

А. М. Хлыновский
Н. Н. Гладышев

ГИДРОГАЗОДИНАМИКА
(ГАЗОДИНАМИКА)

ОСНОВЫ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2025

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

**«Санкт-Петербургский государственный университет
промышленных технологий и дизайна»
Высшая школа технологии и энергетики**

**А. М. Хлыновский
Н. Н. Гладышев**

**ГИДРОГАЗОДИНАМИКА
(ГАЗОДИНАМИКА)**

ОСНОВЫ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

Учебное пособие

Утверждено Редакционно-издательским советом ВШТЭ СПбГУПТД

Санкт-Петербург
2025

УДК 533.8(075)
ББК 622.276.я7
Х 61

Рецензенты:

доктор технических наук, профессор кафедры Теплосиловых установок и тепловых двигателей Высшей школы технологии и энергетики Санкт-Петербургского государственного университета промышленных технологий и дизайна

В. В. Пеленко;

кандидат технических наук, доцент кафедры Средств поражения и боеприпасов БГТУ «ВОЕНМЕХ»

С. В. Москвин

Хлыновский, А. М.

Х 61 Гидрогазодинамика (Газодинамика). Основы газовой динамики: учебное пособие / А. М. Хлыновский, Н. Н. Гладышев. — СПб.: ВШТЭ СПбГУПТД, 2024. — 107 с.
ISBN 978-5-91646-437-5

Учебное пособие соответствует программам и учебным планам дисциплины «Гидрогазодинамика (Газодинамика)» для студентов, обучающихся по направлению подготовки 13.03.01 «Теплоэнергетика и теплотехника». Рассмотрены основные задачи адиабатического движения газа с высокими скоростями, вопросы определения скорости потока с помощью трубки Пито–Прандтля при дозвуковом и сверхзвуковом течении газа. Представлена методика расчета пограничного слоя на плоской пластине при обтекании ее потоком вязкого газа. Излагаются вопросы образования подъемной силы крыла и основные понятия реактивного движения.

Материал, изложенный в учебном пособии, может быть также полезен при изучении дисциплины «Тепловое оборудование ТЭЦ» для студентов, обучающихся по направлению подготовки 13.03.01 «Теплоэнергетика и теплотехника», профили «Теплоэнергетика и теплотехника», «Цифровые энергосистемы и комплексы».

Учебное пособие предназначено для бакалавров очной и заочной форм обучения.

УДК 533.8(075)
ББК 622.276.я7

ISBN 978-5-91646-437-5

©ВШТЭ СПбГУПТД, 2025

©Хлыновский А. М., Гладышев Н. Н., 2025

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
ГЛАВА 1. МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ.....	6
1.1. Основные положения молекулярно-кинетической теории	6
1.2. Уравнение Клапейрона–Менделеева.....	9
1.3. Модель идеального газа	10
1.3.1. Основные газовые законы.....	11
ГЛАВА 2. УРАВНЕНИЯ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ ПРИ НАПРАВЛЕННОМ ДВИЖЕНИИ ГАЗОВ	12
2.1. Уравнения движения массы газа.....	18
ГЛАВА 3. СКОРОСТЬ ЗВУКА. ЧИСЛО МАХА	26
3.1. Эрнст Мах. Биографические данные. История появления «Числа Маха».....	27
3.2. Определение скорости течения газа с помощью трубки Пито–Прандтля.....	29
3.2.1. Определение скорости потока с помощью трубок Пито–Прандтля	30
3.2.2. Пример расчета скорости потока	32
3.3. Ударные волны. Скачки уплотнения. Адиабата Гюгонио	34
3.4. Различные формы уравнения энергии.....	39
3.5. Истечение газа через суживающееся сопло.....	44
ГЛАВА 4. СИЛОВОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ НА ПОТОК. СОПЛО ЛАВАЛЯ	48
4.1. Геометрическое воздействие. Уравнение Гюгонио	48
4.2. Конструктивные особенности сопла Лавалья	52
4.3. Формула Витошинского.....	54
4.4. Сопла с косым срезом	55
ГЛАВА 5. ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ НА ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНЕ, ОБТЕКАЕМОЙ ПОТОКОМ ВЯЗКОГО ГАЗА.....	57
5.1. Расчет турбулентного пограничного слоя. Гипотеза Прандтля	61
5.2. Пример расчета ламинарного пограничного слоя на плоской пластине, обтекаемой потоком вязкого газа	63
5.3. Пограничный слой, его влияние на режимы работы осевого компрессора. Помпаж	67
5.4. Лобовое сопротивление движению тел в жидкостях и газах.....	69

ГЛАВА 6. ПОДЪЕМНАЯ СИЛА КРЫЛА	77
6.1. Теорема Жуковского	77
6.2. Кармановские колебания	82
6.3. Принцип аэродинамической интерференции	88
ГЛАВА 7. КРИТЕРИИ И КОЭФФИЦИЕНТЫ ПОДОБИЯ	89
ГЛАВА 8. ТЕЧЕНИЕ ГАЗА ЧЕРЕЗ РЕШЕТКИ ТУРБОМАШИН	96
8.1. Геометрические и газодинамические параметры решеток	96
8.2. Расчет потенциального потока в решетках по теории канала	101
8.3. Классификация потерь энергии в решетке	102
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	103
ПРИЛОЖЕНИЕ	104

ВВЕДЕНИЕ

Газодинамика – раздел механики, изучающий законы движения газообразной среды и ее взаимодействие с неподвижными или движущимися твердыми телами.

При рассмотрении движения газовую среду следует считать сплошной.

Это значит, что в любом существенном для изучаемых явлений объеме содержится столь большое число частиц вещества (атомов, молекул или надмолекулярных структур), что определенные для такого объема средние по всем частицам значения их аддитивных физических характеристик имеют конечный предел. При уменьшении объема до некоторой предельной величины, он может быть отождествлен с материальной точкой. Например, для воздуха: 1 мм^3 содержится $2,7 \cdot 10^{16}$ молекул при нормальных условиях. При таком большом числе частиц оказывается возможным ограничиться знанием лишь средних значений величин, характеризующих их движение: а именно их средней скорости, средней энергии и т. д.

Одномерные течения в каналах разделяются на *конфузорные* и *диффузорные*.

Конфузорными называются такие течения в каналах, когда скорость рабочего тела увеличивается в направлении потока. Диффузорные – такие течения, когда скорость рабочего тела уменьшается в направлении потока.

В проточных частях турбомашин (паровых и газовых турбин, компрессоров) конфузорными являются течения в сопловых и рабочих лопатках, во входных патрубках этих машин. Диффузорными являются течения в каналах направляющих и рабочих лопатках компрессоров, в выходных патрубках паровых и газовых турбин и компрессоров, в диффузорных элементах стопорных и регулирующих клапанов.

Данное учебное пособие предназначено также для изучения устройства и оборудования на тепловых электрических станциях.

ГЛАВА 1. МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Изложение курса газовой динамики основано на представлении газа как сплошной сжимаемой среды. Среда называется сплошной, если имеет достаточно большое число молекул в бесконечно малом объеме занимаемого пространства. Это позволяет рассматривать такие параметры, как *плотность* газа, *давление*, *скорость* и *температуру* как непрерывные функции координат и, следовательно, широко применять аппарат математического анализа.

1.1. Основные положения молекулярно-кинетической теории

- а) Молекулярно-кинетическая теория (МКТ) – учение о строении и свойствах вещества на основе представления о существовании атомов и молекул как наименьших частиц химического вещества.
- б) Все вещества – жидкие, твердые и газообразные образованы из мельчайших частиц – молекул, которые сами состоят из атомов.
- в) Атомы и молекулы находятся в непрерывном хаотическом движении.
- г) Частицы взаимодействуют друг с другом силами, имеющими электрическую природу (притягиваются и отталкиваются).

Сравнительные характеристики строения твердых тел, жидкостей и газов приведено на рис. 1.1.

Строение твердых тел, жидкостей и газов

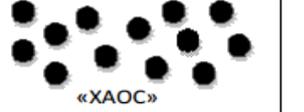
Критерии сравнения	<i>Газ</i>	<i>Жидкость</i>	<i>Твердое тело</i>
Расположение молекул	 «ХАОС»	 «ХАОС»	 «ПОРЯДОК»
Характер движения молекул	<i>Двигаются свободно по всему объему</i>	<i>Колеблются на месте, перескакивают с места на место</i>	<i>Колеблются на месте</i>
Взаимодействие молекул	<i>Слабое</i>	<i>Сильное</i>	<i>Огромное</i>
Основные свойства	<ol style="list-style-type: none"> 1. <i>Не имеет формы</i> 2. <i>Не сохраняет объем</i> 3. <i>Сжимаем</i> 	<ol style="list-style-type: none"> 1. <i>Не имеет формы</i> 2. <i>Сохраняет объём</i> 3. <i>Не сжимаема</i> 4. <i>Течуча</i> 	<ol style="list-style-type: none"> 1. <i>Сохраняет форму</i> 2. <i>Сохраняет объем</i> 3. <i>Не сжимаемо</i>

Рисунок 1.1 – Сравнительные характеристики твердых тел, жидкостей и газов

Базовые физические законы и основные уравнения газовой динамики

Анализ всех течений и решение всех задач, базируется на четырех основных законах физики и шести основных уравнениях гидрогазодинамики, выражающих в математической форме все те же четыре основных закона:

- закон сохранения массы – уравнение неразрывности (уравнение расхода, в частности);
- закон сохранения импульса (второй закон Ньютона о движении) – уравнение количества движения в проекциях на оси произвольно выбранной системы координат (система из трех уравнений движения; уравнений Навье–Стокса, например);
- закон сохранения и превращения энергии – уравнение Бернулли;
- второй закон термодинамики – уравнение изменения энтропии.

Число Авогадро

В соответствии с резолюцией № 3 **14-й Конференции по мерам и весам** (1971 г.), по определению, в одном *моле* содержится столько единиц структурных элементов вещества, сколько атомов содержится в 12 граммах углерода ^{12}C – углерода с атомной массой 12 а. е. м. (атомных единиц массы).

С помощью специальных экспериментов было определено, что в 12 граммах углерода ^{12}C содержится примерно $6,02 \cdot 10^{23}$ штук (единиц) атомов. (Соответственно в 12 кг – $6,02 \cdot 10^{26}$ единиц).

В физике вводится число Авогадро $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ (1/моль), которое равно числу единиц структурных элементов любого вещества в одном моле.

Так как массы молекул (структурных элементов) у различных веществ, как правило, различны, то и масса $6,02 \cdot 10^{23}$ единиц таких различных молекул будут разными. Другими словами – масса одного моля для каждого вещества имеет свое значение. Например, для углерода ^{12}C это $12 \cdot 10^{-3}$ кг, что следует непосредственно из определения моля.

По определению масса одного моля вещества называется его молярной массой.

Из этого определения следует, что масса вещества M , кг, и число молей этого вещества N , моль, связаны очевидным соотношением:

$$M = \mu_w N, \quad (1.1)$$

где μ_w – молярная масса некоторого вещества, кг/моль.

Следует отметить, что молярная масса μ_w любого вещества в расчетах является известной величиной. Следовательно, (1.1) M и N всегда легко пересчитываются друг в друга.

Число Лошмидта

При одинаковых температурах и давлении все газы содержат в единице объема одинаковое число молекул.

Число молекул идеального газа, содержащееся в 1 м^3 , при нормальных условиях называется числом Лошмидта:

$$N_L = P_0/kT_0 = 2,68 \cdot 10^{25} [1/\text{м}^3].$$

Нормальные условия:

$$P_0 = 10^5 \text{ Па};$$

$$T_0 = 273 \text{ К}.$$

Постоянная Больцмана k – это фундаментальная величина нашего мира, константа стохастического теплового воздействия. Связь между энтропией (S) и числом способов реализации состояния (W):

$$S = k \cdot \ln W.$$

Другое определение: молярная газовая постоянная $Rm = 8314$ [дж/кмоль К] и постоянная Авогадро $Na = 6,022045 \cdot 10^{23}$ [моль⁻¹] = $\frac{N}{n}$ относятся к определенному количеству вещества. Следовательно, их отношение представляет собой универсальную физическую постоянную. Это отношение:

$$k = \frac{Rm}{Na} = 1,380662 \cdot 10^{-23} \text{ [Дж/К]}$$

называется *постоянной Больцмана*.

Основные «макроскопические» параметры, характеризующие состояние неподвижного (стационарного, идеального) газа: P , V , T , т. е. параметры, измеряемые физическими приборами:

P – давление

Единицы измерения (Паскаль):

– $1 \text{ Па} = 1 \text{ н/м}^2$ (Па, КПа, МПа)

Физическая атмосфера:

– $1 \text{ атм} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Па}$

– мм рт. ст.

– $1 \text{ мм рт. ст.} = 133 \text{ Па}$

– Бар

– $1 \text{ Бар} = 10^5 \text{ Па}$.

T – температура

Единицы измерения (градус):

Градус Цельсия – $^{\circ}C$

Из шкалы Фаренгейта в шкалу Цельсия:

$$t_c = \frac{5}{9} \cdot (t_F - 32)$$

Из шкалы Цельсия в шкалу Фаренгейта:

$$t_F = \frac{5}{9} \cdot t_c + 32$$

Градус Кельвина – K

$$K = ^{\circ}C + 273$$

Градус Фаренгейта – $^{\circ}F$

$$F = \frac{2}{9} (^{\circ}C - 32) = \frac{4}{9} (^{\circ}R - 32)$$

Градус Реомюра – $^{\circ}R$

$$^{\circ}R = 1,25^{\circ}C = (1,8 F^{\circ} + 32)$$

ρ – ПЛОТНОСТЬ

Единицы измерения:

- ρ – (кг/м³)
- v – удельный объем
- $v = 1/\rho$ (м³/кг).

1.2. Уравнение Клапейрона–Менделеева

Термодинамическое состояние газа определяется тремя величинами: давлением – P , плотностью – ρ и температурой – T . Все эти параметры взаимосвязаны. Изменение какой-либо из этих величин приводит в общем случае к изменению остальных.

Математическая зависимость указанных параметров называется уравнением состояния сжимаемой среды:

$$\Phi(P, \rho, T) = 0. \quad (1.2)$$

Иногда вместо плотности газа вводят понятие удельного объема – v , представляющего собой величину, обратную плотности, т. е.

$$v = 1/\rho. \quad (1.3)$$

В термодинамике в качестве уравнения состояния газа широко используется уравнение Клапейрона–Менделеева:

$$P/\rho = RT, \quad (1.4)$$

где R – газовая постоянная (для каждого газа своя), Дж/(кг·К).

Значение для каждого газа можно вычислить, если известна его молекулярная масса μ (кмоль/кг), по формуле:

$$R = \frac{R^{\wedge}}{\mu} \mu, \quad (1.5)$$

где R^{\wedge} – универсальная газовая постоянная, $R^{\wedge} = 8314$ Дж/(кмоль·К).

Уравнение состояния (1.4) получено теоретически для модели идеального газа, т.е. газа, в котором отсутствуют силы притяжения между молекулами и изменение внутренней энергии U связано только с изменением его абсолютной температуры T .

Для единицы массы газа – это изменение определяется по формуле:

$$dU = C_v \cdot dT, \quad (1.6)$$

где C_v – удельная теплоемкость газа при постоянном объеме, Дж/(кг·К).

Для реальных сжимаемых сред внутренняя энергия зависит не только от температуры, но и от давления, и соотношение (1.6) теряет силу. Именно поэтому газ, подчиняющийся уравнению вида (1.4), называют идеальным (в специальной литературе по газовой динамике такой газ называют еще совершенным). В газодинамике вводят также понятие идеального газа в смысле невязкий (по аналогии с моделью идеальной жидкости), т. е. газ, у которого

отсутствуют силы внутреннего трения. Поэтому, когда используется этот термин, необходимо четко различать какая из этих моделей имеется в виду.

Во избежание путаницы будем в дальнейшем пользоваться первым определением идеального газа, различая при этом отдельно случаи невязкого и вязкого газа.

Реальные газы, в общем случае, не следуют закону Клапейрона–Менделеева. Это уравнение с достаточной точностью может быть применено для реальных газов только в узком диапазоне изменения температуры и давления. Причем этот диапазон для каждого газа свой.

В настоящее время предложено множество эмпирических и полуэмпирических уравнений состояния для реальных газов. Наиболее известные из них – это уравнение Ван дер Ваальса (1.7):

$$\frac{P}{\rho} = ZRT. \quad (1.7)$$

В уравнении (1.7) Z – коэффициент, учитывающий степень отклонения реального газа от идеального (совершенного), принимает значение меньшее, равное и большее единицы. Иногда называют коэффициентом сжимаемости или сверх сжимаемости. Коэффициент, вообще говоря, является функцией давления P и температуры. Для нахождения численных значений можно рекомендовать обобщенные графики, на которых представлен в зависимости от приведенных значений давления P_{np} и температуры T_{np} :

$$P_{np} = \frac{P}{P_c}; T_{np} = \frac{T}{T_c}, \quad (1.8)$$

где T_c и P_c – критические температура и давление, являющиеся физико-химическими характеристиками газа.

