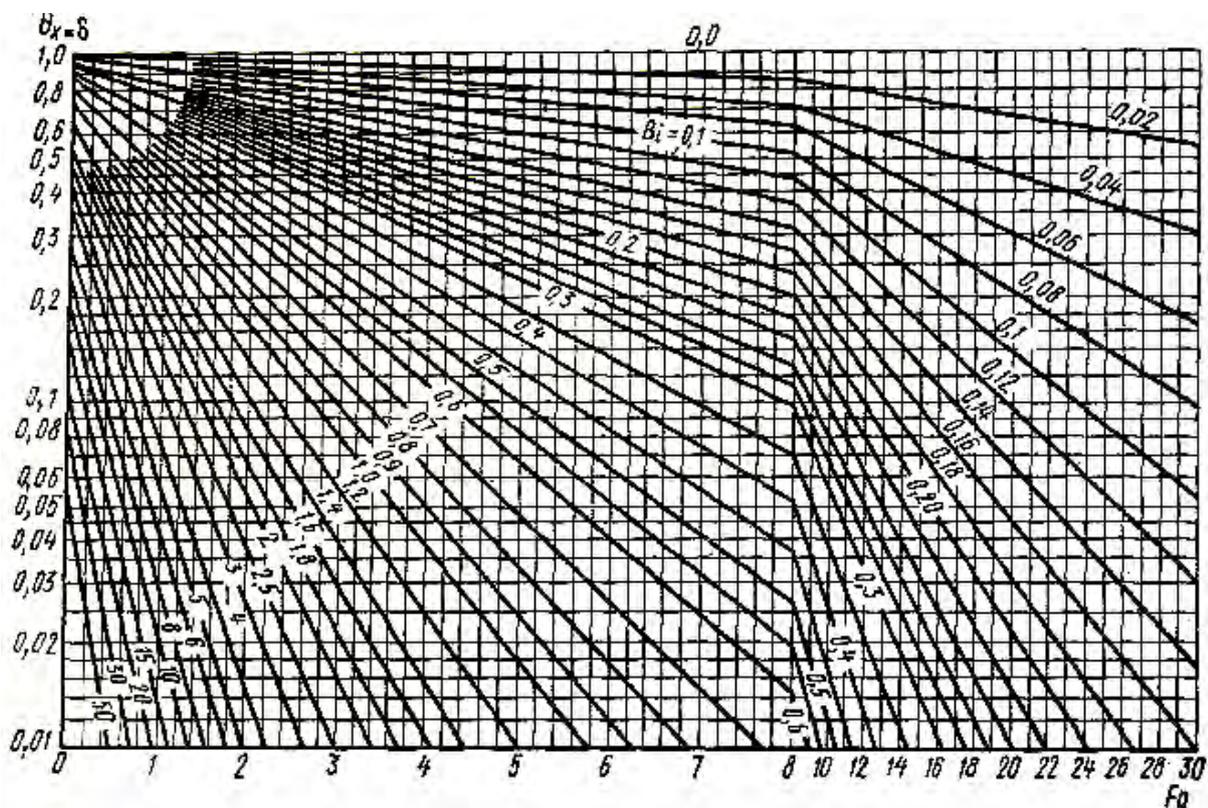


Рис. 3.2. Зависимость безразмерного перепада температур от чисел Фурье и Био для поверхности пластины

Критерий Био представляет собой отношение внутреннего термического сопротивления теплопроводности к внешнему термическому сопротивлению

теплоотдачи: 
$$Bi = \frac{\delta/\lambda}{1/\alpha_p} .$$

Пользуясь этими диаграммами, можно выполнить следующие расчеты:

1. Определить время охлаждения  $Fo = \frac{a \cdot \tau}{\delta^2}$  до заданной температуры  $\theta_{x=\delta}$  или  $\theta_{x=0}$  - по известным условиям теплоотдачи на поверхностях;
2. Определить температуру через заданное время;
3. Определить интенсивность отвода или подвода теплоты на поверхностях при заданных  $Fo$  и  $\theta$ .

Положим, что в начальный момент времени ( $Fo = 0$ ),  $\theta = 1$ . Проследим с помощью диаграмм на рис.3.1, 3.2 за изменением температуры  $\theta$  в центре пластины и на ее поверхности для задачи, сформулированной выше.

В начальный момент величина  $\theta$  должна быть равна единице. Однако, для произвольного числа  $Bi$  эту точку можно обнаружить лишь на рис.3.1, то есть в центре пластины. На рис.3.2 эта точка попадает на диаграмму лишь при достаточно малых значениях числа  $Bi$  (порядка 0,1 и менее). Согласно общепринятой терминологии эта ситуация условно соответствует случаю **высоко теплопроводного тела**. При этом внутреннее термическое сопротивление тела мало по сравнению с термическим сопротивлением теплоотдачи к поверхности и перепад температуры внутри пластины мал.

Можно показать, что при  $Bi \rightarrow 0$ , распределение температуры по толщине пластины с достаточной точностью определяется выражением

$$\theta = \cos\left(\sqrt{Bi} \frac{x}{\delta}\right) e^{-Bi \cdot Fo} . \quad (3.13)$$

Поскольку аргумент косинуса в этом случае близок к нулю, то предэкспоненциальный множитель близок к единице и практически не зависит от  $x$ . Действительно, если мы попытаемся сравнить графики для  $x = 0$  и  $x = \delta$ , то обнаружим, что фактически они совпадают.

При больших числах  $Bi$ , которые соответствуют случаю **низко теплопроводного тела**, температура поверхности настолько быстро приближается к температуре охлаждающей среды, что при выбранном на диаграммах масштабе для числа  $Fo$  соответствующие точки оказываются практически на оси ординат.

При  $Bi \rightarrow \infty$ ;  $T_c = T_{ж}$ ;  $\theta_{x=\delta} = 0$ . Такие условия практически обеспечиваются при  $Bi \geq 100$ . Тогда справедливо уравнение

$$\theta_{x=0} = \frac{4}{\pi} e^{-\frac{\pi^2}{4} Fo} \quad (3.14)$$

При неограниченном росте числа  $Bi$  мы фактически приходим к граничным условиям 1-го рода, когда температура поверхности постоянна и равна  $T_{жс}$ . Этому условию соответствует предельная линия на диаграмме рис.3.1.

Все принципиальные выводы о влиянии числа  $Bi$  на температурные поля, сделанные для неограниченной пластины остаются в силе и для случая охлаждения бесконечного цилиндра.

Обратим теперь внимание на следующие обстоятельства. При построении диаграмм на рис. 3.1, 3.2 используются так называемые полулогарифмические координаты с логарифмической осью ординат и линейной осью абсцисс. Такая форма выбрана не случайно. Из рис. 3.1, 3.2 видно, что за исключением весьма малого участка, соответствующего числам  $Fo < 0,25..0,3$ , температура в них описывается нисходящими **прямыми линиями**. Скачки наклона этих линий связаны с необходимостью изменения масштаба для числа  $Fo$ , чтобы поместить весь диапазон изменения чисел  $Fo$  на одной картинке. Это определяется существованием так называемого **регулярного режима**.

### 3.2. Регулярный режим процессов теплопроводности

Выше уже упоминалось о возможности ограничиться в теоретическом решении для распределения температуры одним членом вида (3.13) или (3.14). Оказалось, что это возможно уже при  $Fo \geq 0,25 - 0,3$  для любых значений числа  $Bi$ . Итак, мы описываем распределение температуры выражением

$$\theta = A_1 R e^{-m\tau}, \quad (3.15)$$

где  $A$  - постоянная, определяемая начальным распределением температуры, внутри тела;  $R$  - функция, определяемая координатами и числом  $Bi$ ;  $m = ak_1^2$  - темп регулярного режима,  $a$  - коэффициент теплопроводности,  $k_1$  - первое собственное число задачи. Для тел сложной формы величину  $m$  удобно определять экспериментально.

Нестационарный процесс теплопроводности, описываемый уравнением вида (3.15), называется **регулярным тепловым режимом**.

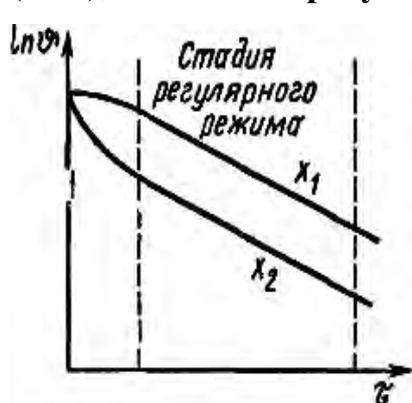


Рис. 3.3. Зависимость логарифма избыточной температуры от времени  $\tau$

Прологарифмируем формулу (3.15).

Тогда получим

$$\begin{aligned} \ln \theta &= \ln(A \cdot R) - m\tau \quad \text{или} \\ \ln \theta &= -m \cdot \tau + C(x, y, z). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Из уравнения (3.16) следует, что логарифм относительной температуры – линейная функция времени, что справедливо для любой точки тела. На рис.3.3 показано изменение температуры в точках  $x_1$  и  $x_2$  при охлаждении тела.

Автомодельность относительной температуры  $\theta$  во времени - это характерная особенность регулярного режима. Продифференцировав уравнение (3.16),

выведем уравнение, связывающее логарифмическую производную  $\theta$  по времени с коэффициентом  $m$

$$m = -\frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial \tau} = \frac{\partial \ln \theta}{\partial \tau} = tg\varphi, \quad [1/c]. \quad (3.17)$$

Из уравнения (3.17) видно, что темп регулярного режима -  $m$  охлаждения (нагревания) не зависит ни от координат, ни от времени. Он представляет собой относительную скорость изменения температуры и в любой точке тела остаётся постоянным. Темп регулярного режима определяется геометрической формой и размерами тела, а также его физическими свойствами и условиями теплообмена на поверхности тела.

### 3.3. Нестационарное температурное поле в объеме, где осуществляются химические процессы

Решение подобных задач обычно представляет большую сложность. В качестве примера процесса с внутренним тепловыделением рассмотрим пластину, в которой происходит экзотермическая реакция.

В системах, где осуществляются химические процессы, мощность внутренних источников теплоты непостоянна. Она связана с кинетикой химического процесса. В силу сложности задачи рассматривать здесь процесс ее решения не имеет смысла. Поэтому раздел построен следующим образом. Сначала приводится качественный анализ рассматриваемого процесса. Затем описывается общий подход к отысканию количественных характеристик путем решения уравнения теплопроводности.

На рис. 3.4 показано изменение температуры на поверхности  $t_n$  и  $t_u$  в

центре тела, нагреваемого в среде с постоянной температурой  $t_{ж}$  при отсутствии внутреннего тепловыделения  $q_v$  (пунктирные линии) и наличии внутренних источников теплоты переменной мощности  $q_v(\tau)$ . В условиях экзотермической реакции, начиная с момента времени  $\tau_0$ , скорость прогрева в центре пластины начинает заметно обгонять скорость нагрева при отсутствии источников теплоты.

С момента времени  $\tau_1$  температура в центре пластины будет превышать температуру поверхности. Затем, по мере затухания химического процесса, температура  $t_u$  (2), пройдя через максимум, будет постепенно сближаться с  $t_u(1)$  и стремиться к  $t_{ж}$ , когда реакция прекратится (рис 3.4а).

На рис. 3.4б показаны зависимости

$$\Delta t = t_n - t_u = f(\tau),$$

которые носят название **дифференциальных термограмм** для пластины при простом прогреве (1)

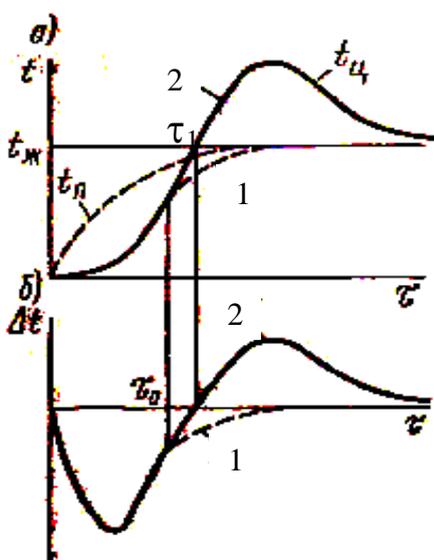


Рис. 3.4. Распределение температуры в образце при отсутствии внутренних источников теплоты (1) и с внутренними источниками теплоты (2)

и при наличии реакции с экзотермическим эффектом (2).

В химических процессах выделяющееся количество теплоты пропорционально количеству прореагировавшего вещества. Степень превращения вещества определяется соотношением

$$\alpha = C_{\tau} / C_o = \Delta H_{\tau} / \Delta H, \quad (3.18)$$

где  $C_{\tau}$  и  $C_o$  – концентрации исходного соединения к моменту  $\tau$  и в начале реакции;  $\Delta H_{\tau}$  и  $\Delta H$  – количество теплоты, выделенное (поглощенное) к моменту  $\tau$  реакции, и тепловой эффект реакции.

Пусть ход реакции описывается уравнением кинетики химической реакции 1-го порядка. Это означает, что скорость реакции пропорциональна первой степени концентрации. В этом случае убывание  $\alpha$  описывается линейным уравнением

$$\frac{d\alpha}{d\tau} = -k\alpha, \quad (3.19)$$

где  $k$  – константа скорости реакции;  $\tau$  – время реакции.

Тогда выражение для  $\alpha$  имеет вид:

$$\alpha = 1 - e^{-k\tau}. \quad (3.20)$$

Количество теплоты, выделяющееся за интервал времени реакции  $\tau$  определяется соотношением

$$q_v = q_0 e^{-k\tau}, \quad (3.21)$$

где  $q_0 = k \cdot \Delta H$  – величина, постоянная для данной химической реакции.

Уравнение теплопроводности в этом случае запишется в виде

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{q_0 \cdot e^{-k\tau}}{c \cdot \rho}. \quad (3.22)$$

Для решения подобных уравнений ранее обычно использовался метод интегрального преобразования Лапласа. Этот метод называют также **операционным исчислением**. Согласно методу О. Хевисайда в соответствии с искомой функцией (оригиналу) приводится другая функция (изображение), для которой операция дифференцирования заменяется умножением, а интегрирование – делением на независимую переменную. Таким образом, обыкновенным дифференциальным уравнениям для оригиналов отвечают алгебраические уравнения для изображений, а уравнения в частных производных для оригиналов – обыкновенные дифференциальные уравнения для изображений. Оригиналы и их изображения связаны между собой формулами прямого и обратного преобразования Лапласа. Изображение функции  $F(\tau)$  по Лапласу определяется как

$$\bar{F}(s) = \int_0^{\infty} F(\tau) e^{-s\tau} d\tau. \quad (3.23)$$

Вспомогательная переменная  $s$  называется лапласовской переменной и имеет размерность  $1/\tau$ . Переход от изображения к оригиналу довольно сложен,

однако для него можно было использовать готовые таблицы, которые имеются в справочной литературе.



Рис. 3.5. Оливер Хевисайд

Оливер Хевисайд (1850–1925), английский физик и математик. Его основные физические работы посвящены электромагнетизму и математической физике. Хевисайд исследовал скин-эффект и переписал результаты Максвелла, сведя систему из 20 уравнений с 12 переменными к 4 дифференциальным уравнениям, известным сейчас как уравнения Максвелла. Он впервые использовал для решения задач операционное исчисление, которое вызвало бурную полемику из-за отсутствия его строгого обоснования. Тогда он произнёс известную фразу: «Математика есть наука экспериментальная, определения появляются последними». Он предложил увеличивать индуктивность телефонных линий для улучшения дальней связи и ввел понятие импеданса, т.е. полного сопротивления синусоидальному переменному току, выдвинул гипотезу о существовании ионизированного слоя атмосферы, способного отражать радиоволны (ионосферы).

Как видно из приведенных иллюстраций, температура в химических системах определяется не только числами  $F_0$  и  $B_i$ , но и кинетическими характеристиками химического процесса.

В настоящее время для решения подобных задач используются, в основном, численные методы.

### 3.4. Использование метода подобия для решения нестационарного уравнения теплопроводности

В этом и следующем разделах приведены решения некоторых нестационарных задач теплопроводности, ценность которых определяется возможностью представления решения в конечной аналитической форме. В отличие от метода Фурье и его модификаций, которые приводят к решениям в виде бесконечных рядов, эти методы оказываются полезными и в настоящее время.

