

М. А. ГОТОВСКИЙ

**ОСНОВЫ НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ТЕПЛОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ
ПРОЦЕССОВ**

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

**Санкт-Петербург
2007**

Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

**«Санкт-Петербургский государственный технологический
университет растительных полимеров»**

М.А.Готовский

**ОСНОВЫ НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ТЕПЛОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ
ПРОЦЕССОВ**

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2007

УДК 621.184.64(075)
ББК 31.31 я 7
Г 416

Готовский М.А. Основы научных исследований теплогидродинамических процессов: учебное пособие /СПб ГТУ РП. СПб., 2007.- 92 с.: 24 ил.
– ISBN 5-230-14415-7

Настоящий курс предназначен для подготовки студентов к проведению работ по исследованию теплогидродинамических процессов как экспериментальными, так и расчетными методами, и состоит из трех разделов: - моделирование процессов тепломассообмена; элементы теории вероятностей и применение статистических методов для обработки наблюдений; элементарные основы применения численных методов для решения задач теплообмена и гидродинамики и Приложение, посвященное к-ε модели турбулентности.

Пособие составлено в соответствии с требованиями государственных образовательных стандартов, охватывает минимально необходимый материал по данной дисциплине и поэтому может быть использовано в качестве учебного пособия студента- теплоэнергетика по специальностям 140100 «Теплоэнергетика» и 140105 «Энергетика теплотехнологий».

Рецензенты: профессор кафедры «Компьютерные технологии и эксперимент в теплофизике» СПбГПУ, доктор технических наук, профессор Е.Д.Федорович; профессор кафедры теплосиловых установок СПбГТУ РП кандидат технических наук Н.Н. Гладышев

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом Санкт-Петербургского государственного технологического университета растительных полимеров в качестве учебного пособия.

ISBN 5-230-14415-7

© Готовский М.А., 2007

© ГОУ ВПО Санкт-Петербургский
государственный технологический
университет растительных
полимеров, 2007

ВВЕДЕНИЕ

Название настоящего курса является очень широким. Разумеется, невозможно научить кого-либо проводить научные исследования даже в рамках значительно более объемного курса. Настоящее освоение предмета может быть достигнуто только в ходе практической научной работы. Курс, содержание которого изложено в данном пособии, предназначен лишь для углубления знаний студентов в областях, касающихся исследования тепло-гидравлических процессов как экспериментальными, так и расчетными методами, что может помочь им в дальнейшей деятельности, если они выберут для нее научную работу.

Соответственно курс состоит из трех основных разделов:

1. Моделирование процессов теплообмена.
2. Элементы теории вероятностей и применение статистических методов для обработки наблюдений.
3. Элементарные основы применения численных методов для решения задач теплообмена и гидродинамики.

Первый раздел имеет отношение как к экспериментальным, так и расчетным методам, ибо оба эти подхода требуют использования моделей, позволяющих раскрыть основные черты исследуемого процесса.

Понятие *математического моделирования* включает в себя любое отображение конкретных физических процессов в форме алгебраических или дифференциальных уравнений. Даже такие фундаментальные уравнения, как закон сохранения массы и закон сохранения энергии оказались лишь моделями, справедливыми в условиях ограничений, накладываемых на интенсивность протекания процессов.

Что касается дифференциальных уравнений, то они, как известно, получаются в результате предельного перехода, при котором все масштабы изменения входящих в них величин стремятся к нулю. Поэтому моделирование физических процессов с помощью этих уравнений возможно лишь, если такой предельный переход допустим с точки зрения соотношения масштабов модели и протекающих в ней микропроцессов (например, длины свободного пробега молекул). Однако иногда такой предельный переход используется для получения приближенного решения для заведомо гетерогенной структуры. В этом случае мы получаем так называемую *гомогенную* модель.

Важное место в анализе физических процессов занимает метод анализа размерностей. Использование этого метода позволяет во многих случаях определить структуру решения при аналитическом исследовании, а для экспериментальных исследований сократить количество необходимых опытов. Результаты, получаемые путем анализа размерностей, могут иногда дать практически полную характеристику рассматриваемого явления.

Использование статистических методов анализа погрешностей экспериментов и надежности полученных опытным путем зависимостей является в настоящее время необходимым элементом работы экспериментатора. Во

втором разделе излагаются методы обобщения экспериментальных данных и оценки их достоверности и надежности. Можно рассчитывать на то, что освоение этой части курса позволит студентам в своей дальнейшей работе легче адаптироваться к участию как в стендовых исследованиях, так и в натуральных испытаниях оборудования.

Широкое внедрение ЭВМ в инженерную практику значительно расширило возможности расчетного анализа работы оборудования. При этом основным методом является численное решение дифференциальных уравнений, описывающих тот или иной процесс. В третьем разделе в достаточно простой форме излагается метод дискретизации дифференциальных уравнений теплопередачи и гидродинамики, Знакомство с материалами этого раздела должно облегчить студентам дальнейшее освоение современных методов теплогидравлических расчетов оборудования в своей последующей работе.

РАЗДЕЛ 1.

РОЛЬ МОДЕЛИРОВАНИЯ, АНАЛИЗА РАЗМЕРНОСТЕЙ И ТЕОРИИ ПОДОБИЯ В ИЗУЧЕНИИ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛОМАССООБМЕНА

1.1. Введение в проблему

При изучении разнообразных явлений, протекание которых в комплексе формирует рассматриваемые в настоящем курсе процессы теплообмена, вводится целый ряд понятий, характеризующих каждое из явлений. При этом все вопросы могут быть сформулированы как задачи об определении некоторых функций и численных значений для величин, характеризующих явление, причем при решении таких задач законы природы и другие необходимые соотношения представляются, как правило, в виде дифференциальных уравнений.

При теоретических исследованиях эти уравнения служат для установления общих качественных свойств процесса и, если это возможно, для фактического вычисления искомых величин с помощью различных математических операций. Однако, чисто математические методы решения далеко не всегда дают возможность получить адекватные результаты. Более того, иногда на начальной фазе исследования какого-либо процесса математическая постановка задачи может вообще отсутствовать. В этих случаях главную роль играют экспериментальные методы исследования, которые позволяют установить простейшие опытные факты, на основе которых в дальнейшем можно сформулировать законы, управляющие исследуемым явлением, и выразить их в виде математических соотношений. Полученные результаты могут быть затем приложены к тем сочетаниям параметров, для которых экспериментальные данные отсутствуют.

С другой стороны, грамотная постановка эксперимента может быть осуществлена только на основе предварительного теоретического анализа, хотя бы в том объеме, который оказывается возможным. При этом существенную роль играет правильный выбор безразмерных параметров. Число их должно быть минимальным и выбранные комплексы должны отражать подлежащие изучению эффекты в наиболее удобной форме.

Одну из эффективных возможностей такого предварительного качественно-теоретического анализа и выбора системы определяющих безразмерных параметров дает теория размерности и подобия. Иногда в начальной стадии изучения сложных явлений теория размерности является единственно возможным теоретическим методом.

Комбинирование теории подобия с соображениями, полученными из эксперимента, иногда может приводить к достаточно существенным результатам.

С помощью теории размерностей можно получать особенно ценные выводы при рассмотрении таких явлений, которые зависят от большого количества параметров, но при этом так, что некоторые из этих параметров в

известных случаях становится несущественными. Такие случаи будут рассматриваться ниже.

В заключение заметим, что не следует и переоценивать возможностей метода анализа размерностей. Результаты, которые можно получить с помощью теории размерностей, существенным образом ограничены.

Дальнейшим развитием теории размерностей является более широкое понятие теории подобия и моделирования явлений. Оно связано с использованием дифференциальных уравнений, описывающих процесс, и некоторых опытных моделей, изучаемых в ходе экспериментов. Понятие моделирования может рассматриваться двояко. Наряду с упомянутым экспериментальным подходом оно может рассматриваться и как математическое моделирование. Дело в том, что для достаточно сложных явлений точные уравнения процесса или вообще не могут быть получены, или в полном виде по существу не могут быть практически разрешены. Типичной задачей подобного типа была (и до некоторой степени продолжает оставаться) динамика атмосферных процессов, анализ которой необходим для предсказания погоды. По мере развития компьютерной техники возникала возможность использования все более сложных моделей. Однако, они все равно обеспечивают лишь приближенное описание исследуемых процессов. Более того, тщательное исследование этого вопроса показало, что детерминированное описание атмосферных процессов в течение длительных интервалов времени вообще невозможно.

В данном разделе курса мы постараемся сформировать общие представления о подобии и моделировании и проанализируем конкретные возможности их использования на практике.

1.2. Понятие о размерности, единицы измерения. Структура функциональных связей между физическими величинами

Величины, числовое значение которых зависит от принятых масштабов, т.е. от систем единиц измерения, называются *размерными*, а величины, числовое значение которых не зависит от выбранной системы единиц, называются *безразмерными*. Примерами размерных величин являются длина, время, масса, энергия, и.т.д. Примерами безразмерных величин являются углы (в радианах), а также величины отношений одномерных величин – отношение периметра окружности к диаметру (число π), отношение кинетической энергии к потенциальной, квантовое число и.т.д. Поскольку ускорение силы тяжести g практически постоянно, можно, например, заменить ускорение a перегрузкой n (где $n = a/g$), и ускорение в таком виде будет безразмерной величиной. То есть понятия размерных и безразмерных величин являются относительными.

Различные физические величины связаны между собой определенными соотношениями. Если часть из них принять за основные и установить для них определенные единицы измерения, то остальные величины можно выразить через них и называть их производными.

При описании механических процессов достаточно установить единицы измерения для трех величин, которые могут выбираться по разному. В настоящее время наиболее распространенной является система единиц СИ (System International). За основные механические единицы в ней приняты метр, килограмм и секунда. Кроме того в системе содержатся единица силы тока – ампер, единица термодинамической температуры – кельвин (К), единица силы света – кандела и единица количества вещества – моль. Надо заметить, что выбор дополнительных единиц является в значительной степени элементом удобства. Например, поскольку температура является мерой энергии тела, можно было бы использовать для определения температуры уравнение состояния идеального газа $RT = pv$. Поскольку R - постоянная величина, то произведение RT могло бы стать мерой нагретости тела и имело бы размерность Дж/кг, то есть энергии на единицу массы. Однако, на практике использование температуры значительно удобнее, поскольку позволяет выделить тепловые процессы. В старых системах присутствовала еще и отдельная единица для количества тепла – калория, однако оказалось, что без нее вполне можно обойтись. При этом формулы термодинамики и газовой динамики упростились, поскольку из них исчезла дополнительная постоянная - механический эквивалент теплоты.

Выражение производной единицы измерения через основные единицы измерения называется размерностью. В соответствии с английскими названиями основных единиц- длины, массы и времени для их обозначения используются следующие латинские буквы - L, M, T.

Для обозначения размерности величины A традиционно используется символ $[A]$, введенный Максвеллом. Например, для размерности силы в системе СИ мы будем писать $[F] = MLT^{-2}$. Формулы размерности очень удобны для пересчета числового значения размерной величины при переходе от одной системы единиц к другой.

В системе СИ (как, впрочем, и в других системах) формулы размерности имеют вид степенного одночлена. Можно показать, что такой вид определяется следующим физическим условием: отношение двух значений любой производной величины не должно зависеть от выбора масштабов для основных единиц измерения.

1.3. Π -теорема Букингама ¹

Физические закономерности, устанавливаемые теоретически или экспериментально представляют собой функциональные связи между величинами, характеризующими рассматриваемое явление. Они выражают собой физические факты, которые не должны зависеть от единиц измерения, хотя численные значения самих величин будут, естественно, зависеть от системы единиц. Поэтому функциональные зависимости должны обладать структурой, обеспечивающей выполнение указанного требования.

¹ Доказательство теоремы при первом чтении можно пропустить

Пусть мы имеем некоторую размерную величину a , которая является функцией независимых между собой размерных величин a_1, a_2, \dots, a_n

$$a = f(a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n), \quad (1)$$

некоторые из этих параметров могут быть переменными, некоторые – постоянными.

Выясним структуру функции f в предположении, что эта функция выражает некоторый конкретный физический закон, независимый от выбора системы единиц.

Пусть среди размерных величин a_1, a_2, \dots, a_n первые k величин имеют независимые размерности (число основных единиц измерения должно быть $\geq k$). Это означает, что ни одна из первых k размерностей не может быть выражена через остальные.

Примем k независимых величин a_1, a_2, \dots, a_k за основные и обозначим их размерности как $[a_1] = A_1, \dots, [a_k] = A_k$. Тогда размерности остальных величин будут

$$[a] = A_1^{m_1} \dots A_k^{m_k}, \quad [a_{k+1}] = A_1^{p_1} \dots A_k^{p_k}, \dots, [a_n] = A_1^{q_1} \dots A_k^{q_k}.$$

Изменим теперь единицы измерения величин a_1, \dots, a_n соответственно в z_1, \dots, z_k раз. Тогда в новой системе единиц имеем

$$\begin{array}{ll} a'_1 = z_1 a_1 & a' = z_1^{m_1} \dots z_k^{m_k} a \\ a'_2 = z_2 a_2 & a'_{k+1} = z_1^{p_1} \dots z_k^{p_k} a_{k+1} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ a'_k = z_k a_k & a'_n = z_1^{q_1} \dots z_k^{q_k} a_n \end{array}$$

В новой системе единиц соотношение (1) примет вид

$$a' = z_1^{m_1} \dots z_k^{m_k} a f(z_1 a_1, z_2 a_2, \dots, z_k a_k, z_1^{p_1} \dots z_k^{p_k} a_{k+1}, \dots, z_1^{q_1} \dots z_k^{q_k} a_n). \quad (2)$$

Поскольку масштабы z_i произвольны, выберем их следующим образом: $z_1 = 1/a_1, \dots, z_k = 1/a_k$. Тогда k первых аргументов функции f будут равны единице. Таким образом, число реальных аргументов оказывается равным $n - k$ и численные значения параметров a, a_{k+1}, \dots, a_n определяются формулами

$$\Pi = a / (z_1^{m_1} \dots z_k^{m_k}), \quad \Pi_1 = a_{k+1} / (z_1^{p_1} \dots z_k^{p_k}), \dots, \Pi_{n-k} = a_{k+1} / (z_1^{q_1} \dots z_k^{q_k}).$$

Нетрудно видеть, что значения $\Pi, \Pi_1, \dots, \Pi_{n-k}$ не зависят от выбора первоначальной системы измерения, поскольку имеют нулевую размерность относительно A_1, \dots, A_k .

Пользуясь относительной системой единиц, соотношение (1) можно представить в виде

$$\Pi = f(1, 1, \dots, \Pi_1, \dots, \Pi_{n-k}). \quad (3)$$

Таким образом, связь между $n+1$ размерными величинами можно представить в виде соотношения между $n + 1 - k$ безразмерными комплексами. Этот вывод известен по названию Π -теоремы или теоремы Букингема. В этом заключается основной источник полезных приложений метода теории размерностей к исследованию разнообразных физических задач.

Очевидно, что чем меньше число параметров, определяющих изучаемую величину, по отношению к числу независимых размерностей, тем проще вести ее исследование. Это, в частности, определяет целесообразность сохранения некоторых дополнительных размерностей, о которых упоминалось выше. Впрочем выигрыш достигается лишь в том случае, если введение дополнительной основной единицы не связано с появлением дополнительных физических размерных постоянных.

Далее мы проиллюстрируем использование теории размерности на ряде примеров.

1.4. Примеры приложения теории размерности к решению конкретных задач

1.4.1. Задача нестационарной теплопроводности

Рассмотрим следующую задачу. Пусть на границе полубесконечного массива, имеющего начальную температуру T_0 , температура скачком возросла до величины T_C . Заданы следующие физические свойства материала массива: теплопроводность λ , теплоемкость C_p и плотность ρ . Из них можно составить коэффициент температуропроводности a , определяемый как $a = \lambda / (C_p \rho)$. Попытаемся теперь найти форму закона изменения плотности теплового потока на границе в зависимости от времени τ и количество теплоты, аккумулированной массивом в расчете на единицу поверхности.

Очевидно, что плотность тепловой нагрузки q_{zp} будет пропорциональна теплопроводности λ и градиенту температуры массива на границе, которая, исходя из соображений размерности, может быть записана как частное некоторого характерного перепада температуры и линейного размера. Что касается характерного перепада температуры, то очевидно, что это $T_C - T_0$. Поскольку характерный линейный размер в условиях задачи отсутствует, то его необходимо сформировать из условий задачи. Размерность a равна $[a] = \text{м}^2 \text{с}^{-1}$. Обозначим время через τ . Произведение $a\tau$ имеет размерность $[a\tau] = \text{м}^2$. Следовательно, характерным размером, в данном случае будет $L = (a\tau)^{0,5}$. Тогда плотность тепловой нагрузки будет выражаться как $q \sim (T_C - T_0) / (a\tau)^{0,5}$, а количество аккумулированного тепла на единицу площади

$$Q = K\lambda \int_0^{\tau} \frac{T_C - T_0}{\sqrt{a\tau}} d\tau = 2K\lambda \frac{(T_C - T_0)\sqrt{\tau}}{a},$$

где K – численный коэффициент, который по смыслу задачи не должен слиш-

ком сильно отличаться от единицы. Действительно, точное решение соответствующей задачи дает $K = 1,128$.

1.4.2. Движение вязкой жидкости в прямолинейной трубе

Прежде, чем приступить к анализу конкретных задач, составим перечень основных физических величин, с которыми мы будем оперировать, и определим их размерности.

- p – давление Па (паскаль) – единица давления $\text{Н м}^{-2} = \text{кг м}^{-1} \text{с}^{-2}$
 $\Delta p/l = i$ – градиент давления (гидравлический уклон) $\text{Па/м}^{-3} = \text{кг м}^{-2} \text{с}^{-2}$
 μ – коэффициент динамической вязкости - Па с = $\text{кг м}^{-1} \text{с}^{-1}$
 ρ – плотность - кг м^{-3}
 τ – время - с
 ν – коэффициент кинематической вязкости - μ/ρ $\text{м}^2 \text{с}^{-1}$
 u – скорость м с^{-1}
 Q – объемный расход - $\text{м}^3 \text{с}^{-1}$
 G – массовый расход - кг с^{-1}
 ρu – массовая скорость – $\text{кг м}^{-2} \text{с}$
 $T, \Delta T$ – температура, разность температур - градус Кельвина - К
 c_p – теплоемкость - Дж $\text{кг}^{-1} \text{К}^{-1}$
 λ – коэффициент теплопроводности - Вт $\text{м}^{-1} \text{К}^{-1} = \text{кг м с}^{-3} \text{К}^{-1}$

В середине 19 века на основе опытов по исследованию течения несжимаемой жидкости в трубках малого диаметра при относительно небольших скоростях течения Пуазейль и Хаген установили следующее соотношение между установившимся объемным расходом жидкости, протекающей через длинную тонкую трубку с градиентом давления i .

Попытаемся получить этот закон из соображений размерности (разумеется, с точностью до постоянного множителя). Отметим, что в число переменных величин, характеризующих процесс не войдет плотность жидкости ρ , поскольку движение установившееся и ускорения отсутствуют. В результате останутся следующие величины: объемный расход Q , диаметр трубки d , вязкость μ , градиент давления i . Поскольку число основных размерностей – 3, то из перечисленных величин можно составить лишь один безразмерный комплекс, который будет постоянной величиной $Q\mu/d^4 = \text{const}$. Отсюда имеем следующую зависимость для объемного расхода

$$Q = C i d^4 / \mu \quad (4)$$

Именно такая зависимость с $C = \pi/128$ была получена Хагеном и Пуазейлем. Из нее видно, что расход жидкости пропорционален градиенту давления и 4-й степени диаметра. Однако, попытка применения соотношения (4) для труб достаточно большого диаметра с высоким расходом жидкости оказались неудачными. Зависимость типа (4) не описывала реальные опытные

результаты. Возникшее противоречие было разрешено Рейнольдсом, который показал, что течение при некоторых условиях становится практически нестационарным даже при постоянстве расхода во времени. Его наблюдения выявили наличие незатухающих колебаний все локальных параметров потока. Чтобы попытаться посмотреть, что дает нам в этих условиях анализ размерностей, необходимо добавить к перечисленным выше параметрам потока плотность ρ , которая появляется из-за наличия ускорений в потоке. Тогда у нас появятся уже два безразмерных параметра. Их удобно представить в следующем виде:

$$\zeta = i / (\rho U^2 / 2d) \quad Re = \rho U d / \mu .$$

Первый из них ζ носит название коэффициента сопротивления, а второй Re носит название числа Рейнольдса. Теория размерностей говорит нам, что решение поставленной задачи можно записать в виде

$$\zeta = f(Re) . \tag{5}$$

Если заменить скорость u в первом из выражений через Q , то мы можем записать

$$Q = (i d^5 / \rho)^{0.5} \varphi(Re) . \tag{6}$$

Отсюда видно, что зависимость расхода от l и d определяются видом функции $\varphi(Re)$. Число Re также можно переписать через расход Q в форме

$$Re = 4\rho Q / (\pi \mu d) = 4Q / (\pi v d) .$$

Рейнольдс показал, что переход к новому виду течения, которое получило название *турбулентного* происходит при числе $Re \approx 2200$, Его обычно называют *критическим*. числом Рейнольдса - $Re_{кр}$ Течение при $Re < Re_{кр}$ называют *ламинарным* (слоистым).

Для турбулентного течения зависимость (5) для достаточно широкого диапазона чисел Re может быть записана в форме

$$\zeta = 0,316 Re^{-0.25} . \tag{7}$$

В этом случае зависимость Q от d, i можно записать в виде

$$Q \sim d^{2.71} i^{0.571} . \tag{8}$$

1.4.3. Теплоотдача тела в потоке жидкости

Рассмотрим далее еще один классический пример применения теории размерностей, на этот раз к теории теплообмена. Это рассмотренная Рэлеем

задача об установившейся теплопередаче к неподвижному телу, обтекаемому потоком, скорость которого на большом расстоянии от тела постоянна в пространстве. Мы несколько видоизменим его выводы, чтобы оставаться в рамках системы СИ.

Пусть Q – количество тепла, отдаваемое телом в единицу времени. Жидкость считаем несжимаемой и идеальной. Величина Q зависит от следующих параметров:

l -характерного размера тела, U - скорости жидкости вдали от тела, ΔT – перепада температуры между телом и жидкостью вдали от тела, c_p/ρ – объемной теплоемкости жидкости, λ - теплопроводности жидкости. Тогда можно записать

$$Q = f(l, U, \Delta T, c_p/\rho, \lambda).$$

В качестве основных единиц измерения можно выбрать м, с, К, Дж. Заметим, что Релей, работа которого была написана в 1915 году, выбрал в качестве энергетической единицы калорию. Но поскольку в рассматриваемом нами процессе не происходит перехода механической энергии в тепловую, то это не приводит к какой-либо разнице. Итак

$$[Q] = \text{Дж с}^{-1}, [l] = \text{м}, [U] = \text{м с}^{-1}, [\Delta T] = \text{К}, [c_p/\rho] = \text{дж м}^{-3} \text{К}, [\lambda] = \text{Дж м}^{-1} \text{с}^{-1} \text{К}^{-1}.$$

Заметим, что в размерности всех переменных отсутствует масса. В соответствии с теорией мы можем составить два безразмерных комплекса – определяемый – $Q/(l\Delta T\lambda)$ и определяющий $lUc_p/(\rho\lambda)$. Отсюда имеем

$$Q/(l\Delta T\lambda) = f(lUc_p/(\rho\lambda)). \quad (9)$$

Оба полученных комплекса широко используются в теории теплообмена. Первый из них носит название числа Нуссельта, а второй – числа Пекле. Зависимость (9), как это будет показано ниже, может быть получена также путем анализа уравнений конвективного теплообмена методами теории подобия. Поскольку эти комплексы мы будем неоднократно использовать ниже, то приведем их к форме, которая является общепринятой. Введем понятие об удельном тепловом потоке q . Он определяется как Q/F , где F – площадь поверхности тела. Очевидно, что $F \sim l^2$. Тогда (9) можно переписать в виде

$$ql/(l\Delta T\lambda) = f_l(lUc_p/(\rho\lambda))$$

Если далее ввести коэффициент теплоотдачи $\alpha = q/\Delta T$, то с учетом, что $c_p/(\rho\lambda) = a$ запишем окончательно полученное выражение в виде

$$Nu = f_l(Pe),$$

где $Nu = \alpha l/\lambda$, $Pe = Ul/a$.

Заметим также, что $Pe = Re Pr$. Число Re уже было введено выше, а о числе Прандтля мы будем говорить при рассмотрении уравнений теплогидродинамики.

Несколько слов о коэффициенте теплоотдачи α . Выражение $q = \alpha \Delta T$ было введено еще Ньютоном и выражало гипотезу о линейности связи между тепловым потоком и разностью температур. Это предположение оказалось весьма удобным для решения уравнения теплопроводности, ибо обеспечивало линейность граничных условий и позволяло использовать аналитические методы. Однако при сильном отклонении от линейности использование величины α не дает существенных преимуществ. Такая ситуация имеет место, например, при кипении.

Теперь продолжим обсуждение формулы (9). В то время вывод Релея встретил возражение (Рябушинский), которое состояло в том, что поскольку количество теплоты и температура имеют размерность энергии, если их рассматривать с точки зрения молекулярно-кинетической теории, то за основные единицы измерения можно выбирать лишь массу, длину и время. В этом случае для температуры мы должны использовать размерность механической энергии - $\text{кг м}^2 \text{с}^{-2}$. Тогда для других переменных, связанных с тепловыми процессами, мы получим следующие размерности $c_p/\rho = \text{м}^{-3}$ и $\lambda = \text{м}^{-1} \text{с}^{-1}$.

При этом, учитывая, что число основных единиц измерения сократилось, мы получим уже две независимые безразмерные комбинации: $luc_p/(\rho\lambda)$ и $l^3 c_p/\rho$. В результате приходим к формуле

$$N/(l\Delta T\lambda) = f(luc_p/(\rho\lambda), l^3 c_p/\rho), \quad (10)$$

которая дает меньше сведений, чем формула (9). В приложении к реальным процессам смысл полученного дополнительного комплекса непонятен. В своем ответе Рябушинскому Релей резонно заметил, что «Мы бы имели дело с парадоксом, если бы углубление наших знаний о природе тепла в молекулярной теории приводило бы нас к худшему положению, чем раньше...».

Таким образом, учет дополнительных соображений о механизме явления здесь не приводит к более информативному результату. Приведем еще два примера использования анализа размерностей для установления формы расчетных зависимостей.