Известно, что изменяя их, можно осуществлять фазовый переход вещества из газообразного в жидкое состояние, но не всегда.

Критическая температура – это температура, выше которой газ невозможно перевести в жидкое состояние никаким (сколь угодно большим) повышением давления, т. е. при котором газ еще можно обратить в жидкость. Минимальное давление, которое обеспечивает переход из газообразного состояния в жидкое при $T = T_c$, называется критическим P_c .

Для каждого индивидуального (чистого) газа значение этих параметров можно найти в специальной литературе. Для газовых смесей вводятся понятия псевдокритических значений давления и температуры, определяемых через входящих в смесь компонентов как средневзвешенные значения.

1.3. Модель идеального газа

В 1857 г. немецкий физик Р. Клаузиус, используя модель идеального газа, впервые систематически изложил кинетическую теорию газов. Он ввел понятие о средних величинах, длине свободного пробега молекул, вычислил давление газа на стенке сосуда и среднюю длину пути между двумя столкновениями молекул.

Идеальным Клаузиус назвал газ, удовлетворяющий следующим условиям:

1. Объемом всех молекул газа можно пренебречь по сравнению с объемом сосуда, в котором этот газ находится.

2. Время столкновения молекул друг с другом пренебрежимо мало по сравнению со временем между двумя столкновениями (т. е. времени свободного пробега молекул).

3. Молекулы взаимодействуют между собой только при непосредственном соприкосновении, при этом они отталкиваются.

4. Силы притяжения между молекулами идеального газа малы и ими можно пренебречь. Исходя из этих положений, Клаузиус смог вывести все свойства идеального газа.

Необходимо заметить, что в природе такой газ не существует.

1.3.1. Основные газовые законы

Из четырех важных свойств газа: *объема, давления, температура, масса*, описываются изменение двух свойств газа при постоянных двух остальных (рис. 1.2).

Название процесса	Постоянный параметр	Формула газового закона	Название газового закона	Графическое представление газового закона
Изотермический	T температура	$p \cdot V = \text{const}$ $p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2 = \dots$	Бойля – Мариотта	
Изобарный	p давление	$\frac{V}{T} = \text{const}$ $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} = \dots$	Гей-Люссака	
Изохорный	V объём	$\frac{p}{T} = \text{const}$ $\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} = \dots$	Шарля	

Рисунок 1.2 – Основные газовые законы

Из закона Авогадро следует, что различные газы, содержащие одинаковое число молекул, будут при одинаковых давлениях и температурах занимать одинаковые объемы. Поэтому **моль** любого газа при данных давлении и температуре занимает одинаковый объем.

В частности, при температуре $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ ($273,15\text{ K}$) и давлении 1 атм ($1,01 \cdot 10^5\text{ Н/м}^2$) моль любого газа занимает объем:

$$V_0 = \frac{RT}{P} \sim \frac{8,31 \cdot 273}{1,01 \cdot 10^5} \sim 2,24 \cdot 10^{-2}\text{ м}^3/\text{моль}.$$

Точное значение:

$$V_0 = 2,2241383 \cdot 10^{-2}\text{ м}^3/\text{моль}.$$

ГЛАВА 2. УРАВНЕНИЯ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ ПРИ НАПРАВЛЕННОМ ДВИЖЕНИИ ГАЗОВ

В термодинамике изучаются равновесные состояния газообразных тел. При этом предполагается, что определенная масса газа в равновесном состоянии в любой момент времени вполне характеризуется единственными значениями количественных параметров – массы m (или веса G), объема V и качественных параметров – давления P , температуры T . Далее предполагалось, что эти параметры всегда связаны уравнением состояния вида $V = Gf(P, T)$. Такие предположения вполне удовлетворяли нас, когда рассматривались физические состояния газообразных тел вне зависимости от их геометрического положения в пространстве относительно других тел, и изменяя их формы и объемы с течением времени.

Однако в большинстве практических задач необходимо определять состояние газообразных тел при различных их движениях в пространстве с изменением их формы и объема, а также с учетом конечной скорости протекания соответствующего процесса.

Это имеет место, например, в теории турбомашин, паро- и газопроводах, проточных теплообменных аппаратах.

Действительно, всякий термодинамический процесс в газовой среде может начаться и продолжаться только с конечной скоростью и при наличии конечных действующих причин, которые могут быть силового, теплового или какого-либо другого вида. Это должно явиться причиной появления градиентов качественных параметров состояния в массе газа.

Следовательно, в рассматриваемой массе газа будет нарушено термодинамическое равновесие.

С целью иллюстрации данного положения рассмотрим такой пример. В камеру сгорания подводится топливо и сжатый воздух. За счет выделяемого тепла от сжигания топлива газы в камере сгорания будут иметь давление P_0 , намного больше, чем противодавление P_1 в окружающем пространстве, с которым камера горения соединена трубой AB (рис. 2.1).

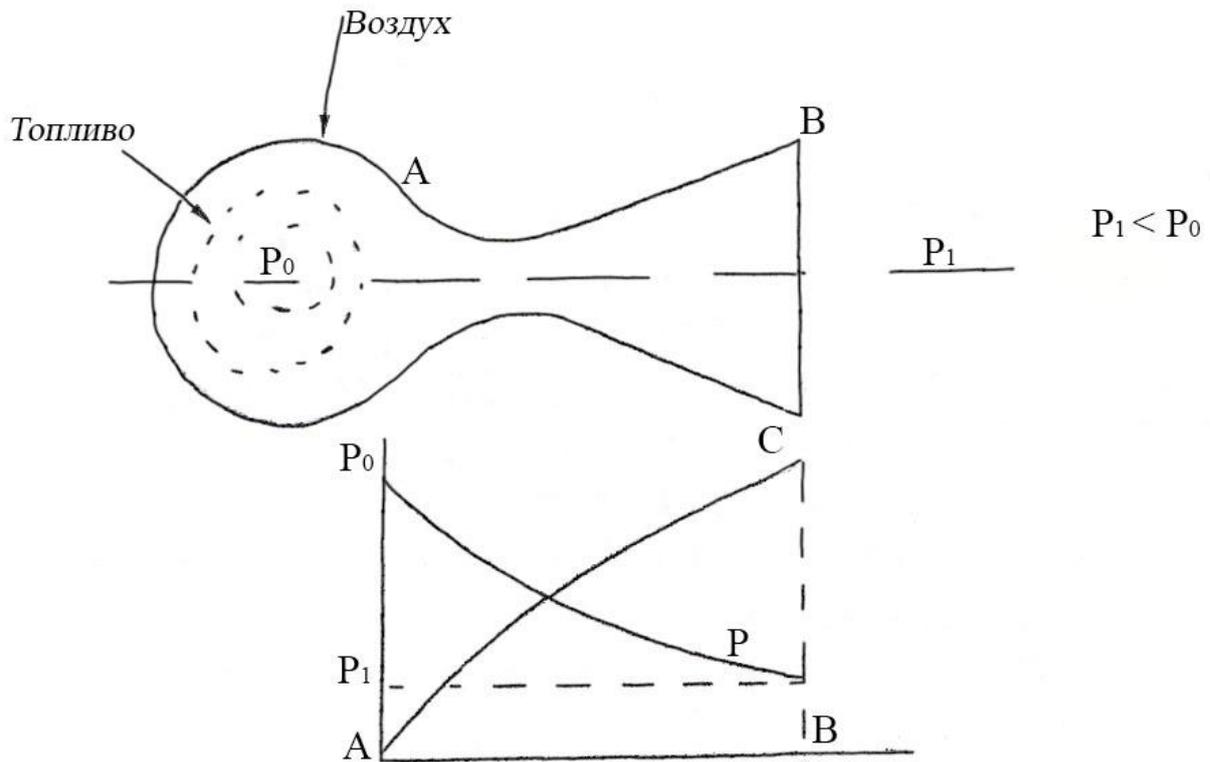


Рисунок 2.1 – Изменение давления P и скорости C при истечении из камеры сгорания

При движении газа по трубе BA его параметры будут быстро, но непрерывно меняться. На коротком участке давление P_0 упадет до P_1 , а скорость от нуля увеличится до C . В этом случае уже нельзя будет пренебречь скоростью направленного движения газа.

Следовательно, при любом физическом не квазистатическом процессе полное физико-механическое состояние газа в любой момент времени будет характеризоваться совокупностью трех функций от координат положения частицы газа и времени.

$$\begin{aligned}
 P &= p(x, y, z, t) \\
 T &= t(x, y, z, t) \\
 C &= c(x, y, z, t).
 \end{aligned}$$

Обобщая сказанное, приходим к заключению, что при движении газовых масс их параметры будут меняться от точки к точке в данный момент времени, а для данной точки в пространстве будут изменяться с течением времени, т.е. будут функциями времени.

Из предшествующих рассуждений также вытекает, что выведенные дифференциальные формы законов термодинамики не могут быть применены ко всей массе движущегося газа, однако эти формы сохраняются для отдельных частиц или элементарных масс газа, внутри которых распределение параметров практически можно считать равномерным.

Действительно, чем меньше объем элементарной массы газа ΔV , тем точнее можно определить значения параметров при $\Delta V \rightarrow 0$, т. е. в предельном

переходе они будут отвечать параметрам состояния в центре инерции данной газовой массы.

Таким образом, уравнение состояния газа в относительных параметрах $PV = RT$, выведенное в термодинамике, может быть применено в газодинамике только для центров инерции очень малых объемов газа всего рассматриваемого потока.

К числу параметров реальной (вязкой) жидкости относится также вязкость, которую необходимо определять как параметр в точке. Известно, что коэффициентом вязкости называют отношение:

$$\mu = \frac{\tau}{\frac{\partial c}{\partial n}},$$

где τ – сила трения, отнесенная к рассматриваемой поверхности трения, кг/м²;

$\frac{\partial c}{\partial n}$ – градиент скорости по нормали к выделенной поверхности трения, 1/с.

Коэффициент динамической вязкости имеет размерность $\frac{\text{кг} \cdot \text{с}}{\text{м}^2}$.

В общем случае для реального газа коэффициент динамической вязкости зависит от давления к температуре. Однако зависимость от давления в широком диапазоне изменения давлений оказывается весьма слабой и ею можно пренебречь. Таким образом, коэффициент вязкости может быть выражен в зависимости только от температуры.

Далее мы будем рассматривать идеализированную модель течения без теплообмена при отсутствии теплопроводности и трения. В действительном потоке проявляются силы трения, возникают градиенты температуры и совершается внутренний теплообмен между частицами.

Вместе с тем, получаемые при указанных упрощениях зависимости широко используются для выяснения свойств потока, энергетически изолированного от окружающей среды.

Уравнение неразрывности

Выделим в движущейся массе газа элементарный объем и запишем условия неизменяемости массы для него во времени $\frac{d\Delta m}{dt} = 0$. Это уравнение будет выражать закон сохранения массы.

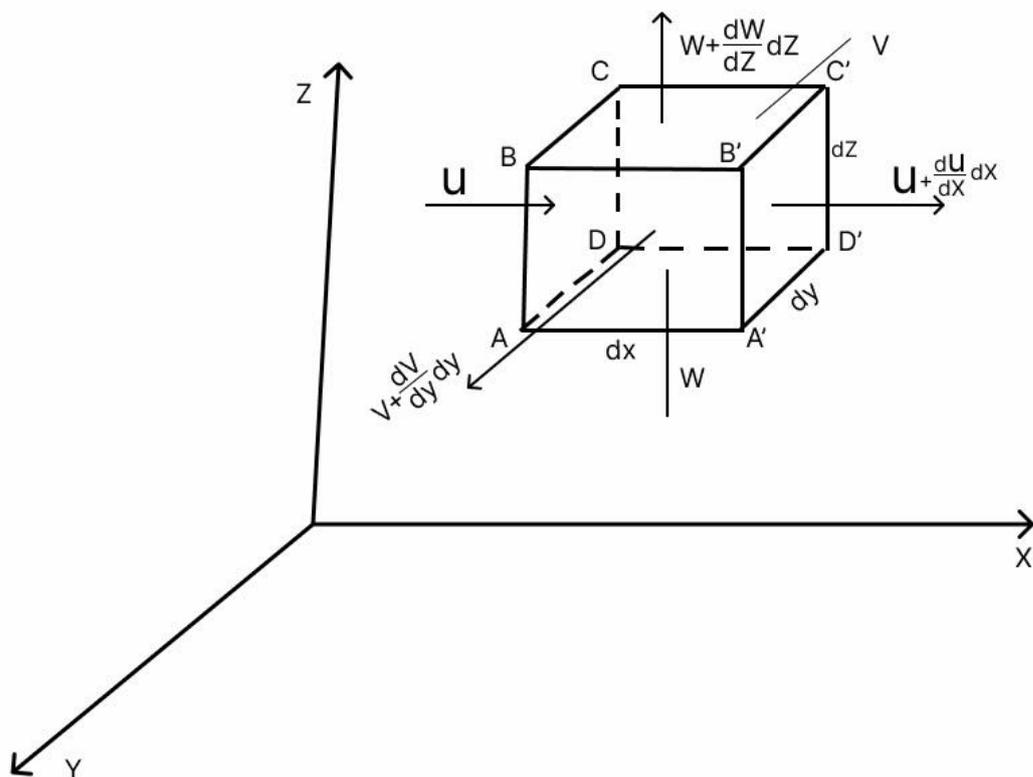


Рисунок 2.2 – Элементарный объем массы газа

Пусть выделенный элементарный объем газа движется в пространстве со скоростью:

$$\vec{c} = \vec{c}_x + \vec{c}_y + \vec{c}_z = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w},$$

где u – проекция вектора скорости \vec{c} на ось x ;

v – проекция вектора скорости \vec{c} на ось y ;

w – проекция вектора скорости \vec{c} на ось z .

Так как:

$$C = c(x, y, z, t),$$

то:

$$u = u(x, y, z, t);$$

$$v = v(x, y, z, t);$$

$$w = w(x, y, z, t).$$

$$\frac{d\Delta m}{dt} = 0.$$

$$d\Delta m = d(\rho\Delta V) \tag{2.1}$$

$$\frac{d(\rho\Delta V)}{dt} = 0. \tag{2.2}$$

Здесь ΔV – объем выделенного элемента;

ρ – средняя плотность элемента.

Продифференцируем (2.2):

$$\Delta V \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{d\Delta V}{dt} = 0.$$

Разделим это уравнение на $\rho\Delta V$, тогда последнее равенство примет вид:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{\Delta V} \frac{d\Delta V}{dt} = 0, \quad (2.3)$$

где $\frac{d\Delta V}{dt}$ – выражает скорость изменения объема или скорость объемной деформации частицы.

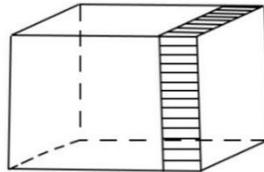
Член $\frac{1}{\Delta V} \frac{d\Delta V}{dt}$ представляет собой скорость относительной объемной деформации.

Определим величину скорости относительной объемной деформации частицы, вызвав ее через проекции скорости u , v и w .

Деформация вдоль оси X

Если скорость деовой грани $ABCD$ равна u , а правой $A'B'C'D'$ равна $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$ и если предположить, что в пределах грани скорость одинакова, то на элемент времени dt правая грань по отношению к левой сместится на:

$$\left[\left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) - u \right] dt$$



Абсолютное изменение объема частицы по направлению оси x получим:

$$\left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) dy \cdot dz \cdot dt - u \cdot dy \cdot dz \cdot dt = \frac{\partial u}{\partial x} dx \cdot dy \cdot dz \cdot dt.$$

Аналогично по двум другим граням:

$$\frac{\partial v}{\partial y} dx \cdot dy \cdot dz \cdot dt;$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} dx \cdot dy \cdot dz \cdot dt.$$

Полное изменение объема частицы определится как сумма этих приращений:

$$d\Delta V = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dx \cdot dy \cdot dz \cdot dt.$$

Скорость изменение объема или скорость объемной деформации будет равна:

$$\frac{d\Delta V}{dt} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dx \cdot dy \cdot dz.$$

Скорость относительной объемной деформации:

$$\frac{1}{\Delta V} \frac{d\Delta V}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (2.4)$$

так как $\Delta V = dx \cdot dy \cdot dz$.