Для решения ряда задач теплопроводности оказывается весьма полезным **метод подобия**. Суть его состоит в следующем. Как легко установить, уравнение теплопроводности остается неизменным при преобразовании переменных

$$\begin{aligned} x' &= kx \\ \tau' &= k^2 \tau \end{aligned} \quad (3.24)$$

То есть если масштабы длины меняются в  $k$  раз, то масштаб времени следует изменить в  $k^2$  раз. Если начальные и граничные условия при указанном преобразовании остаются без изменений, то для функции  $t(x, \tau)$ , которая является решением уравнения теплопроводности, должно иметь место равенство

$$T(x, \tau) = T(kx, k^2 \tau) \quad \text{при любых значениях } x, \tau \text{ и } k. \quad (3.25)$$

Положим  $k = 1/2 t^{0,5}$ . Тогда получим

$$T(x, \tau) = T\left(\frac{x}{2\sqrt{\tau}}, \frac{1}{4}\right) = T_0 f\left(\frac{x}{2\sqrt{\tau}}\right). \quad (3.26)$$

Таким образом, температура оказывается зависящей от одного аргумента

$$z = \frac{x}{2\sqrt{\tau}}. \quad (3.27)$$

Использование такого преобразования эффективно, если задача не содержит внутренних масштабов, что могло бы изменить граничные и начальные условия при выполнении преобразований (3.25). Идея этого преобразования принадлежит Больцману.

Проиллюстрируем использование указанного метода на примере следующей практически интересной задачи. Пусть мы имеем изотермическое полубесконечное тело с плоской поверхностью  $x = 0$ , которая в начальный момент времени приводится в контакт с идеально теплоотдающей средой. Температуру тела в начальный момент будем считать равной нулю, а температуру среды –  $T_0$ . Если нас интересует лишь начальный период процесса, то мы можем рассматривать тело, как полубесконечный массив. Тогда задача будет выглядеть следующим образом. Необходимо решить уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T(x, \tau)}{\partial x^2}; \quad (3.28)$$

при следующих граничных и начальных условиях:

$$T(0, \tau) = T_0 \quad \tau > 0; \quad T(x, 0) = 0 \quad x > 0. \quad (3.29)$$

Вычислим производные для  $T$  с помощью формулы (3.26)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = T_0 \frac{d^2 f}{dz^2} \frac{1}{4\tau} \quad \frac{\partial T}{\partial \tau} = -\frac{xT_0}{4\tau^{3/2}} \frac{df}{dz} = -T_0 \frac{z}{2\tau} \frac{df}{dz}.$$

Подставляя их затем в уравнение теплопроводности и сокращая множитель  $t_0/4\tau$ , получим

$$a \frac{d^2 f}{dz^2} = -2z \frac{df}{dz} \quad (3.30)$$

при дополнительных условиях

$$z = 0, \quad T = T_0; \quad z = \infty, \quad T = 0. \quad (3.31)$$

Интегрируя уравнение (3.30), будем иметь

$$\begin{aligned} a \cdot f'' / f' &= -2z, & f' &= C \exp(-z^2/a), \\ f &= C_1 - C_2 \operatorname{erf}(x/2\sqrt{a\tau}), \end{aligned}$$

где  $\operatorname{erf}(z) = 2/\sqrt{\pi} \int_0^z e^{-\xi^2} d\xi$  - интеграл ошибок.

С учетом начального условия  $T(x, 0) = 0$  и граничного условия  $T(0, \tau) = 0$  можно определить константы  $C_1$  и  $C_2$ . С учетом (3.26) имеем

$$f(0) = C_1 = 1, f(\infty) = C_1 + C_2 = 0 \quad .$$

Следовательно,  $C_1 = 1, C_1 + C_2 = 0, C_2 = -1$ . Окончательно получаем

$$T = T_0 [1 - \operatorname{erf}(x/2\sqrt{a\tau})] \quad . \quad (3.32)$$

Теперь, используя формулу (3.32), найдем закон изменения теплового потока на границе в зависимости от времени

$$q(0, \tau) = -\lambda \frac{\partial T(0, \tau)}{\partial x} = \frac{\lambda \cdot T_0}{\sqrt{\pi \cdot \exp(0)} \sqrt{a \cdot \tau}} = \frac{\lambda \cdot T_0}{\sqrt{\pi \cdot a \cdot \tau}} \quad . \quad (3.33)$$

С помощью несколько более громоздких операций можно найти выражение для распределения температуры при граничных условиях 3-го рода.

$$\frac{T - T_0}{T_{жс} - T_0} = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a \cdot \tau}}\right) - \exp\left(\frac{\alpha \cdot x}{\lambda} + \frac{\alpha^2 \cdot a \cdot \tau}{\lambda^2}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a \cdot \tau}} + \frac{\alpha \sqrt{a \cdot \tau}}{\lambda}\right) \quad , \quad (3.34)$$

где  $T_{жс}$  – температура среды, граничащей с поверхностью при  $x = 0$ ;

$\operatorname{erfc}(z) = 1 - \operatorname{erf}(z)$ ;  $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи к поверхности при  $x = 0$ .

Приведем некоторые численные примеры использования уравнения (3.32).

Пусть мы хотим определить, через какой промежуток времени температура на расстоянии 1 см от поверхности достигнет величины  $\frac{T_0}{2}$ . Подставляя значения  $a$ , получим следующие результаты: серебро – 0,64 с; висмут – 15,7 с; грунт –  $\approx 4$  мин.

В свое время результаты решения задач теплопроводности для полуограниченного тела пытались использовать для определения возраста земли. В простейшем варианте считалось, что в начальный момент земля имела температуру, соответствующую температуре плавления горных пород. Кельвин, рассматривая

Уильям Томсон (лорд Кельвин) 1824-1907.



Он был одним из пионеров современной физики и создателем термодинамики. Томсон определил значение абсолютного нуля температуры, близкое к современной оценке. Теперь абсолютная шкала температуры носит его имя. Он сумел связать идеи Джоуля с работой Сади Карно по тепловым машинам, что привело к отказу от концепции «теплорода». Он также попытался оценить возраст Земли для чего, рассчитал, сколько времени потребовалось для охлаждения расплавленного земного шара до состояния существующей температуры. Томсон принял деятельное участие в прокладке трансатлантического телеграфного кабеля. длиной 3000 миль по дну океана между Европой и Северной Америкой в 1866 г.

Рис. 3.6. Уильям Томсон  
два варианта начальной температуры  $3900^\circ\text{C}$  и  $1200^\circ\text{C}$ , получил значения от  $10^8$  до  $10^7$  лет. Однако, как оказалось, при таком подходе необходимо также учиты-

вать различные химические процессы, а также влияние влажности на температуропроводность и изменение температуры плавления в зависимости от давления. При этом порядок величин становится равным  $10^9$  лет.

### 3.5. Задача теплопроводности для полубесконечного тела с периодическими граничными условиями на поверхности

Выше были рассмотрены некоторые варианты решения уравнения теплопроводности при постоянных граничных условиях. Однако значительный практический интерес представляет отыскание решений для переменных во времени граничных условиях. Наиболее интересной из них с практической точки зрения является задача с периодическими граничными условиями на поверхности. Такие задачи встречаются в широком диапазоне случаев от исследования колебаний температуры коры земли до определения термических напряжений в стенках различных поршневых машин.

Если для нас основной целью является описание температурного поля в области, где его колебательный характер проявляется существенным образом, то рассмотрение задачи для полуограниченного тела является наиболее простым путем.

Итак, рассмотрим следующую задачу. На поверхности полуплоскости имеют место гармонические колебания температуры, то есть температура удовлетворяет условию

$$\theta(0, \tau) = A \cos(\omega\tau - \varepsilon) \quad (3.35)$$

Не нарушая общности задачи, можно принять среднее значение температуры равным нулю. Физически очевидно, что для любой глубины  $x$ , через некоторый промежуток времени, колебательный процесс окажется установившимся, то есть будут иметь место колебания температуры с частотой  $\omega$  и амплитудой, отличной от  $A$ . Запишем уравнение теплопроводности для одномерного случая

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = a \cdot \frac{d^2 \theta}{dx^2} \quad (3.36)$$

Аналогично (3.1 - 3.2), найдем решение для случая установившихся колебаний в форме произведения  $\theta = T(\tau)X(x)$  и придем к уравнению (3.2)

$$\frac{dT}{d\tau} = -ak^2 T$$

Однако здесь ситуация отличается от рассмотренной ранее при построении решения (3.2). Очевидно, что функция  $T$  должна иметь колебательный характер. Чтобы построить такое решение, необходимо вспомнить известное соотношение, связывающее экспоненциальную и тригонометрические функции

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

где  $i$  - мнимая единица  $i = \sqrt{-1}$ .

Для построения требуемого решения необходимо искать его в виде

$$T = e^{i(\omega\tau - \varepsilon)} \quad . \quad (3.37)$$

Подставляя (3.37) в (3.2), получим

$$i\omega = -ak^2; \quad k^2 = -i\omega/a \quad ,$$

откуда имеем

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{i\omega}{a} X \quad \text{или} \quad \frac{d^2 X}{dx^2} - \frac{i\omega}{a} X = 0 \quad . \quad (3.38)$$

Уравнение (3.38) является обыкновенным линейным дифференциальным уравнением 2-го порядка. Его решение имеет вид

$$X = A \cdot \exp\left[-x\sqrt{\frac{i \cdot \omega}{a}}\right] = A \cdot \exp\left[-x(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2a}}\right] \quad . \quad (3.39)$$

Здесь учтено равенство  $\sqrt{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ , которое легко проверить возведением в квадрат правой и левой частей. Решение в целом имеет вид

$$\theta = T(\tau) \cdot X(x) = A \cdot \exp\left[-x(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2a}} + i(\omega \cdot \tau - \varepsilon)\right] \quad . \quad (3.40)$$

При этом оставлена лишь экспонента со знаком «-», чтобы решение было ограничено при неограниченном росте  $x$ .

Обозначим  $\left[\sqrt{\frac{\omega}{2a}}\right]$  через  $k^{**}$ . Тогда получим

$$\theta = A \cdot \exp(-k^{**}x)[\cos(\omega \cdot \tau - \varepsilon - k^{**}x) + i \cdot \sin(\omega \cdot \tau - \varepsilon - k^{**}x)] \quad . \quad (3.41)$$

Возможны два решения, соответствующие действительной или мнимой части

$$\theta = A \cdot \exp(-k^{**}x)[\cos(\omega \cdot \tau - \varepsilon - k^{**}x)] \quad , \quad (3.42)$$

или

$$\theta = A \cdot \exp(-k^{**}x)[\sin(\omega \cdot \tau - \varepsilon - k^{**}x)] \quad . \quad (3.43)$$

Интересно, что это решение первоначально было получено для гидродинамической задачи, в которой рассматривалось колебательное движение вязкой жидкости при малых скоростях движения – хорошая иллюстрация подобия, которое мы будем рассматривать в следующих частях пособия. Учитывая граничные условия, выбираем первое решение. Это затухающая по глубине  $x$  волна, длина которой  $\lambda$  равна  $2\pi/k^{**}$ , а частота  $n = \omega/2\pi$ .

Рассмотрим теперь некоторые свойства периодической функции  $\theta$ . Амплитуда колебаний температуры убывает по закону  $\exp(-k^{**}x) = e^{-\frac{2\pi x}{\lambda}}$ . Падение амплитуды происходит тем быстрее, чем больше частота (короче волна). На расстоянии от поверхности, равном одной длине волны, амплитуда убывает примерно в 526 раз. Отсюда следуют два вывода.

Во-первых, для проводника, толщина которого составляет 1-2 длины волны, можно использовать решение для полугограниченного тела.

Во-вторых, можно ожидать, что если форма колебаний температуры на поверхности негармоническая, то при разложении этой функции в ряд Фурье на небольшой глубине колебания будут определяться лишь первой гармоникой. Этот вывод похож на результаты анализа, приводящего к регулярному режиму.

Приведем численные оценки для длин волн.

Для металлических проводников порядок длины волны составляет 3 - 4 см при частоте 1гц и 25-30 см при периоде колебаний 1 мин.

Для горных пород длина волны порядка 3 см при периоде 1 мин., 1 м при периоде 1 день и 20 м при одном колебании в год.

Ряд ученых, начиная с Фурье, использовали затухание периодических колебаний температуры для определения теплопроводности горных пород. Позднее этими же оценками занимался Кельвин.

### 3.6. Продвижение фронта фазового превращения

В многочисленных природных и технологических процессах происходят фазовые переходы тел из твердого в жидкое состояние или обратно. При этом соответственно имеет место поглощение или выделение энергии и продвижение границы фазового перехода в ту или другую сторону. Особенно близкой к рассматриваемой постановке задачи является проблема промерзания или оттаивания грунта. В этих условиях процесс не осложняется движением жидкой фазы.

Для определенности рассмотрим случай, когда происходит плавление твердого тела с поглощением удельной теплоты плавления и продвижением фронта фазового перехода от поверхности полубесконечного тела в его глубинные слои. Скорость продвижения фронта не может быть заранее известна, так как она, очевидно, является функцией самого процесса нестационарного прогрева тела.

Поскольку при переходе тела из твердого состояния в жидкое его теплофизические свойства меняются, то подстрочный индекс 1 будет означать, что тело находится в жидкой области, а индекс 2 – в твердой области. Схема постановки задачи показана на рис. 3.7. Пренебрегая возможной конвекцией в жидкой облас-

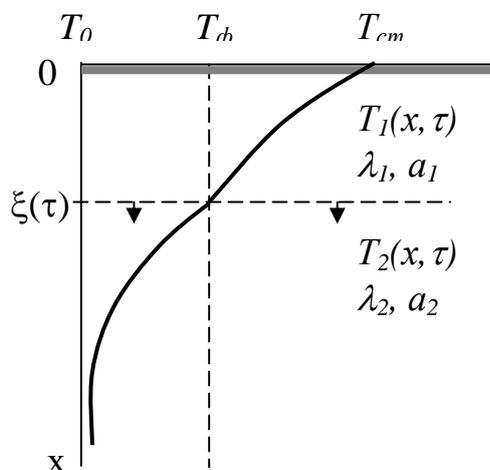


Рис.3.7. Мгновенный профиль температуры в неоднородном полубесконечном теле при наличии движущегося фронта фазового превращения

ти, рассматриваем идентичные уравнения теплопроводности для обеих зон.

Будем считать, что физические свойства каждой фазы постоянны в пределах занимаемой ею зоны. Граница между зонами продвигается в направлении оси  $x$  со скоростью, подлежащей определению.

Математическая модель процесса записывается в виде следующей системы, в которую входят два дифференциальных уравнения и условия однозначности.

Как видно из системы (3.44), предполагаются известными температура наружной поверхности  $T_{cm}$ , равномерная температура тела  $T_0$  в начальный момент времени. Считается, что температура на бесконечном удалении от поверхности ограничена, а движение фронта фазового превращения начинается от поверхности тела. На границе фазового перехода температура равна  $T_\phi$ .

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial \tau} &= a_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}; & 0 < x < \xi(\tau); & \tau > 0 \\ \frac{\partial T_2}{\partial \tau} &= a_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2}; & x > \xi(\tau); & \tau > 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.44)$$

$$T_1|_{x=0} = T_{cm}; \quad T_2|_{\tau=0} = T_0; \quad T_2|_{x \rightarrow \infty} \neq \infty; \quad \xi|_{\tau=0} = 0;$$

$$T_1|_{x=\xi} = T_2|_{x=\xi} = T_\phi; \quad -\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x}|_{\xi} = q_V \frac{d\xi}{d\tau} - \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}|_{\xi}.$$

Последнее из уравнений системы (3.44) выражает условие теплового баланса на границе фазового перехода, где разность плотностей теплового потока равна энергии фазового перехода ( $q_V$  – объемная теплота фазового превращения).

Иозеф Стефан (1835-1893) - австрийский физик.

Родился в Словении, но его научная деятельность проходила в Венском университете. Его имя известно благодаря трем основным достижениям. Прежде всего это закон Стефана-Больцмана, который определяет зависимость энергии излучения черного тела от абсолютной температуры, установленный им в 1879 г. Он показал что при диффузии в условиях фазового перехода возникает дополнительный конвективный поток, который в дальнейшем получил название стефановского потока. Наконец он впервые рассмотрел задачу теплопроводности с движущейся границей, которая возникает в результате фазового перехода. Эта проблема получила название задачи Стефана.