1.4 4. Заполнение сосуда через подводящую трубу

В 1909-1911 гг. были опубликованы результаты серии экспериментов, проведенных Э.Бозе и др. Измерялось время заполнения сосуда данного объема Q через подводящую трубку и перепад давления P на концах трубки при стационарном протекании через нее различных жидкостей с существенно различными физическими свойствами. Т.Карман, один из основоположников современной гидродинамики, продемонстрировал возможность обработки этих данных с помощью анализа размерностей.

Перепад давления на трубке P должен зависеть от времени наполнения сосуда τ , объема сосуда Q , коэффициента вязкости жидкости μ и ее плотности ρ . То есть

$$P = f(\tau, Q, \mu, \rho). \quad (11)$$

Число определяющих переменных n в данном случае равно 4. Их размерности в данном случае таковы

$$[P] = \text{кг м}^{-1} \text{с}^{-2}; [Q] = \text{м}^3; [\tau] = \text{с}; [\rho] = \text{кг м}^{-3}.$$

Поскольку число независимых размерностей k равно 3, то согласно П-теореме безразмерный параметр, содержащий P , является функцией одного безразмерного параметра Π_1 , содержащего определяющие переменные. Выберем их следующим образом

$$\Pi = P\mu^{-1}\tau; \quad \Pi_1 = \rho\mu\tau Q^{2/3}.$$

Результат должен выражаться в форме

$$\Pi = \Phi(\Pi_1). \quad (12)$$

Обобщение опытных данных в форме (12) привело к тому, что опытные точки для всех жидкостей легли на одну общую кривую. Вывод состоит в том, что заранее проведенный анализ размерностей позволил бы во много раз сократить необходимый объем экспериментов.

1.4.5. Распространение взрывной волны от атомного взрыва

При атомном взрыве в области, настолько малой, что ее можно считать точкой, практически мгновенно выделяется значительная энергия E . От центра взрыва распространяется мощная ударная волна, давление за которой вначале составляет сотни тысяч атмосфер. По сравнению с ним начальным давлением воздуха можно пренебречь. Тогда можно считать, что радиус фронта ударной волны r_f через промежуток времени t после взрыва зависит от E , t и начальной плотности газа ρ_0 . То есть

$$r_f = r_f(E, t, \rho_0). \quad (13)$$

Очевидно, что $n = 3$ и число независимых размерностей k тоже равно трем. Поскольку $n - k = 0$, то безразмерный радиус фронта волны оказывается константой.

$$\Pi = r_f (Et^2/\rho_0)^{-1/5} = C \quad \text{или} \quad r_f = C(Et^2/\rho_0)^{1/5}. \quad (14)$$

Полученная формула показывает, что если измеряется радиус ударной волны, то в логарифмических координатах $2/5 \lg r_f = \lg t$ экспериментальные данные должны ложиться на прямую

$$2,5 \lg r_f = 2,5 \lg C E^{1/5} \rho_0^{-1/5} + \lg t, \quad (15)$$

имеющую наклон, равный единице.

Как показывают более детальные расчеты, коэффициент C близок к единице. Это в свое время дало возможность определить энергию взрыва по фильму об американских ядерных испытаниях. Публикация этих данных вызвала скандал, поскольку величина E считалась секретной. В то же время сам фильм секретным не был.

1.5. Использование теории размерности и подобия при моделировании

Понятие моделирования, как уже говорилось выше, может быть отнесено к двум различным методам исследования физических задач. В этом разделе рассматривается традиционное физическое моделирование. Его определение выглядит следующим образом. *Моделирование – это замена натурального изучения интересующего нас явления изучением аналогичного явления на модели меньшего или большего масштаба в лабораторных условиях.* Смысл моделирования заключается в том, чтобы на основании результатов модельных испытаний получить информацию, достаточную для описания процесса, протекающего в натуральных условиях.

Моделирование, как правило, базируется на рассмотрении физически подобных явлений в условиях, когда их удобнее и выгоднее осуществить. Физическое подобие можно рассматривать как обобщение геометрического подобия. Как известно, для подобных геометрических фигур или тел все размеры одной из них можно определить, умножая соответственные размеры другой на единственный коэффициент подобия.

Дадим одно из возможных определений физического подобия. *Два явления подобны, если по заданным характеристикам одного можно получить соответствующие характеристики другого простым пересчетом, который аналогичен переходу от одной системы единиц измерения к другой системе.*

Для осуществления подобного пересчета необходимо знать «переходные масштабы», которые аналогичны коэффициенту подобия. Числовые характеристики для различных, но подобных явлений можно рассматривать как характеристики одного и того же явления, выраженные в различных системах единиц измерения. Для совокупности подобных явлений безразмерные характеристики имеют одинаковые численные значения.

Однако, на практике эти условия моделирования чаще всего не выполняются в полном объеме. В этом случае всегда встает вопрос о погрешностях, возникающих при переносе результатов на натуральный объект.

Согласно доказанной выше теореме Букингема для любого явления можно составить $n - k$ независимых безразмерных комбинаций, составленных из определяющих параметров. При этом всегда можно указать базу, т.е. систему безразмерных величин, которые определяют остальные величины. Итак, условием подобия двух явлений будет постоянство числовых значений безразмерных комбинаций, образующих базу.

Более или менее ограниченную базу можно составить лишь для простейших задач теплообмена – стационарных условий, постоянства физических свойств, выполнение условий несжимаемости, и т.д. На практике приходится прибегать к приближенному моделированию, при котором в модели воспроизводится тот же физический процесс, но при частичном нарушении части условий полного моделирования. Возможна также ситуация, в которой воспроизводится часть физического процесса. Применительно к теплообменным устройствам используется локальное тепловое моделирование и локальное аэродинамическое моделирование.

Иногда применяется моделирование по аналогии, когда в модели воспроизводится процесс другой физической природы но описываемый одинаковыми безразмерными уравнениями. Обычно такой подход базируется на математическом моделировании.

Примеры конкретной реализации приемов приближенного моделирования будут приведены ниже, после завершения общей информации о других формах применения идеи подобия.

1.6. Метод подобия, базирующийся на анализе уравнений процесса, приведенных к безразмерному виду

Как уже ясно из заголовка раздела в данном случае безразмерные критерии подобия получаются из дифференциальных уравнений рассматриваемого явления. Для этого после добавления к уравнениям начальных и граничных условий выбираются характерные значения параметров. Для их обозначения будет использоваться нижний индекс «0». Обычно для большинства величин выбирают значение данного параметра в некоторой характерной точке. Исключение составляют давление и температура, для которых выбираются другие величины. В частности, для давления часто фигурирует скоростной напор. Кроме того, сами переменные иногда выбираются в виде разностей, что позволяет получить более простые начальные и граничные условия для безразмерных уравнений. Дальнейший шаг состоит в замене входящих в них переменных на безразмерные (они будут обозначаться верхним индексом *), с использованием выбранных масштабов. и группировке масштабных величин в безразмерные комплексы Π_i . Решение полученной системы дифференциальных уравнений может быть представлено в виде

$$Y_i = Y_{i0} f(x_1^*, \dots, x_k^*, \Pi_1, \dots, \Pi_n) \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

где m - число зависимых переменных, k – число координат + время, n -

число независимых безразмерных комплексов.

В качестве примера приведем использование этого подхода для преобразования уравнения теплопроводности

$$c_p \rho \frac{\partial T}{\partial \tau} - \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = q_v . \quad (16)$$

К нему надо добавить начальные и граничные условия. Начальное условие должно содержать распределение температуры в рассматриваемом теле в начальный момент времени $\tau = 0$

$$T(0, x, y, z) = f(x, y, z) .$$

Граничные условия в общем виде определяют теплопередачу на границе тела с окружающей средой

$$\alpha(T_{sp} - T_{cp}) + \lambda \partial T / \partial n = 0 , \quad (17)$$

где n – внешняя нормаль к поверхности тела.

Введем масштабы температуры – $\Theta = T_0 - T_{cp}$ (T_0 может быть начальной температурой тела, если она постоянна или относиться к определенной точке тела), линейного размера l и времени τ_0 . Безразмерную температуру T^* можно, например, выбрать в виде $(T - T_{cp}) / \Theta$, а время τ / τ_0 . Обозначая безразмерные переменные знаком (*), и умножив уравнение на l^2 / λ , получим

$$\frac{l^2}{a\tau_0} \frac{\partial T^*}{\partial \tau^*} - \left(\frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial z^{*2}} \right) = \frac{q_v l^2}{\lambda \Theta} , \quad (18)$$

а для граничных условий

$$\frac{\alpha l}{\lambda} T_{sp}^* + \lambda \partial T^* / \partial n^* = 0 . \quad (19)$$

Здесь мы получаем три безразмерных комплекса:

$a\tau_0/l^2$ – число Фурье (Fo), $\alpha l/\lambda$ – число Био (Bi), $q_v l^2/\lambda \Theta$ – безразмерная плотность тепловыделения – число Померанцева (Po).

Таким образом, безразмерная температура T^* будет функцией безразмерных координат и времени, а параметрами этой зависимости будут Fo , Bi , Po . В принципе в качестве безразмерного времени можно непосредственно использовать переменную $a\tau/l^2$.

Решение уравнения теплопроводности табулированы для большого количества случаев. Имеются также программные средства для его решения. Но для экономии затрат труда и времени при этом почти всегда используется указанная система безразмерных параметров.

Второй пример, который мы здесь рассмотрим, это уравнения пограничного слоя. Кстати сказать, для вывода уравнений пограничного слоя используются масштабные соображения, вытекающие из смысла самого понятия пограничного слоя, который состоит в том, что эффекты вязкости проявляются лишь в тонком пристенном слое, а в остальной части потока текущую среду можно рассматривать как идеальную жидкость (не имеющую вязкости).

$$U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} \quad (20)$$

Используя такие же процедуры обезразмеривания, приходим к уравнению

$$U_x^* \frac{\partial U_x^*}{\partial x^*} + U_y^* \frac{\partial U_x^*}{\partial y^*} = -\frac{\Delta p}{\rho U_0^2} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\nu}{U_0 l} \frac{\partial^2 U_x^*}{\partial y^{*2}} \quad (21)$$

Здесь мы получили два комплекса. Один из них уже известное нам число Рейнольдса, а другое, $\Delta p / \rho U_0^2$ – число Эйлера (Eu). Величина Δp – характерная для данных условий разность давлений. Использование в данном случае абсолютного значения давления не соответствует характеру задачи. Число Eu часто используется для представления опытных данных по гидравлическому сопротивлению. Для задач пограничного слоя в качестве масштаба для давления часто используется величина ρU_0^2 . В этом случае величина Δp выпадает из уравнения.

Если мы рассматриваем течение вдоль пластины, то $\partial p / \partial x = 0$.

Следовательно

$$U_x^* \frac{\partial U_x^*}{\partial x^*} + U_y^* \frac{\partial U_x^*}{\partial y^*} = \frac{\nu}{U_0 l} \frac{\partial^2 U_x^*}{\partial y^{*2}} \quad (22)$$

Запишем теперь уравнения для теплового пограничного слоя

$$U_x^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + U_y^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \frac{a}{U_0 l} \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} \quad (23)$$

и диффузионного пограничного слоя

$$U_x^* \frac{\partial C^*}{\partial x^*} + U_y^* \frac{\partial C^*}{\partial y^*} = \frac{D}{U_0 l} \frac{\partial^2 C^*}{\partial y^{*2}} \quad (24)$$

Как видим, в отсутствие градиента давления различие уравнений (22), (23) и (24) определяется лишь отличием друг от друга ν (кинематической вязкости), a (температуропроводности) и D (коэффициента диффузии). Отношения этих величин носят названия числа Прандтля ($\nu/a = Pr$) и диффузионного числа Прандтля или числа Шмидта ($\nu/D = Pr_D \equiv Sc$).

Результатами решения уравнений пограничного слоя являются распределения скорости, температуры и концентрации в зависимости от координат x , y . Отсюда мы можем определить потоки импульса (касательное напряжение), теплоты и диффундирующего вещества через границу:

$$s = \mu dU/dy, \quad q = -\lambda dT/dy, \quad j = -DdC/dy$$

Но существует некоторое отличие, связанное с образованием безразмерных переменных между уравнениями (22) и (23),(24). Если масштабом для скорости является просто заданная скорость внешнего потока, то масштабы температуры и концентрации могут быть определены лишь через разность соответствующих величин на стенке и вдали от стенки. Продемонстрируем вывод соотношений подобия для гидродинамической и тепловой задач.

Итак положим, что $Pr = 1$, Тогда $Re = Pe$. Решения уравнений (23)-(24) тождественны. Обозначим через Π значение производной $\partial U^*/\partial y^*$ при $y^*=0$. Тогда для касательного напряжения и теплового потока на стенке имеем

$$s_{cm} = \Pi \mu U/l ; \quad q_{cm} = \Pi \lambda \Delta T/l$$

и

$$\Pi = s_{cm} l / \mu U = s_{cm} \rho U l / \mu / \rho U^2 = s_{cm} = Re / \rho U^2 = q_{cm} l / \lambda \Delta T = \alpha l / \lambda = Nu.$$

Обозначая $s_{cm} / \rho U^2$ через $c_f/2$, где c_f – коэффициент трения, получим известное соотношение подобия

$$Nu/Pe = c_f/2 . \quad (25)$$

Аналогичное соотношение справедливо и для диффузионного числа Нуссельта (Nu_D), которое чаще называют числом Шервуда (Sh).

Таким образом, для окрестности твердой стенки, где в основном и происходят процессы взаимодействия твердой фазы с потоком газовой или жидкой фазы, имеет место так называемая тройная аналогия между передачей импульса, тепла и массы, если только соблюдаются условия $Pr = 1, Sc = 1$. Практически можно говорить, что эти числа должны не слишком сильно отличаться от единицы. Отклонения от условия $\partial p/\partial x = 0$ проявляются лишь для поверхностей весьма большой кривизны. Для газообразных сред тройная аналогия оказывается достаточно близкой к реальности.

Иначе обстоит дело для жидкостей. Для них величины чисел Pr и Sc могут существенно отличаться от единицы. Например, для жидких металлов число Прандтля может быть существенно меньше 0,01, а для высоковязких жидкостей (масла, глицерин) достигать тысячи и более. Еще более высокими могут быть числа Sc . В таких случаях приходится даже менять подход к построению зависимостей для теплоотдачи. Об этом мы поговорим после обсуждения вопроса о турбулентности и аналогии Рейнольдса.

Коснемся теперь формы решений уравнений пограничного слоя в критериальном виде. Эти решения обычно представляются как

$$c_f = A Re^{-k} \quad Nu = C Re^m Pr^n \quad Nu_D = C Re^m Sc^n.$$

Для представления аналогии удобнее пользоваться так называемым числом Стентона. При этом из выражения выпадает ряд величин и в соотношении непосредственно фигурируют необходимые для расчетов величины тепло- и массоотдачи

$$St = Nu / (Re Pr) = Nu / Pe = \alpha / (c_p \rho U).$$

Аналогично можно ввести число Стентона для диффузионной задачи. В этом случае легко показать, что при $Pr = Pr_D = 1$

$$St = St_D = c_f / 2.$$

1.7. Турбулентность и аналогия Рейнольдса

Как известно, описание турбулентного течения базируется на тех же самых общих уравнениях сплошной среды, что и для ламинарного течения. Однако, при этом приходится исходить из полноразмерных нестационарных уравнений даже при рассмотрении стационарных в осредненном смысле течений простейших типов.

Количество возможных независимых критериев не может возрасти, поскольку течение определяется тем же набором независимых параметров, но возможность отбрасывания части параметров для простейших с точки зрения геометрии и временного характера задачи уже становится проблематичной. Поэтому после открытия турбулентных течений и установления их широкой распространенности специалисты пошли по пути увязывания осредненных характеристик турбулентности с полем осредненных параметров (разумеется при осреднении на масштабе времени, существенно превышающем периоды турбулентных пульсаций). На этой базе были построены практические методы расчета турбулентных течений, из которых наиболее успешной оказалась гипотеза пути смешения Прандтля. Напомним, что она базируется на аналогии с молекулярной физикой, где путь смешения играет роль длины свободного пробега, а элементарный объем жидкости (прандтлевский моль) – роль молекулы газа. Что касается пульсационной скорости, то она определяется как произведение пути смешения на поперечный градиент скорости. Аналогично определяются через путь смешения и градиенты соответствующих величин пульсации температуры и концентрации.

В этом случае мы имеем для потоков импульса, тепла и пассивной примеси C следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} s &= \mu dU/dy + [\rho l_{\tau}^2 (dU/dy)](dU/dy) \\ q &= -\lambda dT/dy - [c_p \rho l_{T\tau} (dU/dy)](dT/dy) \\ J_C &= -D dC/dy - [l_C l_{\tau} (dU/dy)](dC/dy) \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Величины в квадратных скобках можно назвать турбулентными коэффициентами переноса

$$\mu_T = \rho l_{\tau}^2 (dU/dy); \quad \lambda_T = c_p \rho l_{T\tau} (dU/dy), \quad D_T = l_C l_{\tau} (dU/dy) . \quad (27)$$

Если теперь ввести формально по аналогии с обычными числами Прандтля и Шмидта их турбулентные аналоги – Pr_T и Sc_T , то получим

$$Pr_T = l_{\tau} / l_T, \quad Sc_T = l_{\tau} / l_C .$$

Если принять $l_{\tau} = l_C = l_T$, то $Sc_T = Pr_T = 1$. Если еще и принять, что $Sc = Pr = 1$, то мы приходим к выводу о подобии процессов всех трех видов переноса. То есть соответственным образом построенные выражения для сопротивления, теплоотдачи и массоотдачи должны быть идентичными. Это утверждение является определением так называемой аналогии Рейнольдса или тройной аналогии для турбулентных течений. Аналитически ее можно записать в виде

$$\zeta/8 = c_f/2 = St = St_D .$$

Надо заметить, что наличие указанной аналогии для турбулентного течения ни коим образом не связана с использованием модели Прандтля, которая лишь дает возможность более просто и наглядно ее показать.

Получим теперь с помощью модели Прандтля распределение скоростей вблизи стенки при турбулентном течении потока с постоянной скоростью.

При движении с постоянной скоростью около твердой стенки касательное напряжение постоянно и равно напряжению на стенке для любого значения координаты y . Действительно, если бы касательное напряжение менялось, то на выделенный слой жидкости действовала бы нескомпенсированная сила в направлении оси x . То есть мы можем записать уравнение

$$\tau_{cm} = \mu du/dy + \tau' ,$$

где τ' - турбулентная составляющая касательного напряжения, а u – скорость. Очевидно, что в непосредственной окрестности твердой стенки пульсации скорости равны нулю и, таким образом $\tau' = 0$ и остается лишь вязкостная составляющая напряжения трения. Отсюда имеем распределение скорости

$$u = (\tau_{cm}/\rho) y/\nu . \quad (28)$$

На достаточном расстоянии от стенки вязкостной составляющей касательного напряжения можно пренебречь. Воспользуемся приведенной выше моделью Прандтля и запишем

$$\tau' = \rho l^2 (du/dy)^2 = \tau_{cm} . \quad (29)$$

Учитывая отсутствие каких-либо линейных масштабов кроме расстояния от стенки, можно, следуя Прандтлю, принять $l = \chi y$, где χ -некоторая эмпирическая константа, которая приблизительно равна 0,4. В этих условиях уравнение (29) легко интегрируется и мы приходим к логарифмическому распределению скоростей

$$u = 2,5 \sqrt{\tau_{cm} / \rho} \ln y + C , \quad (30)$$

где C – подлежащая определению константа.

Отметим, однако, что логарифмическое распределение скоростей можно получить и из соображений подобия без использования модели Прандтля. Сформулируем принцип подобия для турбулентного распределения скоростей, который состоит в равенстве

$$\frac{u(y) - u(l_i)}{u(y_i + l_i) - u(y_i)} = \text{idem при } \frac{y - y_i}{l_i} = \text{idem} .$$

Разлагая числитель и знаменатель в левой части в ряд Тейлора и оставляя два первых члена, получим

$$\begin{aligned} \frac{u(y) - u(l_i)}{u(y_i + l_i) - u(y_i)} &= \frac{u'(y_i)(y - y_i) + 0,5 u''(y_i)(y - y_i)^2}{u'(y_i)l_i + 0,5 u''(y_i)l_i^2} \\ &= \frac{1 + 0,5 u''(y_i)(y - y_i)l_i / u'(y_i)}{1 + 0,5 u''(y_i)l_i / u'(y_i)} . \end{aligned}$$

Для выполнения этих условий необходимо, чтобы

$$l_i u_i''(y_i) = u_i'(y_i) .$$

Отсюда

$$l = u'(y)/u''(y) . \quad (31)$$

Имея в виду, что

$$\tau \sim \rho (u(y_i + l_i) - u_i(y_i))^2 = \rho l^2 u'^2(y_i) . \quad (32)$$

Подставляя (31) в (32), получим уравнение

$$\tau = \rho \chi^2 u^4 / u'^2 . \quad (33)$$

Интегрируя (33), получим выражение для профиля скорости, идентичное (30). Теперь вернемся к вопросу определения константы интегрирования C в уравнении (30). Введем понятие о *ламинарном подслое*, представляющем собой тонкий слой, в который не проникает турбулентность. Соответственно, для него справедливо уравнение (27). Движение в ламинарном подслое характеризуется тремя величинами: $\tau_{ст}$, ρ , μ . Из них можно составить две комбинации: имеющую размерность скорости $v_* = (\tau_{ст}/\rho)^{0,5}$ (динамическая скорость) и имеющий размерность длины $l_* = \nu/v_*$. Таким образом, толщина ламинарного подслоя может быть записана в виде

$$\delta_n = k l_*,$$

где k константа, а выражение (28) можно записать в безразмерном виде

$$u/v_* = \alpha y/l_* \quad (34)$$

а выражение (30) – в виде

$$u/v_* = 2,5 \ln y + C \quad (35)$$

Если ограничиться так называемой двухслойной схемой, то константу k можно определить, приравнявая правые части уравнений (29), (30), то получим

$$C \approx 5,75, k \approx 11,5.$$

1.8. Подобные(автомодельные) решения уравнений теплогидродинамики

Автомодельные решения могут быть получены в том случае, когда задача не содержит фиксированного линейного масштаба. Мы рассмотрим два случая получения таких решений. Первый из них связан с решением нестационарного уравнения теплопроводности, а второй – с решением уравнений пограничного слоя.

1.8.1. Использование метода подобия для решения нестационарного уравнения теплопроводности

Для решения ряда задач теплопроводности оказывается возможным использовать так называемый *метод подобия*. Суть его состоит в следующем. Как легко установить, уравнение теплопроводности остается неизменным при преобразовании переменных

$$\left. \begin{aligned} x' &= kx \\ \tau' &= k^2 \tau \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

то есть, если масштабы длины меняются в k раз, то масштаб времени следует

изменить в k^2 раз. Если начальные и граничные условия при указанном преобразовании остаются без изменений, то для функции $t(x, \tau)$, которая является решением уравнения теплопроводности, должно иметь место равенство

$$t(x, \tau) = t(kx, k^2 \tau) \quad (37)$$

при любых значениях x , τ и k .

Положим $k = 1/2 \tau^{0.5}$. Тогда получим

$$t(x, \tau) = t(x/2 \sqrt{\tau}, 1/4) = t_0 f(x/2 \sqrt{\tau}).$$

Таким образом, температура оказывается зависящей от одного аргумента

$$z = x/2 \sqrt{\tau}. \quad (38)$$

Использование такого преобразования эффективно, если задача не содержит внутренних масштабов, что могло бы изменить граничные и начальные условия при выполнении преобразований (38). Переменная z носит название *автомодельной*.

Проиллюстрируем использование указанного метода на примере следующей практически интересной задачи. Пусть мы имеем изотермическое тело с плоской поверхностью, которая в начальный момент времени приводится в контакт с идеально теплоотдающей средой. Температуру тела в начальный момент будем считать равной нулю, а температуру среды – t_0 . Если нас интересует лишь начальный период процесса, то мы можем рассматривать тело как полубесконечный массив, то есть условие отсутствия фиксированного масштаба длины выполняется. Тогда задача будет выглядеть следующим образом. Необходимо решить уравнение

$$\frac{\partial t(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t(x, \tau)}{\partial x^2}; \quad (39)$$

при следующих граничных и начальных условиях:

$$t(0, \tau) = t_0 \quad \tau > 0; \quad t(x, 0) = 0 \quad x > 0. \quad (40)$$

Вычислим производные для t с помощью формулы (38)

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = t_0 \frac{d^2 f}{dz^2} \frac{1}{4\tau} \quad \frac{\partial t}{\partial \tau} = -\frac{x t_0}{4\tau^{3/2}} \frac{df}{dz} = -t_0 \frac{z}{2\tau} \frac{df}{dz}.$$

Подставляя их затем в (39) и сокращая множитель $t_0/4\tau$, получим

$$a \frac{d^2 f}{dz^2} = -2z \frac{df}{dz}, \quad (41)$$

при дополнительных условиях

$$z = 0, \quad t = t_0; \quad z = \infty, \quad t = 0. \quad (42)$$

Интегрируя уравнение (41), будем иметь

$$\frac{df''}{f'} = -2z, \quad f' = C \exp(-z^2/a)$$

$$f = C_1 - 1/\sqrt{\pi} \cdot \Phi(x/2\sqrt{a\tau}),$$

где $\Phi(z) = 1/\sqrt{\pi} \int_0^z e^{-\xi^2} d\xi$ - интеграл ошибок.

Окончательно получим

$$t = t_0 - [1/\sqrt{\pi} \cdot \Phi(x/2\sqrt{a\tau})]. \quad (43)$$

Теперь, используя закон Фурье, найдем формулу для изменения теплового потока на границе в зависимости от времени:

$$q(0, \tau) = -\lambda \partial t(0, \tau) / \partial x = 2t_0 \lambda / (\sqrt{\pi} \exp(0) \sqrt{a\tau}) = 2\lambda t_0 / \sqrt{\pi a \tau}. \quad (44)$$

1.8.2. Автомоделное решение для пограничного слоя на бесконечной пластине

Приближение пограничного слоя основано на анализе уравнений вязкой жидкости на основе идеи о том, что проявление вязкости ограничивается лишь некоторой пристенной областью, которая называется пограничным слоем. Напомним, что путем анализа порядков членов уравнения вязкой жидкости устанавливаются основные свойства ламинарного пограничного слоя:

1. Толщина пограничного слоя в данном сечении убывает с возрастанием числа Рейнольдса как $1 / Re^{0,5}$.