Подставляя выражения для скорости относительной объемной деформации из (2.4) и (2.3), получим:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.5)$$

и помня, что полная производная:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{dt}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z}. \quad (2.6)$$

Умножая все члены (2.5) на ρ и подставляя $\frac{d\rho}{dt}$ из (2.6) и (2.5), окончательно получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial x} \rho \right) + \left(v \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left(w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) = 0. \end{aligned} \quad (*)$$

Уравнение (*) в литературе представляется еще в виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho c) = 0.$$

Если движение установившееся, то $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ (все частные производные по времени равны нулю). В этом случае (*) принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) = 0. \quad (**)$$

Если жидкость несжимаемая $\rho = \text{const}$ и движение установившееся, то равенство (**) примет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (***)$$

Из рассмотрения равенства (***) следует, что при движении несжимаемой жидкости, как бы она не деформировалась, ее объем не изменяется. Частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$; $\frac{\partial v}{\partial y}$; $\frac{\partial w}{\partial z}$ – выражают скорости относительной линейной деформации выделенной (рассматриваемой) частицы в направлении осей x , y , z .

Для сжимаемой жидкости деформация частицы происходит с изменением объема. В этом случае уравнение неразрывности связывает изменение объема и плотности частицы.

2.1. Уравнения движения массы газа

Уравнение количества движения в проекциях на оси прямоугольной системы координат.

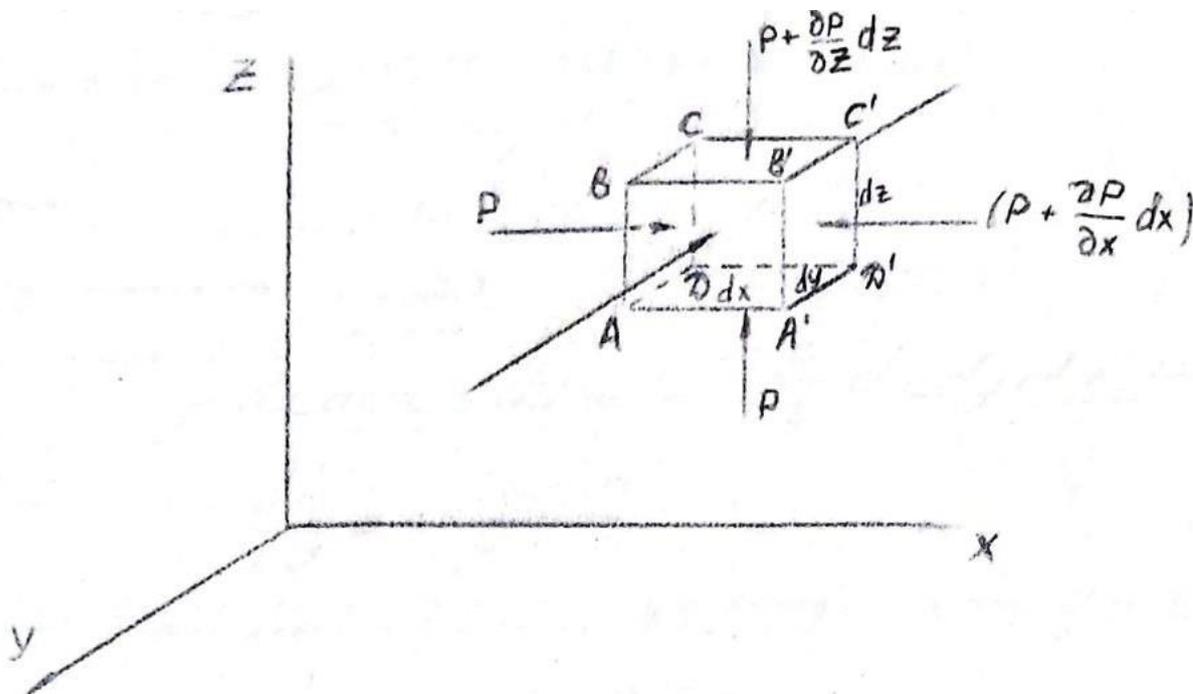


Рисунок 2.3 – Силы, действующие на элементарный объем

Внутри замкнутой поверхности параллелепипеда заключена масса жидкости, состоящая за все время движения из одних и тех же частиц.

Изменение количества движения массы газа, сосредоточенной внутри поверхности, происходит в общем случае вследствие того, что каждая частица, перемещаясь, занимает с течением времени новое положение и приобретает новую скорость, а также потому что в каждой точке пространства скорость меняется во времени.

В соответствии с известной теоремой механики изменение количества движения массы, заключенной в выделенном элементе, равно импульсу внешних сил:

$$m dc = P dt.$$

Составим уравнение количества движения в проекциях на координатные оси:

$$m du = P_x dt;$$

$$m dv = P_y dt;$$

$$m dw = P_z dt.$$

На грань ABCD (рис. 2.3) в направлении оси X действует сила давления:

$$P'_x = P dy dz,$$

импульс которой равен:

$$P'_x dt = P dy dz dt.$$

Импульс силы давления на грань A'B'C'D' (рис. 2.3) равен:

$$-P_x'' dt = -\left(P + \frac{\partial P}{\partial x} dx\right) dy dz dt.$$

Суммарный импульс по оси X равен:

$$P_x dt = (P_x' - P_x'') dt = -\frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz dt.$$

Изменение количества движения по оси X равно:

$$m du = \rho dx dy dz du,$$

где $m = \rho dx dy dz = \rho dV$.

Следовательно, суммарный импульс по оси X равен изменению количества движения по той же оси:

$$\rho dx dy dz du = -\frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz dt,$$

откуда

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}.$$

Аналогичные уравнение получим в проекциях на оси Y и Z:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{dw}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

Заметим, что кроме сил давления на элемент действует сила тяжести, равная произведению ускорения силы тяжести (g) на массу элемента $F = g(\rho dx dy dz)$. Однако для газов из-за их малой плотности сила тяжести по сравнению с силами давления весьма мала и ею обычно можно пренебречь. Если ею пренебречь нельзя, то уравнения количества движения на оси прямоугольной системы координат запишутся следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{dv}{dt} &= F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{dw}{dt} &= F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

Имея в виду, что полные производные du , dv и dw выражаются через частные производные следующим образом:

$$u = f(x, y, z, t)$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz + \frac{\partial u}{\partial t} dt$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz + \frac{\partial v}{\partial t} dt$$

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz + \frac{\partial w}{\partial t} dt$$

и в этом случае, т. к.

$$\frac{dx}{dt} = u$$

$$\frac{dy}{dt} = v$$

$$\frac{dz}{dt} = w$$

получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

Если движение установившееся, т. е. $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} = 0$ и массовыми силами можно пренебречь, то из систем (2.7) и (2.9) следует:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{dv}{dt} &= u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{dw}{dt} &= u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (*)$$

В этих уравнениях производные $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$ и $\frac{\partial w}{\partial t}$ – есть проекции полного ускорения движущейся частицы.

Из уравнения (*) следует, что ускорение жидкого элемента в установившемся движении называется соответствующими изменениями сил давления, действующих на этот элемент. Уравнения движения (*) были получены Леонардом Эйлером.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_x}{dt} + v_x \frac{\partial v_x}{dx} + v_y \frac{\partial v_x}{dy} + v_z \frac{\partial v_x}{dz} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial v_y}{dt} + v_x \frac{\partial v_y}{dx} + v_y \frac{\partial v_y}{dy} + v_z \frac{\partial v_y}{dz} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + v \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial v_z}{dt} + v_x \frac{\partial v_z}{dx} + v_y \frac{\partial v_z}{dy} + v_z \frac{\partial v_z}{dz} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} + v \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \right\}$$

В векторном виде уравнение будет выглядеть так:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + v \nabla^2 \vec{v}.$$

Уравнения Навье–Стокса – это система дифференциальных уравнений в частных производных, описывающая движение вязкой ньютоновской жидкости.

Уравнения Навье–Стокса являются одними из важнейших в гидродинамике и применяются в математическом моделировании многих природных явлений и технических задач.

Уравнение Эйлера для одномерного течения

Значительное число задач газодинамики можно решить, считая движение среды одномерным. Под одномерным движением понимается такое движение, в котором все параметры движущейся среды интенсивно меняются в одном направлении, а в двух других направлениях изменяются очень слабо.

Таким условиям отвечают течения газовой среды вдоль линии тока или в трубке тока. Напомним, что линией тока называют такую линию в потоке, в каждой точке которой вектор скорости направлен по касательной к ней.

Элементарной стружкой называют часть выделенной из потока среды, поверхность которой ограничена линиями тока.

Эту поверхность, построенную на элементарном замкнутом контуре, называют трубкой тока.

Одномерным можно считать течение газа в трубке с мало изменяющимся поперечным сечением и незначительной кривизной оси трубы.

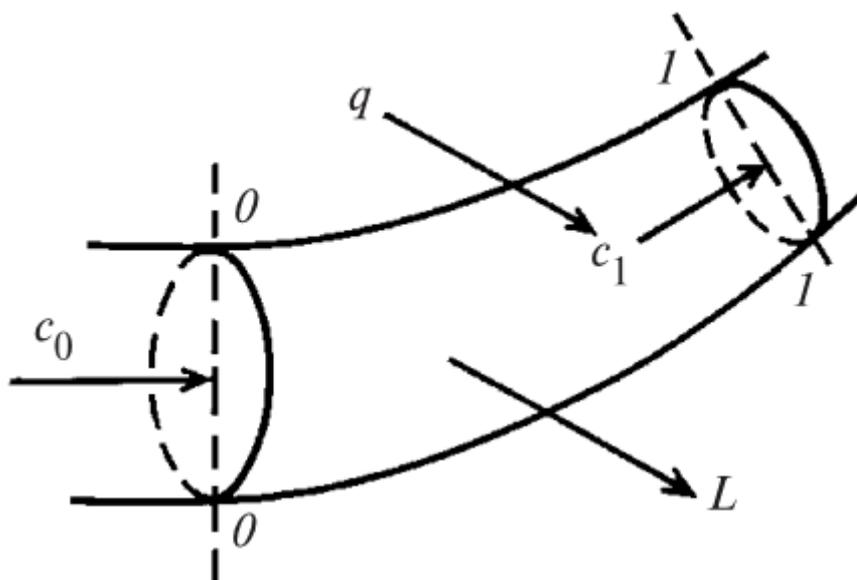


Рисунок 2.4 – Трубка тока. К выводу уравнения энергии

Для получения основных уравнений одномерного движения рассмотрим течение газа в трубке тока.

Ось X направим по оси трубки тока. Воспользуемся первым уравнением количества движения в проекции на ось X, которое для установившегося движения, при пренебрежении массовыми силами имеет вид:

$$\frac{du}{dt} = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}. \quad (*)$$

Так как для рассматриваемого одномерного сечения $u = c$ и $v = w = 0$, то переходя к полным производным, равенство (*) приводится к виду:

$$c \frac{dc}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx}. \quad (2.10)$$

Поскольку $\rho = \frac{\gamma}{g}$, то:

$$\frac{1}{g} cdc = -\frac{dP}{\gamma} = -VdP, \quad (2.11)$$

$$\frac{1}{g} \int_{c_1}^{c_2} cdc + \int_{P_1}^{P_2} v dP = 0. \quad (2.12)$$

Если принять, что течение в трубке тока происходит без теплообмена $dq = 0$, т. е. адиабатически, то

$$P_1 V_1^k = P V^k$$

и

$$V = V_1 \left(\frac{P_1}{P} \right)^{\frac{1}{k}}. \quad (2.13)$$

Подставив значение V из равенства (2.13) и (2.12), приводим его к виду:

$$\frac{1}{g} \int_{c_1}^{c_2} cdc + V_1 P_1^{\frac{1}{k}} \int_{P_1}^{P_2} P^{-\frac{1}{k}} dP = 0 \quad (2.14)$$

После интегрирования (2.14) окончательно получим:

$$\frac{c_2^2}{2g} - \frac{c_1^2}{2g} + \frac{k}{k-1} P_1 V_1 \left[\left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right] = 0 \quad (2.15)$$

Поскольку

$$P_1 V_1 = RT_1,$$

$$\frac{k}{k-1} = \frac{c_p}{AR},$$

$$\left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} = \frac{T_2}{T_1},$$

то из (2.15) следует равенство:

$$\frac{c_p}{A} (T_2 - T_1) + \frac{c_2^2}{2g} - \frac{c_1^2}{2g} = 0.$$

Помня, что $c_p T = i$ – энтальпия газа, можем написать:

$$c_p T_2 - c_p T_1 + \frac{Ac_2^2}{2g} - \frac{Ac_1^2}{2g} = 0. \quad (2.16)$$

Откуда следует:

$$i_2 + \frac{Ac_2^2}{2g} = i_1 + \frac{Ac_1^2}{2g} = const, \quad (2.17)$$

где i_1 и i_2 – энтальпия движущегося потока в контрольных сечениях 1 и 2 (рис. 2.4);

c_1 и c_2 – скорость потока в тех же сечениях.

Обозначим константу в равенстве (2.17) через i_0 и назовем эту величину полным теплосодержанием адиабатически заторможенного газа, тогда для любого контрольного сечения трубки тока будет справедливо равенство:

$$i_0 = i + \frac{Ac^2}{2g}. \quad (*)$$

Из равенства (2.16) также следует, что

$$T_2 + \frac{Ac_2^2}{2gc_p} = T_1 + \frac{Ac_1^2}{2gc_p} = const. \quad (2.18)$$

Обозначим постоянную в равенстве (2.18) через T_0 и назовем эту величину полной температурой или температурой торможения, тогда для любого контрольного сечения трубки тока будет справедливо равенство:

$$T_0 = T + \frac{Ac^2}{2gc_p}, \quad (**)$$

где T_0 – температура заторможенного потока;

T – температура движущегося потока;

c – скорость потока в данном контрольном сечении.

Уравнение энергии

Нетрудно показать, что равенства (2.16) и (2.17) – есть уравнения энергии изолированного (адиабатического течения), которые непосредственно вытекают из уравнения первого закона термодинамики, записанного для газового потока:

$$dq = di + d\left(\frac{Ac^2}{2g}\right) + dl_t, \quad (2.19)$$

где dq – удельное количество тепла, сообщаемое или отводимое от газа в элементарном процессе;

dl_t – элементарная удельная работа, совершаемая газом;

di – элементарное изменение энтальпии газа.

Для адиабатического потока:

$$dq = dl_t = 0 \quad (2.20)$$

и в этом случае (2.19) примет вид:

$$di + d\left(\frac{Ac^2}{2g}\right) = 0. \quad (2.21)$$

Интегрируя (2.21), окончательно получим:

$$i_2 + \frac{Ac_2^2}{2g} = i_1 + \frac{Ac_1^2}{2g} = const.$$

Это равенство является равенством (2.17), которое было непосредственно получено из уравнения Эйлера для одномерного течения.

Уравнению энергии можно дать простое газокинетическое толкование.

В этом уравнении член $\frac{Ac^2}{2g}$ выражает в тепловых единицах кинетическую энергию направленного движения частиц газа, а энтальпия i , пропорциональная температуре, определяет энергию хаотического (теплового) движения молекул.

Следовательно, уравнение (2.17) выражает закономерность взаимного превращения энергии направленного и хаотического (теплового) движения частиц.

Измерение температур в быстродвижущихся потоках газа

Согласно уравнению (**) температура движущегося потока T будет ниже температуры торможения T_0 на величину динамической добавки температуры $\frac{Ac^2}{2gc_p} = \Delta T_{\text{дин.}}$.

Для воздуха уравнение (**) приводится к виду (полагая $c_p = 0,24$).

$$T_0 = T + \frac{c^2}{2012}. \quad (**)$$

В таблице 2.1 приведены значения динамической добавки температуры для воздуха в зависимости от величины скорости потока c .

Таблица 2.1 – Динамическая составляющая добавки температуры

Скорость поток c , м/с	$\Delta T = \frac{c^2}{2012}, ^\circ C$
50	1,24
100	4,96
200	19,8
300	44,6
400	79,5
500	124,5

Как видно из приведенной таблицы, при скорости потока 50 м/с температура движущегося потока меньше температуры заторможенного (неподвижного) только на 1,24 °С, а при скорости 500 м/с она меньше на 125 °С.

Измеритель температуры, помещенный в движущейся поток покажет температуру:

$$T_{\text{зам.}} = T + v \frac{Ac^2}{2gc_p},$$

где $v < 1$ – коэффициент восстановления измерителя.

Он показывает, какая доля динамической составляющей температуры воспринимается измерителем.

Коэффициент восстановления v определяется тарировкой измерителя в специальных устройствах.

Из изложенного следует, что температура, измеренная измерителем температуры, будет меньше температуры T_0 , но больше T . Для лабораторных термометров при низких скоростях потока $v = 0,7 \div 0,85$.