Рис. 3.8. Иозеф Стефан

Сформулированная задача носит название задачи Стефана в честь ученого, впервые ее сформулировавшего и получившего аналитическое решение. Это решение имеет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned}
 T_1 &= T_{cm} + (T_\phi - T_{cm}) \frac{\operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{a_1\tau}}}{\operatorname{erf} \frac{\chi}{2\sqrt{a_1}}} \\
 T_2 &= T_0 + (T_0 - T_\phi) \frac{\operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{a_2\tau}}}{\operatorname{erf} \frac{\chi}{2\sqrt{a_{21}}}}
 \end{aligned} \right\} \quad (3.45)$$

Множитель  $\chi$  находится из следующего трансцендентного уравнения

$$\frac{q_v}{2} \chi = \lambda_2 \left[ \frac{T_0 - T_\phi}{2\sqrt{a_2}} \frac{\exp\left(-\frac{\chi^2}{4a_2}\right)}{\operatorname{erfc} \frac{\chi}{2\sqrt{a_2}}} \right] - \lambda_2 \left[ \frac{T_\phi - T_{cm}}{2\sqrt{a_1}} \frac{\exp\left(-\frac{\chi^2}{4a_1}\right)}{\operatorname{erfc} \frac{\chi}{2\sqrt{a_1}}} \right] \quad (3.46)$$

Заметим, что уравнение (3.46) является результатом подстановки решения (3.45) в последнее из уравнений системы (3.44). Скорость продвижения фронта фазового превращения определяется формулой

$$\xi = \chi\sqrt{\tau} \quad (3.47)$$

Представленное здесь точное решение задачи о продвижении фронта фазового превращения может быть получено только для полубесконечного тела при граничных условиях первого рода. В более сложной постановке задача решается лишь приближенными методами.

### 3.7. Численные методы решения задач теплопроводности

Изложение в основном базируется на книге С. Патанкара «Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости». Ее ценность состоит в том, что проблемы излагаются достаточно просто и с ориентацией на конкретные типы задач.

#### 3.7.1. Метод контрольного объема

При использовании численных методов мы имеем дело с дискретными аналогами дифференциальных уравнений, описывающих рассматриваемый физический процесс. Эти уравнения выражают в дифференциальной форме законы сохранения массы, импульса и энергии.

Дискретизацию уравнений можно осуществлять различными способами, но одним из наиболее удобных способов постановки дискретных задач в виде, обеспечивающем устойчивость решения, является **метод контрольного объема**.

Именно этот метод и будет использоваться ниже. Идея метода состоит в том, что конечно-разностное уравнение должно наглядно выражать закон сохранения, соответствующий рассматриваемому дифференциальному уравнению. Это позволяет сохранить физический смысл задачи и при использовании конечно-разностных аналогов.

Основная идея метода контрольного объема легка для понимания и, что очень существенно, поддается прямой физической интерпретации. При этом расчетная область разбивается на некоторое число непересекающихся контрольных объемов таким образом, что каждая узловая точка содержится в одном контрольном объеме. Дифференциальное уравнение интегрируется по каждому контрольному объему, используя некоторые кусочные профили, описывающие изменение искомой функции  $\Phi$  между выбранными узловыми точками. В результате находится дискретный аналог дифференциального уравнения, в который входят значения функции  $\Phi$  в узловых точках.

При использовании метода контрольного объема наиболее удобно иметь дело с уравнениями в частных производных, записанными в так называемой **дивергентной** форме. В качестве примера рассмотрим уравнение неразрывности, выражающее закон сохранения массы. Для любой транспортируемой величины закон ее сохранения для некоторого элемента объема  $v$  можно записать в виде

$$\frac{\partial m}{\partial \tau} + \oint_{\sigma} q_n d\sigma = 0 \quad , \quad (3.48)$$

где  $q_n$  – поток величины  $m$  в направлении нормали  $\mathbf{n}$  к поверхности  $\sigma$ , охватывающей элемент объема  $v$ . Если транспортируемая величина – теплота, то уравнение теплопроводности имеет вид

$$c\rho \frac{\partial t}{\partial \tau} + \text{div}(q) = 0 \quad , \quad (3.49)$$

где  $q$  – тепловой поток, который согласно закону Фурье равен  $q = -\lambda \text{grad}t$  .

Отсюда, если полагать коэффициент теплопроводности постоянным, получаем

$$c\rho \frac{\partial t}{\partial \tau} = \text{div}(\text{grad}t) \quad . \quad (3.50)$$

Дивергентная форма позволяет наиболее просто строить **консервативные конечно-разностные схемы**. Консервативной схемой называется разностная схема, обеспечивающая точное выполнение законов сохранения (исключая ошибки округления) на любой сетке в конечной области, содержащей произвольное число узлов разностной сетки.

Одним из важных свойств метода контрольного объема является то, что в нем заложено точное интегральное сохранение таких величин, как масса, импульс, энергия на любой группе контрольных объемов и, следовательно, на всей расчетной области. Таким образом, даже решение на грубой сетке удовлетворяет условиям консервативности.

Допускается двойное рассмотрение результатов решения дискретных уравнений относительно значений в узловых точках – как совокупность указанных значений и некоторой интерполяции между узловыми точками, или исключительно указанных значений. В методе контрольного объема используется второй подход. Интерполяционные формулы или профили рассматриваются лишь как вспомогательные, необходимые для расчета интегралов.

### 3.7.2 Основные правила построения разностных аналогов

Для иллюстрации основных правил построения разностных схем методом контрольного объема воспользуемся простейшим примером - одномерной стационарной задачей теплопроводности

$$\frac{d}{dx} \left( \lambda \frac{dT}{dx} \right) + Q = 0 \quad , \quad (3.51)$$

где  $\lambda$  - теплопроводность,  $T$  – температура,  $Q$  - плотность тепловыделения.

Расположим узловые точки, как на рис. 3.9, следующим образом

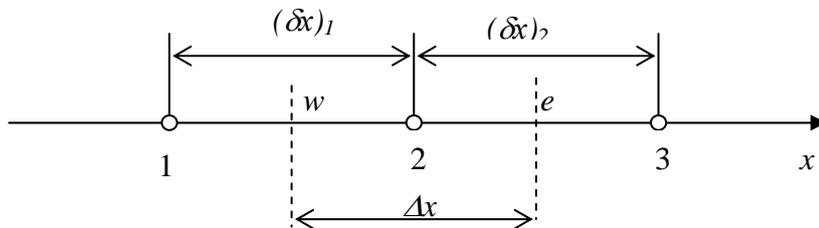


Рис.3.9. Шаблон узловых точек для одномерной задачи

Штриховыми линиями  $w$ ,  $e$  показаны границы контрольных объемов. Величину контрольного объема 2 считаем равной  $\Delta x \cdot 1 \cdot 1$ .

Интегрируя уравнение (3.51) по контрольному объему, получим

$$\left( \lambda \frac{dT}{dx} \right)_e - \left( \lambda \frac{dT}{dx} \right)_w + \int_w^e Q dx = 0 \quad . \quad (3.52)$$

Чтобы определить левую часть формулы (3.52), необходимо сделать некоторые предположения о виде профиля  $T$ . На рис. 3.10 представлены два варианта таких профилей. Для варианта а) производная  $dT/dx$  на границах контрольного объема не определена. Для варианта б) эта трудность не возникает и дискретный аналог уравнения (3.52) принимает вид

$$\frac{\lambda_e (T_3 - T_2)}{(\delta x)_e} - \frac{\lambda_w (T_2 - T_1)}{(\delta x)_w} + \bar{Q} \Delta x = 0 \quad , \quad (3.53)$$

где  $\bar{Q}$  - среднее по контрольному объему значение  $Q$ . Теперь запишем уравнение (3.53) в следующем виде

$$a_2 T_2 = a_3 T_3 + a_1 T_1 + b \quad , \quad (3.54)$$

где

$$a_1 = \frac{\lambda_w}{(\delta x)_w}; \quad a_3 = \frac{\lambda_e}{(\delta x)_e}; \quad a_2 = a_1 + a_3; \quad b = \bar{Q} \Delta x. \quad (3.55)$$

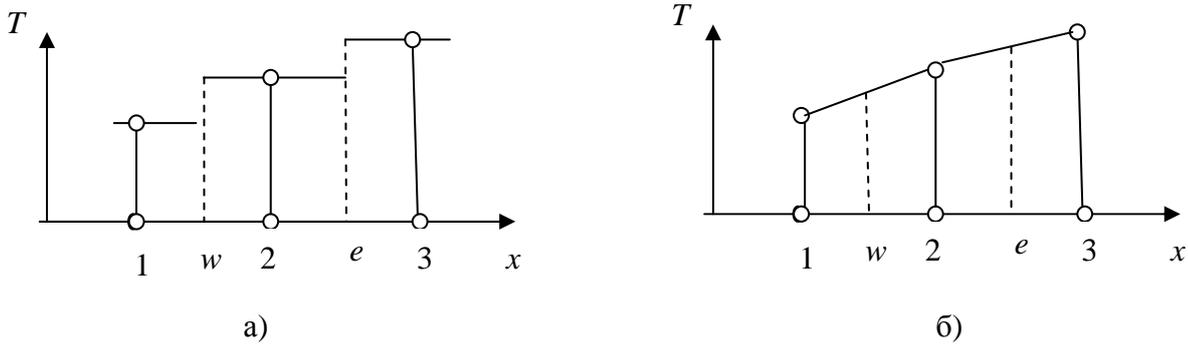


Рис.3.10. Простейшие аппроксимации профилей:  
а – ступенчатый профиль; б - линейный профиль

Важно заметить, что для расчета  $dT/dx$  можно было применить и другие интерполирующие функции, причем для различных величин они могут быть различными. Например, для вычисления  $\bar{Q}$  не обязательно предполагать линейный характер изменения  $Q$  между узловыми точками. То же относится и к  $\lambda$  и к другим возможным членам, содержащим значение температуры.

Таким образом, мы имеем существенную свободу выбора интерполяционных функций, что ведет к множеству способов получения дискретных аналогов уравнения. Предполагается, что при увеличении числа узловых точек решения для всех дискретных аналогов исходного уравнения совпадают.

Введем дополнительное требование, которое приведет к уменьшению числа подходящих формул. Потребуем, чтобы решение, полученное даже на грубой сетке, во-первых, всегда имело физически правдоподобный характер и, во-вторых, обеспечивало сохранение полного баланса.

Понять, имеет ли полученное решение физический смысл, обычно не слишком трудно, по крайней мере, для достаточно простых задач. Правдоподобное решение должно иметь такой же качественный характер, что и точное решение.

Несколько слов относительно аппроксимации источникового члена. Последний часто является функцией самой зависимой переменной  $T$ , и тогда желательно учесть эту зависимость при построении дискретного аналога. Однако формально мы можем учитывать только линейную зависимость, поскольку решение дискретных уравнений осуществляется с помощью решения систем линейных алгебраических уравнений. Запишем среднее значение  $\bar{Q}$  в виде

$$\bar{Q} = Q_C + Q_2 T_2, \quad (3.56)$$

где  $Q_C$  – постоянная составляющая  $Q$ , а  $Q_2$  – коэффициент.

Наличие  $T_2$  в формуле (3.56) отражает тот факт, что при записи среднего значения  $\bar{Q}$  предполагалось, что значение  $T_2$  распространяется на весь контрольный объем, то есть, по существу, использовался ступенчатый профиль.

Дискретный аналог уравнения теплопроводности с линеаризованным источником членом будет иметь такой же вид, как (3.55), но с несколько отличными значениями коэффициентов

$$a_2 T_2 = a_3 T_3 + a_1 T_1 + b, \quad (3.57)$$

где

$$a_1 = \frac{\lambda_w}{(\delta x)_w}; \quad a_3 = \frac{\lambda_e}{(\delta x)_e}; \quad a_2 = a_1 + a_3 - Q_2 \Delta x; \quad b = Q_c \Delta x. \quad (3.58)$$

Теперь перейдем к формулировке тех основных правил, о которых говорилось в начале раздела.

### 3.7.2.1. Соответствие потоков на границах объема

Выражения потока через границу, общую для двух контрольных объемов, при записи дискретных аналогов уравнений для этих объемов должны быть идентичны.

Это требование носит достаточно очевидный характер, ибо его несоблюдение закономерно должно привести к отклонению от консервативности. Чтобы избежать несоответствий, будем помнить, что поток на границе рассматривается отдельно, а не как принадлежащий определенному контрольному объему.

### 3.7.2.2. Положительность коэффициентов

В большинстве рассматриваемых задач влияние значений зависимой переменной в точках, соседних с некоторой узловой, на значение в этой узловой точке обусловлено диффузионными или конвективными процессами. Следовательно, увеличение значения в одной узловой точке должно привести к увеличению значения в соседней узловой точке, и наоборот. Тогда очевидно, что упомянутые коэффициенты должны иметь одинаковый знак. Отсюда следует, что все коэффициенты дискретных уравнений должны быть одного знака (например, положительны).

### 3.7.2.3. Отрицательность коэффициента при линеаризации источникового члена

Из определения коэффициентов (3.55) видно, что коэффициент  $a_2$  может стать отрицательным из-за последнего слагаемого. Этого можно заведомо избежать, если наложить условие отрицательности  $Q_2$ .

Данное правило не настолько произвольно, как это кажется на первый взгляд. На самом деле для большинства физических процессов угол наклона касательной к кривой, описывающей источниковый член как функцию зависимой переменной действительно отрицателен. В противном случае физический процесс мог бы стать неустойчивым, если отсутствуют некоторые специальные механизмы, компенсирующие этот эффект.

### 3.7.2.4. Сумма соседних коэффициентов

В рассматриваемое уравнение часто входят только производные зависимой переменной  $T$  (однородное уравнение). При этом, если функция  $T$  удовлетворяет уравнению, то и функция  $T + c$ , где  $c$  – произвольная постоянная, также удов-

летворяет дифференциальному уравнению. Это свойство уравнения должно также отразиться на его дискретном аналоге.

Уравнение (3.57) в общем случае двух- или трехмерной задачи может быть записано как

$$a_2 T_2 = \sum a_{nb} T_{nb} + b \quad , \quad (3.59)$$

где индекс  $nb$  обозначает соседние точки и суммирование проводится по всем соседним точкам.

Таким образом, необходимо найти условие, при котором увеличение  $T_2$  и всех  $T_{nb}$  на постоянную величину оставит уравнение (3.57) справедливым. Очевидно, что таким условием будет

$$a_2 T_2 = \sum a_{nb} T_{nb} \quad . \quad (3.60)$$

Легко видеть, что уравнение (3.56) действительно удовлетворяет сформулированному условию. Это означает, что значение  $T_2$  в средней точке является средневзвешенным значений температуры в соседних точках  $T_{nb}$ . В отличие от коэффициентов в (3.58) коэффициенты уравнения (3.60) не подчиняются данному правилу. Однако, это вполне естественно, поскольку рассматриваемое условие относится лишь к однородному уравнению.

### 3.7.3. Нестационарная одномерная теплопроводность

#### 3.7.3.1. Обобщенный дискретный аналог

Запишем одномерное уравнение нестационарной теплопроводности в дивергентном виде, полагая, что  $\rho c$  постоянно.

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad . \quad (3.61)$$

Поскольку уравнение нестационарно, то при записи дискретного аналога будут фигурировать предыдущие и последующие значения по времени ( $\tau$ ,  $\tau + \Delta\tau$ ). Будем обозначать их верхними индексами  $0$  и  $1$ . Получим дискретный аналог путем интегрирования по контрольному объему, как и для стационарной задачи.

При этом интегрирование выполняется также и по времени

$$\rho c \int_w^e \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \frac{\partial T}{\partial \tau} d\tau \cdot dx = \int_w^e \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx \cdot d\tau \quad (3.62)$$

В (3.62) пределы по  $x$  выбраны аналогично тому, как это было сделано в предыдущем разделе. Для представления  $\partial T / \partial \tau$  сделаем предположение, что значение  $T$  в узловой точке распространено на весь контрольный объем. Тогда

$$\rho \cdot c \int_w^e \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \frac{\partial T}{\partial \tau} d\tau \cdot dx = \rho \cdot c \cdot \Delta x (T_2^1 - T_2^0) \quad . \quad (3.63)$$

Повторяя выкладки, проделанные для стационарного случая, получаем

$$\rho \cdot c \cdot \Delta x (T_2^1 - T_2^0) = \int_{\tau}^{\tau + \Delta \tau} \left[ \frac{\lambda_e (T_3 - T_2)}{(\delta \cdot x)_e} - \frac{\lambda_w (T_2 - T_1)}{(\delta \cdot x)_w} \right] d\tau \quad (3.64)$$

Далее необходимо ввести предположение относительно изменения во времени в интервале  $(\tau, \tau + \Delta \tau)$  температур  $T_1$ ,  $T_2$  и  $T_3$ . При этом возможны различные варианты. Один из наиболее употребительных имеет вид

$$\int_{\tau}^{\tau + \Delta \tau} T_2 d\tau = [\sigma \cdot T_2^1 + (1 - \sigma) T_2^0] \Delta \tau \quad (3.65)$$

где  $\sigma$  - весовой коэффициент, изменяющийся от 0 до 1. Используя аналогичные аппроксимации для интегралов от  $T_1$  до  $T_3$  из уравнения (3.65), получим

$$\rho \cdot c \cdot \Delta x (T_2^1 - T_2^0) = \sigma \left[ \frac{\lambda_e (T_3^1 - T_2^1)}{(\delta \cdot x)_e} - \frac{\lambda_w (T_2^1 - T_1^1)}{(\delta \cdot x)_w} \right] + (1 - \sigma) \left[ \frac{\lambda_e (T_3^0 - T_2^0)}{(\delta \cdot x)_e} - \frac{\lambda_w (T_2^0 - T_1^0)}{(\delta \cdot x)_w} \right] \quad (3.66)$$

Преобразуем выражение (3.66), опуская одновременно индекс  $l$  у последующих значений  $T$ . Тогда получим

$$a_2 \cdot T_2 = a_1 [\sigma \cdot T_1 + (1 - \sigma) T_1^0] + a_3 [\sigma \cdot T_3 + (1 - \sigma) T_3^0] + [a_2^0 - a_1(1 - \sigma) - a_3(1 - \sigma)] T_2^0 \quad (3.67)$$

где

$$a_1 = \lambda_w / (\delta x)_w; \quad a_3 = \lambda_e / (\delta x)_e; \quad a_2^0 = \rho c \Delta x / \Delta \tau; \quad a_2 = \sigma a_1 + \sigma a_3 + a_2^0 \quad (3.68)$$

### 3.7.3.2. Явная, Кранка-Николсона и полностью неявная схемы

Для определенных конкретных значений весового коэффициента  $\sigma$  дискретный аналог приводится к хорошо изученным системам для **параболических** дифференциальных уравнений.