2. В первом приближении можно пренебречь изменением давления поперек слоя по сравнению с соответствующим изменением вдоль слоя. При этом уравнение для поперечной составляющей скорости полностью выпадает. Использование метода подобия рассмотрим на примере системы уравнений плоского пограничного слоя в отсутствие перепада давления

$$U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + U_y \frac{\partial U_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} \quad (45)$$

$$\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} = 0 \quad (46)$$

с граничными условиями

$$U_x = U_y = 0 \quad \text{при } y = 0 \text{ и } x > 0$$

$$U_x \rightarrow 0 \quad \text{при } y \rightarrow \infty$$

Далее вводим функцию тока ϕ в соответствии с определением

$$U_x = \phi'_x, \quad U_y = -\phi'_x.$$

При этом уравнение неразрывности (37) удовлетворяется тождественно, а уравнение (36) принимает вид

$$\phi'_y \phi''_{xy} - \phi'_x \phi''_{yy} = \nu \phi'''_{yyy} \quad (47)$$

Здесь использовано обозначение для производной порядка m $\frac{\partial^m Q}{\partial^n x \cdot \partial^k y} \equiv Q_{xy}^m$, где $m = n + k$, в нижнем индексе x повторяется n раз, а $y - k$ раз.

Автомодельные решения могут быть получены, если задача не содержит фиксированного масштаба длины. В постановке задачи, которая принадлежит Блязиусу, в качестве решения для пластины конечной длины используется соответствующий отрезок решения для бесконечной пластины.

Как известно, относительная толщина пограничного слоя определяется выражением

$$\delta/x \sim (Ux/\nu)^{-0.5}.$$

Масштабом для y является толщина пограничного слоя δ . Таким образом, безразмерная координата z может быть выбрана как

$$z = 0,5y / \sqrt{x\nu/U_0}, \quad (48)$$

а ϕ , учитывая ее размерность, ищется в форме

$$\phi = \sqrt{x\nu/U_0} \varphi(z). \quad (49)$$

Опуская выкладки, аналогичные выполненным выше для уравнения теплопроводности, но несколько более громоздкие, получим уравнение для функции $\varphi(z)$

$$\varphi''' + \varphi \varphi'' = 0, \quad (50)$$

с граничными условиями

$$z = 0 \quad \varphi = 0, \quad \varphi' = 0; \quad z \rightarrow \infty \quad \varphi' \rightarrow 2.$$

Численное решение этой задачи дает классическую формулу для коэффициента трения продольно обтекаемой пластины

$$C_F = 1,328 / Re^{0.5}, \quad (51)$$

1.9. Термодинамическое подобие и закон соответственных состояний

Во всех предыдущих случаях мы оперировали с однофазной средой, причем неявно предполагалось, что физические свойства среды не слишком сильно зависят от температуры. Однако, существует класс задач, для которых эти предположения очевидным образом неприменимы. Это теплообмен при изменении агрегатного состояния. Сам переход из одного агрегатного состояния в другое предполагает кардинальное изменение физических свойств. Эта же проблема возникает, если мы рассматриваем однофазную

среду, находящуюся достаточно близко к линии фазового перехода. Основа подхода, который будет здесь использован, была заложена Ван-дер-Ваальсом, который предложил в 1873 г. первое реальное уравнение состояния, пригодное для описания текучих сплошных сред, имеющих высокую плотность. Уравнение идеального газа, которое широко использовалось и продолжает использоваться для газов в условиях низких давлений, игнорирует взаимодействие между молекулами за исключением парных столкновений.

Уравнение Ван-дер-Ваальса занимает особое место в физике сплошной среды, ибо оно при своей простоте позволило качественно описать эффекты, связанные с переходом между жидким и газообразным состоянием.

Уравнение состояния идеального газа (уравнение Клапейрона-Менделеева) имеет вид

$$pv = RT \quad .$$

Ван-дер-Ваальс добавил в левую часть уравнения этого уравнения два члена. Один из них – внутреннее давление a/v^2 характеризует дополнительные силы, связанные с притяжением молекул, которые прибавляются к внешнему давлению и обратно пропорциональны квадрату удельного объема, второй член b пропорционален собственному объему молекул и характеризует силы отталкивания, которые возникают при сильном уменьшении среднего расстояния между молекулами. В результате уравнение состояния приняло следующий вид

$$(p + a/v^2)(v - b) = RT \quad . \quad (52)$$

Если построить изотермы, соответствующие уравнению (53), то получим следующую картину, которая представлена на рис. 1.

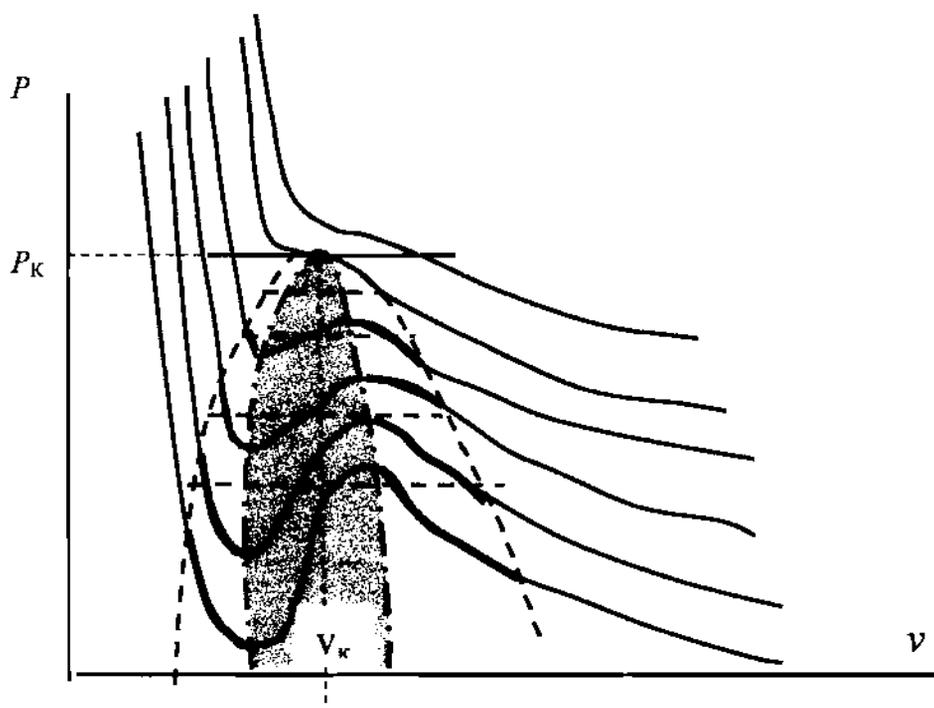


Рис.1. Представление уравнения Ван-дер-Ваальса на плоскости $p - v$

Сплошными черными линиями показаны изотермы Ван-дер-Ваальса. Поскольку уравнение является кубическим, то изотермы могут иметь 2 экстремальные точки. Часть изотерм, расположенных ниже некоторого значения давления, которое носит название критического p_k , действительно носят немонотонный характер и имеют одну точку минимума и одну точку максимума. При $p > p_k$ изотермы носят монотонный характер. Сложная форма изотерм при давлениях меньших критического моделирует наличие фазового перехода. Части изотерм, соответствующие газообразному состоянию, расположены в правой части рисунка и соответствуют большим значениям удельного объема. Части изотерм, соответствующие жидкому состоянию, расположены в левой части рисунка, соответствуют малым удельным объемам и имеют значительно большую крутизну. Но наибольший интерес представляет, естественно, область немонотонного характера кривых. Область, выделенная серым цветом, соответствует физически не реализуемой части кривых, ибо рост давления не может сопровождаться увеличением объема. Реально фазовый переход происходит при постоянном давлении. Этот переход представлен горизонтальными пунктирными линиями. Изменение удельного объема вдоль этих линий соответствует изменению соотношения жидкой и паровой составляющей в двухфазной смеси. Но, как выяснилось, отрезки кривых, выделенные жирными отрезками, тоже могут быть реализованы, но в неравновесных условиях, которые могут возникнуть при быстрых процессах. Они соответствуют перегретой жидкости или переохлажденному пару. Конкретными примерами практического использования таких состояний пара и жидкости являются камера Вильсона и пузырьковая камера, которые применяются в экспериментальной атомной физике для исследования траекторий частиц высоких энергий.

Важно отметить, что несмотря на то, что экспериментально полученные уравнения состояния для различных веществ отличаются от уравнения Ван-дер-Ваальса, критические параметры, на существование которых указывает уравнение Ван-дер-Ваальса, действительно существуют для всех веществ и имеют важнейшее значение для описания их термодинамических свойств.

Вернемся теперь к уравнению (52). Помимо обозначенных на рис.1 критических значений давления и удельного объема мы используем критическую температуру T_k , которая соответствует изотерме, проходящей через критическую точку. Уравнение (52) можно записать в безразмерном виде, введя безразмерные переменные $\pi = p/p_k$, $\varphi = v/v_k$ и $\theta = T/T_k$. Величины p_k , v_k и T_k можно выразить через параметры a , b , R . Опуская соответствующие выкладки, приведем лишь результат.

$$(\pi - 3/\varphi^2)(3\varphi - 1) = 8\theta . \quad (53)$$

Это уравнение называется *приведенным уравнением состояния Ван-дер-Ваальса*. Комплекс, носящий название критического коэффициента, определяется формулой $K = RT_k / (p_k v_k)$ оказывается для уравнения Ван-

дер-Ваальса равным $8/3$. Реальные значения критического коэффициента K оказываются несколько больше $2,67$ и меняются для различных веществ в диапазоне $3-4$. Учитывая простоту и общность уравнения Ван-дер-Ваальса, этот теоретический результат достаточно хорош.

Разумеется, не все вещества имеют идентичные приведенные уравнения состояния типа уравнения (53). Но можно уточнять приведенное уравнение состояния для отдельных групп веществ. Одним из признаков принадлежности веществ к одной и той же группе является близость значений критического коэффициента K .

Группы веществ, имеющих близкие приведенные уравнения состояния называют *термодинамически подобными*. Состояния двух или нескольких веществ, в которых эти вещества имеют одинаковые приведенные параметры π, θ, φ называются *соответственными состояниями*. Закон соответственных состояний как раз и устанавливает, что для термодинамически подобных веществ приведенные уравнения состояния можно считать идентичными.

Сам закон соответственных состояний, разумеется, не связан с конкретным уравнением Ван-дер-Ваальса. Идеи Ван-дер-Ваальса лишь способствовали его установлению.

Закон соответственных состояний является проявлением общности законов взаимодействия между молекулами вещества, в особенности для веществ, внутреннее строение которых имеет общие черты, и позволяет использовать данные о различных теплофизических свойствах одних веществ для оценки аналогичных свойств для других веществ. Более детальный анализ показывает, что разумно добавить к рассмотренным величинам безразмерную величину c_{p0}/R , отражающую внутренние свойства молекул вещества.

I.10. Использование термодинамического подобия для описания процессов, протекающих на линии насыщения.

Для термодинамически подобных веществ мы имеем единое приведенное уравнение состояния. Соответственно и область двухфазных состояний для них тоже идентична. Поскольку линия существования двухфазных состояний является одновременно изотермой и изобарой, то для описания процессов, протекающих на линии насыщения достаточно одного параметра, например p/p_k (π). Тогда все физические свойства фаз на линии насыщения будут функциями π . Выберем для удобства в качестве параметра величину p/p_* (π_*), где $p_* = a p_k$, причем значение a одно и то же для всех сравниваемых подобных веществ. Тогда для данного физического свойства X выполняется следующее соотношение

$$X_p / X_{p_*} = f(p/p_k) / f(p_*/p_k) . \quad (54)$$

Так как $f(p/p_c)$ есть постоянная величина в силу условия $p_*/p_c = a$, то соотношение (54) может быть переписано в виде

$$X_p / X_{p_*} = f^*(\pi) \quad (55)$$

Использование подобного подхода позволяет избавиться от необходимости анализировать значение данного свойства в критической точке, что может оказаться весьма сложным или даже вообще невозможным (например, для поверхностного натяжения). Значение давления p_* мы будем по предложению В.М.Боришанского называть реперным. Наличие термодинамического подобия в сформулированном выше смысле, вообще говоря, не гарантирует совпадения кривых типа (55) для физических свойств различных веществ. Поэтому, получение положительного результата при таком обобщении говорило бы о том, что область возможного применения термодинамического подобия значительно шире.

Приведем в качестве примера обобщение экспериментальных точек по поверхностному натяжению для пяти жидкостей (рис.2):

пентана, гептана, воды, бензола и этилового спирта.

Как видно из приведенного рисунка, опытные точки неплохо группируются около обобщающей кривой, которая как раз и является графическим представлением функции, обозначенной выше через $f^*(p/p_c)$.

Таким образом, имея хотя бы одну экспериментальную точку для некоторой шестой жидкости, и зная для нее критическое давление, мы можем сначала определить σ_* , а затем и всю кривую $\sigma(p)$. Как оказалось, таким же образом можно определить вязкость μ , теплопроводность λ и некоторые другие физические свойства. Важно отметить, что за исключением весьма

высоких давлений физические свойства μ , λ , σ зависят в основном от температуры и поэтому полученные значения физических свойств на линии насыщения можно, хотя и с некоторой осторожностью, экстраполировать в однофазную область.

Опираясь на полученные положительные результаты, оказалось возможным развить и другой подход для описания физических свойств. При этом используется так называемый *расширенный закон соответственных*

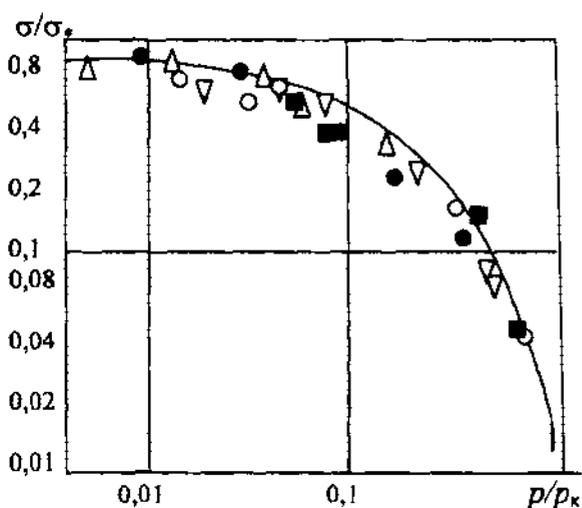


Рис.2. Экспериментальная зависимость относительного поверхностного натяжения от приведенного давления:

○ - пентан, ● - гептан, Δ - вода, ▽ - бензол, ■ - этиловый спирт

состояний. Суть его состоит в том, что для групп термодинамически подобных веществ зависимости для физических свойств (мы будем рассматривать лишь линию насыщения) могут быть представлены в виде произведения двух функций. Первая из них - размерная функция, которая для каждого свойства представляет собой одночлен, построенный из критических констант вещества и газовой постоянной, вторая - универсальная безразмерная функция p/p_k . Например, для вязкости имеем

$$\mu = R^{1/6} M^{1/2} T_k^{-1/6} p_k^{2/3} F(p/p_k), \quad (56)$$

где $F(p/p_k)$ универсальная функция приведенного давления. Поскольку первый множитель должен с точностью до постоянной быть близким (в идеальном случае идентичным) введенному выше реперному значению определяемой величины (в данном случае вязкости), то удобно переписать формулу (56) в виде

$$\mu = A_\mu M^{1/2} T_k^{-1/6} p_k^{2/3} F(p/p_k), \quad (57)$$

где A_μ - постоянный для выбранной группы подобных веществ множитель. Таким образом, мы получаем возможность определить вязкость, если только нам известна вязкость одной из сред, входящей в выбранную группу, что позволяет найти коэффициент A_μ .

1.11. Использование термодинамического подобия для описания теплообмена при наличии фазового перехода (кипение и конденсация)

Теплообмен при наличии фазовых превращений происходит в условиях, кардинально отличающихся от теплообмена однофазного. Для конвективного теплообмена при вынужденном течении характер движения теплоносителя вблизи поверхности теплообмена при наличии и в отсутствие теплоподвода мало чем отличаются друг от друга. Поэтому, задавая условие на границе, мы можем достаточно просто проанализировать процесс и описать его, решая уравнения теплообмена. Более сложным представляется ситуация в случае, когда движение однофазного теплоносителя возникает за счет подвода теплоты из-за температурной зависимости плотности. Это так называемая свободная конвекция. Но и в этом случае передача тепла в пристенном слое может быть описана за счет совместного решения уравнений гидродинамики и теплообмена. Однако, если мы обратимся к кипению, то ситуация уже меняется полностью. Когда тепловая нагрузка превышает некоторую величину и начинается парообразование, то структура потока в двухфазной области становится настолько сложной, что постановка задачи, пригодная для конкретного расчета поля скоростей и температур в жидкости и в паре, оказывается практически невозможной. Особенностью процесса кипения является наличие так называемых *неуправляемых* граничных условий.

Смысл этого термина состоит в том, что границы между фазами случайным образом формируются в ходе процесса и не могут быть описаны детерминированным образом. Поэтому возможности аналитического описания процесса кипения оказываются ограниченными, что существенно усложняет построение зависимостей, пригодных для широкого спектра сред.

В силу отмеченных обстоятельств, следующим этапом развития подходов, связанных с использованием термодинамического подобия была попытка использовать расширенный закон соответственных состояний для определения коэффициентов теплоотдачи при изменении агрегатного состояния.

1.11.1. Теплоотдача при пузырьковом кипении

Прежде чем приступить к рассмотрению применения термодинамического подобия к построению расчетных зависимостей для теплоотдачи при кипении, полезно будет сказать несколько слов об основных режимах кипения. Отметим, что мы в данном случае ограничиваемся рассмотрением кипения в условиях, когда режимные параметры за исключением тепловых не влияют на процесс. Практически это означает, что скорость вынужденного движения не слишком велика и размер системы много больше характерного размера парового пузыря.

При перегреве стенки относительно температуры насыщения появляется возможность образования на стенке паровых пузырей. Но для этого перегрев должен достигнуть некоторой конечной величины. Для заданного теплоносителя эта величина определяется уровнем давления, свойствами поверхности. После достижения указанного уровня перегрева интенсивность теплоотдачи начинает очень быстро расти. Тепловой поток растет пропорционально $(T_{cm} - T_{и})^{3-3,3} = \Delta T^{3-3,3}$. Быстрый рост теплоотдачи продолжается вплоть до некоторого значения теплового потока, которое носит название критического или максимального. Существование этих терминов связано со следующим обстоятельством. Возможны два основных способа повышения теплового потока с поверхности нагрева – прямой, когда отводимая мощность задается путем прямого повышения тепловыделения. Простейшим примером реализации такого способа является электрический нагреватель. Второй способ – это повышение температуры поверхности нагрева. Такие условия возникают при конвективном обогреве, если происходит повышение температуры греющего теплоносителя, причем коэффициент теплоотдачи от него достаточно велик. Такой характер теплопередачи может носить, например, если греющий теплоноситель – конденсирующийся пар, давление которого постепенно повышается. Развитие процесса кипения для этих двух случаев иллюстрируется на рис.3. Если способ обогрева таков, что мы имеем возможность регулировать и поддерживать температуру поверхности, то функция $q(\Delta T)$ будет вести себя следующим образом. После возникновения пузырькового кипения тепловой поток растет до некоторого значения $q_{кр1}$, а затем начинает снижаться.

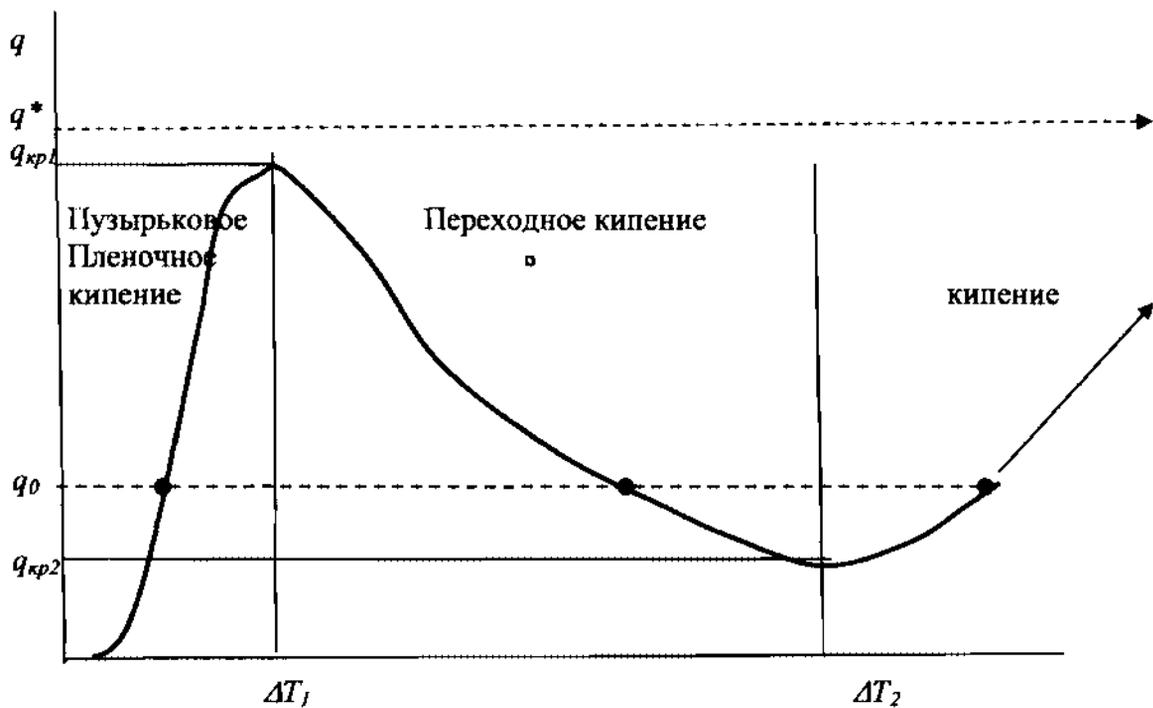


Рис.3. Основные режимы кипения

Зона снижения теплового потока (или коэффициента теплоотдачи α) с ростом ΔT называется зоной переходного кипения. По достижении значения перепада температуры ΔT_2 тепловой поток снижается до значения $q_{кр2}$, а затем снова начинает расти. Это изменение хода кривой связано с образованием на поверхности нагрева устойчивой паровой пленки и мы переходим в зону пленочного кипения. По форме кривой ясно, почему $q_{кр1}$ называют максимальным тепловым потоком, а $q_{кр2}$ — минимальным. Заметим, что для заданного значения q в интервале $(q_{кр1}, q_{кр2})$ каждому значению q соответствуют 3 значения ΔT . Теперь посмотрим, как будет протекать процесс, если мы можем регулировать лишь тепловой поток. Тогда при минимальном превышении $q_{кр1}$ у нас уже остается лишь одно значение ΔT , соответствующее очень высоким температурам, и происходит скачкообразное повышение температуры поверхности. При этом поверхность нагрева, как правило, разрушается. Отсюда и термин $q_{кр}$. Если же мы находимся на ветви пленочного кипения и постепенно снижаем тепловую нагрузку, то при снижении q до значения $q_{кр2}$ температура скачком снизится до значения, соответствующего ветви пузырькового кипения.

Попутно заметим, что фигурирующая выше величина $\Delta T = T_{ст} - T_n$ определяет перегрев жидкости сверх температуры насыщения. Вспоминая то, о чем говорилось при рассмотрении уравнения Ван-дер-Ваальса, мы обнаруживаем, что при обычном кипении уже вблизи поверхности нагрева имеем дело с перегретой жидкостью. При небольших перегревах кипение еще не возникает, так как для образования паровых пузырей необходим заметный перегрев, который тем больше, чем меньше давление. Для воды величина необходимого перегрева при атмосферном давлении составляет $5-7^\circ\text{C}$. При мень-

ших температурных напорах тепло отводится в однофазном режиме. При возникновении кипения интенсивность движения около стенки резко возрастает и время пребывания воды в зоне перегрева уменьшается. При $q = q_{кр1}$ перегрев стенки составляет порядка 30°C . При дальнейшем росте температуры стенки это время еще более сокращается, что находит свое отражение в снижении уровня теплоотдачи. Наконец, при некотором уровне температуры стенки достигается критическое значение, которое называется температурой предельного перегрева жидкости. При этом жидкая фаза оказывается термодинамически неустойчивой и не может существовать. Линия, соединяющая точки предельного перегрева для различных давлений, называется спиной. Положение этой линии было показано выше на рис.1.

В этом разделе мы будем рассматривать построение методами термодинамического подобия зависимостей для коэффициента теплоотдачи при пузырьковом кипении и для критической тепловой нагрузки.