Измерение температур обычными лабораторными термометрами можно производить в потоке со скоростью не выше 50 ÷ 60 м/с. При этом погрешность изменяемой величины может составлять $\sim 0,5 ^\circ C$.

В быстро движущихся потоках измерение температур осуществляется термопарами или термометрами сопротивления.

Действие термопар основано на явлении возникновения термоэлектродвижущей силы (термо ЭДС) в спаяе двух разнородных металлов при их нагревании.

Действие термометров сопротивления основано на явлении изменения электрического сопротивления проводника при изменении его температуры.

В качестве электродов термопар применяются хромель + копель, хромель+ алюмель, медь + константан и др. Наиболее высокую ЭДС дает сочетание хромель + копель.

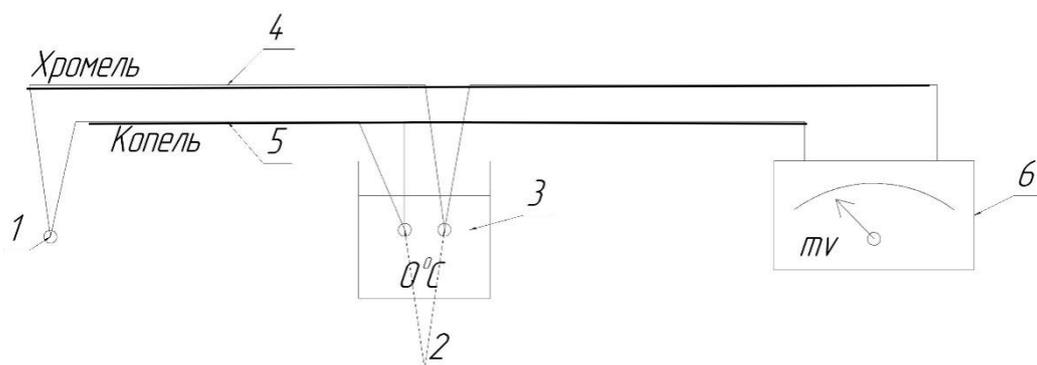


Рисунок 2.5 – Схема измерения температуры термопарой:
 1 – спай измерителя температуры; 2 – холодные спаи; 3 – дюаровский сосуд с тающим льдом; 4-5 – электроды (проволока); 6 – потенциометр

ГЛАВА 3. СКОРОСТЬ ЗВУКА. ЧИСЛО МАХА

Процессы в газовых потоках при больших скоростях течения, сравнимых со скоростью звука, приводят к изменению плотности газа. Движение газа с большими скоростями изучается газовой динамикой. Согласно термодинамике, параметры состояния идеального газа – давление P , плотность ρ и абсолютная температура T – связаны *уравнением состояния*:

$$\frac{P}{\rho} = R \cdot T, \quad (3.1)$$

где R – газовая постоянная. Для воздуха $R = 287,1$ Дж/(кг К).

В большинстве задач, рассматриваемых газодинамикой, процессы изменения состояния газа можно считать адиабатными; из-за их быстротечности они осуществляются без теплообмена с окружающими телами. При адиабатном процессе давление и плотность связаны соотношением (3.1).

Используя уравнение состояния (3.1), получим для адиабатного процесса формулы связи между давлением, плотностью и температурой:

$$\frac{p}{\rho^k} = const, \text{ или } \frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^k, \quad (3.2)$$

где $k = C_p/C_v$ – показатель адиабаты. Для воздуха и других двухатомных газов $k = 1,4$. Для перегретого водяного пара $k = 1,33$.

В задаче о движении газа в длинной трубе без теплоизоляции стенок процесс изменения состояния принимается *изотермическим* – длительный контакт со стенками трубы приводит к тому, что температура газа не отличается от температуры стенки.

Скорость звука, т. е. слабых волн давления в газе, зависит от давления и плотности. Процесс изменения параметров газа в звуковой волне является адиабатным. Скорость звука для газа определяется соотношениями:

$$a = \sqrt{k \frac{p}{\rho}}, \quad a = \sqrt{kRT}. \quad (3.3)$$

В частности, для воздуха, подставляя величины k и R , имеем:

$$A = 20,1 \cdot \sqrt{T}. \quad (3.4)$$

При температуре $T = 5$ °С последняя формула (3.4) дает $a = 340$ м/с.

Отношения скорости газа w к скорости звука a :

$$M = \frac{w}{a} \quad (3.5)$$

называется *числом Маха*. Течения, в которых $M < 1$, называются *дозвуковыми*. Если $w > a$ и $M > 1$, течение *сверхзвуковое*.

Характер распространения звуковых волн от тела, движущегося с дозвуковыми и сверхзвуковыми скоростями приведен на рис. 3.1.

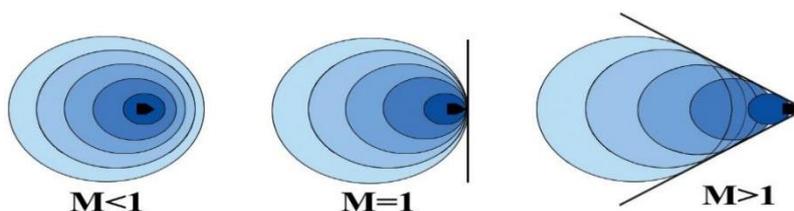


Рисунок 3.1 – Распространение звуковых волн

3.1. Эрнст Мах. Биографические данные История появления «Числа Маха»



Эрнст Вальдфрид Йозеф Вензель Мах родился 18 февраля 1838 г., умер 19 февраля 1916 года. Австрийский физик, механик и философ – позитивист. Докторскую степень получил в Венском университете в 1860 году, где, начиная с 1895 года и до конца жизни, был профессором истории науки.

Основное признание Мах заслужил именно за свои труды в области философии и истории науки, однако немаловажен и его вклад в психологию и физику.

В 1860 г., защитив докторскую диссертацию, он стал приват-доцентом университета. Начинаящий исследователь хотел заниматься только экспериментальной физикой, но на это у него не было средств. Для заработка он читал много лекций, как учебных, так и популярных, приобретая тем самым необходимый педагогический опыт.

В 1864 г. Мах был приглашен на должность профессора математики в Грац. Читая математический курс, Мах продолжает заниматься физикой и физиологией. В 1866 г. он переходит на кафедру физики в том же университете.

В 1867 г. он становится профессором экспериментальной физики в Праге. На протяжении тридцати лет Мах читал курс по экспериментальной физике. К этому времени относятся его основные исследования в области оптики, акустики, ударных волн. В его лаборатории было создано немало оригинальных демонстрационных приборов, «волновая машина» до сих пор используется в физических кабинетах.

История открытия числа Маха

Главной работой австрийского физика стало исследование объектов, движущихся со сверхзвуковой скоростью. Исследование это он начал в 1884 году. В те времена самолетов, ни сверхзвуковых, ни обычных, еще не было. Но уже были и пули, и снаряды. Был заказ военного ведомства. Дело в том, что огнестрельные ранения, полученные немецкими солдатами на поле боя во время франко-прусской войны 1870-1871 года, были тяжелее, чем прежде. Настолько, что немцы стали подозревать: французы использовали разрывные пули. Этот вид оружия уже тогда был признан варварским и был запрещен.

Исследовать причину повышенной убойной силы французских ружей взялся профессор Мах с двумя своими коллегами, Петером Зальхером и Шандором Риглером. Совместными усилиями к лету 1886 года была построена установка, позволяющая фотографировать летящую в воздухе пулю. Фотосъемка производилась без затвора, на фотопластинку, установленную в темной камере.

Когда пуля пролетала мимо объектива, срабатывал датчик, вспыхивала электрическая искра, которая освещала летящую пулю и окружающее ее

пространство. Сжатый и нагретый при полете пули воздух имел другую прозрачность. Благодаря этому на фотографиях были четко видны темные полосы, расходящиеся от головной части пули, а также вихревое движение воздуха в пространстве, где пуля уже пролетела.

Мах раскрыл причину повышенной убойной силы французских пуль. Они летели со скоростью, превышающей скорость звука. Оказалось, что любой предмет, летящий с такой скоростью, сопровождает ударная волна.

Ударная волна – это фронт сжатого воздуха, расходящийся во все стороны в виде конуса. Именно ударная волна повышала убойную силу французских пуль: делала входные отверстия необычной, конусообразной, формы, а ткани тела просто разрывала. Теневая фотография полета пули приведена на рис. 3.2.

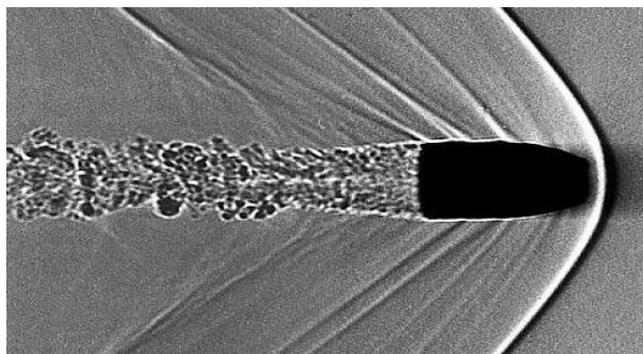


Рисунок 3.2 –Теневая фотография

Но Мах, как и свойственно настоящему немецкому профессору, отличался упорством и въедливостью. Решив поставленную задачу, он не успокоился, пока не исследовал все аспекты открытого им нового явления. В частности, он установил, что угол расхождения ударной волны и другие ее параметры определялись отношением скорости летящего предмета к скорости звука. Назвать это соотношение «*числом Маха*» предложил в 1929 г. швейцарский инженер Якоб Аккерет (1898-1981).

Число Маха

При любом полете аппарата тяжелее воздуха одним из самых важных его параметров является скорость. Способов измерения скорости на сегодняшний день предостаточно. Для примера, параметры движения самолета относительно воздушной среды можно измерить следующими способами: ультразвуковой, термодинамический, тепловой, турбинный, манометрический. А путевую скорость (т. е. скорость относительно земли) можно измерить доплеровским, корреляционным, радиационным способом, а также способом визирования земной поверхности.

Но самый, простой и логичный, давно применяющийся, а поэтому, естественно, проработанный и привычный все же аэрометрический (точнее говоря, аэродинамический) способ. С его помощью как раз и замеряется воздушная скорость самолета и «число Маха».

Важность величины числа Маха

Важное значение числа Маха объясняется тем, что оно определяет, превышает ли скорость течения газовой среды скорость звука или нет.

Сверхзвуковые и дозвуковые режимы движения имеют принципиальные различия. Для авиации это различие выражается в том, что при сверхзвуковых режимах возникают узкие слои быстрого значительного изменения параметров течения (ударные волны), приводящие к росту сопротивления тел при движении, концентрации тепловых потоков у их поверхности и т. п.

«Число Маха» – это истинная скорость в потоке (то есть скорость, с которой воздух обтекает, например, самолет), деленная на скорость звука в конкретной среде, поэтому зависимость является обратно пропорциональной.

У земли скорость, соответствующая 1 Маху, будет равна приблизительно 300 м/с или 1100 км/ч. Однако, если, например, приборы самолета показывают истинную скорость самолета 1070 км/ч на высоте 11000 м, такой самолет движется со скоростью более 1 Маха, то есть со сверхзвуковой скоростью.

3.2. Определение скорости течения газа с помощью трубки Пито–Прандтля

Одним из способов определить скорость потока является измерения ее с помощью трубки Пито–Прандтля.



Трубка Пито–Прандтля представляет собой U-образную трубку. Ее применяют для измерения динамического давления напора жидкости или газа. Принцип работы основан на измерении разницы статического и встречного давления. Во время полета встречный поток воздуха через отверстия в трубках Пито создает определенное давление, напрямую зависящее от скорости воздушного судна. Из разницы между статическим и встречным давлением вычисляется скорость. Данные насадки используют также и для определения скорости сверхзвуковых потоков. В отличие

от дозвукового потока в сверхзвуковом потоке перед трубкой образуется ударная волна. Газовая струйка, направление движения которой совпадает с осью симметрии трубки, претерпевает полное торможение, сначала проходя через прямую часть ударной волны (прямой скачок уплотнения), где ее скорость становится дозвуковой. Трубка Пито–Прандтля названа в честь своих изобретателей: Анри Пито и Людвига Прандтля.

Анри Пито (3 мая 1695 – 27 декабря 1771) французский инженер-гидротехник, изобретатель трубки Пито для измерения скорости в жидкости. Трубка Пито – прибор для измерения полного напора текущей жидкости или газа.



Людвиг Прандтль (4 февраля 1875 года – 15 августа 1953 года) – немецкий механик и физик. Внес существенный вклад в основы гидродинамики и разработал теорию пограничного слоя. В честь его назван один из критериев подобия (число Прандтля).

Разработал устройство, ставшее классическим приемником воздушного давления для самолетов и вертолетов (трубка Прандтля).

3.2.1. Определение скорости потока с помощью трубок Пито–Прандтля

При определении скоростей и расходов газообразных сред широко используются специальные насадки (трубка Пито–Прандтля, рис. 3.3).

Насадки вводят и ориентируют перпендикулярно потоку. При дозвуковых скоростях в первой центральной трубке создается давление, равное полному давлению набегающего потока (давлению заторможенного потока) P^* .

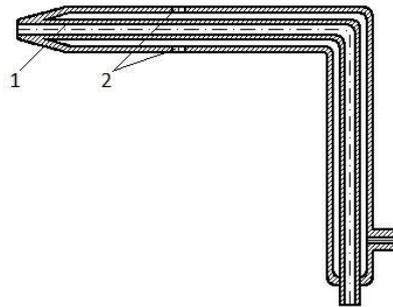


Рисунок 3.3 – Трубка Пито–Прандтля:

- 1 – трубка для измерения полного давления (давление заторможенного потока);
2 – трубка для измерения статического давления

Во второй трубке при достаточном удалении боковых отверстий от носика устанавливается давление, близкое к статическому давлению потока P . Обе эти трубки соединяются с манометрами. По измеренным давлениям P^* и P находят соотношение $\frac{P_1}{P_2} = \frac{P^*}{P}$ и затем определяют значение числа Маха и скорость потока:

$$\frac{P^*}{P} = \left(\frac{k-1}{k} M^2 \right)^{\frac{k}{k-1}}, \quad (3.6)$$

- где P^* – полное давление, Па;
 P – статическое давление, Па;
 M – число Маха;
 k – показатель адиабаты.

При определении скорости потока газа, а также любых несжимаемых жидкостей ($\rho = const$) используют уравнение Бернулли в следующем виде:

$$P^* = P + \frac{\rho c^2}{2}. \quad (3.7)$$

Данные насадки используют также и для определения скорости сверхзвуковых потоков. В отличие от дозвукового потока в сверхзвуковом потоке перед трубкой образуется ударная волна. Газовая струйка, направление движения которой совпадает с осью симметрии трубки, претерпевает полное торможение, сначала проходя через прямую часть ударной волны (прямой скачок уплотнения), где ее скорость становится дозвуковой. Затем, при входе в отверстие 1, скорость плавно уменьшается до нуля (рис. 3.3).

Таким образом. Давление в трубке 1 соответствует давлению торможения ударной волны P_2^* , а давление в трубке 2 статическому давлению набегающего потока P_1 . Отношение давлений позволяет определить число Маха до ударной волны по уравнению Релея:

$$\frac{P_2^*}{P_1} = \left(\frac{k+1}{2} M_1^2\right)^{\frac{k}{k-1}} \left(\frac{2k}{k+1} M_1^2 - \frac{k-1}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}}, \quad (3.8)$$

где M_1 – число Маха до ударной волны.

Графическое решение уравнения Релея (см. рис. 3.6) – график зависимости $M_1 = f\left(\frac{P_2^*}{P_1}\right)$.