В частности для  $\sigma = 0$  получаем явную схему, для  $\sigma = 0,5$  - так называемую схему Кранка-Николсона и для  $\sigma = 1$  - полностью неявную схему.

Сравним эти схемы с точки зрения их предпочтительности для конкретных расчетов.

Различные значения  $\sigma$  можно интерпретировать как характеристику изменения  $T_2$  от  $\tau$ , которая показана на рис. 3.11.

Явная схема, по существу, предполагает, что старое значение  $T_2^0$  существует в пределах всего временного шага, за

исключением точки  $\tau + \Delta \tau$ . Неявная схема предполагает, что в момент  $\tau$   $T_2$  резко изменяется от  $T_2^0$  до  $T_2^1$ , а затем остается равной  $T_2^1$  на всем временном шаге.

Схема Кранка-Николсона предполагает линейное изменение  $T_2$ . На первый

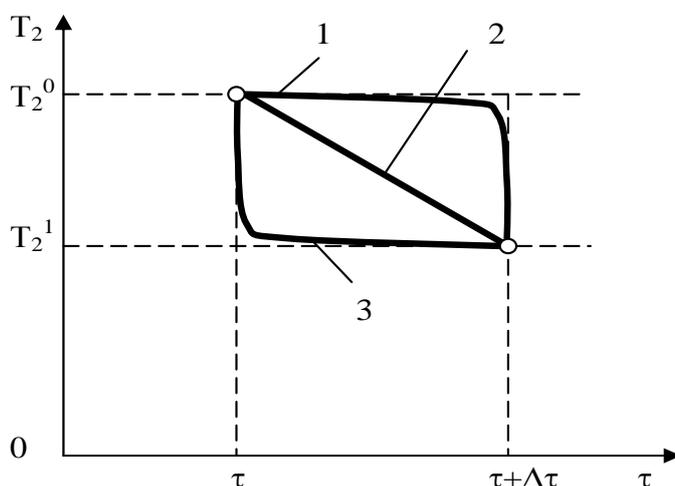


Рис.3.11. Изменение температуры во времени: 1-явная схема, 2- схема Кранка-Николсона, 3- неявная схема

взгляд линейное изменение выглядит более разумным, чем две другие альтернативы. Однако, на практике более удобной оказывается неявная схема. Приведем краткое пояснение. Для явной схемы ( $\sigma = 0$ ) уравнение (3.68) принимает вид

$$a_2 T_2 = a_1 T_1^0 + a_3 T_3^0 + (a_2^0 - a_1 - a_3) T_2^0 \quad (3.69)$$

Это означает, что  $T_2$  не зависит от других неизвестных, таких как  $T_1$  или  $T_3$ , а является явно определенной по известным температурам в предыдущий момент. Поэтому схема и называется **явной**. Она позволяет найти каждое из значений температуры  $T_2$  из одного уравнения. Однако, удобство явной схемы компенсируется ограничением, накладываемым на соотношение шагов из условия положительности коэффициентов. Действительно, из этого условия и уравнений (3.69), (3.70) следует

$$(a_2^0 - a_1 - a_3) > 0 \quad (3.70)$$

При постоянной теплопроводности  $\lambda$  имеем

$$\Delta\tau < \rho \cdot c \frac{(\Delta x)^2}{2\lambda} \quad (3.71)$$

Если это условие нарушается, то можно получить физически неправдоподобные результаты. Уравнение (3.71) является хорошо известным критерием устойчивости явной схемы. Его особенностью является необходимость уменьшать временной шаг пропорционально уменьшению квадрата пространственного шага, что накладывает требование малости  $\Delta\tau$ , или увеличивает время счета.

Схема Кранка-Николсона обычно считается безусловно устойчивой. Однако и при ее использовании могут возникать не имеющие физического смысла колебательные решения, а устойчивость в математическом смысле лишь гарантирует, что они в конечном итоге будут затухать.

Такое поведение можно объяснить, исходя из сформулированных выше условий. Для  $\sigma = 0,5$  коэффициент при  $T_2^0$  в уравнении (3.69) становится равным  $a_2^0 - (a_1 + a_3)/2$ . Для постоянного  $\lambda$  и равномерной сетки этот коэффициент равен  $\rho \cdot c \frac{\Delta x}{\Delta\tau} - \frac{\Delta\lambda}{\Delta x}$ . То есть, если шаг по времени недостаточно мал, то коэффициент также может оказаться отрицательным. Однако, поскольку схема Кранка-Николсона более точна, чем чисто явная или чисто неявная схема, то она все же может применяться, но также с соответствующими ограничениями на величину временного шага. Лишь при  $\sigma = 1$  мы имеем абсолютную гарантию положительности коэффициентов  $a_i \cdot a_i^0$ .

Аналогичным образом можно получить дискретные аналоги для двух- и трехмерного случаев. При этом лишь увеличивается количество узловых точек и коэффициентов. В результате решение соответствующей системы линейных уравнений становится более громоздким.

### 3.8. Об одном относительно простом методе получения приближенных решений нестационарных задач теплопроводности

Как мы могли видеть из предыдущего изложения, даже для одномерного случая и в условиях игнорирования переменности физических свойств, решения

нестационарных задач теплопроводности оказываются достаточно громоздкими. Что же касается случая нелинейности граничных условий, то здесь аналитическое решение в принципе оказывается невозможным. При этом, задачи подобного типа возникают на практике достаточно часто и в большом количестве.

Известны два альтернативных способа решения. Это электрическое моделирование и использование численных методов на базе вычислительной техники. Однако каждый из этих подходов является довольно трудоемким. Причем, электрическое моделирование не дает возможности рассматривать задачи при существенной нелинейности граничных условий ввиду чрезвычайной сложности их моделирования.

Что касается численных методов, то их применение требует существенной подготовительной работы. Результаты этой работы могут быть предоставлены потребителю или в виде программных пакетов с соответствующими инструкциями для пользователя, или в виде диаграмм, изображающих выполненные на ЭВМ результаты в некоторой безразмерной форме. Для этого используется обработка результатов расчетов с помощью теории подобия. Два примера таких диаграмм были приведены выше. Большой набор подобных диаграмм содержится в книге А.И. Пеховича и В.М. Жидких [2].

Упрощенный метод решения нестационарных задач теплопроводности, который носит название - метод **конечной глубины проникновения** (КГП), был предложен А.И. Вейником [3]. По своей идее он близок к более известному методу **интегральных уравнений пограничного слоя**, разработанному для решения задач конвективного теплообмена, который излагается ниже. Знакомство с методом КГП способствует лучшему восприятию этого материала. Упомянутая идея состоит в следующем. В большинстве случаев с достаточной для практических целей точностью можно полагать, что теплота проникает внутрь нагреваемого тела лишь на конечную глубину, которая носит название прогретого слоя. Проиллюстрируем использование этого метода для простой задачи. Рассмотрим одномерное уравнение теплопроводности для бесконечной плиты

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (3.72)$$

с начальным условием  $T = T_0$ . Примем, что на стенке при  $x = 0$  задано значение плотности теплового потока  $q_0$  (условие 2-го рода), а на границе прогретого слоя удовлетворяются условия

$$T|_{x=\Delta} = T_0; \quad \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=\Delta} = 0. \quad (3.73)$$

Интегрируя уравнение (3.72) по  $x$  в пределах от  $0$  до  $\Delta$ , получим

$$\frac{d}{d\tau} \left| \int_0^{\Delta} T dx - T_0 \Delta \right| = a \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_0. \quad (3.74)$$

Будем считать, что распределение температуры внутри прогретого слоя можно аппроксимировать квадратичной параболой:

$$T = T_0 + \frac{q_0}{2\lambda \cdot \Delta} (x - \Delta)^2, \quad (3.75)$$

где  $q_0$  – тепловой поток на поверхности плиты.

Разумеется, аппроксимация (3.75) лишь наиболее простая, позволяющая учесть граничные условия. Можно использовать и полином более высокой степени, но при этом необходимо придать к нему обоснованные дополнительные условия, позволяющие определить дополнительные коэффициенты.

Используя (3.73) и (3.75), можно привести уравнение (3.74) к виду

$$\frac{a \cdot q_0}{\lambda} = \frac{d}{d\tau} \left[ \frac{q_0 \cdot \Delta^2}{6 \cdot \lambda} \right]. \quad (3.76)$$

Формула (3.76) – дифференциальное уравнение относительно глубины прогретого слоя  $\Delta$ . Его решение имеет вид

$$\Delta = \sqrt{6a \cdot \tau}. \quad (3.77)$$

Подставляя (3.77) в формулу (3.75), получим распределение температуры в зависимости от времени. Аналогичным образом можно решить задачу для граничного условия 1-го рода:  $T = T_c$  при  $x = 0$ ; остальные условия остаются неизменными. В этом случае квадратичное распределение температуры должно иметь вид

$$T = T_0 + (T_c - T_0)(1 - x / \Delta)^2. \quad (3.78)$$

Нетрудно проверить, что (3.78) удовлетворяет всем граничным условиям. Подставляя (3.78) в (3.75), получим уравнение для толщины прогретого слоя

$$\frac{a \cdot 2(T_c - T_0)}{\Delta} = (T_c - T_0) \frac{d}{d\tau} \left[ \frac{\Delta}{3} \right]. \quad (3.79)$$

Интегрируя (3.79), получим выражение для толщины прогретого слоя

$$\Delta = \sqrt{12a \cdot \tau}. \quad (3.80)$$

Теперь можно сопоставить полученное решение с точным, которое было получено в разделе 3.4. Удобнее всего использовать для этого выражения для плотности теплового потока на поверхности  $x = 0$ . Точное решение для этого случая имеет вид (см. формулу (3.33))

$$q(0, \tau) = \frac{\lambda(T_c - T_0)}{\sqrt{\pi \cdot a \cdot \tau}}. \quad (3.81)$$

Чтобы получить аналогичное выражение в рамках использованного метода, продифференцируем выражение (3.78) по  $x$ , запишем выражение для плотности теплового потока и подставим в него выражение (3.80). Получим

$$q(0, \tau) = \frac{2\lambda(T_c - T_0)}{\sqrt{12a \cdot \tau}}. \quad (3.82)$$

Структура формул, естественно, является идентичной. Сравним теперь значения численных коэффициентов. Для выражения (3.81) имеем

$$1/\sqrt{\pi} = 0,564,$$

а для выражения (3.82)

$$2/\sqrt{12} = 0,577 .$$

Отличие составляет всего 2,3 %. Но сама по себе данная задача достаточно просто решается традиционными методами и полученное конкретное решение не представляет особого интереса. Однако, результат сопоставления позволяет предположить, что и для более сложных задач такой подход может дать возможность получить более или менее пригодное для практики приближенное решение достаточно простым способом.

Рассмотрим две задачи, первая из которых имеет точное аналитическое решение, а вторая может быть решена лишь численными методами.

**Задача 1.** Определение температуры на границе приведенных в соприкосновение полуплоскостей.

Эта задача (рис. 3.12) соответствует приведенным выше граничным условиям 4-го рода.

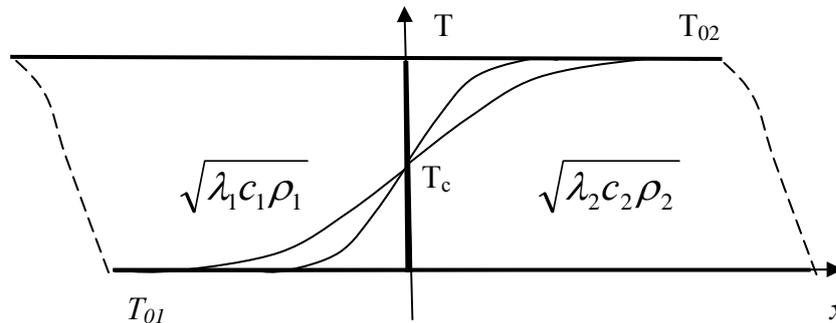


Рис. 3.12. Иллюстрация к задаче о температуре на границе двух приведенных в соприкосновение полуграниченных тел

По условиям задачи в начальный момент одна из полуплоскостей имеет температуру  $T_{01}$ , а вторая  $T_{02}$ . Таким образом  $T_1(x, 0) = T_{01}$ ;  $T_2(x, 0) = T_{02}$ .

При  $\tau > 0$ ,  $T(0, \tau) = T_c$ ;  $q_1(0, \tau) = q_2(0, \tau)$ .

При этом по умолчанию предполагается, что  $T_c$  постоянна. Используем полученное решение (3.81) для теплового потока на границе. Оно справедливо как для левой, так и для правой полуплоскости. Сокращая идентичные члены, получим

$$\lambda_1(T_{01} - T_c)/\sqrt{a_1} = \lambda_2(T_c - T_{02})/\sqrt{a_2} . \quad (3.83)$$

Полученное уравнение можно переписать в виде

$$(T_{01} - T_c)\sqrt{\lambda_1 \cdot c_1 \cdot \rho_1} = (T_c - T_{02})\sqrt{\lambda_2 \cdot c_2 \cdot \rho_2} . \quad (3.84)$$

Произведения, стоящие под знаками квадратного корня иногда называют **тепловосприимчивостями**. Из уравнения (3.84) легко найти  $T_c$ , выражение для которой будет иметь вид

$$T_c = \frac{\sqrt{\lambda_1 \cdot c_1 \cdot \rho_1} \cdot T_{01} + \sqrt{\lambda_2 \cdot c_2 \cdot \rho_2} \cdot T_{02}}{\sqrt{\lambda_1 \cdot c_1 \cdot \rho_1} + \sqrt{\lambda_2 \cdot c_2 \cdot \rho_2}}. \quad (3.85)$$

Полученная величина не зависит от времени. Такой результат следует и из точного решения и из логических соображений.

**Задача 2.** Точное и приближенное определение значений безразмерной температуры поверхности при прогреве плоской плиты под воздействием лучистого потока.

Эта задача представляет значительную трудность для аналитического рассмотрения. Для этого приходится проводить линеаризацию граничных условий или использовать численные методы. Рассмотрим решение этой задачи методом конечной глубины проникновения (КГП).

Подставим в уравнение (3.76) закон Стефана-Больцмана для плотности лучистого теплового потока  $q_0$ . Выражение для него приводится ниже.

$$q_0 = 4,9\varepsilon \left[ \left( \frac{T_a}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_0 + q_0 \frac{\Delta}{2\lambda}}{100} \right)^4 \right], \quad (3.86)$$

где  $T_a$  – абсолютная температура излучения,  $T_0 + \frac{q_0 \cdot \Delta}{2\lambda}$  – в соответствии (3.86) при  $x = 0$  абсолютная температура поверхности.

$$\text{Из (3.86) получаем выражение для } \Delta: \quad \Delta = \left\{ 100 \left[ \left( \frac{T_a}{100} \right)^4 - \frac{q_0}{4,9\varepsilon} \right] - T_0 \right\} \frac{2\lambda}{q_0}. \quad (3.87)$$

После подстановки (3.87) в (3.76) и введения безразмерных переменных  $y, \beta, z$

$$y = \frac{q_0}{4,9\varepsilon(T_a/100)^4}; \quad \beta = \frac{T_0}{T_a}; \quad z = \frac{3a[4,9\varepsilon(T_a/100)^4]}{2\lambda^2 T_a^2};$$

$$\text{уравнение (3.76) принимает вид} \quad y = \frac{d}{dz} \frac{[(1-y)^{1/4} - \beta]^2}{y} \quad (3.88)$$

с начальным условием

$$y = 1 - \beta^4 \quad \text{при} \quad z = 0$$

Решение этого обыкновенного дифференциального уравнения в цитируемой работе было найдено в аналитической форме, но здесь не приводится из-за его громоздкости. Приведем лишь результаты его сравнения с численным решением

близкой задачи, представленным в упомянутом выше справочнике [3] в виде номограмм. Задача эта отличается тем, что в ней рассматривается плита конечной толщины, равной  $h$ , и при  $x = h$  удовлетворяется условие теплоизоляции. Таким

образом, 
$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=h} = 0 .$$

Сравниваются точное и приближенное значения безразмерной температуры поверхности  $\theta$ , которая определяется формулой  $\theta = \frac{T(0) - T_0}{T_a - T_0}$ . Параметрами

номограмм являются безразмерные комплексы  $\beta = T_0/T_a$ ;  $Fo = \frac{a \cdot \tau}{h^2}$ ;

$$Bo = \frac{\lambda}{4,9 \cdot 10^{-8} \varepsilon \cdot T^3 h} .$$
 Результаты сравнения представлены в табл. 3.1.