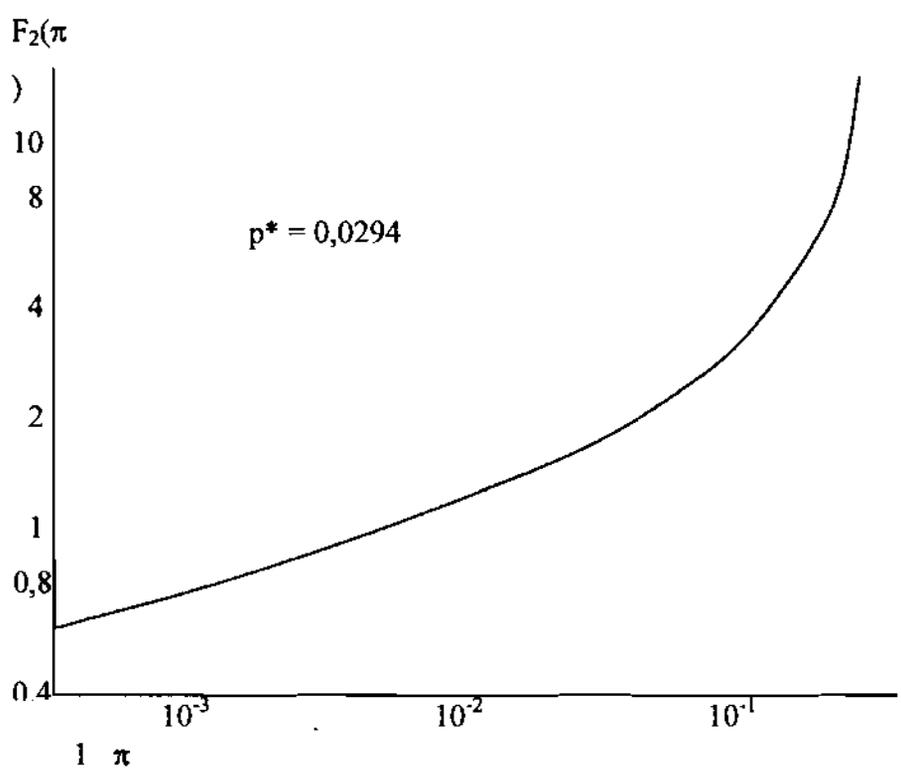


Рис.4. Обобщение опытных данных по теплоотдаче при кипении для 9 различных сред: вода, пентан, гептан, этиловый спирт, бензол, этиловый спирт, метиловый спирт, бутиловый спирт, хладон-12. Ввиду большого количества опытных точек здесь показана лишь зона разброса опытных данных

Методика построения таких зависимостей до некоторой степени сходна с той, которая была продемонстрирована выше при определении физических свойств на линии насыщения. В оригинальном изложении, принадлежащем В.М.Боришанскому, методика выглядит следующим образом. Постулируем экспериментально установленную зависимость коэффициента теплоотдачи

от теплового потока $\alpha = A \cdot q^{0.7}$, где A – функция физических свойств². Предполагая, что все физические свойства, определяющие процесс пузырькового кипения, могут быть представлены в виде функций приведенного давления π , запишем выражение для α в форме, аналогичной (57)

$$\frac{\alpha / q^{0.7}}{(\alpha / q^{0.7})_{p^*}} = F_2(\pi) \quad (58)$$

Если нам известны критические критические параметры среды (или хотя бы p_k), то имея значение α хотя бы для одного давления (естественно, для этой точки известна также температура насыщения и конкретное значение тепловой нагрузки q), можно оценить значения теплоотдачи при пузырьковом кипении для всего диапазона давлений за исключением непосредственной окрестности критической точки. Выше уже говорилось о том, что оперировать величиной теплоотдачи α при столь сильной ее зависимости от температурного напора ΔT не слишком удобно. Зависимость типа (58) можно трансформировать в зависимость q (ΔT).

$$\frac{q^{0.3} / \Delta T}{q^{0.3} / \Delta T_{p^*}} = F_2(\pi) \quad (59)$$

Описанный метод определения интенсивности теплообмена в широком интервале давлений применим, если хотя бы для одного значения давления насыщения интенсивность теплообмена известна.

Однако, общая теория позволяет снять и это ограничение и получить формулу с точностью до постоянного множителя, который определяется на основании опытов и является своеобразной константой для выбранной группы веществ.

Включим в число заданных параметров удельную тепловую нагрузку q , считая ее единственным режимным параметром, определяющим процесс теплообмена. Тогда, добавляя ее к критическим параметрам среды, с помощью которых моделируется влияние физических свойств, можно сформировать единственный комплекс, имеющий размерность коэффициента теплоотдачи α - $\Pi = (R/M)^m p_k^n T_k^i q^j$.

Поскольку размерность коэффициента теплоотдачи определяется как $[\alpha] = \text{Дж с}^{-1} \text{ м}^{-2} \text{ К}^{-1}$, а $[\Pi] = (\text{Дж кг}^{-1} \text{ К}^{-1})^m (\text{Дж м}^{-3})^n \text{ К}^i (\text{Дж м}^{-2} \text{ с}^{-1})^j = \text{Дж с}^{-1} \text{ м}^{-2} \text{ К}^{-1}$, то, выражая Дж через основные размерности $\text{Дж} = \text{кг м}^2 \text{ с}^{-2}$ в первом сомножителе, получим

$$[\Pi] = (\text{м}^2 \text{ с}^{-2} \text{ К}^{-1})^m (\text{Дж м}^{-3})^n \text{ К}^i (\text{Дж м}^{-2} \text{ с}^{-1})^j = \text{Дж с}^{-1} \text{ м}^{-2} \text{ К}^{-1}$$

² Выражение для α записывалось в виде произведения двух функций $\alpha = F_1 F_2$, где F_1 – функция режимных параметров, а F_2 – функция физических свойств. Но практически из режимных параметров рассматривался лишь тепловой поток.

В результате имеем следующую систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} n + j &= 1 \\ -2m - j &= -1 \\ -m + i &= -1 \\ 2m - 3n - 2j &= -2 \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

Из системы (60) получаем

$$m = 1/6, n = 1/3, i = -5/6, j = 2/3.$$

Заметим, что если показатель степени при q , равный 0,7, найден эмпирическим путем, то близкий к нему показатель $2/3$, получен теоретически. Он соответствует зависимости $q \sim \Delta T^3$, которая наиболее часто используется в настоящее время. Таким образом, имеем следующую зависимость для α :

$$\alpha = A (R/M)^{1/6} p_k^{1/3} T_k^{-5/6} q^{2/3} F(p/p_k), \quad (61)$$

где A константа, а $F(p/p_k)$ – универсальная функция для данной группы веществ. Поскольку R по определению постоянна, то формула (61) с учетом сопоставления с опытными данными принимает вид

$$\alpha = 870 (p_k^{1/3} T_k^{-5/6} / M^{1/6}) q^{2/3} \pi^{0.1} (1 + 4,64 \pi^{1.16}). \quad (62)$$

Давление p_k подставляется в нее в МПа. Для остальных переменных используется система СИ. Эта формула позволяет оценить теплоотдачу при кипении с точностью 25-30%, не имея никакой информации, кроме значений p_k , T_k и молекулярного веса M . Повышения точности можно добиться, разбивая вещества на группы термодинамически подобных веществ, для каждой из которых численное значение коэффициента в формуле (62) будет несколько изменяться.

Таким же образом можно рассматривать критические тепловые нагрузки, однако, в отличие от теплоотдачи для кризиса кипения имеется достаточно простая и надежная формула, предложенная впервые С.С.Кутателадзе. Поэтому, если физические свойства среды на линии насыщения определены, то использование зависимостей, построенных на базе термодинамического подобия вряд ли имеет смысл. Если же имеется лишь информация, соответствующая использованию формулы (62), то для приближенной оценки $q_{кр}$ можно использовать зависимость

$$q_{кр} = 3,7 \cdot 10^5 p_k \pi^{0.35} (1 - \pi)^{0.9} \quad (63)$$

где p_k берется в МПа.

1.11.2 Теплоотдача при конденсации

Предварительно отметим, что, как известно, существует два типа конденсации – пленочная и капельная. Но поскольку последняя реализуется лишь в достаточно специфических условиях, то здесь будет рассматриваться лишь пленочная конденсация.

Принцип подхода к построению зависимостей для теплоотдачи при конденсации насыщенного пара не отличается заметно от того, который использовался при анализе кипения. Однако, процесс конденсации значительно сильнее, чем кипение зависит от параметров процесса. Поэтому для функции, определяющей влияние режимных параметров на теплоотдачу, существует несколько различных реализаций. Отсюда следует, что вопрос относительно существования универсальной зависимости для оценки влияния давления на теплоотдачу при конденсации является существенно более сложным, чем для кипения. Поэтому единая форма функции, моделирующей влияние физических свойств, могла бы оказаться неприемлемой. Однако, как будет видно из дальнейшего, даже при таком подходе удалось получить неплохие результаты.

Для построения расчетных зависимостей были использованы оба подхода, продемонстрированные выше. Это выбор в качестве масштаба реперного значения коэффициента теплоотдачи при конденсации. аналогично формуле (58) для кипения. При этом учет специфики существенно различных случаев конденсации может быть осуществлен путем выбора реперного значения теплоотдачи $\alpha_{r,c}$ из массива данных для соответствующего режима.

При этом формула для теплоотдачи принимает уже знакомый нам вид

$$\frac{\alpha_r}{\alpha_{r,c}} = F_c(\pi) \quad (64)$$

Аппроксимация функции $F_c(\pi)$ является кусочной и состоит из трех участков

$$\left. \begin{aligned} F_c(\pi) &= 2,1 \pi^{0,17} && \text{при } \pi \leq 5 \cdot 10^{-3}; \\ F_c(\pi) &= 1,1 \pi^{0,054} && \text{при } 5 \cdot 10^{-3} \leq \pi \leq 10^{-1}; \\ F_c(\pi) &= - \exp [1,74 (\pi - 0,1)] && \text{при } 10^{-1} \leq \pi \leq 1. \end{aligned} \right\} (65)$$

Обобщающая функция приведенного давления имеет вид, показанный на рис.5. Как и для случая кипения на рис. 4 показана лишь область разброса экспериментальных точек. Аналогично кривой для кипения (рис.4), здесь приведены опытные данные для различных веществ без подразделения на термодинамически подобные группы. Поскольку при обобщении данных используются реперные значения коэффициентов теплоотдачи, то в разделении на различные режимы конденсации нет необходимости.

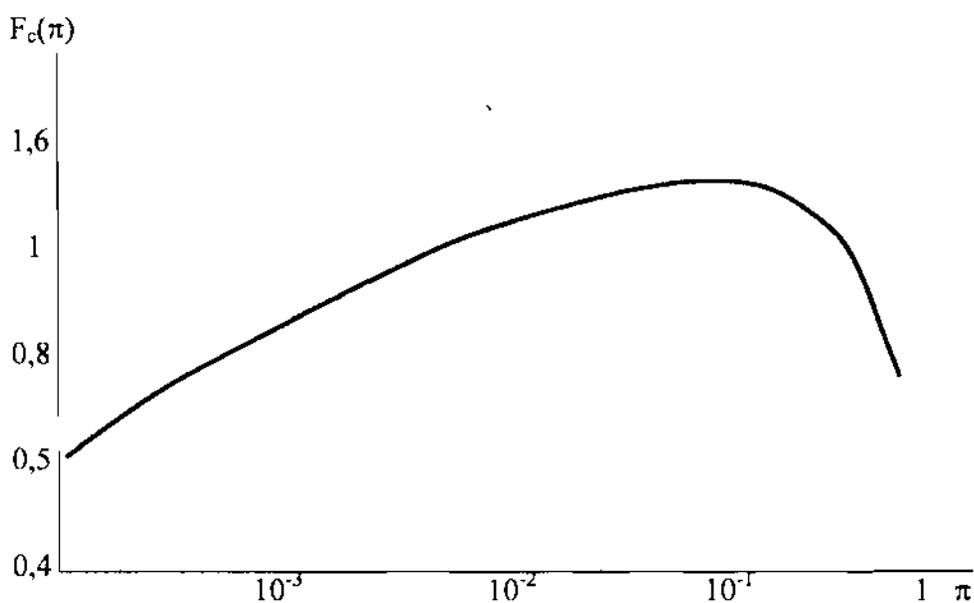


Рис.5. Обобщение экспериментальных данных по конденсации в критериях термодинамического подобия $\alpha_p/\alpha_{p*} = F(\pi)$; $P_* = 0,12 P_k$ для 11 различных веществ

Для получения зависимостей типа (61),(62), не требующих реперных значений коэффициента теплоотдачи, оказывается необходимым разбить массив опытных данных на три группы, соответствующие конденсации неподвижного пара (1), конденсации пара, движущегося с умеренной скоростью (2) и конденсации быстродвижущегося пара (3). Эти формулы можно найти в рекомендованной литературе.

1.12. Проблемы моделирования теплогидравлических процессов при их экспериментальном исследовании

Метод моделирования позволяет распространить результаты исследования моделей теплообменных устройств или их фрагментов на натурные условия и получить обобщенные результаты, осуществив таким образом на модели явление, подобное натурному. Выше уже говорилось об условиях, которые должны выполняться при моделировании. Полное подобие модели и натурального образца определяется следующими условиями:

- 1) процессы в модели и образце относятся к одному классу явлений;
- 2) описываются одними и теми же уравнениями;
- 3) соблюдается геометрическое подобие;
- 4) безразмерные краевые условия численно равны.
- 5) определяющие числа подобия численно равны.

Точное воспроизведение в модели численных значений всех определяющих чисел подобия при большом их количестве и при условии геометрического подобия практически невозможно. Более того, учитывая, что речь никогда не идет о единственном сочетании указанных величин, мы приходим к очень большому числу вариантов, воспроизведение которых в эксперименте было бы слишком трудоемким.

Поэтому, как правило, прямое моделирование с использованием различных модельных жидкостей оказывается возможным лишь в случае выделения одного определяющего числа подобия. Например, для определения коэффициента гидравлического сопротивления каналов сложной геометрии таким числом является число Рейнольдса. При переходе к исследованию теплоотдачи к нему добавляется число Прандтля, что значительно сужает свободу выбора моделирующей жидкости.

На практике условия полного подобия никогда не выполняются, что вынуждает рассматривать приближенное моделирование, при котором выполняются лишь часть вышеперечисленных условий. В частности, возможно воспроизведение только части физического процесса. Применительно к теплообменным аппаратам часто используется локальное моделирование – как тепловое, так и гидродинамическое.

Возможно также моделирование по аналогии, когда в модели используется другой физический процесс, который описывается, однако, теми же самыми безразмерными уравнениями. В частности, в некоторых случаях используется моделирование процесса переноса теплоты процессом переноса массы. В этом случае интегральные осредненные характеристики переноса могут быть определены путем взвешивания.

На практике часто встречаются случаи, когда определяемое число подобия оказывается независимым (или практически независимым) от какого-либо определяющего числа подобия в некоторых пределах его изменения. Такое явление носит название автомодельности. В области автомодельности исследование можно проводить при таком значении указанного числа подобия, которое обеспечивает наиболее удобные условия эксперимента. Наиболее известным случаем автомодельности является независимость коэффициента сопротивления от числа Рейнольдса при достаточно больших его значениях для шероховатых труб и для различных элементов сложной геометрии. В этом случае можно проводить эксперимент при фиксированном значении числа Рейнольдса, варьируя лишь геометрию исследуемой модели.

При моделировании теплообменных аппаратов соблюдение геометрического подобия в полном объеме практически невозможно. Поэтому для проведения таких исследований используется метод, который В.К.Мигай назвал методом «геометрических вырезок». Он состоит в выделении некоторого элемента реального аппарата, который является достаточно представительным с точки зрения воспроизведения процессов в реальном аппарате в целом. В этом случае гарантией надежности опытных данных является правильный выбор такого фрагмента. Очевидно, что при решении

данного вопроса важную роль играет интуиция экспериментатора и использование предыдущего опыта исследования аналогичных аппаратов.

Приведем некоторые конкретные примеры использования упомянутых здесь методов.

1. Локальное тепловое моделирование

Смысл локального теплового моделирования состоит в следующем. Положим, что исследуется некоторая достаточно сложная система, состоящая из изолированных идентичных обогреваемых элементов, находящихся в идентичных гидродинамических условиях – например, поперечно обтекаемый пучок обогреваемых стержней. Картина обтекания каждого из стержней существенно образом связана с положением соседних стержней. Однако, толщина теплового пограничного слоя, образующегося на каждом стержне, может оказаться значительно меньше расстояния между стержнями. Это означает, что наличие или отсутствие обогрева соседних стержней не влияет на процесс теплоотдачи. Тогда в условиях эксперимента мы можем обогревать лишь один стержень в каждом ряду, что существенно упрощает проведение опытов. Такой метод называется локальным тепловым моделированием. Очевидно, что возможность его использования связана с геометрическими характеристиками пучка и диапазоном чисел Рейнольдса. Согласно данным, приведенным В.К.Мигаем, метод локального моделирования дает достаточно близкие к полному моделированию результаты при относительных шагах больше двух и чисел $Re > 7000$.

2. Моделирование по аналогии

Как уже говорилось выше, наиболее распространенным типом такого моделирования является использование данных, полученных с помощью массообмена для получения зависимостей для теплообмена. Такой метод можно использовать в том случае, когда линейные размеры элементов таковы, что организовать локальные измерения температур затруднительно. При этом на границе потока со стенкой происходит переход используемого для моделирования вещества из парообразного в твердое состояние. В качестве примера использования моделирования по аналогии приведем исследование теплоотдачи так называемых мембранных поверхностей нагрева. Эти поверхности отличаются

от обычных поперечно обтекаемых пучков наличием плоских проставок, свариваемых между трубами в узких сечениях. Это проставка по существу представляет собой плавниковое ребро, общее для двух соседних трубок. Элементы поверхностей изготавливались из нафталина $C_{10}H_8$, и в опытах осу-

ществлялся процесс сублимации нафталина в воздушном потоке. Связь между характеристиками теплообмена и массообмена определялась законом подобия с поправочным коэффициентом

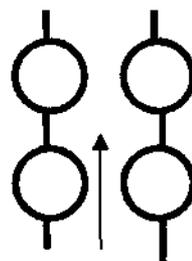


Рис.6. Мембранная поверхность

$$Nu = 1,234 Re^{0,0833} Sh \quad 40000 > Re > 5000$$

Сопоставление с результатами прямых измерений теплоотдачи показывают достаточно хорошее совпадение как для трубчатой, так и плоской части поверхности.

3. Метод геометрических «вырезок».

В качестве примера рассмотрим моделирование продольно обтекаемых пучков труб.

Поскольку продольно обтекаемый пучок является регулярной системой идентичных элементов, то для моделирования достаточно выделить представительную группу элементов. Необходимо лишь скомпенсировать изменение влияния граничных элементов. На рис. 7 изображен фрагмент

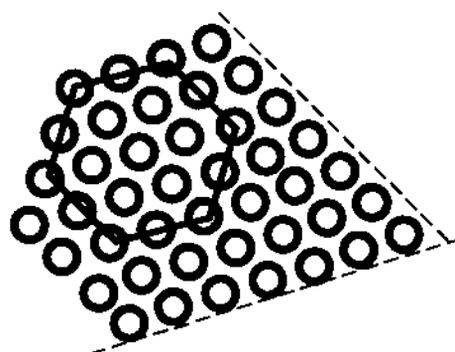


Рис. 7. Многостержневой пучок и геометрическая «вырезка» для модели

фрагмент многотрубного продольно обтекаемого пучка с правильным гексагональным расположением труб. Шестиугольник является условным изображением обечайки правильного 7-трубного пучка, который является «вырезкой» для исходного многотрубного пучка. Секторы труб внешнего ряда реализуются в модельном пучке в виде так называемых «вытеснителей», которые обеспечивают уточнение моделирования гидродинамики.

Множество подобных моделей были исследованы для получения теплогидравлических характеристик подобного типа каналов.

РАЗДЕЛ 2.

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ И ИХ АППРОКСИМАЦИЯ

2.1. Задачи измерений и их точность

Любому физическому объекту присущ ряд свойств, большая часть которых обычно выражается некоторыми числами. Например, для электрического провода это диаметр, длина, масса, электропроводность и ее температурный коэффициент, температурный коэффициент удлинения. Некоторые свойства труднее поддаются количественному описанию. Это, например, цвет, блеск или матовость, и.т.д. Однако, без его количественной характеристики никакое свойство не может быть воспроизведено.

Для измерения любого свойства всегда необходима некоторая эталонная характеристика, которая может быть принята за единицу измерения. Благодаря этому эталону можно количественно выразить соответствующую величину. Операция сравнения исследуемой величины с эталоном называется измерением.

Никакое измерение не может быть выполнено абсолютно точно. Его результат всегда содержит некоторую погрешность. В задачу измерения всегда входит не только нахождение самой величины, но и оценка допущенной при этом погрешности.

Принято различать прямые и косвенные измерения. При прямом измерении исследуемая величина непосредственно сравнивается с единичным объектом. Так, например, производятся измерения длины, веса, времени, и.т.д. Однако, в большинстве случаев измерения проводятся косвенным образом, то есть искомая величина находится путем выполнения некоторых математических действий над результатами прямых измерений. Естественно, что погрешность при этом также определяется путем математических операций с погрешностями исходных прямых измерений.

Необходимо подчеркнуть, что точное значение погрешности определить невозможно. Действительно, ведь в противном случае можно было бы ввести поправку и получить точное истинное значение величины. Реально мы можем указать (да и то приближенно) лишь интервал возможных значений измеряемой величины, внутри которого расположено ее истинное значение. Это можно выразить формулой

$$x_{изм} - \Delta x_1 < x_{ист} < x_{изм} + \Delta x_2 \quad (1)$$

В общем случае $\Delta x_1 \neq \Delta x_2$, поскольку погрешность может определяться не только случайными, но и систематическими ошибками. Подробнее об этом будет сказано ниже.

При наличии результатов n независимых измерений некоторой величины представляется правильным за лучшую оценку истинного значения результата измерения принять среднее арифметическое значение из всех величин, полученных в процессе единичных измерений.

$$x = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_n)/n . \quad (2)$$

Практически далее будет использоваться именно такая оценка, хотя она, в принципе, не является единственно возможной.

Отметим, что в измерениях, для которых имеет место непредсказуемый разброс результатов, проявляется роль так называемых случайных погрешностей, т.е. погрешностей, вызванных различными малыми изменениями условий опыта, которые невозможно ни предусмотреть, ни устранить. На первый взгляд кажется, что ничего нельзя сказать о величине этих погрешностей. В действительности, однако, они подчиняются особым – статистическим – закономерностям, которые позволяют достаточно надежно оценить значения погрешностей и их влияние на конечный результат измерений.

Теперь рассмотрим вопрос о точности измерений. Под точностью измерений понимается их качество, отражающее близость результатов к точному значению измеряемой величины.

Если обозначить общую относительную погрешность измерений, которая включает как систематическую, так и случайную составляющие, через Σ , то количественно точность принимают равной $1/\Sigma$.

При организации измерений необходимо иметь в виду, что существенное увеличение точности единичного измерения всегда связано со значительными трудностями и расходами. Поэтому не следует требовать от измерений большей точности, чем это реально необходимо для решения поставленной задачи.

Однако, с другой стороны, часто именно повышение точности измерений позволяло получить качественно новые результаты. Например, проведенные Рэлеем в 1894 г. точные измерения плотности азота, выделенного из воздуха, показали, что она несколько выше плотности азота, полученного разложением аммиака. Это привело Рамзая и Рэля к открытию аргона.

В качестве другого примера можно привести открытие в 1932 г. тяжелой воды, в молекуле которой атом водорода заменен на атом дейтерия. что явилось результатом повышения точности измерения плотности воды.

2.2 . Некоторые сведения из теории вероятностей

2.2.1.Случайные погрешности

Как уже говорилось выше, большинству измерений присущи случайные погрешности, которые при каждом повторном измерении принимают другое непредсказуемое заранее значение. Эти погрешности принадлежат к классу та называемых *случайных величин*, точное значение которых не может быть предсказано и меняется от опыта к опыту. Обычно можно указать интервалы, в которых они меняются, и как часто они принимают внутри интервала то или иное значение. В результате наблюдения можно установить, какие значения появляются более, а какие менее часто. Совокупность результатов таких наблюдений позволяют установить так называемый *закон распределения*,

который для случайной величины является столь же определенной характеристикой, как числовое значение для обычной величины.

Рассмотрим характерный пример случайного события, который фигурирует практически во всех пособиях по теории вероятности. Пусть имеется урна, в которой содержатся абсолютно одинаковые шары, отличающиеся только цветом – черные и белые. Поэтому, цвет шара, вынутого из урны, является случайной величиной, которая может принимать два значения, для обозначения которых можно условно использовать 0 и 1. После фиксации цвета вынутого шара его возвращают обратно в урну и перемешивают шары. Если в урне m белых и n черных шаров, то очевидно, что вероятность $P(n)$ вытащить черный будет равна $n/(m+n)$, а белый – $P(m) = m/(m+n)$. Сумма этих величин, естественно, равна 1. Практически, однако, ситуация бывает обратной. Мы не знаем заранее доли белых и черных шаров и должны ее определить по частоте их появления. Пусть мы провели N испытаний и при этом K раз доставали белый шар. Величина K/N называется частотой появления белого шара. Основной закон теории вероятностей – закон больших чисел – говорит о том, что при неограниченном росте числа испытаний частота появления события стремится к его вероятности. Однако, разность $|P(m) - K/N|$ оказывается пропорциональной $1/\sqrt{N}$, то есть убывает достаточно медленно. Таким образом, частота появления случайного события определяется его вероятностью. Оперировав вероятностью события, мы практически можем считать, что количество испытаний очень велико и их можно рассматривать как независимые. Поэтому вероятность k -кратного повторения результата, имеющего вероятность P определяется величиной $P_k = P^k$.

Вероятности простых событий подчиняются двум достаточно очевидным законам:

1. Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий. Очевидно также, что сумма вероятностей для совокупности всех рассматриваемых событий равна 1.
2. Вероятность произведения независимых событий равна произведению вероятностей этих событий. (Под произведением событий понимается последовательное их наступление. В частности, для одинаковых событий мы получаем уже упомянутый выше результат).

При измерении физических величин в условиях преобладающего влияния случайных погрешностей оценку точности измерений можно выполнить только с некоторой вероятностью. Общая погрешность, которая образуется в результате сложения большого числа малых погрешностей, может быть как положительной, так и отрицательной, а ее абсолютная величина будет соответствовать некоторой вероятности.

Приведем пример, поясняющий вышесказанное. Пусть нам необходимо взвесить 100 образцов и мы располагаем весами, позволяющими определить массу с погрешностью 0,05 г. Допустимая предельная нагрузка не позволяет взвешивать более одного образца. Определим погрешность определения сум-

марной массы. Считая знаки отклонений равновероятными и равными максимальной величине 0,05 г, что несколько завышает погрешность, получим

$$P(+0,05) = P(-0,05) = 1/2.$$

Вероятность, что все погрешности будут одного знака будет равна $(1/2)^{99}$, то есть примерно $2 \cdot 10^{-30}$. Таким образом, очевидно, что погрешность в общей массе образцов будет много меньше 5 г ($0,05 \cdot 100$). Вычисления показывают, что на самом деле погрешность будет порядка 0,5 г.

2.2.2. Определения основных понятий, фигурирующих при рассмотрении случайных величин

Ранее уже говорилось о том, что погрешности относятся к классу случайных величин. Вероятность появления данного значения дискретной случайной величины (события) мы будем обозначать буквой p .

Математическое ожидание случайной величины совпадает с ее средним значением, определяемым формулой (2). Однако, учитывая повторяемость событий, перепишем ее в виде

$$M[X] = \frac{x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} = \sum_{i=1}^n x_i p_i = m_x. \quad (3)$$

Если вероятности получены экспериментально через частоты наблюдения, то иногда используют знак * - M^* и p^* .

Начальным моментом s -го порядка случайной величины x называется сумма

$$\alpha_s[x] = \sum_{i=1}^n x_i^s p_i = M[X^s]. \quad (4)$$

Эти определения даны по аналогии с моментом в теоретической механике.