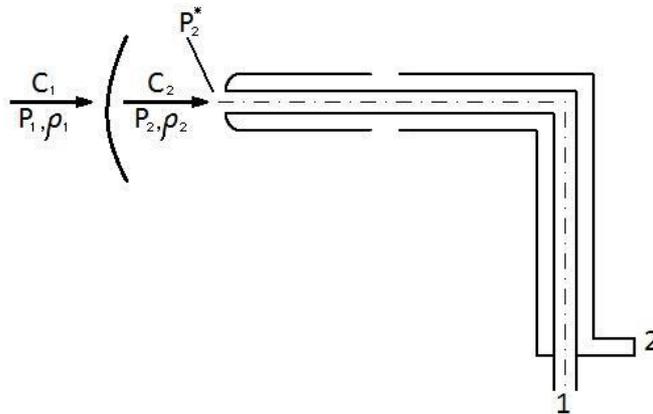


Рисунок 3.4 – Трубка Пито–Прандтля в сверхзвуковом потоке

Ниже приведены соотношения, связывающие термодинамические параметры до и после косога скачка уплотнения. При $\beta = \frac{\pi}{2}$ данные соотношения будут справедливы для прямого скачка уплотнения:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{k-1}{k+1} \left(\frac{2k}{k-1} M_1^2 \sin^2 \beta - 1 \right); \quad (3.9)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{k+1}{k-1} \frac{1}{\frac{2}{k-1} M_1^2 \sin^2 \beta + 1}; \quad (3.10)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{k-1}{k+1}\right)^2 \left(\frac{2k}{k-1} M_1^2 \sin^2 \beta - 1 \right) \left(\frac{2k}{k-1} M_1^2 \sin^2 \beta + 1 \right). \quad (3.11)$$

3.2.2. Пример расчета скорости потока

К трубке Пито–Прандтля, помещенной в поток воздуха, присоединены два U-образных ртутных манометра. Разность уровней в манометре I – $\Delta h_1 = 142$ мм рт. ст., в манометре II – $\Delta h_2 = 62$ мм рт. ст. (рис. 3.5). Неподвижный термометр, омываемый потоком, показывает $t = 20$ °С. Атмосферное давление 760 мм рт. ст. ($P^* > P_6 > P$).

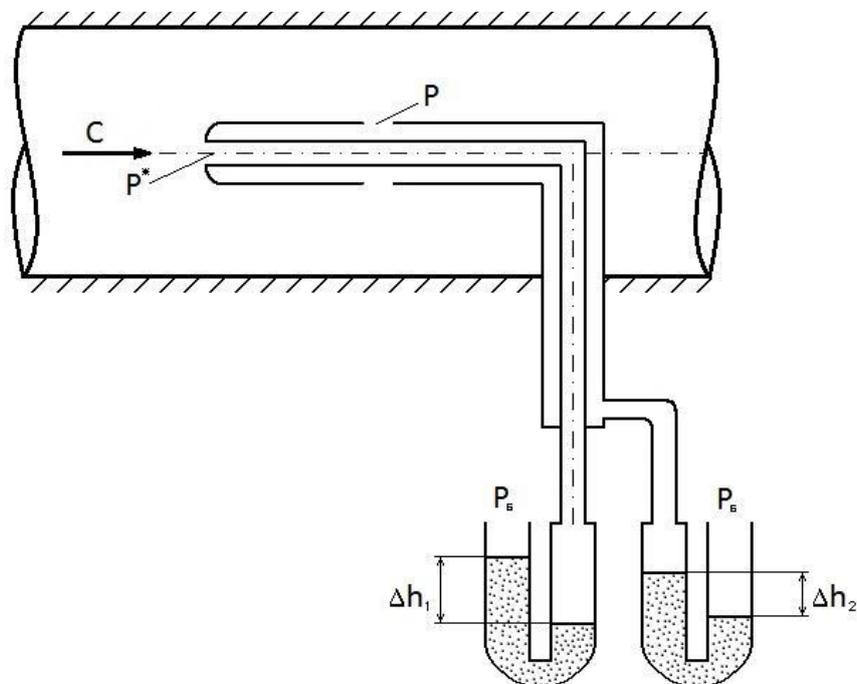


Рисунок 3.5 – Трубка Пито–Прандтля с присоединенным U-образными манометрами

Требуется определить:

1. Скорость потока.
2. Относительную ошибку в определении давления торможения, если считать воздух несжимаемой средой.
3. Скорость сверхзвукового потока по новым показаниям манометров $\Delta h_1 = 1722$ мм рт. ст., $\Delta h_2 = 320$ мм рт. ст.

Решение:

1. Выразим показания манометров ... и Δh_2 в абсолютных единицах:

$$P^* = P_6 + \Delta h_1 = 760 + 142 = 902 \text{ мм рт. ст.};$$

$$P = P_6 - \Delta h_2 = 760 - 62 = 698 \text{ мм рт. ст.}$$

Решая уравнение (3.6) относительно M , получим:

$$M = \sqrt{\frac{2}{k-1} \left[\left(\frac{P^*}{P} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right]} = \sqrt{\frac{2}{1,4-1} \left[\left(\frac{920}{698} \right)^{\frac{1,4-1}{1,4}} - 1 \right]} = 0,614.$$

Как известно, число Маха выражает отношение скорости потока в данной точке потока к местной скорости звука ($M = \frac{c}{a}$). Определим величину скорости звука $a = \sqrt{kRT}$, где T – температура движущегося потока воздуха, K .

По условию задачи, показание неподвижного термометра будет соответствовать температуре замороженного потока T^* :

$$\frac{T^*}{T} = 1 + \frac{k-1}{2} M^2;$$

$$T^* = 20 + 273 = 293 \text{ K};$$

$$T = \frac{T^*}{1 + \frac{k-1}{2} M^2} = \frac{293}{1 + \frac{1,4-1}{2} 0,614^2} = 272 \text{ K};$$

$$a = \sqrt{1,4287272} = 330 \text{ м/с.}$$

Таким образом, скорость воздушного потока будет равна:

$$c = Ma = 0,614 \cdot 330 = 203 \text{ м/с.}$$

2. Если считать воздух несжимаемым, то его плотность в заторможенном состоянии будет такой же, как и при движении:

$$\rho_{\text{несж}} = \frac{P}{RT}.$$

Выразим статическое давление P в Па (1 мм рт. ст. = 133,3 Па):

$$P = 698 \cdot 133,3 = 93043 \text{ Па};$$

$$\rho_{\text{несж}} = \frac{93043}{287 \cdot 272} = 1,192 \text{ кг/м}^3.$$

Определим давление заторможенного потока для несжимаемой среды ($\rho_{\text{несж}} = \text{const}$) по уравнению (3.7):

$$P^* = P + \frac{\rho_{\text{несж}} c^2}{2} = 93043 + \frac{1,192 \cdot 203^2}{2} = 117600 \text{ Па.}$$

Относительная ошибка в определении давления торможения составит:

$$\delta P^* = \frac{P^* - P_{\text{несж}}^*}{P^*} \cdot 100 \% = \frac{120236 - 117600}{120236} \cdot 100 = 2,0 \%,$$

где $P^* = 902 \cdot 133,3 = 120236 \text{ Па.}$

3. По новым показаниям манометров давления P_2^* и P_1 также выразим в абсолютных единицах:

$$P_2^* = 760 + 1722 = 2482 \text{ мм рт. ст.};$$

$$P_1 = 760 - 320 = 440 \text{ мм рт. ст.}$$

Определим отношение давлений $\frac{P_2^*}{P_1}$ и по графику на рис. 3.6 находим число Маха до скачка уплотнения:

$$\frac{P_2^*}{P_1} = \frac{2482}{440} = 5,64; \quad M_1 = 2,23.$$

Скорость сверхзвукового потока находим из соотношения:

$$C_1 = M_1 a_1 = M_1 \sqrt{kRT_1} = 2,23 \sqrt{1,4 \cdot 287 \cdot 272} = 737 \text{ м/с.}$$

Графическое решение уравнения Релея

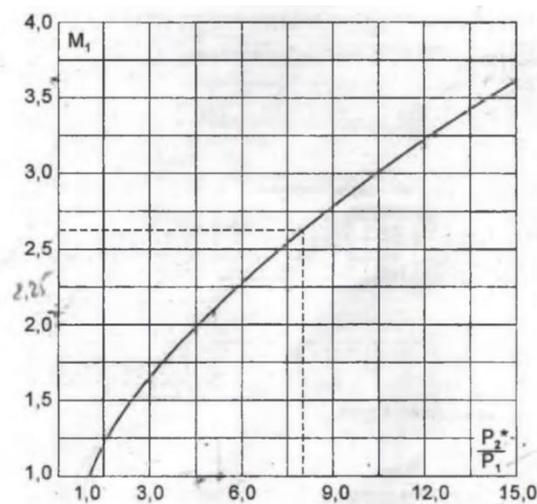


Рисунок 3.6 – График зависимости $M_1 = f\left(\frac{P_2^*}{P_1}\right)$

3.3. Ударные волны. Скачки уплотнения. Адиабата Гюгонио

Адиабатные процессы в действительности всегда в той или иной мере неравновесны (необратимы). При внезапных, резких адиабатных сжатиях газа возникают *ударные волны*.

Ударная волна представляет собой *поверхность разрыва непрерывности физических свойств среды*. Ударные волны возникают: при разрыве бомб, когда уплотнение окружающего воздуха вызывается выделением газообразных продуктов взрывной реакции; при взрывном горении (волны детонации), когда продукты горения вызывают уплотнение горючей смеси; при всех быстрых и сильных сжатиях газа. Ударные волны образуются также при полете снарядов и вообще при набегании газа со сверхзвуковой скоростью на какие-либо препятствия (в этом случае ударную волну называют скачком уплотнения).

Ударные волны распространяются со скоростью, которая всегда больше скорости звука c . Возникновение и распространение ударной волны связано с перемещением сжатого газа вслед за фронтом волны, причем газ перемещается в ту же сторону, куда распространяется волна; скорость перемещения сжатого газа ω всегда меньше скорости движения фронта ударной волны.

Начальная скорость распространения ударной волны тем более велика, чем большим изменением давления вызвана волна.

Б. Риман (немецкий ученый) в 1860 г., основываясь на законах сохранения массы и количества движения, показал, что в любой момент скорость ударной волны определяется скачками давления и плотности в волне.

К выводу уравнения Римана для ударной волны

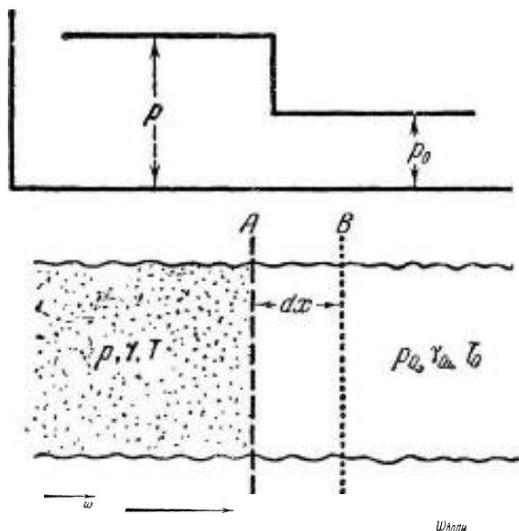


Рисунок 3.7 –
К выводу уравнения Римана
для ударной волны

Пусть, как показано на рис. 3.7, AA' есть фронт ударной волны в момент времени t , BB' – положение фронта через промежуток времени dt , S – площадь сечения рассматриваемой части фронта волны. Давление и весовую плотность «невозмущенного» газа перед фронтом волны обозначим через p_0 и γ_0 , а те же параметры для «возмущенного» газа, т. е. для газа позади фронта волны, обозначим через p и γ . За время dt в слое толщиной dx между поверхностями AA' и BB' произошло уплотнение газа; количество газа в том слое увеличилось на величину $dG = (\gamma - \gamma_0)Sdx$, это количество dG газа переместилось в рассматриваемый слой за время dt (слева направо через поверхность AA') со скоростью ω ,

следовательно, $dG = \gamma S \omega dt$. Таким образом, из закона сохранения массы получаем:

$$(\gamma - \gamma_0)Sdx = \gamma S \omega dt.$$

Но есть скорость распространения ударной волны. Стало быть:

$$\omega_{\text{волн}} = \frac{\gamma}{\gamma - \gamma_0} \omega. \quad (3.12)$$

За время dt газ в слое dx , ранее покоившийся, приобрел количество движения $\omega \frac{\gamma_0}{g} Sdx$, созданное импульсом силы $(p - p_0)Sdt$:

$$\omega \frac{\gamma_0}{g} Sdx = (p - p_0)Sdt.$$

Отсюда получаем второе уравнение для скорости ударной волны:

$$\omega_{\text{волн}} = g \frac{p - p_0}{\gamma_0} \frac{1}{\omega}.$$

Формулы Римана указывают на непостоянство скорости распространения ударной волны (а также и скорости перемещения газа вслед за фронтом волны): скорость ударной волны тем более велика, чем больше скачок давления в волне, поддерживающий распространение волны; по мере уменьшения этого скачка давления скорость ударной волны убывает (от нескольких тысяч метров в секунду при взрывах) до скорости звука.

Если совместить уравнения Римана с законом сохранения энергии (или с основным уравнением газодинамики), как это было сделано французским инженером Гюгонио в 1888 г., то получается соотношение, устанавливающее связь между термодинамическими параметрами газа при ударном адиабатическом сжатии газа.

Опять обращаясь к рис. 3.7, представим себе, что ударная волна распространяется в газе, который в целом движется с той же скоростью $\omega_1 = \omega_{\text{волн}}$ в обратном направлении, т. е. для случая, показанного на рис. 3.7, справа налево. Тогда все явление представится нам как перемещение возмущенного газа от неподвижной поверхности волны AA' влево со скоростью $\omega_2 = \omega_{\text{волн}} - \omega$. Подставив эти значения скоростей ω_1 и ω_2 в уравнение (3.12) и обозначая теплосодержание невозмущенного газа через $i_0 (i_1 = i_0)$, а возмущенного газа через $i (i_2 = i)$ получаем:

$$i - i_0 = \frac{\omega_{\text{волн}}^2}{2g} = \frac{(\omega_{\text{волн}} - \omega)^2}{2g}.$$

Заменяя в этом уравнении $\omega_{\text{волн}}$ и ω выражениями указанных величин по формулам Римана и учитывая, что появляющийся в правой части множитель, содержащий удельные объемы, можно представить в виде $\vartheta_0^2 [\vartheta_0 - (\vartheta_0 - \vartheta)]^2 = \vartheta_0^2 - \vartheta^2 = (\vartheta_0 - \vartheta)(\vartheta_0 + \vartheta)$, приходим к уравнению Гюгонио для ударного адиабатного сжатия любой среды:

$$i - i_0 = \frac{1}{2}(p - p_0)(v + v_0). \quad (3.13)$$

Чтобы сопоставить применительно к газам изменение давления в зависимости от плотности при адиабатном ударном сжатии (по Гюгонио) и при равновесном сжатии (по Пуассону), заменим в уравнении (3.13) i через $\frac{p\vartheta}{x-1}$ и i_0 через $\frac{p_0\vartheta_0}{x-1}$.

После несложных преобразований получаем уравнение адиабаты Гюгонио для газов:

$$\frac{v_0}{v} = \frac{\gamma}{\gamma_0} = \frac{\frac{x+1}{x-1} \frac{p}{p_0} + 1}{\frac{p}{p_0} + \frac{x+1}{x-1}}. \quad (3.14)$$

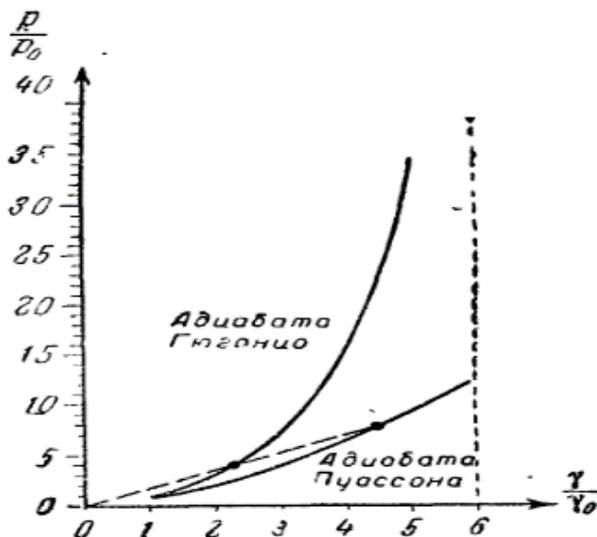


Рисунок 3.8 – Адиабата Пуассона и адиабата Гюгонио

Пунктирная линия соответствует торможению газа при $M_0 = 2$.

При ударном сжатии давление возрастает с увеличением плотности значительно быстрее, чем при равновесном сжатии. Это объясняется тем, что при ударном сжатии рассеивается в тепло избыточная затрата энергии и давление повышается более за счет роста температуры газа, чем вследствие уплотнения. Рис. 3.8 показывает, насколько крутизна адиабаты Гюгонио больше чем крутизна адиабаты Пуассона.

Адиабата Гюгонио имеет вертикальную асимптоту для воздуха при $(\frac{\gamma}{\gamma_0})_{\text{макс}} = 6$.

Это значит, что при любой мощности ударное сжатие может привести самое большее к *шестикратному увеличению плотности*. При взрывном горении в определенных условиях возникает особый вид ударной волны, которую в этом случае (по предложению Бергло, открывшему указанное явление в 1881 г.) называют *волной Детонации*.