**Таблица 3.1**

**Сравнение точного и приближенного (КГП) решений**

$\beta$	$Fo$	$Bo$	$\theta_{\text{точн}}$	$\theta_{\text{кгл}}$
0	0,1	1,0	0,36	0,387
0	0,5	1,0	0,72	0,728
0	1,0	1,0	0,87	0,862
0	0,1	0,5	0,65	0,642
0	0,5	0,5	0,89	0,88
0	0,1	2,0	0,275	0,274
0	1,0	2,0	0,62	0,72
0,25	0,1	0,5	0,70	0,70
0,25	0,5	0,5	0,90	0,884
0,25	0,1	2,0	0,26	0,337
0,25	1,0	2,0	0,728	0,72

Согласие между точными значениями  $\theta$  и значениями, полученными методом КГП, оказывается достаточно хорошим.

Необходимо заметить, что в соответствии с идеей метода КГП полученные формулы справедливы, если  $\Delta$  по крайней мере меньше  $h$ . Поэтому учитывая, что для заданной плотности теплового потока согласно (3.77)  $\Delta^2 \approx 6a \cdot \tau$ , получаем условие  $Fo < 1/6$ . Однако из табл. 3.1 видно, что метод справедлив даже при  $Fo = 1$ .

Приближенные методы расчета оказываются полезными для ряда задач, несмотря на быстрый рост возможностей при использовании программных средств в практической деятельности. Они позволяют получать результаты в форме, удобной для их использования в рамках более широких проблем. Это приводит к упрощению анализа и его большей наглядности.

## 4. НЕКОТОРЫЕ СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ, СВЯЗАННЫЕ С ОПИСАНИЕМ ПРОЦЕССА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

В настоящем разделе будут кратко рассматриваться три типа проблем.

Во-первых, это «неидеальные» ситуации передачи теплоты теплопроводностью, когда, к примеру, передача теплоты от одного из контактирующих тел другому осуществляется при наличии дополнительного термического сопротивления на границе.

Во-вторых, это прикладные задачи, связанные с интенсификацией теплообмена между твердой поверхностью и текучей средой.

В-третьих, это ситуации, в которых имеет место отклонение от «классической» формы передачи теплоты в виде закона Фурье.

### 4.1. Контактное термическое сопротивление

При расчете температурных полей в системе, состоящей из двух или нескольких тел, обычно предполагается, что на границах их соприкосновения выполняется равенство тепловых потоков и температур соприкасающихся тел.

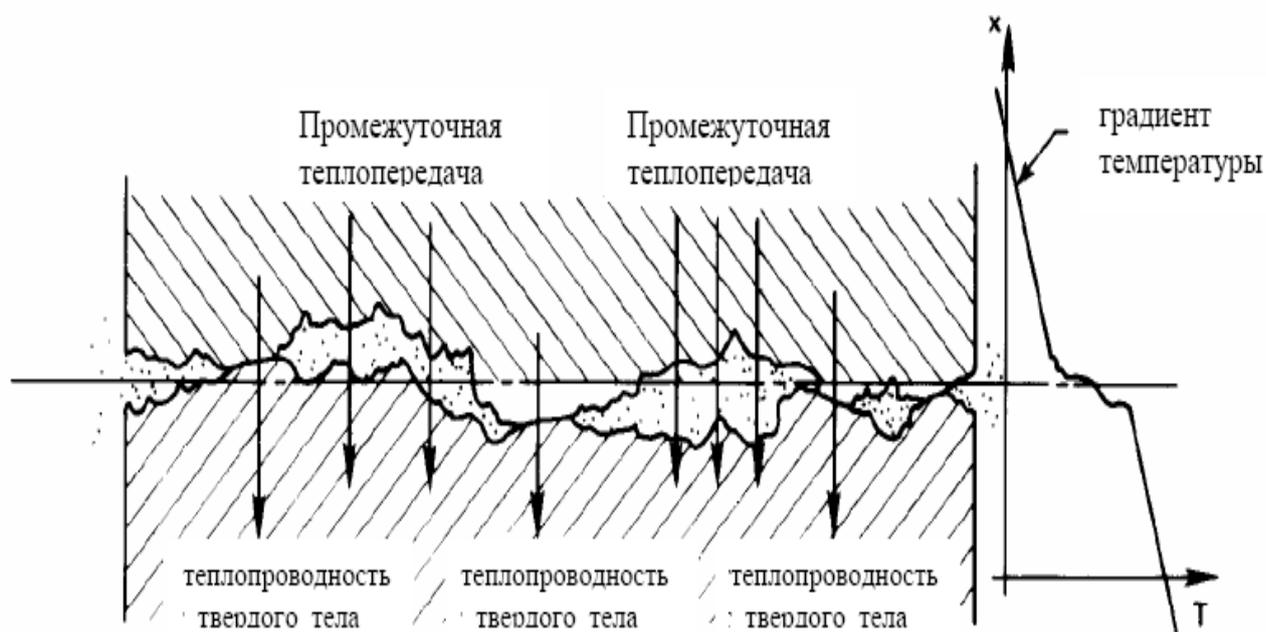


Рис.4.1. Схема контактного слоя

Такое предположение оправдано, если поверхности соприкасающихся тел идеально гладкие и термический контакт между ними осуществляется по всей поверхности. Однако исследования показывают, что площадь действительного контакта составляет незначительную долю номинальной площади соприкосновения. На большей же части поверхности контактирующие тела или элементы кон-

струкций разделены зазорами, заполненными воздухом или иной средой. При этом плотность теплового потока, проходящего через плохо проводящие теплоту зазоры, уменьшается, что вызывает изменение распределения температур вблизи поверхности контакта (рис.4.1). Таким образом, температура поверхностей точек соприкасающихся тел будет различна. Поэтому в инженерных расчетах определяют дополнительный перепад температуры  $\Delta T_i$ , обусловленный наличием плохо проводящих теплоту прослоек. Возникающий при этом скачок температуры пропорционален плотности теплового потока  $q$ :

$$\Delta T_i = R_k \cdot q = \frac{q}{U_k}, \quad (4.1)$$

где  $R_k$  - коэффициент термического сопротивления контакта;  $U_k$  – коэффициент термической проводимости.

При сравнительно небольших плотностях тепловых потоков скачок температуры можно не учитывать и считать, что температуры соприкасающихся поверхностей равны. Однако в установках, где плотности тепловых потоков велики, пренебрежение контактным сопротивлением может привести к существенным ошибкам. Одним из наиболее характерных в ЦБП мест среди теплотехнологических установок, где термическое сопротивление контакта играет важную роль, является контакт бумажного полотна и сушильного цилиндра бумагоделательной машины.

Контактное сопротивление зависит от многих факторов. К ним, прежде всего, относятся шероховатость соприкасающихся поверхностей; давление, с которым поверхности прижимаются друг к другу; теплопроводность среды в зазоре между телами; твердость элементов шероховатости на поверхности; средняя температура у границы раздела тел и др.

Коэффициент термической проводимости  $U_k$  может быть найден по номограмме, представленной на рис.4.2. Для этого предварительно нужно определить:

- коэффициент безразмерного сжатия

$$C = \sqrt{P/M}, \quad (4.2)$$

где  $P$  – постоянное давление в месте контакта, [МПа];  $M$  – твердость более мягкой поверхности, согласно данных Мейера (см. табл. 4.1);

- толщину зазора

при  $l_1+l_2 < 7$  мкм  $l = 3,56(l_1+l_2)$ ; при  $l_1+l_2 > 7$  мкм  $l = 0,46(l_1+l_2)$ ;

- безразмерный зазор

$$B = 0,335C^{0,315} \left( \frac{A^{0,112}}{l} \right)^{0,137}, \quad (4.3)$$

где  $A$  – полная площадь поверхности контакта;

- эквивалентный коэффициент теплопроводности

$$\lambda_f = \lambda_0 + \frac{4\sigma \cdot l \cdot \varepsilon_1 \varepsilon_2 \bar{T}_i^3}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2}, \quad (4.4)$$

где  $\lambda_f = \lambda_0$ , если в зазоре между телами находится жидкость;  $\sigma = 5,697 \cdot 10^{-8} \frac{Вт}{м^2 \cdot К^4}$

– постоянная Стефана-Больцмана;  $K$ - безразмерный коэффициент теплопроводности  $K = \frac{\lambda_f(\lambda_1 + \lambda_2)}{2\lambda_1 \cdot \lambda_2}$ , где  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  коэффициенты теплопроводности контактирующих твердых тел.

Таблица 4.1

## Твердость по Мейеру некоторых материалов

Материал	$М \cdot 10^3 МПа$
Стальное литье	3,52
Малоуглеродистая сталь	1,64
Латунь	1,18
Алюминий	1,04
Чистый алюминий	0,32

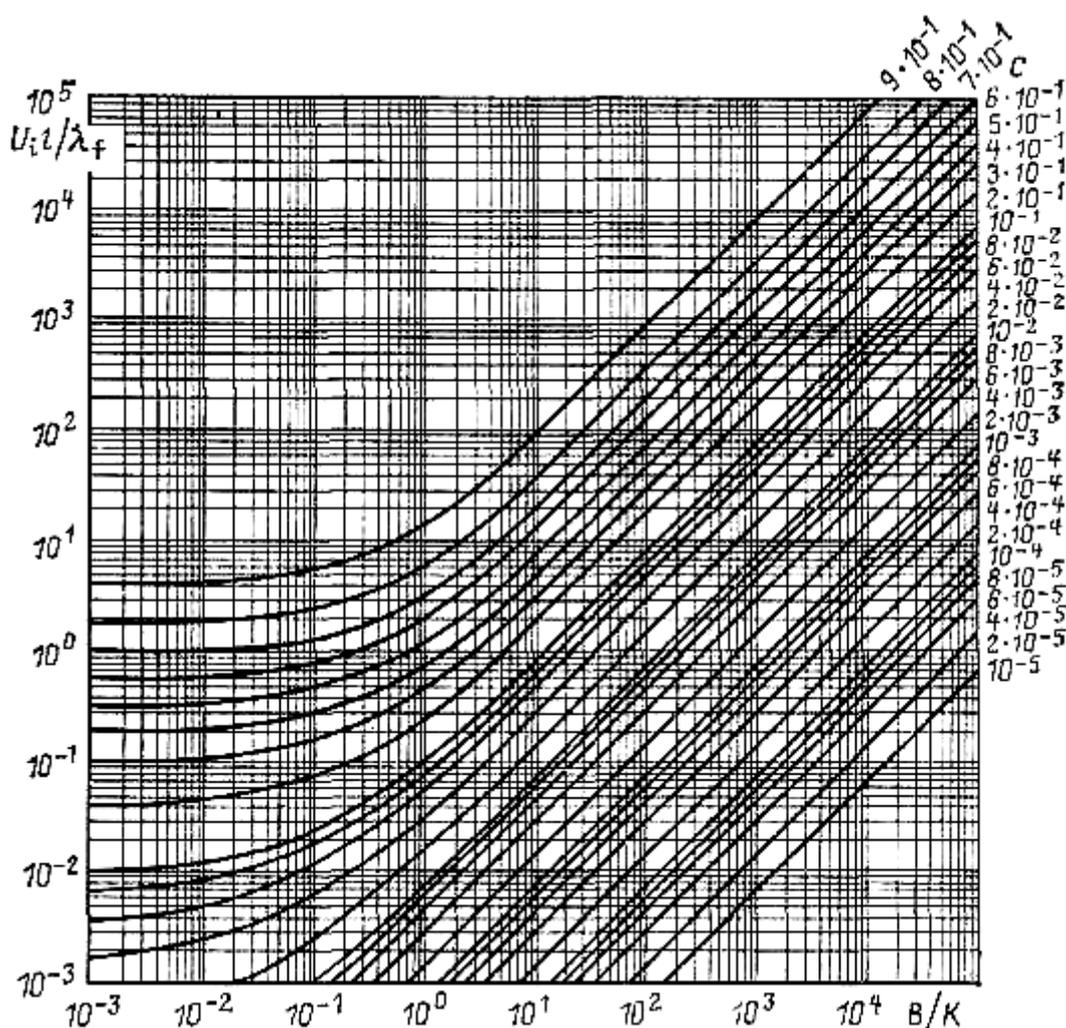


Рис.4.2. Номограмма для определения термической контактной проводимости

Зависимость, для определения  $U_k$  полученная Ю.П. Шлыковым и Е.А. Ганиным [4], имеет следующий вид

$$U_k = \frac{2\lambda_c}{h_{cp1} + h_{cp2}} + 2,1 \frac{N \cdot \bar{\lambda}_m}{3\sigma_B S_n} 10^{-4}, \quad (4.5)$$

где  $\lambda_c$  – коэффициент теплопроводности вещества, заполняющего зазоры;  $h_{cp1}$  и  $h_{cp2}$  – средняя высота выступов микрошероховатости соприкасающихся поверхностей, определяемая в зависимости от класса чистоты;  $N$  – нормальная нагрузка,  $H$ ;  $\bar{\lambda}_m = \frac{2\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$ ;  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  – коэффициенты теплопроводности контактирующих материалов;  $\sigma_B$  – временное сопротивление разрыву;  $S_n$  – геометрическая площадь контакта.

#### 4.2. Термическое сопротивление отложений на теплообменной поверхности трубы

На рис. 4.3 показана простейшая форма элемента теплообменника – труба. Слева изображена труба с чистой внутренней поверхностью, Справа – труба, находившаяся в эксплуатации достаточно длительное время. На внутренней поверхности трубы имеется слой отложений. В обычных подогревателях этот слой состоит, например, из  $MgSO_4$  или  $CaSO_4$ , которые постепенно осаждаются на поверхности стенки трубы. Для учета термических сопротивлений этих образований необходимо включить в расчет дополнительное термическое сопротивление при расчете полного термического сопротивления трубы. Порядок этой величины можно видеть в таблице 4.2.

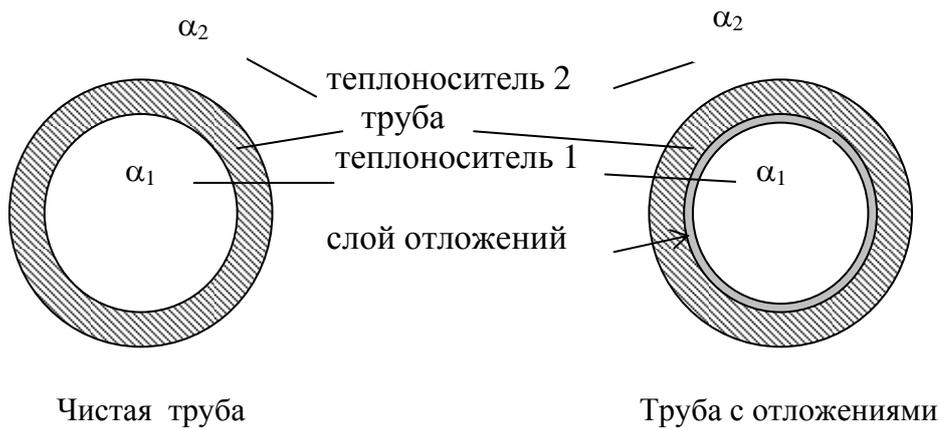


Рис.4.3. Появление слоя отложений в трубе

Роль термического сопротивления в процессе теплообмена зависит от соотношения коэффициентов теплоотдачи и термического сопротивления слоя отло-

жений. Запишем общее выражение для термического сопротивления трубы, включив в него термическое сопротивление отложений.

$$R_{\ell} = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{R_{отл}}{d_1} + \frac{1}{2\lambda_c} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2} \quad (4.6)$$

Очевидно, что роль термического сопротивления  $R_{отл}$  определяется соотношением величин  $\frac{1}{\alpha_1 d_1} : \frac{R_{отл}}{d_1} : \frac{1}{\alpha_2 d_2}$ . Если в качестве масштаба для величины  $\alpha$  выбирать теплоотдачу при вынужденной конвекции воды, которая составляет порядка  $2 - 10 \frac{кВт}{м^2 \cdot К}$ , то увидим, что увеличение термического сопротивления трубы может быть заметным даже при минимальном уровне термического сопротивления отложений.