Введем теперь понятие о *центрированной случайной величине*. Центрированной случайной величиной, соответствующей величине X , называется отклонение случайной величины от ее математического ожидания.

$$\tilde{M} = X - m_x. \quad (5)$$

Очевидно, что математическое ожидание центрированной случайной величины равно нулю, Действительно

$$M[\tilde{M}] = M[X - m_x] = \sum_{i=1}^n (x_i - m_x) p_i = \sum_{i=1}^n x_i p_i - m_x \sum_{i=1}^n p_i = m_x - m_x = 0. \quad (6)$$

Моменты центрированной случайной величины носят название *центральных моментов*.

Второй центральный момент называется *дисперсией* случайной величины. Ввиду особой важности этой величины этой величины, она имеет особое обозначение $D[X]$. Согласно определению, имеем

законом распределения Гаусса, который также носит название *нормального распределения*.

Формула, выражающая закон Гаусса имеет вид

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad (8)$$

Величина σ^2 называется дисперсией. Ниже будет показано, что она полностью соответствует определению дисперсии, данному выше. Смысл ее наглядно поясняется кривыми на рис.2. Положим для удобства, что $m = 0$.

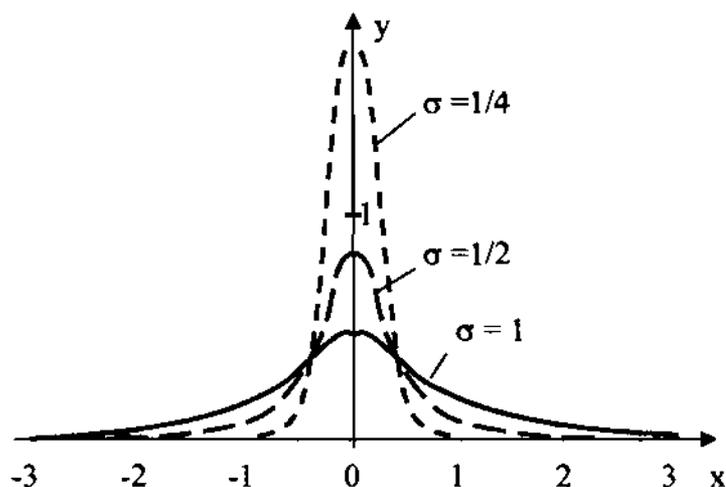


Рис.2. Кривые Гаусса для различных значений дисперсии

Рассматривая кривые на рис.2, видим, что чем меньше σ , тем в более узкий интервал попадает преобладающая часть измерений x , т.е. уменьшается разброс точек. Иногда величину y называют *плотностью вероятности*. Смысл такого названия достаточно ясен. Вероятность Δp получения результата, попадающего в выбранный интервал Δx равна $y \cdot \Delta x$.

На практике иногда оказывается необходимым использовать законы распределения вероятности, отличные от нормального. Но мы не будем их здесь рассматривать, ограничиваясь лишь нормальным законом, который охватывает большинство приложений.

При использовании непрерывного значения плотности вероятности приведенные выше формулы для моментов распределения из сумм превращаются в интегралы.

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} xy(x)dx ; \quad D = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 y(x)dx \quad (9)$$

Для нормального распределения получим

$$m_x = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx \quad (10)$$

$$D[X] = M[(X - m_x)^2]$$

$$D[X] = \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)^2 p_i = \sum_{i=1}^n (x_i^2 p_i - 2m_x x_i p_i + m_x^2 p_i) = \alpha_2 - 2m_x^2 + m_x^2 = \alpha_2 - m_x^2 \quad (7)$$

2.3. Классификация случайных погрешностей и законы распределения

Допустим, что нами сделано n измерений одной и той же величины x , которые выполнены одним и тем же методом и с одинаковой степенью тщательности (*равноточные измерения*). Пусть среднее значение измеряемой величины равно \bar{x} . Совокупность измеренных значений разобьем на интервалы Δx , расположенные симметрично относительно \bar{x} .

$k_1(x), k_2(\bar{x} + \Delta x), \dots, k_p(\bar{x} + p\Delta x); k_2'(\bar{x} - \Delta x), \dots, k_q'(\bar{x} - q\Delta x)$.

Здесь k_i, k_j' - целые числа, показывающие, сколько раз измеренные значения попадали в соответствующий интервал. Очевидно, что $\sum k_i + \sum k_j' = n$, т.е. общему числу измерений.

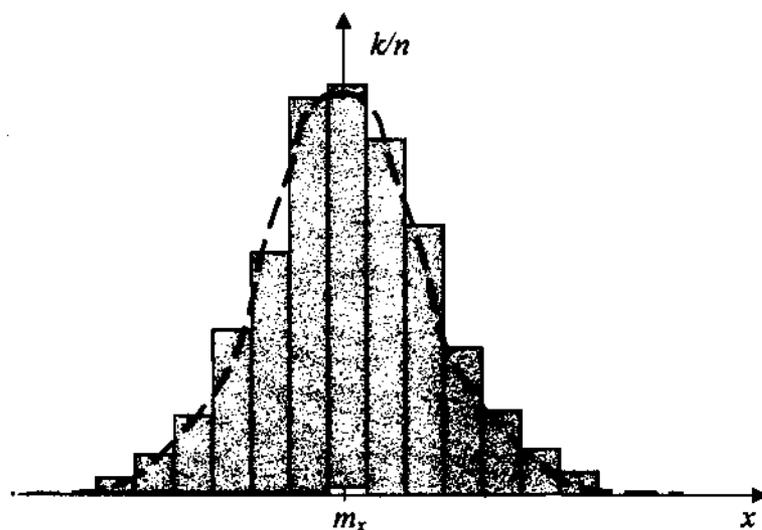


Рис.1. Гистограмма и кривая распределения

Покажем на оси ординат интервалы $\bar{x} + p_i \Delta x$ $\bar{x} - q_j \Delta x$, а по оси ординат отложим соответствующие величины частот. В результате получим так называемую *гистограмму* – совокупность прямоугольников, ширина которых равна Δx , а высоты - частотам k_i, k_j' . Чтобы представить ее в обобщенной форме, необходимо разделить k_i на n и на Δx . В этом случае площадь каждого прямоугольника будет численно равна вероятности попадания результатов наблюдения в соответствующий интервал Δx , а сумма площадей всех прямоугольников равна единице. Огибающей гистограммы является ступенчатая линия, которая при $\Delta x \rightarrow 0$ переходит в некоторую кривую, которая называется *кривой распределения*. Тогда площадь под участком кривой над Δx будет соответствовать вероятности попадания результата измерения на участок Δx . Наиболее часто кривая распределения описывается

Введем новую переменную $\xi = (x - m)/(\sigma\sqrt{2})$, Тогда $dx/(\sigma\sqrt{2}) = d\xi$ и интеграл приводится к виду

$$m_x = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma\sqrt{2}\xi + m) e^{-\xi^2} d\xi =$$

$$\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \xi e^{-\xi^2} d\xi + \frac{m}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi .$$

Легко показать, что 1-й интеграл равен нулю, а 2-й представляет собой известный интеграл Эйлера-Пуассона и равен $\sqrt{\pi}$. Таким образом, параметр m представляет собой математическое ожидание величины X .

$$m_x = m$$

Вычислим теперь дисперсию величины X

$$D[X] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^2 e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx \quad . \quad (11)$$

Производя аналогичную замену переменных, получим

$$D[X] = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 e^{-\xi^2} d\xi = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \left\{ \xi e^{\xi^2} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi \right\} .$$

Первое слагаемое в фигурных скобках равно нулю, а второе $-\sqrt{\pi}$. Таким образом,

$$D[X] = \sigma^2 .$$

Следовательно, параметр σ в законе Гаусса – это среднее квадратичное отклонение величины X .

Если бы мы поступили по-другому и воспользовались формулой $(x - m)^2 = (x^2 - 2xm + m^2)$, то получили бы аналог формулы (7)

$$D[X] = \alpha_2[X] - m_x^2 \quad . \quad (12)$$

Итак, величины для дискретных и непрерывных распределениях определенным образом связаны между собой. Наиболее распространенной оценкой погрешности является оценка с помощью среднеквадратической погрешности σ , которую часто называют стандартной погрешностью. Если число измерений весьма велико, то переход от дискретных к непрерывным оценкам не вызывает существенных проблем. Однако, если число измерений не очень велико, то при оценке дисперсии возникает проблема получения так называемой *несмещенной* оценки. Перед тем, как перейти непосредственно к вопросу обработки опытных данных, рассмотрим указанную проблему.

При определении математического ожидания и дисперсии из опытных данных к получаемым оценкам предъявляется ряд требований:

1. Оценки должны быть *состоятельными*. Это означает, что при увеличении числа опытов они должны сходиться к точным значениям m_x и $D[X]$.
2. Оценки должны быть *несмещенными*, то есть не должно быть систематического отклонения от точных значений.

Сделаем теперь оценки математического ожидания и дисперсии по набору n независимых опытов, давших результаты X_1, X_2, \dots, X_n . В качестве оценки математического ожидания используем среднее арифметическое

$$\bar{m} = m^* = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \quad (13)$$

Убедимся, что эта оценка является состоятельной. Действительно, при увеличении n величина \bar{m} сходится по вероятности к m . Эта оценка является также несмещенной, поскольку

$$M[\bar{m}] = \frac{\sum_{i=1}^n m}{n} = m.$$

Перейдем теперь к оценке для дисперсии D . На первый взгляд наиболее естественной оценкой является статистическая дисперсия:

$$D^* = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{m})^2}{n} \quad (14)$$

где $\bar{m} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$.

Проверим состоятельность данной оценки. Выразим ее через α_2

$$D^* = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n} - \bar{m}^2 \quad (15)$$

Очевидно, что первый член сходится по вероятности к $M[X^2] = \alpha_2[X]$. Второй член сходится по вероятности к m^2 . Таким образом, вся величина сходится по вероятности к величине

$$\alpha_2[X] - m^2 = D.$$

Таким образом, оценка (14) является состоятельной. Теперь проверим, является ли она также и несмещенной. Подставим в формулу (15) выражение (13) для \bar{m}

$$D^* = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n} - \frac{(\sum_{i=1}^n X_i)^2}{n^2} =$$

$$D^* = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n} - \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n^2} - 2 \frac{\sum_{i<j} X_i X_j}{n^2} = \frac{n-1}{n^2} \sum_{i=1}^n X_i^2 - 2 \frac{\sum_{i<j} X_i X_j}{n^2}. \quad (16)$$

Теперь найдем математическое ожидание величины (16).

Выберем начало координат в точке m . Тогда

$$M[X_i^2] = D, \quad \sum_{i=1}^n M[X_i^2] = nD. \quad (17)$$

Из независимости опытов следует также, что

$$M[X_i X_j] = 0. \quad (18)$$

Подставляя (17), (18) в (16), получим

$$M[D^*] = (n-1)/n D. \quad (19)$$

То есть величина D^* не является несмещенной оценкой для D .

Практический вывод из полученных результатов состоит в том, что оценка среднеквадратической погрешности σ должна определяться по формуле

$$\sigma = n_s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (m_x - x)^2}{n-1}}. \quad (20)$$

Появление в знаменателе величины $n-1$ вместо n связано с так называемым «центрированием», которое позволяет считать n_s , определенное по формуле (20) приближенным значением дисперсии, являющейся параметром нормального распределения.

2.4. Оценки точности и надежности математического ожидания

2.4.1. Доверительный интервал. Доверительная вероятность

Обычно, помимо нахождения математического ожидания величины, необходимо также оценить количественно его точность и надежность. Для такой оценки в статистике пользуются понятиями *доверительного интервала* и *доверительной вероятности*.

Однако, прежде чем перейти непосредственно к поставленной задаче, заметим, что оценки, о которых мы будем говорить, относятся к математическому ожиданию. Итак, пусть имеется случайная величина X с математическим ожиданием m_X и дисперсией D_X . Над этой величиной проводится n независимых опытов и вычисляется среднее арифметическое наблюдаемых

значений X . Если обозначить результат i -го опыта через X_i , то совокупность величин X_i представляет собой n независимых случайных величин, каждая из которых распределена по одному и тому же закону. Обозначим среднее арифметическое величин X_i через Y .

$$Y = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} .$$

Математическое ожидание суммы равно сумме математических ожиданий. Поэтому

$$m_Y = M[Y] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M[X_i] = \frac{1}{n} n m_X = m_X . \quad (21)$$

Математическое ожидание дисперсии суммы независимых случайных величин равно сумме дисперсий

$$D_Y = M[Y^2] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D[X_i] = \frac{n D_X}{n^2} = \frac{D_X}{n} . \quad (22)$$

Теперь перейдем к определению понятий доверительного интервала и доверительной вероятности.

Пусть для некоторого параметра a получена из опыта несмещенная оценка \bar{a} . Назначим некоторую вероятность β , для которой событие можно считать практически достоверным и найдем такое значение ε , для которого

$$P(|\bar{a} - a| < \varepsilon) = \beta . \quad (23)$$

Тогда диапазон практически возможных значений ошибки, возникающей при замене a на \bar{a} будет $\pm \varepsilon$; вероятность бóльшей по абсолютной величине ошибки равна $1 - \beta$.

Иначе можно записать (23) следующим образом:

$$P(\bar{a} - \varepsilon < a < \bar{a} + \varepsilon) = \beta . \quad (24)$$

Это означает, что с вероятностью β неизвестное значение параметра a попадает в интервал $(\bar{a} - \varepsilon; \bar{a} + \varepsilon)$.

Вероятность β принято называть *доверительной вероятностью*, а интервал – *доверительным интервалом*. Границы интервала называют *доверительными границами*.

При известном законе распределения величины a нахождение доверительных границ для заданного значения β не вызывает затруднений. Но обычно это распределение априори не известно. Мы, однако, будем считать, что для рассматриваемой величины справедливо нормальное распределение. Тогда на основании результатов n опытов получим оценки для математического ожидания и дисперсии

$$\bar{a} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} ; \quad \bar{D} = \frac{\sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})^2}{n-1} . \quad (25)$$

Далее задача решается следующим образом. По определению функции Лапласа

$$P(|\bar{a} - a| < \varepsilon) = \beta = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma_{\bar{a}} \sqrt{2}}\right) , \quad (26)$$

где $\sigma_{\bar{a}} = \sqrt{\bar{D}/n}$ - среднее квадратичное отклонение оценки \bar{a} .

Положим, что $\varepsilon = k\sigma_{\bar{a}}$, где k – целое число. Пусть $k = 2, 3$. Получим соответствующие значения β . Будем иметь для $k = 2$ $\beta = 0,954$, а для $k = 3$ - $\beta = 0,997$. Оценка, соответствующая $k = 2$, используется наиболее часто.

С учетом округления она соответствует 95% вероятности, что отклонение рассматриваемой случайной величины от оценки ее математического ожидания не превышает 2σ , то есть доверительная вероятность для доверительного интервала 2σ равна 95%. Соответственно, для доверительного интервала 3σ доверительная вероятность равна 99,7%. Этой оценкой пользуются, если необходима более высокая точность. В принципе, по формуле (26) можно определить доверительную вероятность для любого доверительного интервала.

Существуют более точные методы оценки в случае отклонения от нормального распределения. Они могут быть существенными, если количество опытных точек мало.

2.4.2. Уточненные зависимости для доверительного интервала и доверительной вероятности

При анализе результатов измерения случайных величин мы определяли доверительные вероятности для отдельных результатов измерений x_i , то есть вероятность того, что x_i не отклоняется от истинного значения более, чем на Δx . Однако, возможно даже важнее знать, насколько может уклоняться от истинного значения x среднее арифметическое наших измерений. Очевидно, что при малом количестве измерений такое уклонение может привести к заметной погрешности в определении доверительного интервала для заданной доверительной вероятности.

Построим случайные величины T, V по формулам

$$T = \sqrt{n} \frac{\bar{m} - m}{\sqrt{D}} , \quad V = \frac{(n-1)\bar{D}}{D} , \quad (27)$$

в которых m, \bar{D} определяются по формулам (6),(7).

В теории вероятностей доказывается, что при нормальном распределении величины x величина T подчиняется так называемому *закону распределения Стьюдента* с $n - 1$ степенями свободы, а величина V - так называемому *распределению χ^2* с $n - 1$ степенями свободы.

Мы не будем здесь приводить конкретные формулы для указанных распределений, поскольку формулы эти достаточно громоздки и практически для определения этих функций пользуются таблицами или готовыми пакетами программ для обработки наблюдений. Покажем, как используются эти распределения для уточнения доверительных интервалов.

Пусть для оценки математического ожидания имеем выражение

$$P(\bar{m} - m < \varepsilon_\beta) = \beta . \quad (28)$$

Перейдем к в неравенстве к случайной величине T . Умножим обе его части на величину $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{D}}$. Тогда получим

$$P\left(\frac{\sqrt{n}|\bar{m} - m|}{\sqrt{D}} < \frac{\varepsilon_\beta}{\sqrt{D/n}}\right) = \beta$$

или

$$P\left(|T| < \frac{\varepsilon_\beta}{\sqrt{D/n}}\right) = \beta .$$

Пользуясь таблицей, можно найти t_β , соответствующее условию

$$P(|T| < t_\beta) = \beta .$$

Тогда $\varepsilon_\beta = t_\beta \sqrt{D/n}$ и доверительный интервал будет

$$I_\beta = (\bar{m} - t_\beta \sqrt{D/n}; \bar{m} + t_\beta \sqrt{D/n}) . \quad (29)$$

Как видно из формулы (29), при больших значениях n поправка оказывается незначительной.

2.5. Представление результатов измерений

2.5.1. Общие требования к представлению результатов измерений

Полученное в экспериментах опытное значение физической величины практически может быть использовано лишь при условии оценки его погрешности. Погрешности эти могут быть связаны с погрешностью измерительных приборов, а также математических операций, которые были проделаны с исходными первичными результатами при вычислении указанной величины.

В настоящее время метрологические стандарты требуют численных оценок уровней систематических и случайных погрешностей в прямой связи

с вероятностным содержанием этих понятий. Поясним на примере форму представления результатов измерений, рекомендуемую ГОСТом:

Пусть измеренная температура в некоторой точке аппарата составляет 352 К и с вероятностью $\alpha = 0,9$ известно, что она не менее 351 К и не более 355 К. Тогда этот результат записывается так: $T = 352 \text{ К}$, Δ от -1 до 3 К ; $\alpha = 0,9$. В случае симметричного интервала результат можно записать короче: $T = 352 \pm 2 \text{ К}$, $\alpha = 0,9$.

Данная форма может быть использована, когда наряду с рабочим измерением обеспечена многократная экспериментальная проверка показаний примененного средства измерения в условиях, максимально приближенных к рабочим. Задача состоит в изучении итогового отличия замеренного значения от действительного статистическими методами вне зависимости от физической природы и количественных соотношений систематической и случайной составляющих погрешности. Выражаясь конкретнее, речь идет о проверке показаний прибора при наличии образцового измерительного устройства или при иной возможности задания эталонного значения измеряемой величины. Полученный при этом эмпирический закон распределения погрешности служит основанием для оценки суммарной погрешности Δ в зависимости от доверительной вероятности α . Примеры подобных оценок можно встретить при лабораторном определении погрешностей расходомерных устройств на основе измерения поля скоростей с применением пневмометрических трубок в качестве эталонных средств измерения.

Во многих температурных измерениях решающая роль принадлежит погрешностям, возникающим в чувствительном элементе (первичном преобразователе). Как правило, при этом преобладают погрешности, обусловленные воздействиями со стороны изучаемого объекта. При изучении отдельных составляющих таких погрешностей они могут перейти в разряд детерминированных величин. В более общем случае эти составляющие можно рассматривать как случайные величины со своим математическим ожиданием и дисперсией. Это так называемые «функции влияния (ФВ)», которые входят в число важнейших метрологических характеристик средств измерений. Формальное определение этих функций следующее: ФВ – «зависимость измененной метрологической характеристики средства измерений от изменений влияющих величин или неинформативных параметров входного сигнала в пределах рабочих условий эксплуатации».

Учитывая ФВ мы получаем несимметричные относительно нуля пределы систематической погрешности, на которую накладывается симметричная случайная погрешность, связанная с классом точности измерительного прибора или с колебаниями параметров режима при испытаниях.

Постоянная составляющая систематической погрешности может быть устранена путем введения поправки, равной по абсолютной величине математическому ожиданию этой погрешности.

Коэффициенты А, В, С определяются с помощью стандартных методов решения систем линейных уравнений.

Продемонстрированный способ определения неизвестных параметров аппроксимирующей зависимости может быть использован и для других видов зависимостей. При этом для степенных зависимостей используется подстановка $z = x^h$, а для показательных подстановкой $z = \ln y$.

При обработке опытных данных часто оказывается важной оценка качества экспериментальной кривой, для чего необходимо определить меру рассеивания точек (дисперсию s_0^2) и дисперсии коэффициентов А, В, ... Применительно к простейшей линейной зависимости $y = Ax + B$ для этих величин можно получить следующие формулы

$$\left. \begin{aligned} s_0^2 &= \frac{n}{n-2} (D_y^* - K_{xy}^{*2} / D_x^*) \\ s_A^2 &= s_0^2 / (nD_x^*) \\ s_B^2 &= \frac{s_0^2}{nD_x^*} (D_x^* + m_x^{*2}) \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

В этих зависимостях $m_x^* = \frac{1}{n} \sum x_i$, $m_y^* = \frac{1}{n} \sum y_i$; $D_x^* = \frac{1}{n} \sum x_i^2 - m_x^{*2}$;

$$D_y^* = \frac{1}{n} \sum y_i^2 - m_y^{*2} \quad ; \quad K_{xy}^* = \frac{1}{n} \sum x_i y_i - m_x^* m_y^* .$$

При обработке опытных данных с целью построения аппроксимирующей кривой обычно делаются попытки повести результирующую кривую (линию регрессии) возможно ближе к полученному множеству точек, для чего и используется метод наименьших квадратов. Но, с другой стороны, желательно, чтобы линия регрессии описывалась максимально простой функцией. Удобнее всего, чтобы линия регрессии была прямой. Для сведения задачи к линейной регрессии иногда используют предварительные преобразования поля измеренных значений (например, с помощью логарифмических координат).

Перед тем, как перейти к конкретным примерам, коснемся вопроса о так называемых *промахах*, т.е. результатах, чуждых данному ряду измерений по вероятностному признаку. Обнаружение промахов и их исключение из результатов измерений должно предшествовать дальнейшей статистической обработке опытного материала. Под промахами понимают значения с настолько большими случайными ошибками, что вероятность β их появления в ряду из n значений очень мала. Если имеется подозрение, что некоторое значение x_k «выскакивает» из рассматриваемого ряда, то вычисляют относительное отклонение v_{\max} этого значения от среднего арифметического в долях средней квадратичной ошибки s_n :

$$v_{идел} = \left| \frac{\tilde{x} - x_k}{s_n} \right| ,$$

после чего тем или иным способом оценивают вероятность β .

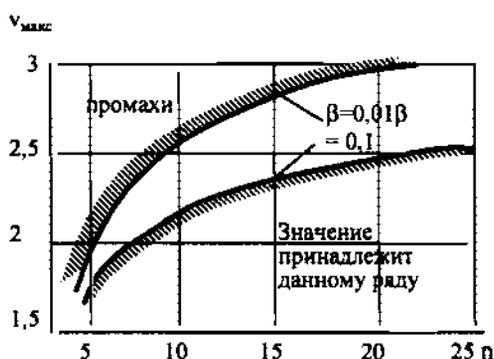


Рис. 3. График для определения промахов в ряде выполненных измерений

Пример. Определение расхода газа калориметрическим способом.

Рассматриваются реальные измерения расхода водорода, охлаждающего мощный электрогенератор. Расход газа измерялся косвенным путем с помощью измерения расхода Q_0 и подогрева $\Delta\vartheta_0$ воды в охладителях и подогрева газа $\Delta\vartheta_2$ при различных уровнях нагрузки. Поскольку точность определения величины Q_2 из единичных опытов была неудовлетворительной, то пришлось использовать статистические возможности для снижения итоговой погрешности измеряемой величины.

По результатам измерений Q_0 , $\Delta\vartheta_0$ и $\Delta\vartheta_2$ в установившихся тепловых режимах для каждой машины были построены зависимости подогрева газа от потерь тепла, отводимых газом $P_2 = c_0 Q_0 \Delta\vartheta_0$ при заданном давлении водорода p . Очевидно, что эти зависимости должны иметь вид лучей, проходящих через начало координат (рис.4). Отклонения отдельных точек от прямолинейной зависимости $\Delta\vartheta_2 = AP_2$ имеют случайный характер; для определения коэффициента A из системы (31) при $B = 0$ получим:

$$A = \frac{\sum \Delta\vartheta_{2i} P_{2i}}{\sum P_{2i}^2} .$$

Наиболее вероятное значение расхода газа Q_2 для каждой серии опытов определяется как

$$Q_2 = \frac{1}{c_2 (1 + p_{изб}) A} ,$$

где c_2 – удельная теплоемкость водорода, $p_{изб}$ – избыточное давление водорода.

Результаты испытаний для 2 вариантов системы вентиляции приведены в на рис.4, а результаты определения коэффициентов линейной регрессии и для заданных расходов газа и характеристик погрешностей измерений приведены в таблице 1 .

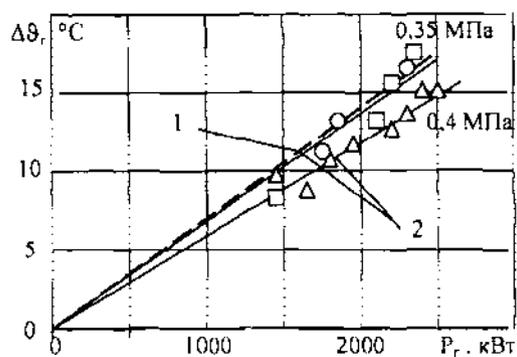


Рис.4. Опытные зависимости подогрева газа от отводимых потерь для двух вариантов системы вентиляции (1, 2)

Таблица 1. Опытные данные и их вероятностная обработка

Вариант	Давление водорода, МПа	A, К/МВт	Q, м ³ /с	К-во опытов	Погрешности серий измерений				
					среднеквадратичная, s _n %	вероятная V _s		предельная ε _s	
					%	м ³ /с	%	м ³ /с	
1	0,35	4,36	46,4	5	2,3	1,7	0,8	5	2,3
2	0,40	6,22	29,2	8	8,0	5,7	1,6	15	4,5

РАЗДЕЛ 3.