Распространяясь в горючей смеси, волна детонации вызывает такое повышение температуры, которого достаточно для воспламенения горючей смеси, или такое повышение давления во взрывающемся веществе, которого достаточно для возникновения взрывной реакции. Скорость распространения пламени при отсутствии детонации обычно невелика и измеряется метрами в секунду; при детонации фронт пламени распространяется со скоростью, в сотни и тысячи раз большей, а именно со скоростью волны детонации: в газообразных горючих смесях 2000–3000 м/сек, в конденсированных взрывчатых веществах 4000–6000 м/сек. В газообразных горючих смесях скачок температуры в волне детонации достигает 3000–4000 м/сек, а скачок давления составляет десятки атмосфер.

Важная особенность волн детонации в сравнении с обычными ударными волнами заключается в том, что детонационное распространение фронта пламени происходит всегда с определенной скоростью $\omega_{\text{волн}} = \omega_{\text{дет}}$, характерной для газовой смеси или взрывчатого вещества. Среда перемещается вслед за фронтом волны детонации со скоростью ω . По отношению к этой перемещающейся возмущенной среде (содержащей продукты взрыва) волна детонации распространяется со скоростью звука в возмущенной среде:

$$\omega_{\text{дет}} = c + \omega.$$

Это соотношение было установлено Жуге в 1906 г. и носит название уравнения Жуге; оно дополняет для волн детонации уравнения Римана.

Как уже упоминалось, ударные волны (скачки уплотнения) образуются всегда при набегании сверхзвукового потока на какие-либо препятствия. Даже в правильно рассчитанных соплах обычно не удается осуществить равновесное торможение сверхзвукового потока, так как при набегании потока на входное отверстие уже возникает скачок уплотнения.

Поскольку давление по уравнению Клапейрона для любого состояния газа пропорционально произведению абсолютной температуры на плотность газа, то нетрудно сообразить, что в диаграмме, представленной на рис. 3.8, состояния газа с одинаковым относительным повышением температуры лежат на прямой,

проходящей через начало координат и наклоненной к оси абсцисс под углом, тангенс которого равен $\frac{T_2}{T_1}$.

На рис. 3.9-3.11 приведены типичные картины образования скачков уплотнения при обтекании тел различной формы потоком газа, имеющим сверхзвуковую скорость.

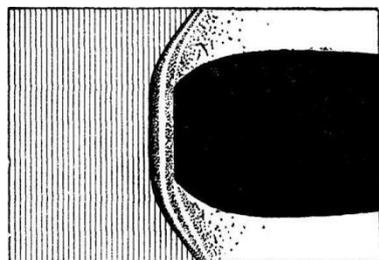


Рисунок 3.9 – Прямой скачок уплотнения возникающий перед отверстием диффузора

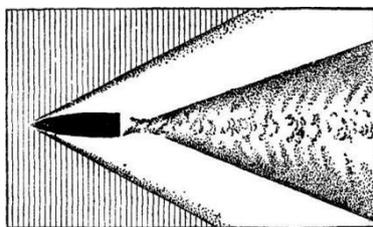


Рисунок 3.10 – Скачок уплотнения при полете снаряда ($M = 2,5$)

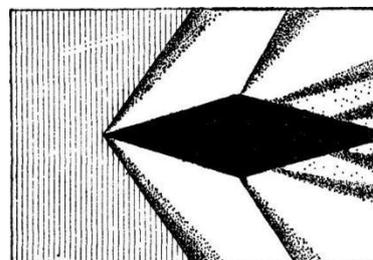


Рисунок 3.11 – Скачок уплотнения перед остроконечным телом ($M = 1,7$)

Наибольшее рассеяние энергии происходит при прямых скачках уплотнения. В косых скачках уплотнения рассеяние энергии меньше и соответственно меньше волновое сопротивление тела. Поэтому снарядам, пулям, ракетам и самолетам, летающим со сверхзвуковой скоростью, придают остроконечную форму, а крылья делают стреловидными и с острой передней кромкой сопротивление тела.

Угол между направлением движения и поверхностью, на которой происходит скачок уплотнения, для прямых скачков равен 90^0 , а для косых скачков он меньше чем 90^0 , но больше некоторого угла α , который определяется соотношением:

$$\sin \alpha = \frac{c}{\omega_0} = \frac{1}{M_0}. \quad (3.15)$$

Для пояснения сказанного о величине угла наклона скачка обратимся к рис. 3.12. При движении тела в среде со сверхзвуковой скоростью ω_0 возмущение, производимое носком тела распространяется во все стороны с тем большей скоростью, чем больше ударное повышение давления в среде перед носком тела. При малых повышениях давления возмущение распространяется со скоростью звука c , и эти слабые возмущения все время остаются внутри конуса, называемого конусом Маха.

За время тело проходит путь $\omega_0 t$, а возмущение проходит путь ct . Все возмущения, складываясь друг с другом, образуют коническую поверхность, которая и является поверхностью раздела между возмущенной и невозмущенной средами, т. е. поверхностью ударной волны.

Из рис. 3.12 ясно, что отношение $c\tau$ к $\omega_0\tau$ представляет собой синус угла α при вершине конуса: $\sin\alpha = \frac{c\tau}{\omega_0\tau}$; отсюда и получается соотношение (3.15).

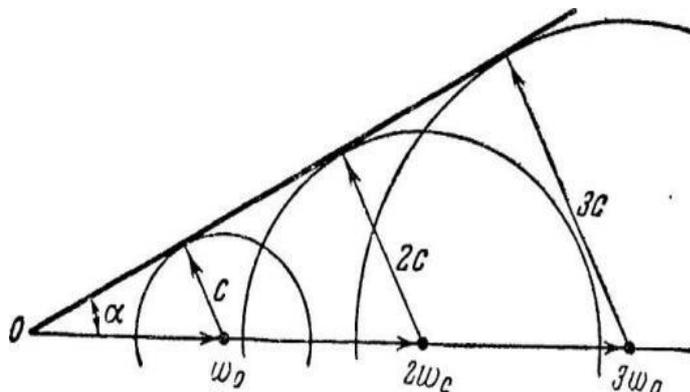


Рисунок 3.12 – Конус Маха

3.4. Различные формы уравнения энергии

Рассматривая истечение газа при отсутствии энергетического обмена, нетрудно убедиться в том, что скорость истечения ни при каких условиях не может быть получена выше некоторой предельной величины. В самом деле, из соотношения:

$$i_0 = i + A \frac{c^2}{2g} \quad (3.16)$$

следует, что максимальная скорость получается в том случае, когда теплосодержание в потоке равно нулю, т. е. когда полное теплосодержание газа целиком преобразуется в кинетическую энергию направленного движения.

$$i = 0 \quad A \frac{c_{max}^2}{2g} = i_0. \quad (3.17)$$

Отсюда получим формулу для предельного значения скорости в газе:

$$c_{max} = \sqrt{\frac{2g}{A} \cdot i_0}. \quad (3.18)$$

Соответствующая приближенная формула для воздуха, выведенная в предположении постоянства теплоемкости ($C_p = 0,24$) имеет вид:

$$c_{max} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 427 \cdot 0,24 \cdot T_0} \approx 44,8\sqrt{T_0}.$$

Если температура торможения (полная температура) $T_0 = 300 \text{ }^\circ\text{K}$, то максимальная возможная скорость истечения $c_{max} = 776 \text{ м/сек}$.

Повышение предельного значения скорости может быть достигнуто только путем повышения температуры торможения (полного теплосодержания).

Из равенства (3.16) следует: чтобы привести газ из состояния покоя в движение со скоростью c , необходимо израсходовать часть его теплосодержания равную:

$$A \frac{c^2}{2g} = i_0 - i. \quad (3.19)$$

Разделив обе части (3.19) на полное теплосодержание, получим:

$$\frac{i_0 - i}{i_0} = \frac{AC^2}{2gi_0}.$$

При постоянной теплоемкости C_p это безразмерное уравнение примет вид ($i = C_p T$):

$$\frac{T_0 - T}{T_0} = \frac{AC^2}{2gC_p T_0},$$

т. к. $C_p = \frac{K}{K-1} A \cdot R$, то

$$\frac{T_0 - T}{T_0} = \frac{AC^2}{2g \frac{K}{K-1} A R T_0}.$$

Скорость распространения звука в газе равна:

$$a = \sqrt{KgRT} = \sqrt{K \frac{P}{\rho}} = \sqrt{\frac{dP}{d\rho}};$$

$$\frac{T_0 - T}{T_0} = \frac{C^2}{\frac{2}{K-1} a_0^2} = \frac{C^2}{a_0^2} \cdot \frac{K-1}{2}.$$

Отсюда получаем новое выражение для предельной скорости истечения, которая будет иметь место при $T = 0$:

$$C_{max} = a_0 \sqrt{\frac{2}{K-1}}. \quad (3.20)$$

Для воздуха $K = 1,4$:

$$C_{max} = 2,23 a_0. \quad (3.21)$$

Следовательно, предельная скорость истечения воздуха не может превосходить таковую в неподвижном воздухе более чем в 2,23 раза.

Разделим теперь правую и левую часть равенства (3.16) на теплосодержание в потоке:

$$\frac{i_0 - i}{i} = \frac{AC^2}{2gi}. \quad (3.22)$$

Тогда последнее равенство при постоянном C_p , примет вид:

$$\frac{T_0 - T}{T} = \frac{AC^2}{2gC_p T}.$$

Помня, что $C_p = \frac{K}{K-1} RT$, получили:

$$\frac{T_0 - T}{T} = \frac{AC^2}{2g \frac{K}{K-1} R T A} = \frac{K-1}{2} * \frac{C^2}{a^2} = \frac{K-1}{2} M^2, \quad (3.23)$$

где $a^2 = KgRT$ и $\frac{C^2}{a^2} = M^2$.

Как известно, отношение скорости потока в данной точке и скорости распространения звука в потоке обозначают буквой M и называют числом Маха.

Как это будет показано ниже, число Маха будет являться одним из основных критериев подобия для газовых течений с большой скоростью.

Если число $M < 1$ – течение газа называется дозвуковым. При $M > 1$ – сверхзвуковым.

Из последней формулы получаем зависимость для отношения температуры торможения к температуре потока:

$$\frac{T_0}{T} - 1 = \frac{K-1}{2} M^2.$$

Откуда

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{K-1}{2} M^2;$$

$$\frac{P_0}{P} = \left(1 + \frac{K-1}{2} M^2\right)^{\frac{K}{K-1}}.$$

Поскольку скорость потока может быть ниже или выше скорости звука, то существует и такой режим, когда скорость потока равна скорости звука, т.е. $M = 1$. Этот режим называется критическим и ему соответствует вполне определенное значение температуры в потоке. Из равенства (3.16) следует, что $T_0 = T_{кр.}$

$$\frac{T_0}{T_{кр.}} = 1 + \frac{K-1}{2} = \frac{2+K-1}{2} = \frac{K+1}{2}.$$

Откуда

$$T_{кр.} = \frac{2}{K+1} T_0. \quad (3.24)$$

Для воздуха $K = 1,4$ и $T_{кр.} = \frac{2}{K+1} T_0$, т. е. критическая температура получается ~ на 20 % ниже температуры торможения.

Само значение скорости звука для критического режима отличается от такого для заторможенного газа, но также является вполне определенным.

Поскольку

$$\frac{a_{кр.}}{a_0} = \sqrt{\frac{T_{кр.}}{T_0}},$$

то

$$a_{кр.} = a_0 \sqrt{\frac{T_{кр.}}{T_0}} = a_0 \sqrt{\frac{2}{K+1}} = \sqrt{\frac{2}{K+1} K g R T_0}.$$

Для воздуха $K = 1,4$, $R = 29,27$ и $g = 9,8$.

$$a_0 = 20,1 \sqrt{T_0}$$

и

$$a_{кр.} = 18,3 \sqrt{T_0}.$$

Можно характеризовать степень преобразования теплосодержания в кинетическую энергию еще одним способом.

Помня, что $i_{кр} = C_p T_{кр}$, получим:

$$\frac{T_0 - T}{T_{кр.}} = \frac{AC^2}{2g \frac{K}{K-1} R A T_{кр.}} = \frac{K-1}{2} \cdot \frac{C^2}{a_{кр}^2}$$

или

$$\frac{T_0 - T}{T_{кр}} = \frac{K-1}{2} \lambda^2,$$

где $\lambda = \frac{C}{a_{кр}}$.

Величину λ , представляющую собой отношение скорости потока к критической скорости, называют коэффициентом скорости. λ в газодинамике играет важную роль.

Выразим отношение температур T/T_0 через λ :

$$T_0 - T = \left(\frac{K-1}{2} \lambda^2 \right) T_{кр.}$$

Разделив обе части равенства на T_0 , получим:

$$1 - \frac{T}{T_0} = \left(\frac{K-1}{2} \lambda^2 \right) \frac{T_{кр.}}{T_0};$$

$$\frac{T}{T_0} = 1 - \frac{K-1}{2} \lambda^2 \frac{T_{кр.}}{T_0}.$$

Но так как $\frac{T_{кр.}}{T_0} = \frac{2}{K+1}$,

$$\frac{T}{T_0} = 1 - \frac{K-1}{K+1} \lambda^2 \quad (3.25)$$

$$\frac{P}{P_0} = \left(1 - \frac{K-1}{K+1} \lambda^2 \right)^{\frac{K}{K-1}}.$$

Величины $\frac{T}{T_0} = \tau(\lambda)$; $\frac{P}{P_0} = \pi(\lambda)$; $\frac{v}{v_0} = \xi(\lambda)$ называются **газодинамическими функциями**. Эти функции приводятся в справочниках для нескольких значений показателя адиабаты $k = \frac{C_p}{C_v}$.

С помощью газодинамических функций можно очень легко определить по величине λ отношения $\frac{T}{T_0}$; $\frac{P}{P_0}$; $\frac{v}{v_0}$ и по известным величинам статических параметров определить заторможенные параметры или наоборот.

Между числами M и λ существует следующая связь:

$$M^2 = \frac{2}{k+1} = \frac{\lambda^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2}$$

Или

$$\lambda^2 = \frac{k+1}{2} = \frac{M^2}{1 + \frac{k-1}{2} M^2}$$

С учетом того, что процесс торможения газа является изоэнтропийным, тогда для соотношений между параметрами заторможенного потока и текущими параметрами получают следующие равенства:

$$\tau = \frac{T}{T_0} = 1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2$$

$$\pi = \frac{p}{p_0} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right)^{\frac{k}{k-1}}$$

$$\varepsilon = \frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}}$$

Численные значения основных газодинамических функций, можно найти в таблице 1 «Газодинамические функции для воздуха (k = 1,4)» [3].

Ниже, в табл. 3.1, приведен фрагмент таблицы ГД функций.

Таблица 3.1 – Газодинамические функции

λ	$\tau = \frac{T}{T^*}$	$\pi = \frac{P}{P^*}$	$q(\lambda)$	$Y(\lambda)$	M
k = 1,4					
	1,000	1,0000	0,000	0,000	0,000
0,10	0,9983	0,9942	0,1571	0,1580	0,0914
0,20	0,9933	0,9768	0,3102	0,3176	0,1830
0,30	0,9850	0,9485	0,4557	0,4804	0,276

3.5. Истечение газа через суживающееся сопло

Исследуем процесс равновесного (без трения) адиабатного истечения газа через сопло из резервуара, в котором газ имеет параметры p_1, v_1, T_1 . Скорость газа на входе в сопло обозначим через C_1 . Будем считать, что давление газа на выходе из сопла P_2 равно давлению среды, в которую вытекает газ.

Расчет сопла сводится к определению скорости и расхода газа на выходе из него, нахождению площади поперечного сечения и правильному выбору его формы. По мере протекания газа через сопло его давление быстро падает, а скорость увеличивается, т.е. газ расширяется и удельный объем его растет. В узком выходном сечении давление достигает наименьшего значения и называется критическим. Скорость же становится наибольшей и также называется критической. Измерения показали, что для большинства газов и паров критическое давление составляет примерно половину давления на входе в сопло $P_{кр} \sim 0,5 P_1$. Суживающееся сопло применяют для увеличения скорости истечения дозвуковых потоков. На выходе суживающегося сопла получить сверхзвуковую скорость невозможно.

Рассмотрим процесс истечения газа из суживающегося сопла, соединенного с газовым резервуаром большого объема. Обозначим параметры газа в резервуаре через p_1, v_1, T_1 , они не меняются с течением времени. Начальную скорость газа в резервуаре примем равной нулю.

Как известно из термодинамики, уравнение сохранения энергии для установившегося потока пара или газа в общем случае имеет вид:

$$h_0 + \frac{c_0^2}{2} + q = h_1 + \frac{c_1^2}{2} + L, \quad (3.26)$$

где h_0, h_1 – энтальпия (теплосодержание) 1 кг пара или газа в сечении 0-0 и 1-1;

$c_0^2/2, c_1^2/2$ – кинетическая энергия в сечении 0-0 и 1-1;

q – подводимая теплота;

L – отводимая работа.