В табл. 4.2. приведены характерные величины термического сопротивления слоя отложений для нескольких видов теплоносителей. Из нее видно, что для жидких теплоносителей влияние слоя отложений на теплоотдачу может быть весьма существенным.

Таблица. 4.2

#### Термическое сопротивление слоя отложений

Теплоноситель	Сопротивление отложений $R_{отл}, \frac{м^2 \cdot К}{Вт}$
Дистиллированная вода	0,0001
Морская вода	0,0001 – 0,0004
Очищенная питательная вода для котла	0,0001 – 0,0002
Чистая речная или озерная вода	0,0002 – 0,0006
Худшая вода, используемая в теплообменниках	< 0,0020
Дизельное топливо №6	0,0001
Трансформаторное или смазочное масло	0,0002
Большинство промышленных жидкостей	0,0002
Большинство продуктов перегонки	0,0002 – 0,0009
Пар без примеси масла	0,0001
Пар с примесью масла (выхлоп турбины)	0,0003
Наиболее стабильные газы	0,0002 – 0,0004
Дымовые газы	0,0010 – 0,0020
Пары холодильников (несущие масло)	0,0040

### 4.3. Развитие поверхности теплообмена

Прежде чем приступить к непосредственному изложению решения задач теплопроводности, содержание которых следует из названия параграфа, поясним, в чем состоит практическая важность рассматриваемого вопроса.

При разработке любых теплообменных аппаратов встает проблема их **эффективности**. Кратко смысл этого понятия можно сформулировать следующим образом. Теплообменный аппарат должен передавать необходимое количество теплоты при минимальных массогабаритных характеристиках, ограниченных затратах энергии на прокачку теплоносителей и разумной стоимости.

Одним из путей решения этой проблемы является **интенсификация теплообмена** – то есть обеспечение возможности передать в единице объема аппарата возможно большее количество теплоты. Существуют два основных пути реализации этой цели.

Первый из них - это развитие поверхности теплообмена, то есть ее увеличение в единице объема аппарата. Рассматриваемая в этом параграфе задача теплопроводности позволяет проиллюстрировать проблемы, связанные с использованием первого из этих путей.

Второй – это увеличение коэффициентов теплоотдачи, что позволяет при той же разности температур увеличить количество передаваемой теплоты. Вторым путем будет рассматриваться в главе, посвященной конвективному теплообмену.

После этого вступления перейдем к решению задачи теплопроводности для стержня постоянного сечения, которое позволяет сформулировать основные принципы конструирования ребрения.

#### 4.3.1 Теплопроводность в стержне с постоянным поперечным сечением

Рассмотрим распространение теплоты в прямом стержне с постоянным поперечным сечением по длине (Рис. 4.4). Площадь поперечного сечения –  $f$ , периметр –  $u$ . Стержень находится в среде с постоянной температурой  $t_{жс}$ . Коэффициент теплоотдачи от стержня в окружающую среду постоянный. Толщина стержня пренебрежимо мала. Значение коэффициента теплопроводности материала стержня  $\lambda$  высокое. Площадь поперечного сечения стержня мала по сравнению с его длиной. Следовательно температура в стержне изменяется только вдоль его оси. Отсчет температуры ведем от выбранной

температуры  $t_{жс}$ . Избыточную, в результате этого, температуру стержня обозначим как  $\vartheta$ . Тогда

$\vartheta = t - t_{жс}$ , где  $t$  – текущая температура стержня;  $t_{жс}$  – температура среды, окружающей стержень.

При температуре основания стержня  $t_1$ , его избыточная температура определяется как:  $\vartheta_1 = t_1 - t_{жс}$ .

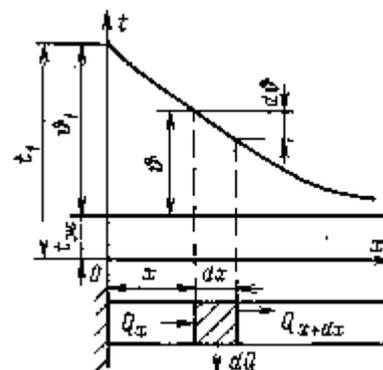


Рис. 4.4. Стержень постоянного поперечного сечения

Выделим элемент стержня длиной  $dx$  на расстоянии  $x$  от основания стержня. Для этого участка уравнение материального баланса определится:

$$dQ = Q_x - Q_{x+dx}, \quad (4.7)$$

где  $dQ$  – количество теплоты, отдаваемое в единицу времени единицей наружной поверхности элемента окружающей среде;  $Q_x$  – количество теплоты, входящее в левую грань элемента в единицу времени;  $Q_{x+dx}$  – количество теплоты, выходящей из противоположной грани элементарного элемента в этот же промежуток времени. На основании уравнения Фурье запишем:

$$Q_x = -\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial x} f;$$

$$Q_{x+dx} = -\lambda \frac{\partial \left( \vartheta + \frac{\partial \vartheta}{\partial x} dx \right)}{\partial x} f = -\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial x} f - \lambda \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} dx \cdot f.$$

Подставим  $Q_x$  и  $Q_{x+dx}$  в (4.7). Тогда получим

$$dQ = \lambda \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} dx \cdot f.$$

Вместе с тем  $dQ = \alpha \cdot \vartheta \cdot U \cdot dx$ , где  $U$  – геометрический размер ребра – периметр поперечного сечения ребер:  $U = 2b$ ,  $b$  – ширина ребра.

Тогда  $\lambda \cdot f \frac{d^2 \vartheta}{dx^2} dx = \alpha \cdot \vartheta \cdot U \cdot dx$  или  $\frac{d^2 \vartheta}{dx^2} = \frac{\alpha \cdot U}{\lambda \cdot f} \vartheta$ .

Обозначая  $\sqrt{\frac{\alpha \cdot U}{\lambda \cdot f}}$  через  $m$ , приходим к следующему уравнению

$$\frac{d^2 \vartheta}{dx^2} = m^2 \vartheta. \quad (4.8)$$

Пусть  $m = const$  и  $\alpha = const$  по всей поверхности, а  $\lambda = const$  в рассматриваемом диапазоне температур при постоянных габаритах ребра.

Проинтегрируем уравнение (4.8). Получим следующее выражение для  $\vartheta$ .

$$\vartheta = C_1^{mx} + C_2^{-mx}. \quad (4.9)$$

Выражение (4.9) описывает изменение избыточной температуры стержня вдоль его длины. Постоянные  $C_1$  и  $C_2$  определяются из граничных условий в зависимости от длины стержня и его температуры.

Из анализа  $m$  следует, что при оребрении следует выбирать материал ребер с  $\lambda = max$  и делать тонкие ребра.

Решая (4.9), определим количество теплоты, отданное стержнем в окружающую среду:

При  $x = \infty$ ,  $Q = \lambda \cdot f \cdot m \cdot \vartheta_1 = \vartheta_1 \sqrt{\alpha_p \lambda \cdot U \cdot f}$ .

При  $x = l$ ,  $Q_p = \lambda \cdot f \cdot m \cdot \vartheta_1 \cdot th(ml) = \vartheta_1 \sqrt{\alpha_p U \cdot \lambda \cdot f \cdot th(ml)}$ ,

где  $\alpha_p$  – теплопередача с поверхности ребра;  $th$  – гиперболический тангенс.

### 4.3.2. Теплопередача через плоскую ребристую стенку

Рассмотрим теплопередачу через ребристую плоскую стенку толщиной  $\delta'$  (рис. 4.5), коэффициентом теплопроводности  $\lambda$ . Тепловой поток, проходящий через стенку определится как:  $Q = Q_c + Q_p$ , где  $Q_c = \alpha_1 \cdot \mathcal{G}_1 \cdot F_c$  – поток теплоты с гладкой части ребристой поверхности.

Расчетное уравнение для определения потока теплоты с поверхности ребра представляет следующий вид:

$$Q_p = \alpha_p \cdot \mathcal{G}_1 \cdot F_p \frac{th\left(\frac{l}{\delta} \sqrt{2\alpha_p \delta / \lambda}\right)}{\left(l/\delta\right) \sqrt{2\alpha_p \delta / \lambda}} \quad (4.10)$$

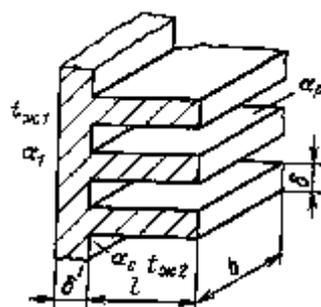


Рис. 4.5. Теплопередача через ребристую стенку

В формуле (4.10)  $\alpha_p \delta / \lambda = Bi$  – число Био. Перепишем (4.10)

как:  $Q_p = \alpha_p \cdot \mathcal{G}_1 \cdot F_p \cdot E$ , где  $E = \frac{th\left(\frac{l}{\delta} \sqrt{2Bi}\right)}{\frac{l}{\delta} \sqrt{2Bi}}$  – коэффициент

эффективности ребра.

Число  $E$  стремится к 1 при  $Bi \rightarrow 0$ , а  $\lambda \rightarrow \infty$ .

Тепловой поток может быть определен при использовании приведенного коэффициента теплоотдачи, учитывающего теплоотдачу поверхности ребра, поверхности гладкой стенки и эффективность работы ребра:  $Q = \alpha_{np} \cdot \mathcal{G}_1 \cdot F_{p.c}$ ,

где  $\alpha_{np} = \alpha_p \cdot E \left( \frac{F_p}{F_{p.c}} \right) + \alpha_c \left( \frac{F_c}{F_{p.c}} \right)$ ;  $F_{p.c} = F_p + F_c$ .

При установившемся тепловом состоянии системы количество переданной теплоты  $Q$  может быть выражено системой

$$\left. \begin{aligned} Q &= \alpha_1 \cdot F_c (t_{жс1} - t_1) \\ Q &= \frac{\delta'}{\lambda} F_c (t_1 - t_2) \\ Q &= \alpha_{np} \cdot F_{p.c} (t_2 - t_{жс2}) \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

Решая систему (4.11) относительно  $Q$ , найдем общий тепловой поток через стенку:

$$Q = \frac{t_{жс1} - t_{жс2}}{\frac{1}{\alpha_1 F_c} + \frac{\delta'}{\lambda \cdot F_c} + \frac{1}{\alpha_{np} F_{p.c}}} \quad (4.12)$$

Отнесем (4.12) к единице оребренной поверхности:  $\frac{Q}{F_{p.c}} = K_{p.c} (t_{жс1} - t_{жс2})$ , где

$K_{p.c} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} \frac{F_{pc}}{F_c} + \frac{\delta'}{\lambda} \frac{F_{pc}}{F_c} + \frac{1}{\alpha_{np}}}$  – коэффициент теплопередачи ребристой стенки;

$K_{op} = \frac{F_{p.c.}}{F_c}$  – отношение оребренной поверхности к гладкой называется коэффициентом оребрения.

Практическое определение эффективности оребрения является более сложной задачей. Во-первых, теоретический коэффициент эффективности ребра  $E$  заметно меньше единицы. Как следствие, при высоких значениях высоты ребра возникают сложности по определению  $\alpha$  для подстановки в число Био. Во-вторых, раздельное определение  $\alpha_p$  и  $\alpha_c$  практически невозможно. Поэтому приведенный коэффициент теплоотдачи  $\alpha_{np}$  определяют, как правило, по зависимости

$$\alpha_{np} = \left( E \cdot \mu_p \cdot \psi \frac{F_{p.}}{F_{p.c.}} + \frac{F_c}{F_{p.c.}} \right) \alpha_k, \quad (4.13)$$

где  $\alpha_k$  – условно конвективный коэффициент теплоотдачи, подставляемый в число Би;  $\mu_p$  – коэффициент, учитывающий уширение ребер к основанию;  $\psi$  – поправочный, для коэффициента эффективности  $E$ , коэффициент, учитывающий неравномерное распределение теплоотдачи по поверхности ребра. Их значения, как правило, находят по справочным данным.

При заданных соотношениях коэффициентов теплоотдачи при оребрении плоской стенки со стороны малого  $\alpha$  с коэффициентом оребрения  $F_{p.}/F_c = 2$ , передача теплоты увеличится примерно в два раза.

### 4.3.3. Теплопроводность круглого ребра постоянной толщины

Рассмотрим теперь теплопроводность круглого ребра постоянной толщины (рис. 4.6). Известны внутренний  $r_1$  и наружный  $r_2$  радиусы ребра, его толщина  $\delta$  и коэффициент теплопроводности  $\lambda$ . Температура среды  $t_{ж} = \text{const}$ . Тогда избыточная температура ребра:  $\vartheta = t - t_{ж}$ . Коэффициент теплоотдачи  $\alpha$  на поверхности ребра и температуру у его основания  $\vartheta$  считаем постоянными, а режим стационарным. Как и в предыдущей задаче, считаем, что температура изменяется только по высоте ребра.

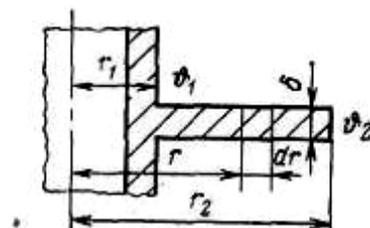


Рис. 4.6. Перенос теплоты через круглое ребро постоянной толщины

Составим уравнение баланса энергии для кольцевого элемента ребра толщиной  $dr$ :  $dQ = Q_r - Q_{r+dr}$ . (4.14)

Определим для этих условий дифференциальное уравнение. Найдя составляющие уравнения (4.14), получим дифференциальное уравнение, описывающее процесс теплопроводности в ребре

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} - \frac{2\alpha}{\lambda \cdot \delta} \vartheta = 0. \quad (4.15)$$

После обозначения  $2\alpha/\lambda \cdot \delta = m^2$ ,  $m \cdot r = z$ ,  $1/r = m/z$

уравнение (4.15) принимает вид так называемого уравнения Бесселя

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial \vartheta}{\partial z} - \vartheta = 0. \quad (4.16)$$

Для упрощения технических расчетов теплопроводности для круглых ребер постоянной толщины, а также для различных прямых ребер переменного сечения приведенную методику расчета можно свести к методике расчета прямых ребер постоянного сечения. При этом количество теплоты, которое будет отдаваться поверхностью круглого ребра постоянной толщины определится

$$Q' = \varepsilon' \cdot F' \cdot q, \quad (4.17)$$

где  $Q'$  — тепловой поток, отдаваемый круглым ребром, Вт;  $F'$  — поверхность круглого ребра, м<sup>2</sup>;  $q = Q/F$  — плотность теплового потока, передаваемого в единицу времени единицей поверхности прямого ребра, толщина которого равна толщине круглого ребра, а длина его равна 1 м.;  $\varepsilon' = f\left(\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1}, \frac{r_2}{r_1}\right)$  — поправочный коэффициент, определяемый по рис. 4.7,  $\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1}$  — отношение температур на концах ребра, рассчитываемых по зависимостям для прямого ребра постоянного сечения. Расчет теплопроводности ребер переменного сечения приводится в [4].

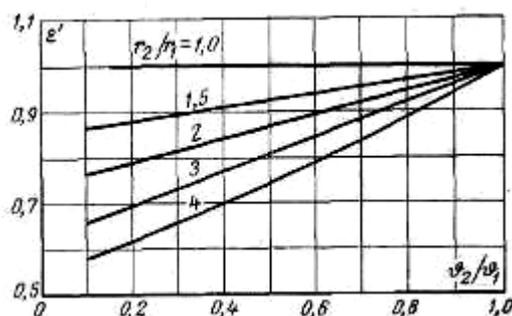


Рис.4.7. Поправочный коэффициент, учитывающий изменение сечения круглого ребра по радиусу

#### 4.3.4. Простейшие методы интенсификация теплопередачи

Пути интенсификации теплообмена можно найти в результате анализа коэффициента теплопередачи  $K$ , являющегося определяющей величиной при заданных размерах стенки и температурах теплоносителей:

$$K = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}}.$$

В частности, термическое сопротивление стенки можно уменьшить утонением стенки и увеличением коэффициента теплопроводности материала.

Для тонких стенок с большим  $\lambda$  термическим сопротивлением стенки можно пренебречь, тогда

$$K = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}} = \frac{\alpha_1}{1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}} = \frac{\alpha_2}{1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}} = \frac{\alpha_1 \cdot \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}. \quad (4.18)$$

Из (4.18) следует, что  $K$  не может быть больше самого малого значения  $\alpha$ . Если  $\alpha_2 \rightarrow \infty$ , то  $K \rightarrow \alpha_1$ . Если  $\alpha_1 \rightarrow \infty$ , то  $K \rightarrow \alpha_2$ . Следовательно, для увеличения  $K$  следует уменьшать большее из термических сопротивлений.