ПРИМЕНЕНИЕ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕПЛООБМЕНА И ГИДРОДИНАМИКИ

3.1. Краткое введение в проблему

Изложение в основном базируется на книге С.Патанкара «Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости». Ее ценность состоит в том, что проблемы излагаются достаточно просто и с ориентацией на конкретные типы задач.

При использовании численных методов мы имеем дело с дискретными аналогами дифференциальных уравнений, описывающих рассматриваемый физический процесс. Эти уравнения выражают в дифференциальной форме законы сохранения массы, импульса и энергии.

Дискретизацию уравнений можно осуществлять различными способами:

- используя отрезок ряда Тейлора;
- с помощью некоторого вариационного принципа, в котором нахождение минимума некоторого функционала эквивалентно решению данного дифференциального уравнения.;
- *методом взвешенных невязок*, в котором ищется минимум отличия приближенного решения от точного (невязки), а весовая функция определяет вклад невязок в разных точках рассматриваемой области в суммарную невязку для области в целом;
- *метод контрольного объема*, который по существу является одним из вариантов метода взвешенных невязок.

Последний метод оказывается одним из наиболее удобных способов постановки дискретных задач в виде, обеспечивающем устойчивость решения. Именно этот метод и будет использоваться ниже. Идея метода состоит в том, что конечно-разностное уравнение должно наглядно выражать закон сохранения, соответствующий рассматриваемому дифференциальному уравнению. Это позволяет сохранить физический смысл задачи и при использовании конечно-разностных аналогов.

3.2. Общие принципы построения дискретных аналогов дифференциальных уравнений

Основная идея метода контрольного объема легка для понимания и, что очень существенно, поддается прямой физической интерпретации. При этом расчетная область разбивается на некоторое число непересекающихся контрольных объемов таким образом, что каждая узловая точка содержится в одном контрольном объеме. Дифференциальное уравнение интегрируется по каждому контрольному объему, используя некоторые кусочные профили, описывающие изменение искомой функции Φ между выбранными узловыми точками. В результате находится дискретный аналог дифференциального уравнения, в который входят значения функции Φ в узловых точках.

При использовании метода контрольного объема наиболее удобно иметь дело с уравнениями в частных производных, записанными в так называемой *дивергентной* форме. В качестве примера рассмотрим уравнение неразрывности, выражающее закон сохранения массы. Для любой транспортируемой величины закон ее сохранения для некоторого элемента объема v можно записать в виде

$$\frac{\partial m}{\partial \tau} + \int_{\sigma} q_n d\sigma = 0, \quad (1)$$

где q_n – поток величины m в направлении нормали n к поверхности σ , охватывающей элемент объема v . Если транспортируемая величина – масса, и если объем v можно считать малым, то, используя теорему Остроградского – Гаусса, имеем

$$v \frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \int_{\sigma} \rho w_n d\sigma = v \frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \int_v \operatorname{div}(\rho w) dv = 0$$

или

$$v \frac{\partial \rho}{\partial \tau} + v \operatorname{div}(\rho w) = 0. \quad (2)$$

Сокращая на v , получим так называемую дивергентную форму уравнения неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \operatorname{div}(\rho w) = 0. \quad (3)$$

Аналогичная форма для уравнения теплопроводности имеет вид

$$c\rho \frac{\partial t}{\partial \tau} + \operatorname{div}(q) = 0, \quad (4)$$

где q – тепловой поток, который согласно закону Фурье равен

$$q = -\lambda \operatorname{grad} t,$$

отсюда получаем

$$c\rho \frac{\partial t}{\partial \tau} = \operatorname{div}(\operatorname{grad} t). \quad (5)$$

Дивергентная форма позволяет наиболее просто строить *консервативные конечно-разностные схемы*. Консервативной схемой называется разностная схема, обеспечивающая **точное** выполнение законов сохранения (исключая ошибки округления) на любой сетке в конечной области, содержащей произвольное число узлов разностной сетки.

Если записать уравнение в дивергентной форме не удастся, то для построения консервативной схемы можно воспользоваться *методом контрольного объема*. При этом уже упомянутый выше дискретный аналог дифференциального уравнения выражает закон сохранения Φ для конечного контрольного объема точно так же, как дифференциальное уравнение выражает закон сохранения для бесконечно малого контрольного объема. Одним из важных свойств метода контрольного объема является то, что в

нем заложено точное интегральное сохранение таких величин, как масса, импульс, энергия на любой группе контрольных объемов и, следовательно, на всей расчетной области. Таким образом, даже решение на грубой сетке удовлетворяет условиям консервативности.

Возможно двоякое рассмотрение результатов решения дискретных уравнений относительно значений в узловых точках – как совокупность указанных значений и некоторой интерполяции между узловыми точками, или исключительно указанных значений. В методе контрольного объема используется второй подход. Интерполяционные формулы или профили рассматриваются лишь как вспомогательные, необходимые для расчета интегралов.

3.3. Основные правила построения разностных аналогов

Для иллюстрации основных правил построения разностных схем методом контрольного объема воспользуемся простейшим примером - одномерной стационарной задачей теплопроводности.

$$\frac{d}{dx} \left(\lambda \frac{dT}{dx} \right) + Q = 0, \tag{6}$$

где λ - теплопроводность, T – температура, Q - плотность тепловыделения.

Расположим узловые точки следующим образом :

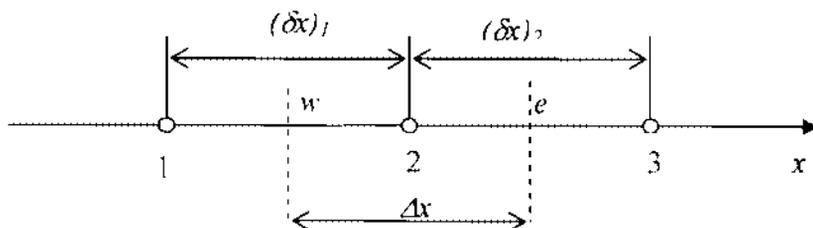


Рис.1. Шаблон узловых точек для одномерной задачи

Штриховыми линиями w, e показаны границы контрольных объемов.

Величину контрольного объема 2 считаем равной $\Delta x \cdot 1 \cdot 1$.

Интегрируя уравнение (6) по контрольному объему, получим

$$\left(\lambda \frac{dT}{dx} \right)_e - \left(\lambda \frac{dT}{dx} \right)_w + \int_w^e Q dx = 0. \tag{7}$$

Чтобы определить левую часть формулы (7), необходимо сделать некоторые предположения о виде профиля T . На рис.2 представлены два варианта таких профилей. Для варианта а) производная dT/dx на границах контрольного объема не определена. Для варианта б) эта трудность не возникает и дискретный аналог уравнения (2) принимает вид

$$\lambda_e (T_3 - T_2) / (\delta x)_e - \lambda_w (T_2 - T_1) / (\delta x)_w + Q \Delta x = 0, \tag{8}$$

где Q - среднее по контрольному объему значение Q . Теперь запишем уравнение (8) в следующем виде:

$$a_2 T_2 = a_3 T_3 + a_1 T_1 + b, \quad (9)$$

где

$$a_1 = \frac{\lambda_n}{(\delta x)_n}; \quad a_3 = \frac{\lambda_e}{(\delta x)_e}; \quad a_2 = a_1 + a_3; \quad b = Q \Delta x. \quad (10)$$

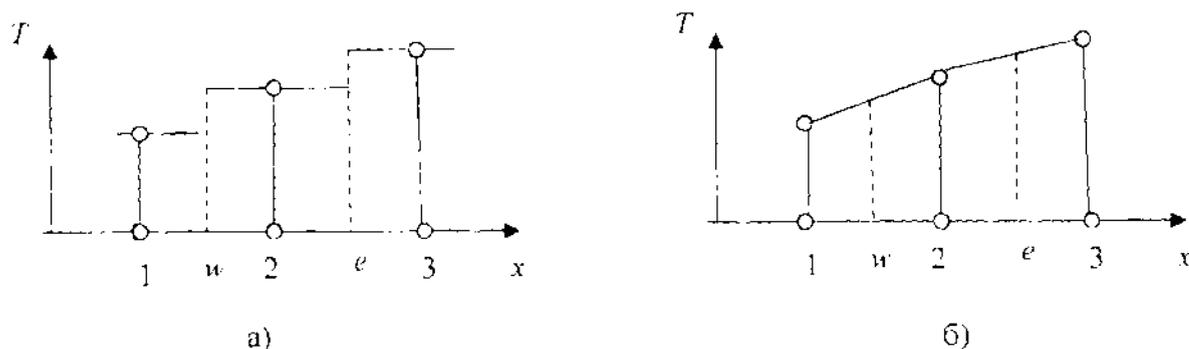


Рис.2. Простейшие аппроксимации профилей:
а – ступенчатый профиль; б- линейный профиль

Важно заметить, что для расчета dT/dx можно было применить и другие интерполирующие функции, причем для различных величин они могут быть различными. Например, для вычисления Q не обязательно предполагать линейный характер изменения Q между узловыми точками. То же относится и к λ и к другим возможным членам, содержащим температуру.

Таким образом, мы имеем существенную свободу выбора интерполяционных функций, что ведет к множеству способов получения дискретных аналогов уравнения. Предполагается, что при увеличении числа узловых точек решения для всех дискретных аналогов исходного уравнения совпадают.

Наложим дополнительное требование, которое приведет к уменьшению число подходящих формул. Потребуем, чтобы решение, полученное даже на грубой сетке, во-первых, всегда имело физически правдоподобный характер и, во-вторых, обеспечивало сохранение полного баланса.

Понять, имеет ли полученное решение физический смысл, обычно не слишком трудно, по крайней мере, для достаточно простых задач. Правдоподобное решение должно иметь такой же качественный характер, что и точное решение.

Несколько слов относительно аппроксимации источникового члена. Последний часто является функцией самой зависимой переменной T , и тогда желательно учесть эту зависимость при построении дискретного аналога. Однако, формально мы можем учитывать только линейную зависимость,

поскольку решение дискретных уравнений осуществляется с помощью решения систем линейных алгебраических уравнений. Запишем среднее значение Q в виде

$$Q = Q_c + Q_2 T_2, \quad (11)$$

где Q_c – постоянная составляющая Q , а Q_2 – коэффициент.

Наличие T_2 в формуле (11) отражает тот факт, что при записи среднего значения Q предполагалось, что значение T_2 распространяется на весь контрольный объем, то есть, по существу, использовался ступенчатый профиль.

Дискретный аналог уравнения теплопроводности с линеаризованным источниковым членом будет иметь такой же вид, как (9), но с несколько отличными значениями коэффициентов

$$a_2 T_2 = a_3 T_3 - a_1 T_1 + b, \quad (12)$$

где

$$a_1 = \frac{\lambda_u}{(\Delta x)_u}; \quad a_3 = \frac{\lambda_c}{(\Delta x)_c}; \quad a_2 = a_1 + a_3 - Q_2 \Delta x; \quad b = Q_c \Delta x, \quad (13)$$

Теперь перейдем к формулировке тех основных правил, о которых говорилось в начале раздела.

3.3.1. Соответствие потоков на границах объема

Выражения потока через границу, общую для двух контрольных объемов, при записи дискретных аналогов уравнений для этих объемов должны быть идентичны.

Это требование носит достаточно очевидный характер, ибо его несоблюдение закономерным образом должно привести к отклонению от консервативности. Чтобы избежать несоответствий, необходимо помнить, что поток на границе рассматривается сам по себе, а не как принадлежащий определенному контрольному объему.

3.3.2. Положительность коэффициентов

В большинстве рассматриваемых задач влияние значений зависимой переменной в точках, соседних с некоторой узловой, на значение в этой узловой точке обусловлено процессами диффузионного или конвективного типов. Следовательно, увеличение значения в одной узловой точке должно привести к увеличению значения в соседней узловой точке, и наоборот. Тогда очевидно, что упомянутые коэффициенты должны иметь одинаковый знак. Отсюда следует, что все коэффициенты дискретных уравнений должны быть одного знака (например, положительны).

3.3.3. Отрицательность коэффициента при линеаризации источникового члена

Из определения коэффициентов (8) видно, что коэффициент a_2 может стать отрицательным из-за последнего слагаемого. Этого можно заведомо избежать, если наложить условие отрицательности Q_2 .

Данное правило не настолько произвольно, как это кажется на первый взгляд. На самом деле для большинства физических процессов угол наклона касательной к кривой, описывающей источниковый член как функцию зависимой переменной, действительно отрицателен. В противном случае физический процесс мог бы стать неустойчивым, если отсутствуют некоторые специальные механизмы, компенсирующие этот эффект.

3.3.4. Сумма соседних коэффициентов

В рассматриваемое уравнение часто входят только производные зависимой переменной T (однородное уравнение). При этом, если функция T удовлетворяет уравнению, то и функция $T + c$, где c – произвольная постоянная, также удовлетворяет дифференциальному уравнению. Это свойство уравнения должно также отразиться на его дискретном аналоге.

Уравнение (14) в общем случае двух- или трехмерной задачи может быть записано как

$$a_2 T_2 = \sum a_{nb} T_{nb} + b \quad , \quad (14)$$

где индекс nb обозначает соседние точки и суммирование проводится по всем соседним точкам.

Таким образом, необходимо найти условие, при котором увеличение T_2 и всех T_{nb} на постоянную величину оставит уравнение (14) справедливым. Очевидно, что таким условием будет

$$a_2 T_2 = \sum a_{nb} T_{nb} \quad . \quad (15)$$

Легко видеть, что уравнение (9) действительно удовлетворяет сформулированному условию. Это означает, что значение T_2 в средней точке является средневзвешенным значений температуры в соседних точках T_{nb} . В отличие от коэффициентов в (10) коэффициенты уравнения (12) не подчиняются данному правилу. Однако, это вполне естественно, поскольку рассматриваемое условие относится лишь к однородному уравнению.

3.4. Нестационарная одномерная теплопроводность

3.4.1. Обобщенный дискретный аналог

Запишем одномерное уравнение нестационарной теплопроводности в дивергентном виде. Будем полагать, что ρc постоянно.

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) . \quad (16)$$

Поскольку уравнение нестационарно, то при записи дискретного аналога будут фигурировать предыдущие и последующие значения по времени (τ , $\tau + \Delta\tau$). Будем обозначать их верхними индексами 0 и 1. Получим дискретный аналог путем интегрирования по контрольному объему, как и для стационарной задачи. Но при этом интегрирование выполняется также и по времени.

$$\rho c \int_w^e \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \frac{\partial T}{\partial \tau} d\tau \cdot dx = \int_w^e \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx \cdot d\tau . \quad (17)$$

Здесь пределы по x выбраны аналогично тому, как это было сделано в предыдущем разделе. Для представления $\partial T / \partial \tau$ сделаем предположение, что значение T в узловой точке распространено на весь контрольный объем. Тогда

$$\rho c \int_w^e \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \frac{\partial T}{\partial \tau} d\tau \cdot dx = \rho c \Delta x (T_2^1 - T_2^0) . \quad (18)$$

Повторяя выкладки, проделанные для стационарного случая, получаем

$$\rho c \Delta x (T_2^1 - T_2^0) = \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} \left[\frac{\lambda_e (T_3 - T_2)}{(\delta x)_e} - \frac{\lambda_w (T_2 - T_1)}{(\delta x)_w} \right] d\tau . \quad (19)$$

Теперь необходимо ввести предположение относительно изменения во времени в интервале (τ , $\tau + \Delta\tau$) температур T_1 , T_2 и T_3 . При этом возможны различные варианты. Один из наиболее употребительных имеет вид:

$$\int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} T_2 d\tau = [\sigma T_2^1 + (1-\sigma)T_2^0] \Delta\tau , \quad (20)$$

где σ - весовой коэффициент, изменяющийся от 0 до 1. Используя аналогичные аппроксимации для интегралов от T_1 до T_3 из уравнения (19), получим

$$\rho c \Delta x (T_2^1 - T_2^0) = \sigma \left[\frac{\lambda_e (T_3^1 - T_2^1)}{(\delta x)_e} - \frac{\lambda_w (T_2^1 - T_1^1)}{(\delta x)_w} \right] + (1-\sigma) \left[\frac{\lambda_e (T_3^0 - T_2^0)}{(\delta x)_e} - \frac{\lambda_w (T_2^0 - T_1^0)}{(\delta x)_w} \right] . \quad (21)$$

Преобразуем выражение (21), опуская одновременно индекс 1 у после-

дующих значений T . Тогда получим

$$a_2 T_2 = a_1 [\sigma T_1 + (1-\sigma) T_1^0] + a_3 [\sigma T_3 + (1-\sigma) T_3^0] + a_2^0 - (1-\sigma)a_1 - (1-\sigma)a_3 T_2^0, \quad (22)$$

где

$$a_1 = \lambda_w / (\delta x)_w; \quad a_3 = \lambda_c / (\delta x)_c; \quad a_2^0 = \rho c \Delta x / \Delta \tau; \quad a_2 = \sigma a_1 + \sigma a_3 + a_2^0. \quad (23)$$

3.4.2. Явная, Кранка-Николсона и полностью неявная схемы

Для определенных конкретных значений весового коэффициента σ дискретный аналог приводится к хорошо изученным системам для *параболических* дифференциальных уравнений. В частности для $\sigma = 0$ получаем явную схему, для $\sigma = 0,5$ – так называемую схему Кранка-Николсона и для $\sigma = 1$ – полностью неявную схему. Сравним эти схемы с точки зрения их предпочтительности для конкретных расчетов.

Различные значения σ можно интерпретировать как характеристику изменения T_2 от τ , которая показана на рис.3. Явная схема по существу предполагает, что старое значение T_2^0 существует в пределах всего временного шага, за исключением точки $\tau + \Delta \tau$. Неявная схема предполагает, что в момент τ T_2 резко изменяется от T_2^0 до T_2^1 , а затем остается равной T_2^1 на всем временном шаге. Схема Кранка-Николсона предполагает линейное изменение T_2 . На первый взгляд линейное изменение выглядит более разумным, чем две другие альтернативы. Однако, на практике более удобной оказывается неявная схема. Приведем краткое пояснение: Для явной схемы ($\sigma = 0$) уравнение (3.7) 22 принимает вид

$$a_2 T_2 = a_1 T_1^0 + a_3 T_3^0 + (a_2^0 - a_1 - a_3) T_2^0. \quad (24)$$

Это означает, что T_2 не зависит от других неизвестных, таких как T_1 или T_3 , а является явно определенной по известным температурам в предыдущий момент. Поэтому схема и называется *явной*. Она позволяет найти каждое из значений температуры T_2 из одного уравнения. Однако удобство явной схемы компенсируется ограничением, накладываемым на соотношение

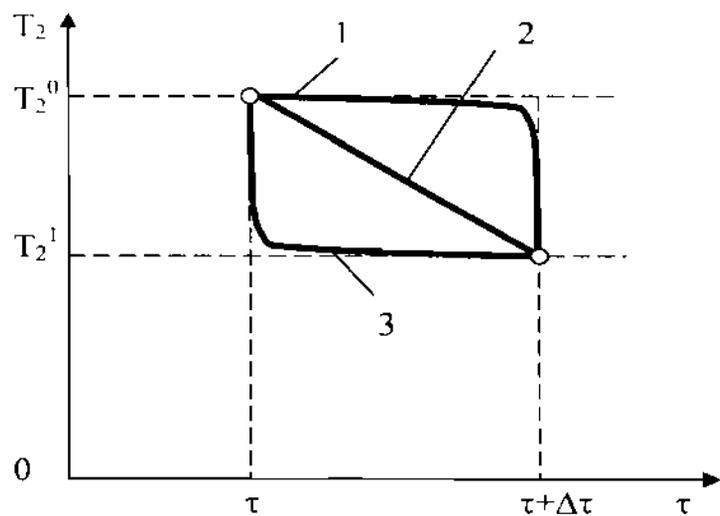


Рис.3. Изменение температуры во времени 1-явная схема, 2- схема Кранка-Николсона, 3- неявная схема

шагов из условия положительности коэффициентов. Действительно, из этого условия и уравнений 2.(23),(24) следует

$$(a_2^0 - a_1 - a_3) > 0 . \quad (25)$$

При постоянной теплопроводности λ имеем

$$\Delta\tau < \rho c (\Delta x)^2 / 2\lambda . \quad (26)$$

Если это условие нарушается, то можно получить физически неправдоподобные результаты. Уравнение (26) является хорошо известным критерием устойчивости явной схемы. Его особенностью является необходимость уменьшать временной шаг пропорционально уменьшению квадрата пространственного шага, что накладывает требование малости $\Delta\tau$, т.е. увеличивает время счета.

Схема Кранка-Николсона обычно считается безусловно устойчивой. Однако и при ее использовании могут возникать не имеющие физического смысла колебательные решения, а устойчивость в математическом смысле лишь гарантирует, что они в конечном итоге будут затухать.

Такое поведение можно объяснить, исходя из сформулированных выше условий. Для $\sigma = 0,5$ коэффициент при T_2^0 в уравнении T_2^1 становится равным $a_2^0 - (a_1 + a_3)/2$. Для постоянного λ и равномерной сетки этот коэффициент равен $\rho c \Delta x / \Delta\tau - \lambda / \Delta x$. То есть, если шаг по времени недостаточно мал, то коэффициент также может оказаться отрицательным. Однако, поскольку схема Кранка-Николсона более точна, чем чисто явная или чисто неявная схема, то она все же может применяться, но также с соответствующими ограничениями на величину временного шага. Лишь при $\sigma = 1$ мы имеем абсолютную гарантию положительности коэффициентов a_i, a_i^0 .

Аналогичным образом можно получить дискретные аналоги для двух- и трехмерного случаев. При этом лишь увеличивается количество узловых точек и коэффициентов. В результате решение соответствующей системы линейных уравнений становится более громоздким.

Ниже мы вернемся к этому вопросу и рассмотрим методы решения систем линейных уравнений, к которым сводится отыскание численного решения уравнений в частных производных и, в частности, уравнения теплопроводности, на котором пояснялось использование метода контрольного объема. Пока же перейдем к рассмотрению уравнений, содержащих конвективные члены.

3. 5. Конвекция и диффузия

Обозначим через C концентрацию некоторой пассивной примеси и через D – коэффициент диффузии. Пусть u_j – скорость несущей среды в направлении x_j . Учитывая уравнение неразрывности для несущей среды

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) = 0 \quad , \quad (27)$$

общее дифференциальное уравнение конвективной диффузии

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\rho C) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u C) = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial C}{\partial x} \right) + S \quad (28)$$

можно записать в виде

$$\rho \frac{\partial C}{\partial \tau} + \rho u \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial C}{\partial x} \right) + S \quad . \quad (29)$$

Из формы уравнения (29) следует, что для него справедливы правила, которые были сформулированы выше, и, в частности, правило относительно суммы коэффициентов.

3.5.1. Установившиеся одномерные конвекция и диффузия

Рассмотрим установившуюся одномерную задачу, в которой фигурируют только конвекция и диффузия. Дифференциальное уравнение (28) в этом случае имеет вид

$$\frac{d}{dx} (\rho u C) = \frac{d}{dx} \left(D \frac{dC}{dx} \right) \quad . \quad (30)$$

Уравнение неразрывности имеет вид

$$\frac{d}{dx} (\rho u) = 0 \quad \text{или} \quad (\rho u) = const \quad . \quad (31)$$

Для получения дискретного аналога используем трехточечный шаблон

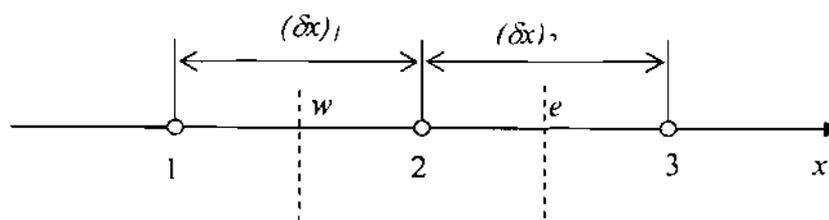


Рис.4. Шаблон узловых точек для одномерной задачи (тонируемая область - контрольный объем)

Интегрируя уравнение (30) по контрольному объему, получим

$$(\rho u C)_e - (\rho u C)_w = \left(D \frac{\partial C}{\partial x} \right)_e - \left(D \frac{\partial C}{\partial x} \right)_w \quad . \quad (32)$$

Выберем для аппроксимации конвективного члена такую же кусочно-линейную аппроксимацию, как для диффузионного. Тогда имеем

$$C_v = 1/2 (C_2 + C_3) ; 1/2 (C_1 + C_2) . \quad (33)$$

Наличие множителя 1/2 является следствием предположения, что контрольный объем расположен посередине между узловыми точками. Тогда уравнение (32) принимает вид

$$0,5 (\rho u)_e (C_2 + C_3) - 0,5 (\rho u)_w (C_1 + C_2) = \frac{D_e (C_3 - C_2)}{(\delta x)_e} - \frac{D_w (C_2 - C_1)}{(\delta x)_w} . \quad (34)$$

Здесь значения D_e , D_w определяются аналогично тому, как в предыдущем разделе определялись коэффициенты теплопроводности.

Введем два новых обозначения G и Γ следующим образом:

$$G = \rho u; \quad \Gamma = D/\delta x . \quad (35)$$

Эти величины имеют одинаковую размерность массовой скорости (Γ называют диффузионной проводимостью). Коэффициент Γ , естественно, всегда будет положительным, в то время, как G будет иметь разные знаки в зависимости от направления потока. С учетом принятых обозначений дискретный аналог примет вид

$$a_2 C_2 - a_1 C_1 - a_3 C_3 = 0 , \quad (36)$$

где

$$a_3 = \Gamma_e - G_e/2; \quad a_1 = \Gamma_w + G_w/2; \quad (37)$$

$$a_2 = \Gamma_e + G_e/2 + \Gamma_w - G_w/2 = a_3 + a_1 - (G_e - G_w) . \quad (38)$$

Теперь рассмотрим полученные результаты.

1. Из условия непрерывности $G_e = G_w$. Поэтому $a_2 = a_1 + a_3$, причем это свойство имеет место только, если удовлетворяется условие непрерывности.
2. Форма дискретного аналога (36) является следствием использования кусочно-линейного профиля C . Эта форма известна как центрально-разностная схема и представляет собой результат разложения в ряд Тейлора.
3. Получим количественные результаты для простого примера, в котором

$$\Gamma_e = \Gamma_w = 1; \quad G_w = G_e = 4 .$$

Если заданы значения C_1 и C_3 , то из уравнения (36) можно найти C_2 .