В интегральной форме уравнение сохранения энергии для энергетически изолированных потоков записывается в виде:

$$h + c^2/2 = const, \quad (3.27)$$

т. е. для 1 кг массы рабочего тела сумма энтальпии и кинетической энергии есть величина постоянная для данного потока.

Часто энтальпию выражают через удельный объем и давление, и соответственно уравнение сохранения энергии записывается по следующей форме:

$$\frac{k}{k-1}pv + \frac{c^2}{2} = const. \quad (3.28)$$

Рассмотрим процесс изоэнтропийного истечения через сужающееся сопло (см. рис. 3.13).

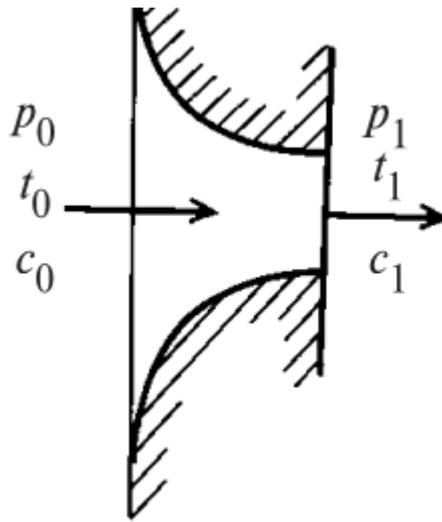


Рисунок 3.13 – Изоэнтروпийное течение через сужающееся сопло

Суживающиеся сопла конструктивно просты и имеют сравнительно небольшие потери из-за трения газа о стенки сопла и внутреннего трения газа.

Рассмотрим одномерное движение газа в канале. На входе в канал заданы параметры:

p_0, t_0, c_0 на входе – статическое давление p_1 .

Течение в канале изоэнтропийное. Канал имеет переменное сечение, закон изменения площади сечения F по оси канала требуется определить в результате анализа.

Для изучения параметров потока по длине канала необходимы следующие уравнения: уравнения состояния, уравнения изоэнтропы, уравнения расхода, уравнение энергии.

Требуется определить законы распределения всех параметров по длине канала, а именно, изменения давления P , удельного объема v , скорости C и площади поперечного сечения F .

В качестве определяющего параметра примем давление P в любом сечении канала. По граничным условиям давление в канале $p_1 \leq p \leq p_0$, т. е. оно изменяется в пределах от $P = P_0$ в сечении 0-0, до $P = P_1$ в сечении 1-1.

Найдем закон изменения скорости C потока в произвольном сечении канала в зависимости от давления P в этом сечении. Применяя уравнение энергии (3.27) для двух сечений: 0-0 и произвольного сечения, получаем:

$$\frac{c^2}{2} = \frac{k}{k-1} \overline{p_0 v_0} \left(1 - \frac{pv}{\overline{p_0 v_0}}\right).$$

Заменяя отношение $\frac{v}{v_0}$ по закону изоэнтропы, имеем:

$$\frac{pv}{\overline{p_0 v_0}} = \frac{T}{T_0} = \frac{p}{\overline{p_0}} \left(\frac{p}{\overline{p_0}}\right)^{-\frac{1}{k}} = \left(\frac{p}{\overline{p_0}}\right)^{\frac{k-1}{k}} = \varepsilon^{\frac{k-1}{k}}, \quad (3.29)$$

где $\varepsilon = \frac{p}{\overline{p_0}}$ (3.30) – относительное давление в произвольном сечении.

Учитывая (3.29) и (3.30), имеем закон изменения скорости по длине канала:

$$c = \left[\frac{2k}{k-1} \bar{p}_0 \bar{v}_0 \left(1 - \varepsilon^{\frac{k-1}{k}}\right) \right]^{\frac{1}{2}} = \left[2c_p \bar{T}_0 \left(1 - \varepsilon^{\frac{k-1}{k}}\right) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.30)$$

Закон изменения площади по длине канала найдем из уравнения расхода:

$$\begin{aligned} F &= G \frac{v}{c} = G \frac{\bar{v}_0}{(2c_p \bar{T}_0)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\varepsilon^{\frac{1}{k}}}{\left(1 - \varepsilon^{\frac{k-1}{k}}\right)^{\frac{1}{2}}} = \\ &= G \left(\frac{\bar{v}_0}{p_0}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{k-1}{2k}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \varepsilon^{-\frac{1}{k}} \cdot \left(1 - \varepsilon^{\frac{k-1}{k}}\right)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Подставив $\varepsilon^{кр}$ в (3.31), найдем критическую площадь поперечного сечения:

$$F_{кр} = \frac{1}{\chi} G \left(\frac{\bar{v}_0}{p_0}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.32)$$

где

$$\chi = \left[k \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{k-1}} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Можно сказать, что $F_{кр}$ площадь минимального сечения канала.

Рассмотрим суживающееся сопло при известном значении площади в узком сечении F_l .

Если

$P_l = P_{кр}$, то расход через сопло имеет вид:

$$G_{кр} = F_l \cdot \chi \cdot \left(\frac{\bar{p}_0}{\bar{v}_0}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.33)$$

Если $P > P_{кр}$, то расход через сопло по уравнению расхода будет составлять $G = \frac{F_l c_l}{v_l}$, где C_l и V_l .

Определяются по (3.29)-(3.31), при $\varepsilon = \varepsilon_1 > \varepsilon_{кр}$.

Подставив в уравнение расхода значения C_l и V_l , получим:

$$G = \frac{F_l c_l}{v_l} = F_l \left(\frac{2k}{k-1}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{\bar{p}_0}{\bar{v}_0}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \varepsilon^{\frac{1}{k}} \cdot \left(1 - \varepsilon^{\frac{k-1}{k}}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.34)$$

Поделив левую и правую части (3.33) на левую и правую части (3.32), получим:

$$\frac{G}{G_{кр}} = \frac{1}{\chi} \cdot \left(\frac{2k}{k-1}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \varepsilon_1^{\frac{1}{k}} \cdot \left(1 - \varepsilon_1^{\frac{k-1}{k}}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.35)$$

где $G_{кр}$ определяется по (3.33), а относительное давление за соплом меняется в пределах $\varepsilon_{кр} \leq \varepsilon_1 \leq 1$.

На рис. 3.14 показана зависимость расхода через суживающееся сопло. Правая ветвь описывает зависимость (3.35), левая ветвь – прямая линия $G/G_{кр} = 1$.

Ветвь правее $\varepsilon_{кр}$ часто описывается уравнением эллипса, которое с большой степенью точности заменяет истинное уравнение расхода (3.35) (см. рис. 3.14). В результате получаем:

$$\frac{G}{G_{кр}} = \left[1 - \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_{кр})^2}{(1 - \varepsilon_{кр})^2} \right]^{\frac{1}{2}} \text{ при } \varepsilon_{кр} < \varepsilon_1$$

$$\frac{G}{G_{кр}} = 1 \text{ при } 0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_{кр},$$

где $G_{кр}$ находят по (3.33).

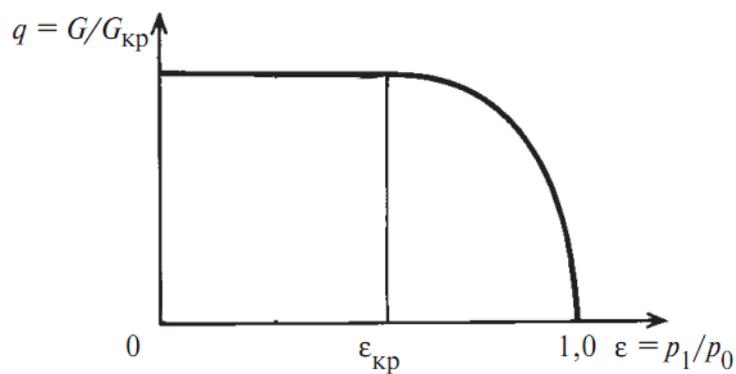


Рисунок 3.14 – Расход пара через сопло в зависимости от давления в выходном сечении сопла Р

ГЛАВА 4. СИЛОВОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ НА ПОТОК. СОПЛО ЛАВАЛЯ

Виды физического воздействия на поток

В общем случае характер течения жидкости /или газа в канале определяется множеством внешних факторов. Внешние воздействия, изменяющие скорость течения, называют физическими воздействиями. В пределах тех задач, которые изучаются в обычной газовой динамике, рассматриваются следующие пять видов физического воздействия:

Геометрическое воздействие – изменение площади поперечного (проходного) сечения канала по его длине (сужение или расширение канала).

Расходное воздействие – присоединение дополнительной массы жидкости или ее отбор по длине канала (вдув или отсос газа через перфорированные стенки канала, например).

Тепловое воздействие – нагрев движущейся жидкости за счет подвода тепла извне или охлаждения путем отвода тепла.

Механическое воздействие – подвод или отвод механической (технической) работы. В первом случае над жидкостью совершается работа – сжатие газа в компрессоре, например. Во втором – газ совершает работу, например, вращает турбину.

Воздействие трения – изменение скорости течения под влиянием трения.

Все перечисленные виды воздействия входят в основные уравнения газовой динамики: изменение площади канала и расходное воздействие – в уравнение неразрывности или расхода, тепловое и механическое воздействия – в уравнение энергии (уравнение энтальпии), воздействие трения в виде гидравлических потерь – в уравнение Бернулли.

4.1. Геометрическое воздействие. Уравнение Гюгонио

На практике мы наиболее часто сталкиваемся с геометрическим воздействием на течение жидкости, когда имеет место только изменение площади проходного сечения канала по длине.

Продифференцировав уравнение неразрывности (расхода) для изолированного одномерного течения (для элементарной струйки):

$$m = \rho W F = Const,$$

где m – массовый расход;

ρ – плотность;

W – скорость жидкости;

F – площадь проходного сечения канала.

$$dm = \rho W dF + \rho F dW + W F d\rho = 0,$$

и разделив почленно на $m = \rho WF$, получим дифференциальное уравнение неразрывности:

$$\frac{dm}{m} = \frac{dF}{F} + \frac{dW}{W} + \frac{d\rho}{\rho} = 0.$$

Исключим из этого уравнения член, учитывающий изменение плотности. С этой целью преобразуем уравнение Бернулли для изолированного течения (для элементарной струйки):

$$\frac{dp}{\rho} + WdW = 0$$

с учетом выражения для скорости звука:

$$a^2 = \frac{dp}{d\rho}$$

$$WdW = -\frac{dp}{\rho} = -\frac{dp}{d\rho} \frac{d\rho}{\rho} = -a^2 \frac{d\rho}{\rho}.$$

Или

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{WdW}{a^2}.$$

Подставив последнее выражение для плотности в дифференциальное уравнение неразрывности, получим частный случай уравнения обращения воздействия для случая геометрического воздействия на течение жидкости – уравнение Гюгонио:

$$\frac{dW}{W} (M^2 - 1) = \frac{dF}{F},$$

которое показывает, что

если имеется дозвуковой поток (при $M < 1$),
то поток ускоряется ($dW > 0$) в сужающихся каналах ($dF < 0$),
и тормозится ($dW < 0$) в расширяющихся каналах ($dF > 0$).

Сверхзвуковой поток (при $M > 1$), наоборот
ускоряется ($dW > 0$) в расширяющихся каналах ($dF > 0$)
и тормозится ($dW < 0$) в сужающихся каналах ($dF < 0$).

Условие перехода от дозвукового течения к сверхзвуковому – ($dF = 0$).

Любое физическое воздействие одинакового знака противоположным образом влияет на дозвуковые и сверхзвуковые газовые потоки.

Переход через скорость звука с помощью одностороннего воздействия невозможен. Переход через скорость звука возможен только в том случае, если в критическом сечении знак воздействия изменить на обратный.

Математическая запись закона обращения воздействия – уравнение обращения воздействия (уравнение закона обращения воздействия), было получено Л. А. Вулисом, и поэтому его часто называют просто *уравнением Вулиса*. Оно устанавливает связь между скоростью потока и физическими воздействиями.

В основе вывода уравнения обращения воздействия лежат основные уравнения газовой динамики, поскольку все виды воздействия так или иначе входят в них: изменение площади канала и расходное воздействие – в уравнение неразрывности или расхода, тепловое и механическое воздействия – в уравнение энергии (уравнение энтальпии), воздействие трения в виде гидравлических потерь – в уравнение Бернулли.

Решив совместно систему дифференциальных уравнений, включающую: уравнение неразрывности:

$$\frac{dm}{m} = \frac{dF}{F} + \frac{dW}{W} + \frac{d\rho}{\rho} = 0 \quad (4.1)$$

уравнение Бернулли:

$$\frac{d\rho}{\rho} + WdW + d\ell_t + d\ell_r = 0 \quad (4.2)$$

уравнение энергии:

$$dh + WdW + dq_e + dq_t = 0 \quad (4.3)$$

уравнение состояния:

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T}. \quad (4.4)$$

Проведем анализ изменения скорости в результате геометрического (dF/F), расходного (dm/m), теплового (dq_e), механического ($d\ell_t$) воздействий и воздействия трения ($d\ell_r$).

Соберем в левую часть величины, содержащие скорость, а в правую члены, описывающие физические воздействия. После сокращения обеих частей на a^2/k и замены $w/a = M$, получим:

$$\frac{dW}{W} (M^2 - 1) = \frac{dF}{F} - \frac{dm}{m} - \frac{k-1}{a^2} dq_e - \frac{1}{a^2} d\ell_t - \frac{k}{a^2} d\ell_r. \quad (4.5)$$

Формула (4.5) называется уравнением обращения воздействий. Она выражает так называемый закон обращения воздействий. Согласно этому закону, для непрерывного изменения скорости газа в одну сторону за счет только одного физического воздействия необходимо, чтобы знак этого воздействия менялся на обратный в момент перехода через скорость звука. Если в процессе участвуют сразу несколько физических воздействий, то в момент перехода через скорость звука знак их суммы должен измениться на обратный.

Из уравнения обращения воздействий (4.5) легко получить пять частных случаев в изменения скорости потока под влиянием какого-нибудь одного физического воздействия. Для этого в уравнении (4.5) все остальные воздействия надо положить равными нулю.

Так, например, если геометрическое воздействие $dF \neq 0$, $adm = d\ell_t = d\ell_r = dq_e = 0$, то получается уравнение Гюгонио:

$$\frac{dW}{W} (M^2 - 1) = \frac{dF}{F},$$

которое уже было рассмотрено выше.

Если взять только одно расходное воздействие $dm \neq 0$, то уравнение (4.5) приобретает такой вид:

$$\frac{dW}{W} (M^2 - 1) = -\frac{dm}{m}. \quad (4.6)$$

Течение, отвечающее этому уравнению, реализуется внутри расходного сопла. Его схема дана на рис. 4.1. Оно представляет собой трубу или канал постоянного сечения, имеющий на боковых стенках систему отверстий, через которые подводятся в основной поток дополнительные массы газа или отводятся из него.

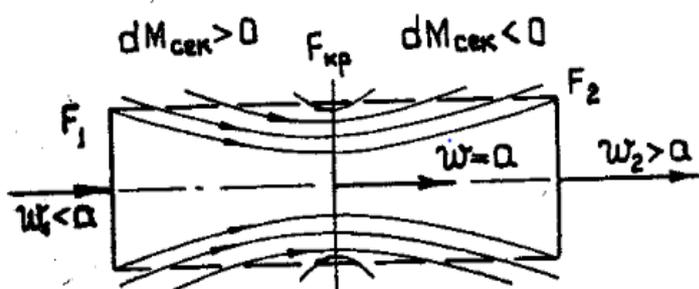


Рисунок 4.1 – Схема воздействия на поток. Расходное сопло

Если на входе $w_1 < a$ ($M_1 < 1$) и к потоку подводится дополнительная масса газа (следовательно, расход увеличивается вдоль потока, $dm > 0$), то для согласования знаков левой и правой части уравнения (4.6) необходимо, чтобы $dw > 0$. Таким образом, от входа до критического сечения скорость будет нарастать.

В критическом сечении $M = 1$, значит $dm/m = 0$, т. е. расход в этом сечении проходит через максимум. За критическим сечением газ отбирается, расход уменьшается вдоль потока, т. е. $dm < 0$. Так как здесь $M > 1$, то из уравнения (4.6) получается, что $dw > 0$.