При передаче теплоты через цилиндрическую и шаровую стенки термические сопротивления последних определяются не только коэффициентами теплоотдачи, но и размерами

поверхностей:  $\frac{1}{\alpha \cdot d}$ ;  $\frac{1}{\alpha \cdot d^2}$ . Следовательно, если коэффициент теплоотдачи мал, то термическое сопротивление теплоотдачи можно уменьшить за счет увеличения соответствующей поверхности, например, за счет ее оребрения, поскольку термические сопротивления пропорциональны  $\frac{1}{\alpha_1 F_1}$  и  $\frac{1}{\alpha_2 F_2}$ .

Очевидно, что при  $\alpha_1 \ll \alpha_2$ , оребрение поверхности со стороны  $\alpha_1$  имеет смысл, пока  $\alpha_1 F_1 \cong \alpha_2 F_2$ . Дальнейшее увеличение  $F_1$  малоэффективно. На рис.4.8 показаны трубы с прямыми и цилиндрическими ребрами.

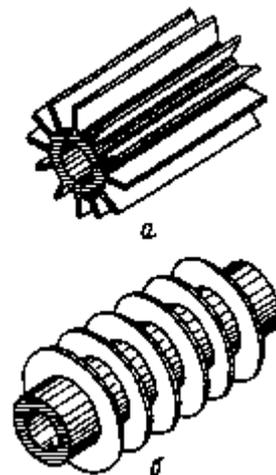


Рис. 4.8. Различные виды оребрения труб

#### 4.4. Особенности кондуктивного теплопереноса в микро - и наносистемах

Во всех ранее рассматривавшихся задачах теплопроводности использовался закон Фурье, постулирующий прямую пропорциональность между плотностью теплового потока и градиентом температуры. Коэффициент пропорциональности, носящий название коэффициента теплопроводности, считался зависящим от параметров состояния среды, а в большинстве случаев вообще принимался постоянным. Основой для этого была концепция сплошной среды - континуума, которая позволяла игнорировать ее структуру. Такая возможность, как отмечалось выше, связана с тем обстоятельством, что характерные размеры рассматривавшихся нами областей или тел на много порядков превосходили микрохарактеристики среды.

Однако расширение круга рассматриваемых задач привело в конце концов к столкновению с необходимостью отказа от континуальной концепции. Вполне естественным оказалось то, что первой средой, для которой такая проблема возникла, оказался разреженный газ, то есть газ при низких плотностях.

##### 4.4.1. Теплопроводность разреженных газов

Первым ученым, приступившим к систематическому изучению данной проблемы, был датский физик Мартин Кнудсен. Он пришел к этому при выполнении прикладных работ, которые необходимо было проводить в условиях вакуума. При этом описание газа как сплошной среды не позволяла адекватным образом описывать протекающие процессы. Для определения границы возникновения подобных условий он ввел безразмерную характеристику, которая сейчас носит название числа Кнудсена. Число Кнудсена выражает отношение длины свободного пробега молекул  $\Lambda$  к характерному размеру системы  $Kn = \Lambda/L$ . (4.19) Если число  $Kn$  больше или порядка единицы, то газ уже нельзя рассматривать как сплошную среду и необходимо использовать статистические методы. В формуле

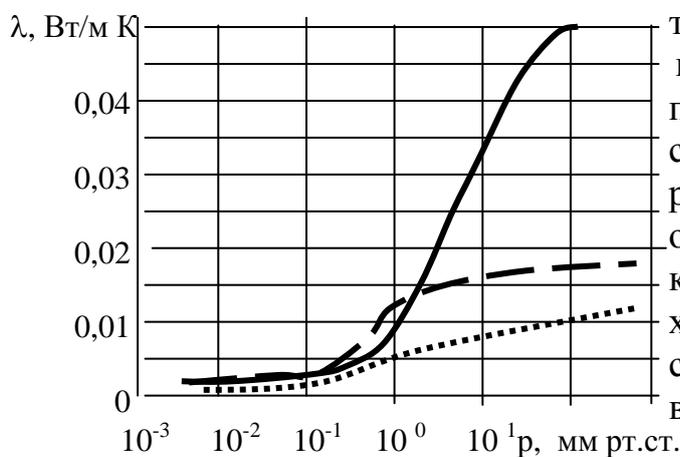


Мартин Ханс Кристиан Кнудсен (1871 -1949) закончил Датский Технический Университет, где преподавал и вел научные исследования. Первые работы были связаны с молекулярно-пучковой эпитаксией, представляющей собой процесс получения в условиях вакуума монокристаллического слоя. Основным элементом этой методики – ячейка Кнудсена. Наиболее известны его работы по исследованию поведения газа в условиях низких давлений - Кнудсеновский газ. Его имя ассоциируется с терминами число Кнудсена, Кнудсеновский слой и течение Кнудсена. Он впервые обратил внимание на особенности применения молекулярно-кинетической теории в условиях, когда длина свободного пробега молекул становится сравнимой с размером системы. Свои результаты он изложил в книге «Кинетическая теория газов» (1934). Он является изобретателем ряда приборов для исследования разреженных газов и насоса, который получил на звание насоса Кнудсена. Известны также его работы по океанографии.

Рис. 4.9. М.Х.К. Кнудсен

(4.19) длину свободного пробега уже нельзя считать обратно пропорциональной плотности, поскольку она оказывается зависящей от размера. Конечно, на самом деле отклонения от континуальной модели проявляются уже при числах  $Kn$  порядка сотых. Влияние рассматриваемого фактора проявляется в различных задачах, в частности, в аэродинамике высотных аппаратов. При этом на обтекаемой поверхности образуется так называемый «кнудсеновский слой» в котором имеет место температурный скачок. Мы ограничимся рассмотрением упомянутых отклонений для более простой, но практически важной задачи термической изоляции.

Для изоляции в криогенной технике, широко используется вакуумно-порошковая, многослойная и пенная изоляция. При этом линейные размеры одиночных полостей, заполненных газом, при снижении давления могут оказываться сопоставимыми с длиной свободного пробега. Тогда эффективная теплопроводность



теплоизолятора начинает сильно убывать. Это явление для порошковой и пенной теплоизоляции демонстрируется на рис. 4.10. При вакууме  $10^{-2} p$ , мм. рт. ст., кажущаяся теплопроводность оказывается существенно более низкой, чем теплопроводность воздуха, хотя такой уровень вакуума не является очень глубоким. Кстати существенно, что для таких изоляторов пренебрежимо малым является и лучистый перенос теплоты из-за многократного эффекта экранирования.

Рис.4.10. Кажущаяся теплопроводность изоляторов: магнезия ———, мипора — — —, силикоаэрогель ······

Теплоизоляторы, выполненные из мипоры, являются предшественником современных пенопластов.

#### 4.4.2. Теплопроводность твердых и конденсированных тел

Теория, описывающая перенос теплоты в конденсированных и твердых телах, возникла значительно позже, чем для газов. Явления, протекающие в них, значительно более сложны. Тем не менее, ученым удалось представить свои результаты в форме, аналогичной тем, которую мы уже видели для газов. Для этого используются понятия фононной и электронной проводимости.

Фонон по аналогии с квантом электромагнитных волн является квантом звуковых волн. Фонон, в отличие от обычных частиц, может существовать лишь в некоторой среде, которая пребывает в состоянии теплового возбуждения. Нельзя вообразить фонон, который распространялся бы в вакууме, поскольку он описывает квантовый характер тепловых колебаний решетки и навечно замкнут в кристалле. Понятие фонона – первой квазичастицы в квантовой теории твердого тела – ввел И. Е. Тамм. Фононы могут рассматриваться как частицы, несмотря на то, что они распространяются в виде волновых пакетов, которые осуществляют перенос энергии через решетку. Таким образом, распространение упругих тепловых волн в кристалле можно рассматривать как перенос фононов.



Рис. 4.11. И.Е. Тамм

ТАММ, Игорь Евгеньевич (1895-1971), советский физик, удостоенный в 1958 г. Нобелевской премии по физике. С 1930 - заведующий кафедрой теоретической физики МГУ, с 1934 — руководитель теоретического отдела Физического института АН СССР. Работы Тамма посвящены классической электродинамике, квантовой механике, теории твердого тела, физической оптике, ядерной физике, теории элементарных частиц, проблемам термоядерного синтеза. В 1930 г. Тамм разработал квантовую теорию рассеяния света в кристаллах, впервые произвел квантование акустических волн, введя понятие фононов - звуковых квантов. В 1931 г. развил квантово-механическую теорию фотоэффекта, которая стала исходной для многочисленных теоретических исследований в области квантовой теории металлов. Применив квантовую механику к теории металлов, в 1932 г. показал возможность существования особых состояний электронов на поверхности кристаллов (уровни Тамма). В послевоенные годы Тамм обратился к проблемам термоядерного синтеза. В 1950 г. высказал идею термоизоляции плазмы сильным магнитным полем, сформулировал концепцию магнитного термоядерного реактора. Среди его учеников — Д.И.Блохинцев, В.Л.Гинзбург, Л.В.Келдыш. А.Д.Сахаров.

На основании этой идеи тепловой поток в жидкости или неметаллическом твердом теле можно записать в виде закона Фурье:

$$Q_{\phi} = \frac{1}{3} c_{\phi} \cdot v \cdot l_e \cdot S \cdot R , \quad (4.20)$$

что можно записать в виде  $Q_\phi = K_\phi \cdot S \cdot R,$  (4.21)

где  $K_\phi$  обозначает величину  $\frac{\nu \cdot c_\phi \cdot l}{3}$ , которая зависит исключительно от свойств вещества: от удельной теплоёмкости  $c_\phi$  фононов, от их скорости  $\nu$  и длины свободного пробега  $l$ ;  $R$  – градиент температуры. Индекс  $\phi$  напоминает, что теплота переносится за счет колебаний решётки, то есть за счёт фононов. Величина  $K_\phi$  называется решёточной теплопроводностью вещества. Чем эта величина больше, тем лучше распространяется тепло в веществе.

Тепловая энергия переносится электронами и дырками совершенно так же, как и фононами. Чтобы понять, как движется дырка, проведем аналогию между кристаллом и зрительным залом театра с помощью рис. 4.12.

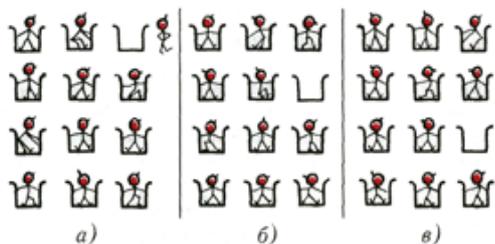


Рис. 4.12. Аналогия между кристаллом и зрительным залом

Допустим, что один из зрителей из первого ряда ушел (а). После его ухода осталось свободное кресло - (дырка). Представим, что на его место пересел зритель из второго ряда. Теперь пустое кресло(дырка) будет уже во втором ряду (б). Допустим, что свободное место во втором ряду займет зритель из третьего ряда, тогда пустое место перейдет из второго ряда в третий (в) и т.д. Дырка (пустое кресло) как бы движется по залу. Аналогично перемещается по кристаллу с места на место положительная вакансия в электронной связи — дырка.

Можно использовать формулу для теплопроводности фононов, подставив соответствующие величины для электронов и дырок: удельную теплоёмкость  $c_e$ , скорость (так называемую скорость Ферми)  $v_F$  и среднюю длину свободного пробега для электронов  $l_e$ . Обозначая электронную теплопроводность  $K_e$ , получим:

$$K_e = \frac{1}{3} c_e v_F l_e . \quad (4.22)$$

Таким образом, электроны (и дырки) за 1 с переносят тепловую энергию  $Q_e = K_e \cdot S \cdot R$ , а полная тепловая энергия  $Q = Q_e + Q_\phi$ . Заметим, что в каждом случае тепловая энергия определяется произведением удельной теплоёмкости, скорости и средней длины свободного пробега. Хотя электронная удельная теплоёмкость меньше, чем фоновая, скорость Ферми много больше скорости звука в веществе. В результате теплопроводность за счёт электронов и дырок оказывается больше теплопроводности за счёт фононов.

Все эти модели и разработки в период их появления относились в какой-то степени к области «чистой науки», но развитие производства сделало их в последние два десятилетия практическим инструментом расчетов.

Достижения в области микротехнологических процессов привели к непрерывной миниатюризации полевых транзисторов (ПТ), содержащих полупроводниковые (например, кремний), изоляционные (например, диоксида кремния) и металлические (например, медных соединений) слои толщиной лишь несколько нанометров. Постоянно растущий спрос на микропроцессоры и непрерывная тен-

денция к размещению большего числа транзисторов на одном чипе привели к беспрецедентному росту уровня рассеиваемой мощности и, следовательно, повышению температуры чипа. Тепловые явления напрямую не влияют на функционирование полупроводниковых устройств, но разогрев устройства и внутренних контактов уменьшает подвижность электронов и приводит к низкой или, в лучшем случае, неоптимальной эффективности работы этих устройств и структур. Наблюдается снижение «кажущегося» коэффициента теплопроводности для тонких кремниевых пленок, которые являются одним из основных элементов чипов микроэлектронных устройств.

Приведенные примеры дают представление о тех проблемах, которые возникают при анализе задач теплопроводности для микромасштабов. Термин «кажущийся» подчеркивает, что указанная величина лишь условно может рассматриваться как теплопроводность в «классическом» смысле.

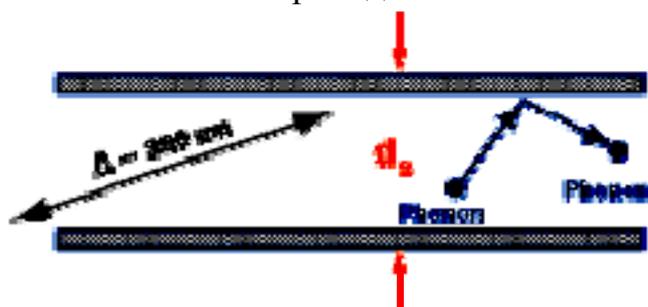


Рис.4.13. Фононное рассеяние на границе, приводящее к значительному снижению теплопроводности тонкого слоя кремния, когда толщина пленки  $d_s$  сопоставима или меньше средней величины свободного пробега фононов  $\lambda$

Фононный транспорт теплоты может быть описан с помощью кинетического уравнения Больцмана, которое необходимо только тогда, когда характеристики

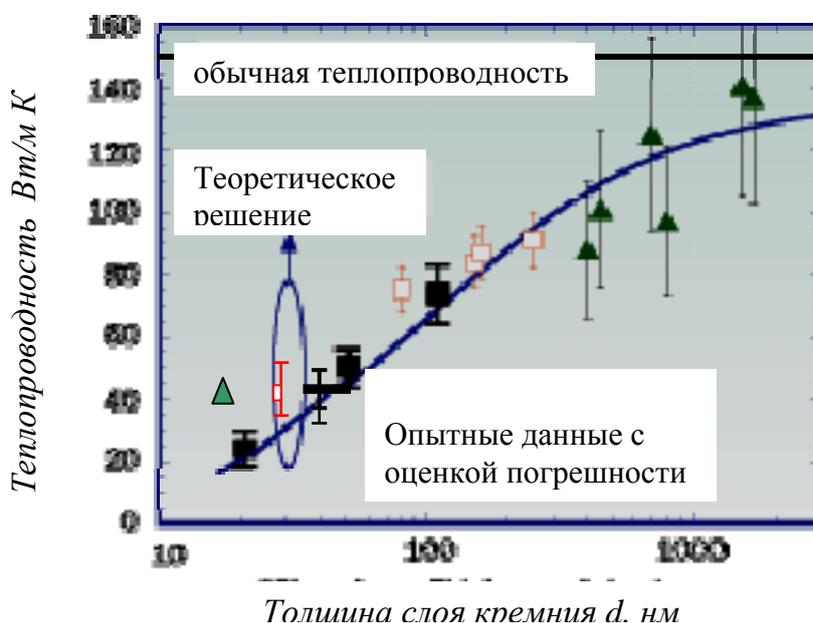


Рис.4.14. Данные о поперечной теплопроводности кремниевых пленок в зависимости от толщины при комнатной температуре

рассеяния электронов и фононов существенно различаются на расстояниях, сопоставимых со средней длиной свободного пробега. Анализ теплообмена в микроэлектронных устройствах, соединениях и наноструктурах с помощью урав-

нения Больцмана является очень громоздким и сложным, даже для простых геометрий, и был предметом исследований и разработок в области микро-и нанотеплообмена в течение последних двух десятилетий. Рис. 4.14. дает представление, насколько снижается «кажущийся» коэффициент теплопроводности для тонких кремниевых пленок, которые являются одним из основных элементов чипов микроэлектронных устройств. Аналогичная картина снижения «кажущегося» коэффициента теплопроводности для тонких слоев меди представлена на рис. 4.15. Теоретические решения, результаты которых приведены на рис. 4.14, 4.15, получены с использованием методов квантовой механики.