Рассмотрим два набора значений:

а) Если $C_1 = 100$ и $C_3 = 200$, то $C_2 = 50$!

б) Если $C_1 = 200$ и $C_3 = 100$, то $C_2 = 250$!

Поскольку на самом деле C_2 не может лежать вне области значений 100-200, определенных соседними точками, то полученные результаты не имеют физического смысла.

4. Можно было предвидеть эти неверные результаты, так как из уравнений (36-38) видно, что коэффициенты могут принимать отрицательные значения. Когда $|G| > 2\Gamma$, то в зависимости от того, положительно или

отрицательно G , можно получить отрицательные a_1, a_3 . Это приводит к нарушению одного из общих правил.

5. Отрицательные коэффициенты могут означать также нарушение условия сходимости решения системы линейных уравнений, к которым сводится исходная задача.
6. При нулевой диффузии ($\Gamma = 0$) схема приводит к $a_2 = 0$. при этом уравнение (36) практически не поддается решению.

Необходимо констатировать, что приведенный выше предварительный анализ привел к неприемлемому виду дискретного аналога. Поэтому необходимо рассмотреть более удачные подходы.

3.5.2. Схема против потока

Схема против потока также известна как схема с разностями против потока, метод донорных ячеек, и.т.д.

Выше было показано, что слабым звеном предыдущего анализа является определение значения переносимой величины на грани контрольного объема C_e как среднего между C_2 и C_3 . Схема против потока предлагает лучшую аппроксимацию. Суть указанной схемы состоит в следующем. Запись диффузионного члена остается прежней, а значение C на грани контрольного объема равно значению в соседней узловой точке с подветренной стороны грани. То есть $C_e = C_2$.

Таким образом,

$$C_e = C_2, \text{ если } G_e > 0 \quad (39)$$

$$C_e = C_3, \text{ если } G_e < 0. \quad (40)$$

Аналогично определяется C_w .

Условные соотношения (39, 40) можно записать более компактно, если ввести новый оператор $[[A, B]]$, определяющий наибольшую из величин A и B . Тогда для схемы против потока

$$G_e C_e = C_2 [[G_e, 0]] - C_3 [[-G_e, 0]]. \quad (41)$$

Если в (33) подставить это выражение, то дискретный аналог запишется в виде

$$a_2 C_2 = a_1 C_1 + a_3 C_3, \quad (42)$$

где

$$a_3 = \Gamma_e + [[-G_e, 0]]$$

$$a_1 = \Gamma_w + [[G_w, 0]]$$

$$a_2 = \Gamma_e + [[-G_e, 0]] + \Gamma_w + [[-G_w, 0]] = a_1 + a_3 + (G_e - G_w). \quad (43)$$

Проанализируем полученные результаты.

1. Из уравнения (43) видно, что отрицательные значения коэффициентов в этом случае не появляются. Таким образом, решения всегда будут

физически реальными и критерий разрешимости системы линейных уравнений будет удовлетворяться.

2. В чем же состоит сущность идеи, лежащей в основе схемы против потока? Для пояснения приведем следующую физическую иллюстрацию. Пусть схема состоит из элементов бак-труба. Представим контрольные объемы как серию баков с перемешивающейся жидкостью. Баки соединены

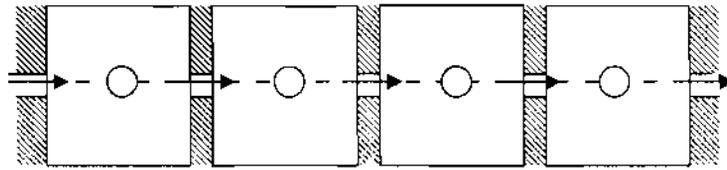


Рис.5. Модель Бак-труба

с помощью коротких трубок. Течение через трубки моделирует конвекцию, а теплопроводность через стенки баков – диффузию. Так как жидкость в баках перемешивается, то каждый бак имеет однородное температурное поле. Поэтому можно предположить, что жидкость, текущая через соединительные трубки, имеет температуру того бака, из которого она вытекает и ни в коей мере не связана с температурой бака, в который она втекает. Последнее как раз и характеризует схему против потока.

3.5.3. Точное решение

Уравнение сохранения можно решить точно, если положить, что $D = \text{const}$. Если рассматривается область $0 \leq x \leq L$ с граничными условиями

$$x = 0 \quad C = C_0 \quad (44)$$

$$x = L \quad C = C_L, \quad (45)$$

то решение уравнения (30) можно представить в виде

$$\frac{C - C_0}{C_L - C_0} = \frac{\exp(Pe_D \cdot x/L) - 1}{\exp(Pe_D) - 1}, \quad (46)$$

где Pe_D – диффузионное число Пекле

$$Pe_D = \rho uL / D. \quad (47)$$

Число Pe_D , как известно, выражает отношение интенсивностей конвективного и диффузионного переноса. Смысл точного решения (46) понятен из рис.6, на котором изображена зависимость $C(x)$ для различных чисел Pe_D . При $Pe_D = 0$ мы получаем решение для чистой диффузии (или теплопроводности – прямую линию). Когда поток направлен в положительном направлении оси x , то при больших Pe_D C близко к C_0 . Если поток направлен в отрицательном направлении, то ситуация коренным образом меняется и при больших по абсолютной величине значениях Pe_D C близко к C_L . Такое поведение решения объясняется следующим образом. Очевидно, что рост или уменьшение C обеспечивается за счет диффузии. При большом расходе для изменения C по мере приближения к выходу необходим большой поток. Но он воз-

никает лишь при большом градиенте C . Поэтому изменение C происходит вблизи соответствующей границы: при положительном направлении движения – это рост C вблизи $x = L$, а при отрицательном – уменьшение вблизи $x = 0$. Отсюда легко понять, почему предварительный анализ не дал удовлетворительных результатов. Значение C на границе контрольного объема можно брать как полусумму C_0 и C_L только при расходе, стремящемся к нулю.

Таким образом, для того, чтобы создать дискретный аналог, обеспечивающий возможность получения физически корректного решения во всех случаях, необходимо изменить аппроксимацию C внутри контрольного объема. При этом необходимо учесть полученные расчетные результаты. Поскольку сеточное число Pe определяет поведение численных схем, то используемый способ аппроксимации должен учитывать его влияние.

3.5.4. Односторонняя пространственная координата

Введем понятие об *односторонней пространственной координате*. Из выражений для коэффициентов разностной схемы (44) видно, что коэффициент в соседней вниз по потоку точке становится малым, если число Pe велико. Если число Pe больше 10, то согласно схеме со степенным законом этот коэффициент равен нулю (комбинированная схема дает 0 уже при Pe , большем двух). При этом координата становится односторонней, поскольку значения сеточной функции не будут зависеть от ее значений в одном из направлений (в данном случае – вниз по потоку).

Даже если пространственная координата не является односторонней в пределах всей расчетной области, ее локальное одностороннее поведение можно использовать при аппроксимации граничных условий.

Условие на выходной границе потока

Аппроксимация граничных условий рассматривалась выше, при анализе дискретного аналога уравнения теплопроводности. Можно предполагать, что аналогичным образом можно действовать при решении задач с конвекцией. Однако, на выходной границе потока обычно не известны ни значения функции, ни ее поток. Рассмотрим течение, представленное на рис.7 с неизвестными значениями температуры или теплового потока на выходной границе. Встает вопрос, что делать с выходными условиями. Ответ прост: на выходной границе необходимости в этих условиях нет. Если рассмотреть сеточный аналог задачи, то видно, что для узловых точек P , ближайших к выходной границе потока, коэффициенты $a_E = 0$, если число Pe не слишком мало.

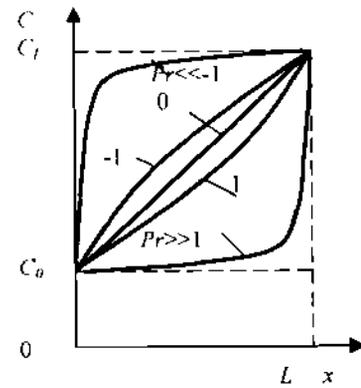


Рис.6. Иллюстрация формулы (46)

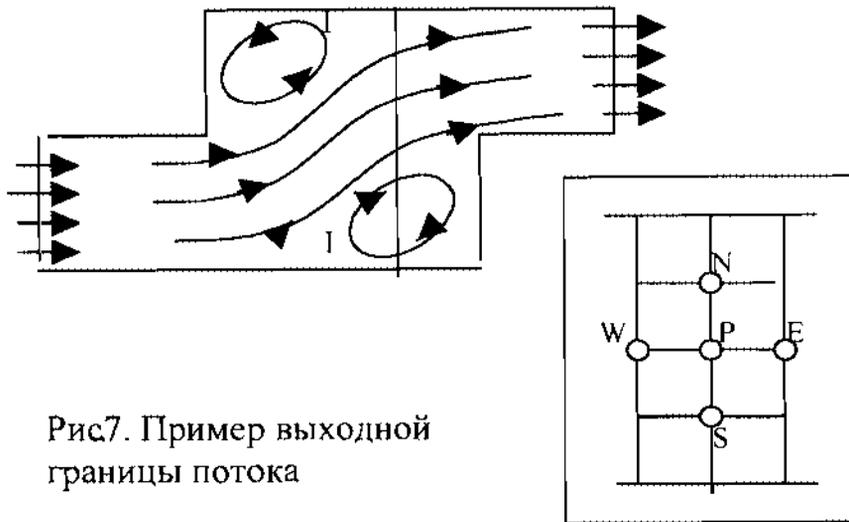


Рис7. Пример выходной границы потока

Если диффузионные процессы на выходной границе потока оказываются важными, следует сделать вывод, что граница выбрана неудачно. Например, если бы границей потока являлась бы линия I-I, которая попадает в зону обратных токов, то при выбранной постановке задачи получить физически осмысленное решение было бы невозможно.

Схемная искусственная диффузия

Приближенный характер дискретной аппроксимации уравнений гидродинамики приводит к возникновению процессов так называемой схемной диффузии, которые накладываются на решение, аппроксимирующее процесс реальной диффузии. Наличие схемной диффузии является одним из слабых мест большинства аппроксимаций задач конвекции и диффузии. Обычно по этому поводу встречаются две точки зрения:

1. Центральнo-разностная схема имеет второй порядок аппроксимации, в то время как схема с разностями против потока имеет только первый порядок аппроксимации.
2. Схема с разностями против потока вызывает появление сильной схемной искусственной диффузии.

Основной смысл этих утверждений состоит в том, что центрально-разностная схема лучше, чем схема с разностями против потока.

Действительно, разложение в ряд Тейлора показывает более высокий порядок аппроксимации для центрально-разностной схемы. Однако, выше было показано, что изменение искомой функции Φ от x , возникающее в задачах совместно протекающих конвекции и диффузии, носит экспоненциальный характер. Поэтому усеченные ряды Тейлора не могут хорошо аппроксимировать это изменение для любых значений Δx , кроме крайне малых (малых чисел Pe). Для больших значений Δx , которые встречаются в практических задачах, анализ, основанный на тейлоровском разложении,

приводит к неправильным результатам, а схема с разностями против потока оказывается лучше, чем центрально-разностная.

Если сравнить коэффициенты в рассматриваемых схемах, то можно увидеть, что схема с разностями против потока эквивалентна центрально-разностной схеме, в которой коэффициент диффузии D заменен на $D + \rho u \Delta x / 2$. Другими словами, схема с разностями против потока, по-видимому, увеличивает действительный коэффициент диффузии D путем введения фиктивной добавки $\rho u \Delta x / 2$. С одной стороны, это некоторое искажение действительности. Но, с другой стороны, неточность приведенного довода связана с тем, что исходит из идеализации центрально-разностной схемы. При таком подходе схемная диффузия будет обнаруживаться даже в экспоненциальной схеме, которая является точным решением задачи.

3.6. Расчет поля течения

3.6.1. Основная трудность определения поля скорости

Составляющие скорости описываются уравнениями импульса, которые являются частными случаями рассмотренного ранее обобщенного дифференциального уравнения для Φ ($\Phi = u, D = \mu$, и т.д.). Однако, имеется некоторая особенность расчета поля скорости, делающего его более сложным, чем расчет поля температур или концентраций. Это – необходимость расчета поля давлений, способ которого не представляется очевидным.

Поле давления может быть определено через уравнение неразрывности. Если правильно определенное поле давления подставить в уравнение импульса, то получаемое из них поле скорости будет удовлетворять уравнению неразрывности. Этот способ является косвенным, если только не использовать полное решение всей системы уравнений. Этот подход здесь не рассматривается ввиду его сложности.

3.6.2. Методы, основанные на решении уравнений для вихря

Отмеченные трудности с определением поля давлений привели к разработке методов, связанных с исключением давления из исходной системы, которые используются для плоских задач. При исключении давления мы приходим к уравнению, в котором основной переменной является вихрь Ψ . Вводя при этом также функцию тока Φ , что обеспечивает выполнение уравнения неразрывности, можно получить систему из двух уравнений. Этот метод достаточно широко применялся, однако, его использование связано с некоторыми принципиальными затруднениями. В частности, трудно поставить граничные условия для вихря на стенке. Давление часто оказывается одним из необходимых конечных результатов решения, а сложности его определения через поле вихря в какой-то степени обесценивают преимущества, достигнутые за счет использования переменных Ψ - Φ . Недостатком метода также является практическая невозможность его использования для

трехмерных задач. Поэтому предпочтительнее все же использовать метод, использующий основные переменные, то есть скорость и давление.

3.6.3. Трудности расчета поля давления

При составлении дискретного аналога уравнения импульса в направлении оси x для одномерного случая, показанного на рис. 8, единственной особенностью является представление члена $-dp/dx$, проинтегрированного по контрольному объему. В результате интегрирования в дискретный аналог входит

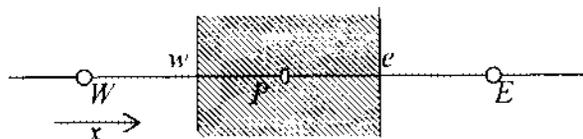


Рис 8 . Трехточечный шаблон (контрольный объем заштрихован)

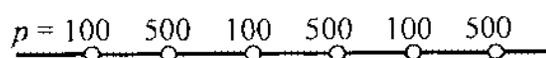


Рис.9. Зигзагообразное поле давлений

разность давлений $p_w - p_e$, которая представляет собой силу давления, приложенную к контрольному объему с единичной площадью поперечного сечения. Чтобы выразить $p_w - p_e$ через значения давления в узловых точках, можно предположить, что давление между узловыми точками меняется по линейному закону. Если грани контрольного объема e и w выбраны так, что они лежат посередине между соответствующими узловыми точками, то

$$p_w - p_e = (p_w + p_P)/2 - (p_P + p_E)/2 = (p_w - p_E)/2. \quad (48)$$

Таким образом, дискретный аналог уравнения импульса будет содержать разность давлений между двумя не соседними точками. Это означает, что давление берется с более грубой сетки, чем основная, и это должно привести к снижению точности решения. Но имеются и более серьезные недостатки этого метода. Они видны из рис. 9, на котором поле давления представлено через его значения в узловых точках. Такое зигзагообразное поле нельзя рассматривать как физически реализуемое. Интересно, что для каждой узловой точки P соответствующий перепад давления $p_w - p_e$ равен нулю ($p_w - p_e = 0$), так как значения давления в соседних с P узловых точках равны между собой. Таким образом, ошибочным следствием данной аппроксимации окажется то, что такое волнистое поле давления будет восприниматься в уравнении импульса как однородное.

Эта трудность еще более усугубляется в двухмерном случае. Так же, как на составляющую импульса в направлении оси x влияет перепад давления $p_w - p_e$, а на составляющую импульса в направлении оси y влияет перепад давления $p_S - p_N$, При этом значение давления в точке P не играет никакой роли. Имея это в виду, можно сделать вывод о том, что показанное на рис.10

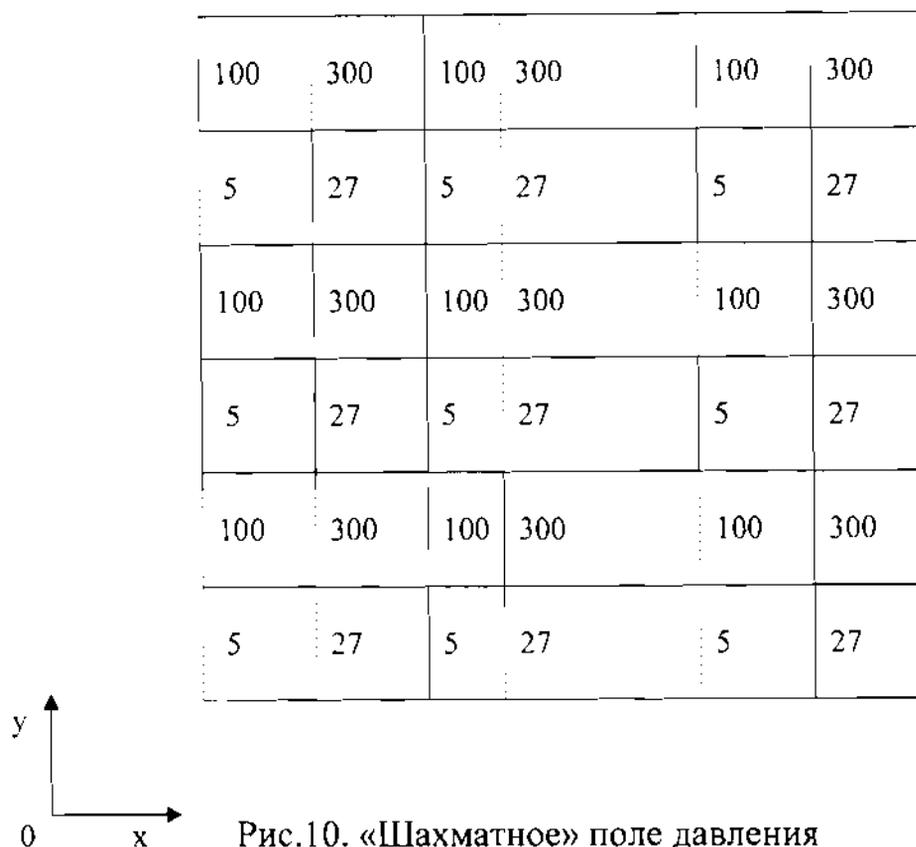


Рис.10. «Шахматное» поле давления

поле давления, образованное из расположенных в шахматном порядке четырех произвольных значениях давления, не даст силу давления в направлениях осей x или y . Таким образом, при рассмотренном способе дискретизации уравнений импульса сильно неоднородное поле давления будет восприниматься как однородное. Если бы в процессе итерационного решения возникли такие поля давления, они бы не сохранились далее в процессе, так как уравнения импульса «забудут» об этих полях.

Конкретные значения давления на рис.9, 10 не имеют какого-либо особого значения; они просто обозначают картину распределения, которую можно было бы составить из любых других значений.

Естественно, что использование численного метода, дающего такое абсурдное решение, нежелательно.

3.6.4. Аппроксимация уравнения непрерывности

Аналогичные трудности возникают при построении дискретного аналога уравнения неразрывности. Для стационарного одномерного течения жидкости с постоянной плотностью уравнение неразрывности имеет вид

$$du/dx = 0. \tag{49}$$

Проинтегрировав его по изображенному на рис.8 контрольному объему,

получим

$$u_e - u_w = 0 \quad (50)$$

Так же, как и ранее, используя кусочно-линейные профили для u и располагая грани контрольного объема посередине между узловыми точками, получаем

$$(u_p + u_E)/2 - (u_W + u_P)/2 = 0 \quad (51)$$

или

$$u_E - u_W = 0. \quad (52)$$

Видим, что и в данном случае мы получили аналогичный результат – равенство скоростей в чередующихся узловых точках, а не в соседних. В результате дискретному аналогу (52) уравнения неразрывности удовлетворяет и лишнее физического смысла поле скорости. Аналогичные картины можно составить для двух- и трехмерных случаев.

Очевидно, что эти трудности надо исключить до формулировки численного метода решения задачи в целом с использованием как скорости, так и давления.

Прежде, чем перейти к изложению способа преодоления описанных трудностей, заметим, что они связаны, по-видимому, с первыми производными. Поведение вторых производных обычно сложностей не создает.

3.7. Шахматная сетка

Важно отметить, что совсем не обязательно рассчитывать все переменные в одних и тех же узловых точках. Можно по желанию использовать для каждой зависимой переменной свою сетку. При расчете составляющих скорости значительную выгоду дает определение их на сетке, отличной от сетки, которая используется для всех других переменных. Как будет показано ниже, такой подход позволяет избавиться от тех неприятностей, которые наблюдались выше. Использование смещенной (или шахматной) сетки для расчета составляющих скорости применяется в целом ряде расчетных пакетов.

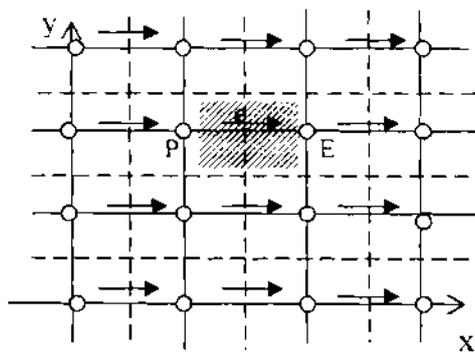


Рис.11. Смещенная сетка для u

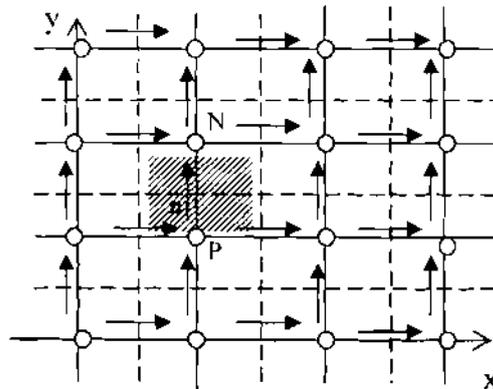


Рис.12. Смещенная сетка для u и v

Поясним суть метода смещенной сетки. При расположенной таким образом сетке составляющие скорости рассчитываются для точек, лежащих на гранях контрольных объемов. Таким образом, составляющая скорости u вдоль оси x рассчитывается на гранях, перпендикулярных оси x . Точки, в которых определяется u , показаны на рис.11 короткими стрелками, а узловые (основные) точки – кружками. Штрихом обозначены грани контрольного объема.

На расположенной в шахматном порядке сетке составляющие скорости рассчитываются для точек, лежащих на гранях контрольных объемов. Т.е. составляющая скорости u – на гранях, перпендикулярных направлению оси x . На рис.11 точки, в которых определяется u показаны стрелками. На рис.12 показана двумерная сетка, где определяются две составляющие скорости u и v . Точки, в которых определяются значения скорости, сдвинуты относительно основной сетки в направлениях x и y соответственно. Аналогичным образом можно построить и трехмерную сетку.

Следствием использованного приема является то, что массовый расход через грани контрольного объема можно определять без интерполяции соответствующей составляющей скорости. Однако основные преимущества шахматной сетки заключаются в том, что для типичного контрольного объема (заштрихованный участок на рис.12) дискретный аналог уравнения неразрывности содержит разности составляющих скорости в соседних точках. В результате волнистое поле скорости, наблюдавшееся выше, не будет удовлетворять уравнению неразрывности. При использовании смещенной сетки удовлетворять уравнению неразрывности могут лишь разумные поля скорости.

Такая же ситуация имеет место и для давления. Поскольку разность давлений между двумя соседними узловыми точками определяет составляющую скорости в точке, расположенной между этими узловыми точками, то «шахматные» давления также не будут восприниматься как возможные решения.

3.7.1. Уравнение импульса

При использовании шахматной сетки дискретные аналоги уравнения импульса несколько отличаются от дискретных аналогов уравнений для других функций, рассчитываемых в узлах основной сетки. Однако это отличие относится лишь к несущественным деталям. Оно связано с использованием для аппроксимации уравнений импульса для контрольных объемов на шахматной сетке.

Контрольный объем для уравнения импульса в направлении оси x показан на рис.11. Как видно из рис.11, контрольный объем для составляющей u смещен относительно основного контрольного объема, расположенного вокруг основной узловой точки P . Смещение объема произошло в направлении оси x таким образом, что перпендикулярные этому направлению грани проходят через основные узловые точки P и E . Отсюда видно одно из главных достоинств шахматной сетки: разность $p_P - p_E$ можно использовать для расчета силы давления, действующей на контрольный объем для скорости u .

Для расчета коэффициента диффузии и массового расхода на гранях контрольного объема, показанного на рис.11, потребуется соответствующая интерполяция, но ее можно выполнять практически так же, как для уравнения диффузии. Результирующий дискретный аналог можно записать в виде

$$a_e u_e = \sum a_{nb} u_{nb} + b + (p_p - p_E) A_e \quad (53)$$

Значения коэффициентов a_{nb} связано с влиянием конвективных и диффузионных процессов на гранях контрольного объема. Коэффициент b как и ранее содержит источниковый член и значения искомой функции на предыдущей итерации. Градиент давления не включается в составляющие источникового члена и представлен отдельно, поскольку поле давления также является определяемой величиной. Член $(p_p - p_E) A_e$ представляет собой силу давления, действующую на контрольный объем для u . $A_e = 1 \cdot \Delta y$.

Уравнения импульса в других направлениях аппроксимируются аналогичным образом. На рис.12 показан контрольный объем для уравнения импульса в направлении оси y . Он смещен вдоль оси y . Дискретный аналог будет иметь вид

$$a_n u_n = \sum a_{nb} u_{nb} + b + (p_p - p_N) A_n \quad (54)$$

где $(p_p - p_N) A_n$ соответствующая сила давления.

Уравнения импульса можно решить лишь в том случае, если поле давления задано или каким-либо образом найдено. Если при решении использовать неверное поле давления, то найденное поле скорости не будет удовлетворять уравнению неразрывности. Введем для составляющих такого поля скорости, полученного с использованием приближенного поля давления p^* , обозначения u^* , v^* , w^* . Это поле скоростей является решением системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} a_e u_e^* &= \sum a_{nb} u_{nb}^* + b + (p_p^* - p_E^*) A_e \\ a_n v_n^* &= \sum a_{nb} v_{nb}^* + b + (p_p^* - p_N^*) A_n \\ a_n w_n^* &= \sum a_{nb} w_{nb}^* + b + (p_p^* - p_T^*) A_n \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

Отметим, что точка t лежит на сеточной линии, направленной вдоль оси z и проходящей через узловые точки P и T .