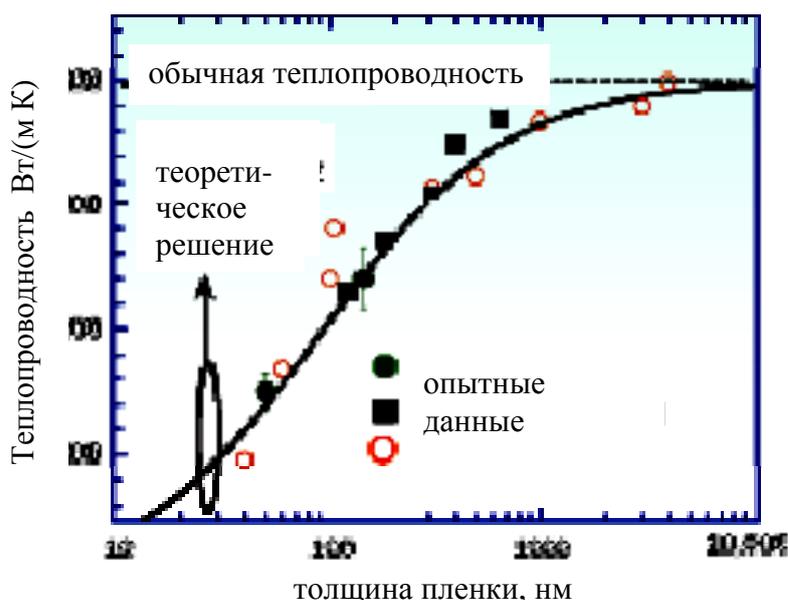


Рис.4.15. Сравнение расчетных результатов и экспериментальных данных для теплопроводности тонких слоев меди в зависимости от толщины слоя

Приведенные примеры дают представление о тех проблемах, которые возникают при анализе задач теплопроводности для микромасштабов. Термин «кажущийся» подчеркивает, что рассматриваемая величина лишь условно может рассматриваться как теплопроводность в «классическом» смысле.

История развития различных отраслей науки дает нам много примеров того, как общепринятые подходы на какой-то момент обнаруживают свою ограниченность. В данном случае полученные результаты не являются неожиданными, поскольку с уменьшением размеров элементов, для которых проводится анализ температурных режимов, неизбежен отход от концепции континуума, о которой упоминалось выше.

#### 4.5. Примеры с решениями

**Пример 4-1.** Картонный лист толщиной  $2\delta=2$  мм после сушки в картоноделательной машине с температурой  $t_0=140^{\circ}\text{C}$  помещен в цеху, где омывается воздухом с температурой  $t_e=20^{\circ}\text{C}$ .

Определить температуры в середине и на поверхности листа через  $\tau=30$  мин после начала охлаждения. Коэффициент теплопроводности картона  $\lambda=0,2 \frac{Вт}{м \cdot град}$ , коэффициент теплоотдачи от поверхности картона к окружающему воздуху  $\alpha = 35 \frac{Вт}{м^2 \cdot град}$ . Плотность картона  $\rho=350 \text{ кг/м}^3$ , теплоемкость картона  $c=1,5 \frac{кДж}{(кг \cdot град)}$ .

Рассчитываем коэффициент теплопроводности

$$a = \frac{\lambda}{\rho \cdot c} = \frac{0,2}{350 \cdot 1500} = 0,381 \cdot 10^{-6} \frac{м^2}{с}.$$

$$\text{Находим } Bi = \frac{35 \cdot 0,001}{0,2} = 0,175, \quad Fo = \frac{0,381 \cdot 10^{-6} \cdot 1800}{(0,002)^2} = 171.$$

Температуры в середине и на поверхности картона при его охлаждении в среде с постоянной температурой определяем с помощью графика  $\theta_{x=0} = f_1(Bi, Fo)$ , представленного на рис. 3.1 и графика  $\theta_{x=\delta} = f_2(Bi, Fo)$ , на рис. 3.2 -  $\theta_{x=0} = 0,01$ ;  $\theta_{x=\delta} = 0,01$ . В условиях охлаждения листа картона для безразмерной температуры справедливо  $\theta = \frac{t - t_g}{t_0 - t_g}$ . Тогда температуры в середине и на поверхности листа

$$t_{x=0} = t_g + \theta_{x=0}(t_0 - t_g) = 20 + 0,01(140 - 20) = 21,2 \text{ } ^\circ\text{C}; \quad t_{x=\delta} = 21,2 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

**Пример 4-2.** Стальной брусок с размерами граней 100; 300 и 600 мм и температурой  $t_0=10 \text{ } ^\circ\text{C}$  помещен в муфельную печь, где температура ее объема составляет  $1600 \text{ } ^\circ\text{C}$ .

Определить температуру в центре бруска через два часа после загрузки его в печь, если коэффициенты теплопроводности и температуропроводности стали равны соответственно  $\lambda=18 \frac{Вт}{м \cdot град}$  и  $a=3,5 \cdot 10^{-6} \frac{м^2}{с}$ , а коэффициент теплоотдачи на поверхности бруска составляет  $\alpha = 200 \frac{Вт}{м^2 \cdot град}$ .

Безразмерная температура бруска определяется как произведение безразмерных температур трех безграничных пластин, пересечением которых определяется тело бруска. Тогда  $\theta_u = \frac{t_{жс} - t_u}{t_{жс} - t_0} = \theta_{x=0} \cdot \theta_{y=0} \cdot \theta_{z=0}$ .

Температуры пластин  $\theta_{x=0}$ ,  $\theta_{y=0}$ ,  $\theta_{z=0}$  находятся по графику на рис. 3.1 зависимости температуры середины безграничной пластины от критериев  $Bi$  и  $Fo$ .

$$\text{Для пластины толщиной } 2\delta_x=100 \text{ мм, } Fo_x = \frac{3,5 \cdot 10^{-6} \cdot 7200}{(0,05)^2} = 10,1,$$

$$Bi_x = \frac{200 \cdot 0,05}{18} = 0,55.$$

По графику на рис. 3.2 определяем  $\theta_x = 0,016$ .

Для пластины толщиной  $2\delta_y = 300 \text{ мм}$ ,  $Fo_y = \frac{3,5 \cdot 10^{-6} \cdot 7200}{(0,15)^2} = 1,12$ ,

$$Bi_y = \frac{200 \cdot 0,15}{18} = 1,7 \quad , \quad \theta_y = 0,3.$$

Для пластины толщиной  $2\delta_z = 600 \text{ мм}$ ,  $Fo_z = \frac{3,5 \cdot 10^{-6} \cdot 7200}{(0,3)^2} = 0,28$ ,

$$Bi_z = \frac{200 \cdot 0,3}{18} = 3,3 \quad , \quad \theta_z = 0,7.$$

Следовательно,  $\frac{t_{жс} - t_{ц}}{t_{жс} - t_0} = 0,016 \cdot 0,3 \cdot 0,7 = 0,00336$  и температура в центре бруска

$$t_{ц} = t_{жс} - 0,00336(t_{жс} - t_0) = 1600 - 0,00336(1600 - 10) = 1594,5 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

**Пример 4-3.** Внутренняя часть реактора выполнена из кислотостойкого материала. Внешняя часть представляет собой тепловую изоляцию. Коэффициент теплопроводности кислотостойкого слоя толщиной  $\delta = 250 \text{ мм}$  составляет  $\lambda = 1,86 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{град}}$ , а коэффициент температуропроводности  $a = 3,8 \cdot 10^{-7} \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$ . Температура реактора равна  $t_0 = 40 \text{ } ^\circ\text{C}$ . Рассчитать температуру внутренней и внешней поверхности реактора через 10 часов после принятия реактором раствора с температурой  $300 \text{ } ^\circ\text{C}$ . Коэффициент теплоотдачи от раствора к стенке реактора

$$\alpha = 350 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{град}}.$$

$$Fo = \frac{3,8 \cdot 10^{-7} \cdot 3600 \cdot 12}{(0,25)^2} = 0,263, \quad Bi = \frac{350 \cdot 0,25}{1,86} = 47,0.$$

Так как  $Fo > 0,25$ , то установился регулярный режим и можно ограничиться первым членом ряда  $\theta = N \cdot \exp(-\varepsilon_1^2 Fo) \cos\left(\varepsilon_1 \frac{x}{\delta}\right)$ . Значения величин  $N$ ,  $P$ ,  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_1^2$  в зависимости от  $Bi$  приведены в таблицах приложений [5]. В рассматриваемом случае при  $Bi = 47,0$  из таблицы находим:  $N = 1,272$ ,  $P = 0,043$ ,  $\varepsilon_1^2 = 2,364$ . Тогда безразмерные температуры на внешней ( $x = 0$ ) и внутренней ( $x = l$ ) поверхностях будут соответственно равны:

$$\theta_{x=0} = N \cdot \exp(-\varepsilon_1^2 Fo) = 1,272 \cdot \exp(-2,364 \cdot 0,263) = 0,682,$$

$$\theta_{x=l} = P \cdot \exp(-\varepsilon_1^2 Fo) = 0,043 \cdot \exp(-2,364 \cdot 0,263) = 0,023.$$

Температура на внутренней поверхности реактора

$$t_{x=\delta} = 300 - 0,023 \cdot (300 - 40) = 294 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

Температура на внешней поверхности реактора

$$t_{x=0} = 300 - 0,682(300 - 40) = 123 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

**Пример 4-4.** Водяной экономайзер котлоагрегата изготовлен из круглых ребристых чугунных труб, наружным диаметром  $d = 76 \text{ мм}$ , диаметр ребер  $D = 200 \text{ мм}$ , толщиной  $\delta = 5 \text{ мм}$ . Определить количество теплоты, которое будет передаться от горячих газов с температурой  $t = 400 \text{ } ^\circ\text{C}$  к внешней поверхности трубы, температуру на конце ребра, если температура у основания ребер  $t_0 = 180 \text{ } ^\circ\text{C}$ . Длина обогреваемой части трубы  $l = 3 \text{ м}$ , количество ребер по длине трубы

$n = 150$ .

Коэффициент теплоотдачи от газов к ребристой поверхности  $\alpha = 46 \frac{Вт}{м^2 \cdot град}$ ,

коэффициент теплопроводности чугуна  $\lambda = 52 \frac{Вт}{м \cdot град}$ .

Количество теплоты, передаваемое от горячих газов к внешней поверхности трубы, пренебрегая теплоотдачей с торца ребра, и температуру на конце ребра, определяем с помощью вспомогательных графиков на рис 4.7.

$$\text{Согласно (4.8)} \quad m = \sqrt{\frac{\alpha \cdot U}{\lambda \cdot f}} \approx \sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda \cdot \delta}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 46}{52 \cdot 0,005}} = 18,8 \text{ 1/м};$$

$$r_1 = d/2 = 76/2 = 38 \text{ мм}; \quad r_2 = D_p/2 = 200/2 = 100 \text{ мм};$$

$$m \cdot r_1 = 18,8 \cdot 0,038 = 0,714; \quad m \cdot r_2' = 18,8 \cdot 0,1025 = 1,93.$$

Здесь теплоотдача с торца ребра приближенно учтена увеличением  $r_2$  на половину толщины ребра:  $r_2' = r_2 + \delta/2 = 0,1 + 0,0025 = 0,1025$ .

Подставив значения  $m \cdot r_1$  и  $m \cdot r_2'$  в выражение для избыточной температуры конца ребра, получим:

$$\vartheta_2 = \vartheta_1 \frac{I_0(1,93)K_1(1,93) + I_1(1,93)K_0(1,93)}{I_0(0,714)K_1(1,93) + I_1(1,93)K_0(0,714)} =$$

$$= (400 - 180) \frac{0,2644 \cdot 0,128 + 1,491 \cdot 0,1245}{1,1319 \cdot 0,128 + 1,491 \cdot 0,65} = 43,3 \text{ } ^\circ\text{C},$$

где значения функций Бесселя берутся из приложений [5].

Температура конца ребра

$$t_1 = t_{жс} - \vartheta_2 = 400 - 43,3 = 356,7 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

Определяем количество теплоты, воспринимаемого одним ребром

$$\psi = \frac{I_1(1,93)K_1(0,714) - I_1(0,714)K_1(1,93)}{I_0(0,714)K_1(1,93) + I_1(1,93)K_0(0,714)} = \frac{1,4910 \cdot 1,024 - 0,3804 \cdot 0,154}{1,1319 \cdot 0,128 + 1,491 \cdot 0,65} = 1,318.$$

$$Q_p = 2 \cdot 3,14 \cdot 0,038 \cdot 52 \cdot 0,005 \cdot 18,8 \cdot 220 \cdot 1,318 = 338,2 \text{ Вт}.$$

Для 150 ребер  $Q_{\Sigma p} = 150 \cdot 338,2 = 50730 \text{ Вт}.$

Количество теплоты, отдаваемое гладкой поверхностью между ребрами

$$Q_c = \alpha \cdot \vartheta_1 \cdot 2\pi \cdot r_1 (l - n \cdot \delta) = 46 \cdot 220 \cdot 2 \cdot 3,14 \cdot 0,038 (3 - 150 \cdot 0,005) = 5434 \text{ Вт}.$$

Общее количество передаваемой теплоты

$$Q_{p.c.} = Q_{\Sigma p} + Q_c = 50730 + 5434 = 56164 \text{ Вт}.$$

Данную задачу можно решить по упрощенной методике, воспользовавшись зависимостью для круглых ребер.

Определим высоту прямого ребра:

$$h = r_2 - r_1 + \frac{\delta}{2} = 100 - 38 + \frac{5}{2} = 64,5 \text{ мм}.$$

Находим произведение  $mh$ ,  $m = 18,81 \text{ 1/м}$  – по результатам предыдущего решения,  $mh = 18,81 \cdot 0,0645 = 1,21$ .

Находим отношения избыточных температур на вершине и у основания ребра

$$\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1} = \frac{1}{ch(mh)} = \frac{1}{ch(1,21)} = 0,54.$$

Определяем отношения наружных радиусов ребра и трубы  $\frac{r_2}{r_1} = \frac{100}{38} = 2,64.$

Зная отношения  $\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1}$  и  $\frac{r_2}{r_1}$ , по рис. 3.16 находим поправочный коэффициент  $\varepsilon'' = 0,84$ . Он представляет собой отношение расходов теплоты с единицы поверхностей круглого и прямого ребер одинаковой толщины:

$$\varepsilon'' = \frac{q_{pl}}{q} = \frac{F_{pl}}{F} \cdot \frac{Q}{Q_{pl}}.$$

Количество теплоты, воспринимаемого прямым ребром длиной  $l = 1\text{ м}$ , сечением  $f = \delta \cdot l = 0,005 \cdot 1 = 0,005 \text{ м}^2$ ,  $Q = \lambda \cdot m \cdot f \cdot \vartheta \cdot th(mh) =$   
 $= 52 \cdot 18,8 \cdot 1 \cdot 0,005 \cdot 220 \cdot th(1,21) = 978 \text{ Вт}.$

Поверхность ребра составит  $F = 2h \cdot l = 2 \cdot 0,0645 \cdot 1 = 0,129 \text{ м}^2.$

Плотность теплового потока  $q = \frac{Q}{F} = \frac{978}{0,129} = 7581 \text{ Вт/м}^2.$

Поверхность круглого ребра составит  $F_{pl} = 2\pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2 =$   
 $= 2 \cdot 3,14(0,1^2 - 0,038^2) = 0,0537 \text{ м}^2.$

Количество теплоты, воспринимаемое круглым ребром,

$$Q_{pl} = \varepsilon'' \cdot q \cdot F_{pl} = 0,84 \cdot 7581 \cdot 0,0537 = 341 \text{ Вт}.$$

### Список литературы

1. Технология целлюлозы. В 3-х т. Т. II. Непенин Ю.Н. Производство сульфатной целлюлозы: Учебное пособие для вузов.- 2-е изд., перераб.,- М.: Лесная промышленность, 1990. – 600 с. ISBN 5-7120-0266-3.
2. А.И. Пехович и В.М. Жидких. Расчеты теплового режима твердых тел. Изд-во «Энергия ЛО», 1968 г., 304 с.
3. А.И. Вейник. Приближенный расчет процессов теплопроводности. Гос.Энергоиздат., М.Л., 1959 г., 184 с.
4. Ю.П. Шлыков, Н.А. Ганин. Контактный теплообмен. М.: Госэнергоиздат, 1963.
5. Исаченко В. П. и др. Теплопередача: Учебник для вузов / В. П. Исаченко, В. А. Осипова, А. С. Сукомел. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Энергоиздат, 1981. – 416 с., ил.