Теперь сформулируем один из возможных способов приближения поля давлений p^* к истинному, который обеспечивал бы последовательное улучшение выполнения уравнения неразрывности. Положим, что истинное давление находится из соотношения

$$p = p^* + p' \quad (56)$$

где p' - поправка давления.

Выясним, как будут изменяться составляющие скорости в соответствии с таким изменением давления. Введем аналогичные поправки для составляющих скорости

$$u = u^* + u'; \quad v = v^* + v'; \quad w = w^* + w' . \quad (57)$$

Вычитая из (53) первое уравнение системы (55), получим

$$a_e u'_e = \sum a_{nb} u'_{nb} + (p'_p - p'_E) A_e . \quad (58)$$

Опустим в уравнении (58) член $\sum a_{nb} u'_{nb}$. Мы не будем здесь рассматривать обоснованность этой операции, считая это просто вычислительным приемом. В результате получим

$$a_e u'_e = (p'_p - p'_E) A_e \quad (59)$$

или

$$u'_e = (p'_p - p'_E) d_e , \quad (60)$$

где

$$d_e = A_e / a_e . \quad (61)$$

Уравнение (60) назовем поправочной функцией для скорости. Его можно переписать в виде

$$u_e = u_e^* + (p'_p - p'_E) d_e \quad (62)$$

Отсюда видно, какой должна быть поправка к значению скорости, определяемая поправками давления.

Аналогичным образом можно записать поправки для остальных составляющих скорости.

$$v_n = v_n^* + (p'_p - p'_v) d_n \quad (63)$$

$$w_l = w_l^* + (p'_p - p'_l) d_l . \quad (64)$$

Теперь преобразуем уравнение неразрывности в уравнение для поправки давления. Положим среду баротропной, т.е. считаем, что ее плотность зависит только от давления. Ограничимся двумерной задачей

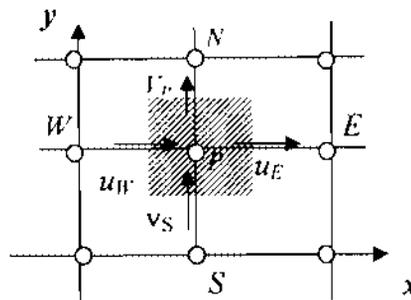
$$\partial \rho / \partial t + \partial (\rho u) / \partial x + \partial (\rho v) / \partial y = 0 . \quad (65)$$

Проинтегрируем уравнение неразрывности (65) по контрольному объему, заштрихованному на рис.13. При интегрировании первого члена положим, что значение плотности в контрольном объеме равно ρ_p . Также будем считать, что значения массовой скорости на всей грани контрольного объема определяется ее значением в центре грани. В соответствии с чисто неявной аппроксимацией положим, что новые значения скорости и плотности преобладают на всем шаге по времени. Старое значение плотности

ρ_p^0 будет лишь фигурировать в члене $\partial\rho/\partial t$. В результате интегрирования получим следующее уравнение

$$\frac{(\rho_p - \rho_p^0)\Delta x \Delta y}{\Delta \tau} + [(\rho u)_e - (\rho u)_w]\Delta y + [(\rho v)_n - (\rho v)_s]\Delta x = 0 \quad (66)$$

Рис.13. Контрольный объем для уравнения неразрывности



Если теперь вместо составляющих скорости подставить их выражения из формул (62), (63) то после группировки получим следующее уравнение для сеточных значений p'

$$\left. \begin{aligned} a_p p_p' &= a_E p_E' + a_W p_W' + a_N p_N' + a_S p_S' + b \\ a_{Xi} &= \rho_{Xi} \cdot d_{Xi} \cdot (\Delta x \text{ или } \Delta y) \quad Xi = E, W, \dots \\ a_p &= a_E + a_W + a_N + a_S \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

где

$$b = - \left\{ \frac{(\rho_p - \rho_p^0)\Delta x \Delta y}{\Delta \tau} + [(\rho u^*)_e - (\rho u^*)_w]\Delta y + [(\rho v^*)_n - (\rho v^*)_s]\Delta x \right\} \quad (68)$$

Равенство величины b нулю соответствует выполнению уравнения неразрывности для приближенного поля скоростей и давлений. Пока это равенство не соблюдается, необходимо введение поправок.

Теперь можно описать процедуру расчета поля течения в виде последовательности выполняемых операций:

1. Задание поля давлений p^* .
2. Решение системы уравнений движения вида (55) для получения первого приближения поля скоростей u^*, v^*, w^* .
3. Решение уравнения (67) для p' .
4. Расчет p из уравнения (56).
5. Расчет u, v и w с помощью формул (62-64).
6. Представление скорректированного давления p как нового p^* и повторение процедуры, начиная с п.2.

Мы не будем далее вдаваться в детали описанного алгоритма. Однако один вопрос все же должен быть рассмотрен. Дело в том, что все записанные уравнения относятся к окрестности некоторого узла сетки. При решении задачи в целом уравнения должны записываться для всех узлов. То есть нам необходимо решать систему линейных алгебраических уравнений для

значений функций в узлах сетки. Эта задача является одной из классических задач алгебры и ее решение в виде частного определителей входит в школьный курс алгебры. Однако, прямое использование этих формул в вычислительной практике является слишком трудоемким. Поэтому существует ряд существенно более удобных способов.

Мы здесь рассмотрим лишь один из них, который является одним из наиболее часто используемых на практике. Это метод Гаусса-Зайделя. Этот метод чрезвычайно прост, но сходится лишь в тех случаях, когда матрица коэффициентов удовлетворяет специальному условию «диагонального преобладания». К счастью, системы, получаемые при численном решении уравнений теплоотдачи и гидродинамики, заведомо удовлетворяют этому условию, поскольку в уравнение для каждого узла входят лишь значения функции в соседних точках. Обычно в матрице заполненными оказываются 3-5 диагоналей.

Метод реализуется следующим образом:

1. Задается начальное приближение (при этом значение одной из неизвестных можно не задавать).
2. Из каждого уравнения определяется неизвестная, коэффициент перед которой имеет наибольшую абсолютную величину и она определяется через остальные.
3. Процесс повторяется итерационно до тех пор, пока значения неизвестных на двух последовательных итерациях не будут отличаться на заданную, достаточно малую величину.

Проиллюстрируем метод на простом примере. Пусть мы имеем систему

$$\begin{aligned} 3x + y - 2z &= 5 \\ x + 5y + z &= 8 \\ -x + 3y + 7z &= 2 \end{aligned}$$

Приводим ее к виду

$$\begin{aligned} x &= 1/3 (5 - y + 2z) \\ y &= 1/5 (8 - 5y - z) \\ z &= 1/7 (2 - 3y + x) \end{aligned}$$

Далее, задавая последовательные приближения, находим x , y , z .

Предположим, что для каждого уравнения максимальный коэффициент находится на главной диагонали. Тогда **достаточное** условие сходимости метода Гаусса-Зайделя формулируется следующим образом. Если

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j \neq i}^n |a_{ij}| \quad \text{для всех } i \quad \text{и хотя бы для одного } i \quad |a_{ii}| > \sum_{j \neq i}^n |a_{ij}|,$$

то метод сходится. Но он может сходиться и при менее жестких условиях.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Некоторые современные модели турбулентности

Еще Прандтль отметил, что модель пути смещения слишком упрощает сложную картину формирования турбулентного течения. В частности, одномерное представление масштаба турбулентных пульсаций не учитывает того фактора, что даже при однонаправленном осредненном движении интенсивность турбулентных пульсаций определяется всеми тремя компонентами пульсаций скорости.

В качестве примера недостатков модели Прандтля можно привести оценку турбулентной вязкости в центральной части трубы, которая там стремится к нулю.

Поэтому, если наши потребности не ограничиваются описанием процессов, протекающих вблизи стенки, то необходимо использовать более сложные модели.

Для удобства дальнейшего представления рассматриваемых задач введем более компактную форму записи уравнений гидродинамики и теплообмена.

Пространственные координаты будем записывать в виде x_i, x_j, x_k , где i, j, k принимают значения 1, 2, 3. Нижние индексы i, j, k обозначают производные по соответствующей координате. При наличии в симплексе повторяющихся индексов подразумевается, что по ним производится суммирование. При использовании введенных правил система уравнений гидродинамики для несжимаемой жидкости будет выглядеть следующим образом

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} &= 0 \\ \frac{\partial u_k}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_k}{\partial x_j} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_k} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{jk} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Уравнения движения можно также записать в виде

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j u_k) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_k} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{jk} \quad (2)$$

Везде подразумевается суммирование от 1 до 3 по индексу j . Все функции, входящие в рассматриваемую систему для турбулентного движения, состоят из осредненной и пульсационной части. При выделении этих частей и осреднении по времени мы получим уравнения Рейнольдса, которые отличаются от уравнений для ламинарного течения наличием так называемых *рейнольдсовых напряжений*

$$T_{Rjk} = \rho \overline{u'_j u'_k} \quad (3)$$

Для несжимаемой жидкости удобно ввести кинематический аналог рейнольдсовых напряжений, который является квадратом некоторой скорости u_τ , которая называется *скоростью касательных напряжений* или *динамической скоростью*

$$\tau_{Rjk} = \overline{u'_j u'_k} .$$

Если уравнение (2) умножить на u_i , то получим уравнение (4)

$$u_i \left(\frac{\partial u_k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j u_k) \right) = u_i \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_k} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{ji} \right) . \quad (4)$$

Если поменять местами индексы i и k , полученные уравнения сложить и затем осреднить по времени, то мы можем получить после ряда преобразований уравнение для рейнольдсовых напряжений τ_{Rik} :

$$\frac{\partial}{\partial t} (u'_i u'_k) + u_j \frac{\partial}{\partial x_j} (u'_i u'_k) = \frac{\partial}{\partial x_j} D_{ik} + R_{ik} + P_{ik} - \varepsilon_{ik} . \quad (5)$$

В левой части этого уравнения стоит полная производная от рейнольдсовых напряжений τ_{Rik} . Первый член в правой части имеет весьма сложную структуру и интерпретируется как градиент некоторого диффузионного потока, обусловленного различными видами взаимодействия в турбулентном потоке. Член R_{ik} описывает обмен энергией между пульсациями давления и турбулентного трения. Член P_{jk} определяет так называемое порождение турбулентности (передачу энергии от осредненного движения пульсационному). Наконец, ε_{ik} - диссипативный член, характеризующий преобразование энергии, подведенной к пульсационному течению, в частности, перенос энергии от крупномасштабных вихрей к мелкомасштабным вихрям, в которых происходит вязкая диссипация. Это уравнение не является замкнутым, поскольку величины, входящие в правую часть, неизвестны. Для замыкания уравнения необходимо моделирование этих членов на основе использования эмпирических данных и различных упрощающих предположений подчас даже эвристического характера.

Частным случаем уравнения (5) является уравнение для кинетической энергии турбулентных пульсаций

$$k = \overline{u'_k u'_k} / 2 . \quad (6)$$

Оно получается, если принять в уравнении (5) $i = k$ и просуммировать по всем $i = k$ и умножить на $1/2$. В результате приходим к следующему уравнению для кинетической энергии турбулентных пульсаций k

$$\frac{\partial k}{\partial t} + u_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} D_s + P - \varepsilon_s . \quad (7)$$

Это уравнение отличается от (5) лишь отсутствием члена, соответствующего R_{ik} , что вполне логично. Остальные члены в правой части соответствуют аналогичным членам в уравнении (5). Анализ отличий этих выражений друг от друга не входит в нашу задачу, поскольку, как будет видно из дальнейшего, их аппроксимация никоим образом не связана с этими отличиями.

Чтобы преодолеть ограниченность гипотезы, пути смешения были разработаны модели турбулентности, позволяющие учитывать перенос турбулентности с помощью уравнения (5). При этом характерный масштаб скорости в выражении для турбулентной вязкости стали определять через k :

$$v_T = c k^{1/2} L , \quad (8)$$

где c – константа для развитой турбулентности; L – линейный масштаб.

Таким образом, мы можем получить уравнение относительно k , которое содержит порождение турбулентности P и диссипативную функцию ε . Равенство этих двух величин определяет локальное равновесие турбулентности.

Чтобы замкнуть задачу, вводят следующие соотношения для диффузионного и диссипативного членов

$$D = \left(\nu + \frac{v_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} , \quad (9)$$

$$\varepsilon = c_D k^{3/2} / L , \quad (10)$$

где σ_k , c_D – эмпирические константы.

Формула носит название формулы Колмогорова-Прандтля.

С учетом всего вышесказанного уравнение переноса турбулентной энергии записывается в виде

$$\frac{\partial k}{\partial t} + u_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{v_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P + c_D k^{3/2} / L . \quad (11)$$

При этом кинематическая турбулентная вязкость выражается как

$$v_T = c k^{1/2} L = c_D k^2 / \varepsilon .$$

Линейный масштаб L определяется с помощью эмпирических соотношений.

Что касается величины P , то выражение для нее имеет вид

$$P = -(u'_i u'_k) \frac{\partial u'_k}{\partial x_j} = \tau_{ij} \frac{\partial u'_k}{\partial x_j} \quad (12)$$

Отметим, что все определяемые величины в уравнениях (6-12) и далее берутся в расчете на единицу объема, что достигается путем деления на плотность ρ . Поэтому, как уже говорилось выше, касательное напряжение τ_{ij} имеет размерность квадрата скорости $L^2 T^{-2}$. В первоначальных схемах использовалось лишь уравнение (11) и для аппроксимации этого члена привлекалась модель пути смещения. Однако, мы не будем рассматривать вариант с одним уравнением, а сразу перейдем к схеме с двумя уравнениями. В качестве второго уравнения рассматривается уравнение для диссипации ε , которое также можно получить из уравнения движения (1). Для этого уравнение надо продифференцировать по x_k . Умножая результат на $\frac{\partial u'_k}{\partial x_k}$ и осредняя по времени, получим

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + u_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} D_\varepsilon + P_\varepsilon - \varepsilon_\varepsilon \quad (13)$$

Индекс ε указывает на отличие величин D_ε , P_ε и ε_ε в уравнении (7).

Система уравнений (11) и (13) с совокупностью выражений для некоторых входящих в них величин и коэффициентов составляет так называемую k - ε модель турбулентности, которая в 70-80-е годы являлась основой разрабатываемых коммерческих пакетов для решения задач гидродинамики и тепло-массообмена. Система (14) представляет собой стандартную k - ε модель

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} + u_j \frac{\partial k}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(v + \frac{v_T}{\sigma_k}) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + \tau_{ij} \frac{\partial u'_k}{\partial x_j} + c_D k^{3/2} / L \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + u_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(v + \frac{v_T}{\sigma_k}) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \tau_{ij} \frac{\partial u'_k}{\partial x_j} + C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$v_T = C_\mu k^2 / \varepsilon, \quad C_\mu = 0.09, \quad C_{\varepsilon 1} = 1.44, \quad C_{\varepsilon 2} = 1.92, \quad \sigma_k = 1, \quad \sigma_\varepsilon = 1.3$$

Позже стали появляться новые версии модели, которые выражаются в модификации формул для коэффициентов, содержащихся в последней строке.

Модель, выражаемая системой (14), пригодна лишь для чисто турбулентных течений, то есть, когда влияние вязкости на поле осредненных скоростей пренебрежимо мало. Вблизи стенок, где местные числа Рейнольдса Re_T малы и вязкие эффекты преобладают над турбулентными, необходимо использование какого-либо особого подхода. Одним из наиболее распространенных подобных подходов является использование *пристенных функций* (ПФ). Как известно, пристенная область течения может быть

разбита на 3 зоны – вязкий подслой, буферный слой и логарифмический слой. Перечисленные участки занимают около 20% толщины турбулентного пограничного слоя (ПТС), но содержат порядка 80% энергии турбулентности. Одно из важных свойств внутренней области заключается в том, что профиль скорости слабо зависит от числа Рейнольдса, продольного градиента давления и прочих внешних условий, хотя, с другой стороны, эти условия могут вызвать уменьшение толщины внутренней области вплоть до полного ее вырождения. Отмеченное свойство послужило основой для построения некоторых универсальных соотношений - ПФ, связывающих параметры течения с расстоянием от стенки. Наряду с универсальностью профиля скорости во внутренней области, метод ПФ опирается на использование гипотезы о локальном равновесии энергии турбулентных пульсаций, а также свойства локальной изотропности диссипирующих вихрей.

Рассмотрим основные положения метода ПФ. Пусть ближайший к стенке расчетный узел P находится в логарифмическом слое ПТС на расстоянии y_P от стенки. Тогда для значения энергии в этой точке турбулентных пульсаций k_P и скорости диссипации ε_P имеем

$$\varepsilon_P = (C_\mu^{1/2} k_P^{3/2}) / (k y_P), \quad k_P = \tau_w / C_\mu^{1/2}, \quad (15)$$

где τ_w – трение на стенке.

Принимая приближенно $\tau_w = \nu_T \partial \bar{u} / \partial y$ и $\nu_T = l^2 \partial \bar{u} / \partial y = l^2 \tau_w / \nu_T$, определяем ν_T по формулам $\nu_T = l C_\mu^{1/4} k^{1/2} = l u_\tau$, где l – длина пути смещения.

Из условия локального равновесия $(\partial \bar{u} / \partial y)_P = \varepsilon_P / (C_\mu^{1/2} k_P)$.

Тогда $(\partial \bar{u} / \partial y)_P = (C_\mu^{1/2} k_P^{1/2}) / (k y_P) = u_\tau / (k y_P)$.

Важно отметить, что k_P , ε_P и τ_w – неизвестные величины. Поэтому k_P определяется не из соотношения (15), а из соответствующего уравнения переноса, считая, что градиент k на стенке в направлении нормали к ней равен нулю. Тогда поток диффузии k через грань, совпадающую со стенкой равен нулю.

Определив k_P , можно использовать (15) для расчета трения на стенке, комбинируя его с логарифмическим профилем скорости. Тогда получаем соотношение

$$\tau_w = \kappa C_\mu^{1/4} k_P^{1/2} \bar{u}_P / \ln(E y_P^+), \quad (16)$$

где E – эмпирическая константа для логарифмического профиля, равная 8,8 для гладкой стенки.

Практически для расчетов используется двухслойная схема. Если $y^+ \geq 11,6$, то применяется уравнение (16). В противном случае считают, что точка P находится в ламинарном подслое и $\tau_w = \mu_P / y_P$.

Упрощенная процедура используется также для расчета сеточных аналогов членов, описывающих порождение турбулентности (P) и диссипацию ε . Простейший вариант таков:

$$P = \tau_w \Delta x u_n, \quad \varepsilon = \varepsilon_p \ln E_{up}^+,$$

где Δx - продольный размер контрольного объема, u_n - продольная скорость на верхней границе контрольного объема, $\varepsilon_p = \tau_w^{3/2} / (k_{up})$.

Таким образом, при построении модели турбулентного течения в ядре потока, для описания пристенной области оказывается достаточно упрощенного подхода. Однако, в некоторых случаях оказывается необходимым использовать более сложные аппроксимации для пристенной области. Надо сказать, что синтез двух подходов, из которых один обеспечивает описание течения в пристенной области, а другой - вдали от стенки, является общепринятым методом анализа сложных задач турбулентного течения.

Кратко описанная выше k - ε модель не оставляет возможностей для аналитических решений. Составление алгоритмов численных решений для системы уравнений (14) представляет собой достаточно сложную задачу, для решения которой требуется профессиональная подготовка и значительные затраты времени. Поэтому для реального внедрения этих методов в расчетную практику потребовалось создание так называемых *коммерческих пакетов*, в которых рутинные операции, связанные с конкретным построением дискретных аналогов уравнений, выполняются автоматически, а за пользователем остается лишь постановка задачи и в некоторых случаях выбор ряда конкретных деталей используемой модели, которые с его точки зрения важны для рассматриваемой задачи.

Первый такой пакет SIMPLE был создан под руководством одного из создателей расчетной теплогидродинамики проф. Б.Сполдинга. Позже появился целый ряд подобных пакетов STAR-CD, FLUENT и др.

Имеется также ряд двухпараметрических моделей k - ω , в которых вместо диссипации используется завихренность. Однако, их описание потребовало бы использования громоздких выражений, восприятие которых в рамках краткого курса было бы затруднительным. Отметим лишь то обстоятельство, что они оказываются удобными для решения задач, в которых более важно качество описания пристенной области.

В последних моделях турбулентности намечается уже полный отход от понятия турбулентной вязкости, поскольку градиентная концепция турбулентного переноса оказывается непригодной при рассмотрении сложных задач.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Седов Л.И. Методы подобия и размерностей в механике [Текст] / Л.И.Седов - М.: Наука, 1987 – 430 с.

Баренблатт Г.И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. [Текст] / Г.И.Баренблатт - Л.: Гидрометеиздат, 1970. -207 с.

Мигай В.К. Моделирование теплообменного энергетического оборудования. [Текст] / В.К.Мигай - Л.: Энергоатомиздат ЛО, 1987. – 264 с.

Новиков И.И., Боришанский В.М. Теория подобия в термодинамике и теплопередаче [Текст] / И.И.Новиков, В.М.Боришанский – М.: Атомиздат, 1979.– 184 с.

Вентцель Е.С. Теория вероятностей [Текст] / Е.С.Вентцель - М.: ФМЛ, 1962. - 564 с.

Гуревич Э.И. Тепловые испытания и исследования электрических машин [Текст] / Э.И.Гуревич – Л.: Энергия, 1977. – 294 с.

Зайдель А.Н. Погрешности измерений физических величин [Текст] / А.Н.Зайдель - Л.:Наука, 1985. – 112 с.

Андерсон Д., Таннехил Д., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. Т.1 [Текст] / перевод с англ. под ред. Г.Л.Подвидза. - М.: Мир, 1990 -384 с.

Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и гидродинамики жидкости [Текст] / перевод с англ. под ред. В.Д.Виленского.- М.: Энергоатомиздат, 1984. --- 152 с.



ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	3
Раздел 1. Роль моделирования, анализа размерностей и подобия в изучении процессов теплообмена...	5
1.1 Введение в проблему.....	—
1.2 Понятие оо размерности Единицы измерения. Структура функциональных связей между физическими величинами.....	6
1.3 П-теорема Букингама.....	7
1.4 Примеры приложения теории размерности к решению конкретных задач.....	9
1.4.1 Задача нестационарной теплопроводности.....	—
1.4.2 Движение вязкой жидкости в прямолинейной трубе.....	10
1.4.3 Теплоотдача тела в потоке жидкости.....	11
1.4.4 Заполнение сосуда через подводящую трубу.....	13
1.4.5 Распространение взрывной волны от атомного взрыва.....	14
1.5 Использование теории размерности и подобия при моделировании.....	15
1.6 Метод подобия, базирующийся на анализе уравнений процесса, приведенных к безразмерному виду.....	16
1.7 Турбулентность и аналогия Рейнольдса.....	20
1.8 Подобные (автомодельные) решения уравнений теплогидродинамики.....	23
1.8.1 Использование метода подобия для решения нестационарного уравнения теплопроводности.....	—
1.8.2 Автомодельное решение для пограничного слоя на бесконечной пластине.....	25
1.9 Термодинамическое подобие и закон соответственных состояний.....	26
1.10 Использование термодинамического подобия для описания процессов, протекающих на линии насыщения.....	29
1.11 Использование термодинамического подобия для описания теплообмена при наличии фазового перехода (кипение и конденсация).....	31
1.11.1 Теплоотдача при пузырьковом кипении.....	32
1.11.2 Теплоотдача при конденсации.....	37
1.12 Проблемы моделирования теплогидравлических процессов при их экспериментальном исследовании.....	38

Раздел 2. Элементарные статистические оценки результатов измерений и их аппроксимация.....	42
2.1 Задачи измерений и их точность.....	42
2.2 Некоторые сведения из теории вероятностей.....	43
2.2.1 Случайные погрешности.....	–
2.2.2 Определения основных понятий, фигурирующих при рассмотрении случайных величин.....	45
2.3 Классификация случайных погрешностей и законы распределения.....	46
2.4 Оценка точности и надежности определения математического ожидания.....	50
2.4.1 Доверительный интервал. Доверительная вероятность.....	51
2.4.2 Уточненные зависимости для доверительного интервала и доверительной вероятности.....	52
2.5 Представление результатов измерений.....	53
2.5.1 Общие требования к представлению результатов измерений...	–
2.5.2 Аппроксимация опытных зависимостей.....	55
Раздел 3. Применение численных методов для решения задач теплообмена и гидродинамики.....	59
3.1 Краткое введение в проблему.....	–
3.2 Общие принципы построения дискретных аналогов дифференциальных уравнений.....	–
3.3 Основные правила построения разностных аналогов.....	61
3.3.1 Соответствие потоков на границах объема.....	63
3.3.2 Положительность коэффициентов.....	–
3.3.3 Отрицательность коэффициента при линеаризации источникового члена	64
3.3.4 Сумма соседних коэффициентов.....	–
3.4 Нестационарная одномерная теплопроводность.....	65
3.4.1 Обобщенный дискретный аналог.....	–
3.4.2 Явная, Кранка-Николсона и полностью неявная схемы.....	66
3.5 Конвекция и диффузия.....	67
3.5.1 Установившиеся одномерные конвекция и диффузия.....	68
3.5.2 Схема против потока.....	70
3.5.3 Точное решение.....	71
3.5.4 Односторонняя пространственная координата.....	72
3.6 Расчет поля течения.....	74
3.6.1 Основная трудность определения поля скорости.....	–
3.6.2 Методы, основанные на решении уравнений для вихря.....	–
3.6.3 Трудности расчета поля давления.....	75

3.6.4	Аппроксимация уравнения непрерывности.....	76
3.7	Шахматная сетка.....	77
3.7.1	Уравнение импульса.....	78
	Приложение.....	83
	Библиографический список.....	89



Учебное издание

Михаил Абрамович Готовский

**Основы научных исследований
теплогидравлических процессов**

Учебное пособие

Редактор и корректор Т.А. Смирнова

Техн. редактор Л.Я. Титова

Темплан 2007, поз. 109

Подп. к печати 19.12.2007. Формат 60x84/16. Бумага тип. № 1. Печать офсетная
Уч.-изд. л. 6,0. Усл.-печ. л. 6,0. Тираж 50 экз. Изд. № 109. Цена «С». Заказ 2163

Ризограф ГОУ ВПО Санкт-Петербургского государственного технологического университета растительных полимеров, 198095, СПб., ул. Ивана Черных, 4