Рассматривая рис. 4.1, можно заметить, что основной поток, т. е. масса газа, которая поступает в канал через входное сечение F_1 , имеет форму, напоминающую сопло Лавалья: сначала поток поджимается, в горле его сечение минимально, за горлом он расширяется. В отличие от геометрического сопла, в расходном поджатие основного потока происходит за счет дополнительной массы газа, которая оказывает вытеснительное действие. «Стенкой» для основного потока является в этом случае граница струи дополнительной массы газа. Изменение параметров основного потока, движущегося через расходное сопло, происходит по тем же законам, что и в случае обычного геометрического сопла.

4.2. Конструктивные особенности сопла Лавалья



Карл Густав Патрик де Лаваль (9 мая 1845 г. – 2 февраля 1913 г.) – шведский инженер и изобретатель. Родился в Орсе, Швеция. Окончил Технологический институт в Стокгольме в 1866 году (ныне Королевский технологический институт) и Упсальский университет в 1872 году.

В 1890 году изобрел сопло, служащее для подачи пара в турбину, получившее впоследствии его имя, и использующееся в том же назначении по настоящее время.

В XX веке сопло Лавалья нашло применение в реактивных двигателях для создания реактивной струи.

Лавалю принадлежит также честь изобретения центрифуги для разделения на фракции смесей, состоящих из жидкостей с разной плотностью. Это изобретение он использовал как молочный сепаратор.

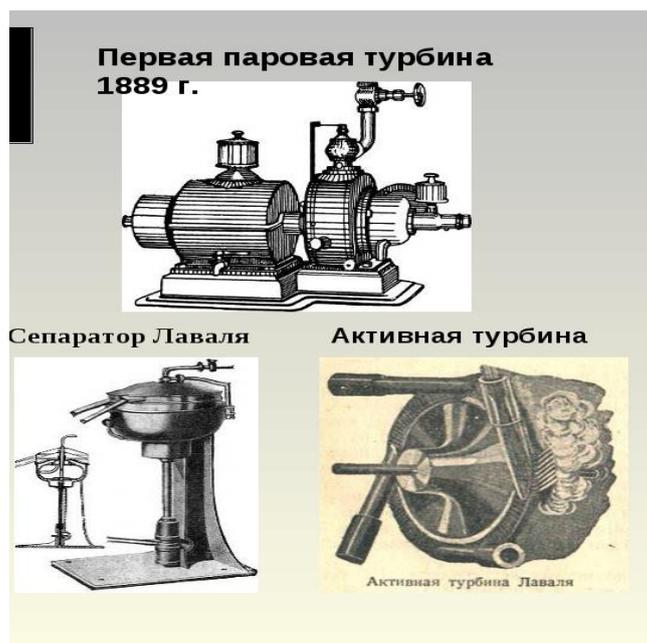


Рисунок 4.2 – Изобретения де Лавалья

В 1894 году он запатентовал доильный аппарат, первый практически используемый образец которого был выпущен уже после его смерти компанией Alfa Laval, основанной де Лавалем и Оскаром Ламмом в 1883 году.

За свою жизнь Густав де Лаваль запатентовал 93 изобретения.

Сопло Лавалья – газовый канал особого профиля, разгоняющий проходящий по нему газовый поток до сверхзвуковых скоростей.

Широко используется на некоторых типах паровых турбин и является важной частью современных ракетных двигателей и сверхзвуковых реактивных авиационных двигателей.

Сопло представляет собой канал, суженный в середине. В простейшем случае такое сопло может состоять из пары усеченных конусов, сопряженных узкими концами.

Эффективные сопла современных ракетных двигателей профилируются на основании газодинамических расчетов. На рис. 4.3 приведена схема течения газа через сопло Лавала.

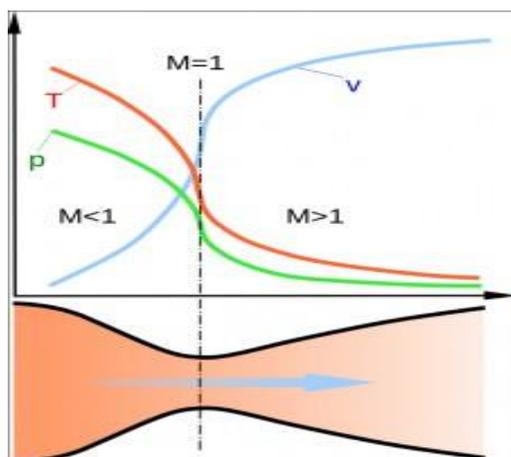


Рисунок 4.3 – Режим полного расширения газа при $P(\text{срез}) = P_n$

Картина испытания ракетного двигателя приведена на рис. 4.4.

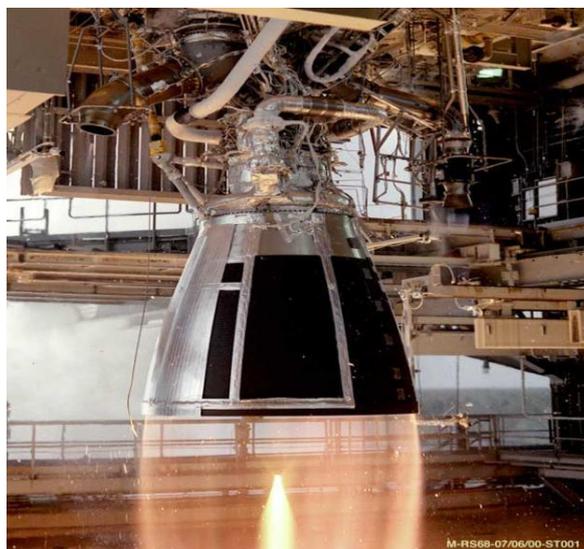


Рисунок 4.4 – Огневые стендовые испытания ракетного двигателя

4.3. Формула Витошинского

Известно, что одним из важнейших параметров турбины является ее геометрия. Определенные геометрические параметры контура канала самым существенным образом влияют на параметры течения в нем. Так в ряде работ показано, что только перераспределение кривизны по длине контура, например, лопатки турбины может привести к снижению потерь в турбинной решетке до нескольких процентов.

В работах, связанных с исследованием течений, как правило, приводится форма канала, исходные данные для расчета потока, результаты теоретического расчета параметров потока, экспериментальные данные, сравнение теоретических и экспериментальных данных, анализ полученных результатов, выводы. В практическом плане в подобных работах отсутствует этап – исследование геометрических параметров контура канала. Отсутствие указанного этапа можно объяснить сложностью и трудоемкостью подобных исследований, если учесть, что форма контура лопатки турбины, в частности, задается во многих случаях матрицей прямоугольных координат.

Важность такого исследования связана с тем, что на основании анализа геометрических характеристик контура можно предсказать поведение потока выделить характерные точки или области течения и т. д. Проектант, например, после такого исследования может при необходимости перепроектировать канал; а экспериментатор – построить систему измерений с учетом выявленных особенностей и таким образом увеличить эффективность турбины.

Нами были проведены уточненные расчеты контура сопла Лаваля [5]. Базой для расчетов была выбрана формула Витошинского:

$$r = \frac{r_{кр}}{\sqrt{1 - \left[1 - \left(\frac{r_{кр}}{r_{вх}} \right)^2 \right] \cdot \frac{\left(1 - \frac{3 \cdot x^2}{l'^2} \right)^2}{\left(1 + \frac{x^2}{l'^2} \right)^3}}},$$

где r – текущий радиус;

$r_{кр}$ – радиус критического сечения;

$r_{вх}$ – радиус входного сечения;

x – текущая координата;

l' – параметр, связанный с длиной криволинейного участка.

Значения радиусов $r_{кр}$ и $r_{вх}$ выбирались из конструктивных условий /1,2/. Параметр l , принимался равным $4r_{кр}$.

Профиль сопла при расчетах по формуле Витошинского пригоден для соединения труб различных диаметров при испытаниях на дозвуковых скоростях. Сопла, присоединяемые к резервуарам, могут очерчиваться по дугам окружностей, лемнискатам или параболам (см. рис. 4.5).

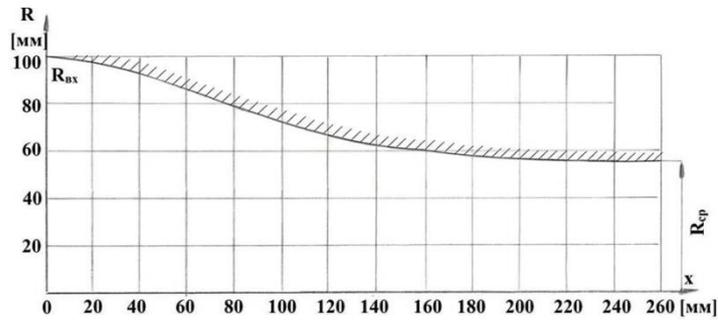


Рисунок 4.5 – Профиль сужающейся части сопла Лавалья.
 Рассчитано по формуле Витошинского

Таким образом, одним из способов повышения эффективности проектирования энергетического оборудования является применение систем измерения, на основе анализа геометрических характеристик контура сопла.

4.4. Сопла с косым срезом

До сих пор рассматривались сопла, выходное сечение которых было расположено перпендикулярно оси. Такие сопла называются нормальными, или соплами с прямым срезом.

В турбиностроении часто применяют сопла с косым срезом, у которых плоскость выходного сечения расположена под углом к оси сопла (рис. 4.6).

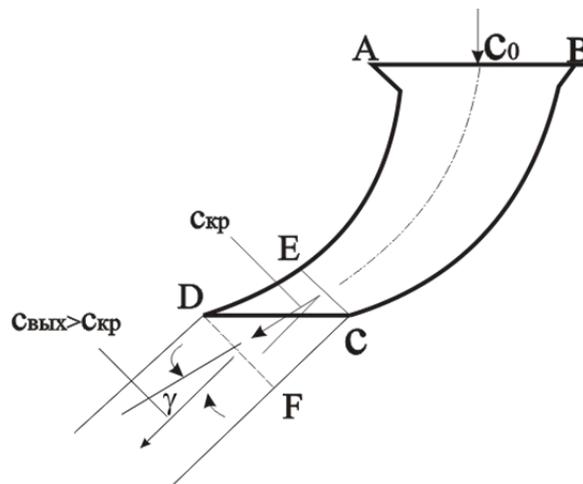


Рисунок 4.6 – Сопло с косым срезом

На участке от входа в сопло АВ до сечения СЕ канал сопла выполняется сужающимся. Но благодаря наличию полуоткрытой части канала СDE, который называется косым срезом, сопло при $\pi_c = p^*/p_c > \pi_{кр} = p^*/p_{кр}$, работает как сопло Лавалья, обеспечивая получение в косом сечении CD сверхзвуковых скоростей.

При $\pi_c < \pi_{кр}$ сопло с косым срезом работает как обычное сужающееся сопло. В сечении CE устанавливается давление выхода $p_{вых} = p_{ср}$ и в полуоткрытой части сопла CDE скорость и направление струи не меняются. Если же давление за соплом $p_{ср}$ меньше критического, то в наиболее узком сечении сопла CE , перпендикулярном оси струи, устанавливается критическое давление. На участке стенки сопла ED давление постепенно уменьшается от $p = p_{ср}$ в точке D (если сопло работает в расчетном режиме).

Так как на противоположной стороне струи, вдоль линии CF , давление практически равно $p_{ср}$, то струя отклоняется от стенки ED под действием избыточного давления. Одновременно с этим скорость струи увеличивается от $c = c_{кр}$ в узком (критическом) сечении до $c = c_{вых}$ в сечении DF , проходящем через точку D перпендикулярно новому положению оси струи.

Если сопло с косым срезом работает при нерасчетном отношении давлений (когда турбина работает на переменных режимах), то несколько меняется угол отклонения струи и значение выходной скорости $c_{вых}$. Однако при этом, как правило, не возникают ни отрыв потока от стенок сопла, ни скачок уплотнения в сопле: сопло с косым срезом «автоматически» приспосабливается к изменению режима работы. Потери энергии при работе сопла с косым срезом на нерасчетном режиме оказываются значительно меньшими, чем в сверхзвуковом сопле с прямым срезом.

Таким образом, сопло с косым срезом имеет определенные достоинства по сравнению с соплом Лавалья.

Первым достоинством сопла с косым срезом является то, что будучи простым по конструкции (не имея специальной расширяющейся части), оно позволяет при наличии сверхкритических степеней понижения давления получить сверхзвуковые скорости.

Второе достоинство таких сопел заключается в том, что в них не происходит перерасширения газа, как это наблюдается в соплах Лавалья, когда $\pi_{с.р.} < \pi_c$.

Если у сопел Лавалья при повышении давления окружающей среды вследствие перерасширения возникают скачки уплотнения, приводящие к потерям полного давления, то у сопел с косым срезом повышение давления за соплом не приводит к возникновению нерасчетного режима и появлению связанных с этим потерь.

Отметим, что при значительных сверхкритических перепадах давлений косой срез не может обеспечить полного расширения газа. Недостатком таких сопел является наличие поворота потока от оси канала на угол γ . Как правило, в таком повороте нет никакой необходимости.

ГЛАВА 5. ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ НА ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНЕ, ОБТЕКАЕМОЙ ПОТОКОМ ВЯЗКОГО ГАЗА

Исследование теории пограничного слоя явилось важнейшим толчком в развитии аэро- и газодинамики. Благодаря трудам таких ученых, как Осборн Рейнольдс, Людвиг Прандтль, Жозеф Буссинеск, Теодор фон Карман, Георгий Кружилин и других, сегодня мы видим огромные технические достижения в области авиации, турбостроения и т.д.

Пограничным слоем называется тонкий слой заторможенного газа, образующийся на поверхности тел, обтекаемых потоком. Вязкость газа в пограничном слое является основной причиной образования силы лобового сопротивления.

Определения вязкости (внутреннее трение) – одно из явлений переноса, свойство текучих тел (жидкостей и газов) оказывать сопротивление перемещению одной их части относительно другой. В результате *макроскопическая работа*, затрачиваемая на это перемещение, рассеивается в виде тепла.

Механизм внутреннего трения в жидкостях и газах заключается в том, что движущиеся молекулы переносят импульс из одного слоя в другой, что приводит к выравниванию скоростей – это описывается введением силы трения.

Вязкость газов и жидкостей характеризуют:

– динамическим коэффициентом вязкости (единица измерения в Международной системе единиц (СИ) – паскаль-секунда, $\text{Па} \cdot \text{с}$,

– кинематический коэффициент вязкости – отношение динамического коэффициента к плотности вещества. Классические методы измерения вязкости включают, например, измерение времени вытекания заданного объема через калиброванное отверстие под действием силы тяжести. Прибор для измерения вязкости называется вискозиметром.

При обтекании какого-либо тела частицы газа, проходящие очень близко от его поверхности, будут испытывать сильное торможение. Начиная от некоторой точки вблизи поверхности, скорость потока при приближении к телу уменьшается и на самой поверхности становится равной нулю. Распределение скоростей в других сечениях поверхности аналогично. (см. рис. 5.1).

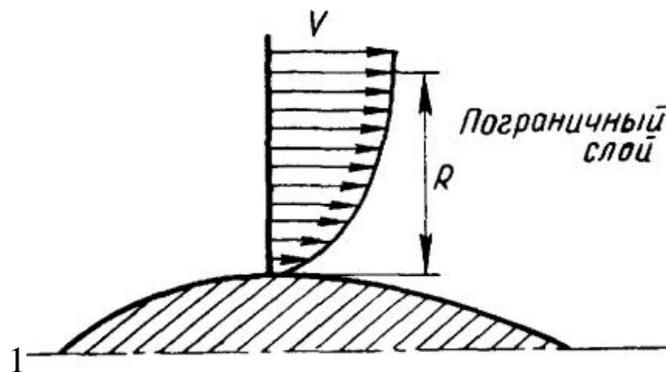


Рисунок 5.1 – Изменение скорости течения воздуха в пограничном слое

Расстояние R , на котором происходит уменьшение скорости, называется толщиной пограничного слоя, а изменение скорости по толщине пограничного слоя – градиентом скорости.

Толщина пограничного слоя измеряется в миллиметрах и зависит от вязкости и давления воздуха, от формы тела, состояния его поверхности и положения тела в воздушном потоке. Толщина пограничного слоя постепенно увеличивается от передней части тела, к задней. На границе пограничного слоя скорость частиц становится равной скорости набегающего потока. Выше этой границы градиента скорости нет, поэтому вязкость газа практически не проявляется.

Таким образом, в пограничном слое скорости частиц изменяются *от скорости внешнего потока на «границе» пограничного слоя до нуля на поверхности тела.*

Из-за градиента скорости характер движения частиц газа в пограничном слое отличается от их движения в потенциальном слое. В пограничном слое вследствие разности скоростей U_1-U_2 частицы приходят во вращательное движение (см. рис. 5.2).

Вращение тем интенсивнее, чем ближе к поверхности тела находится частица. Пограничный слой всегда завихрен и поэтому его называют слоем поверхностного завихрения.

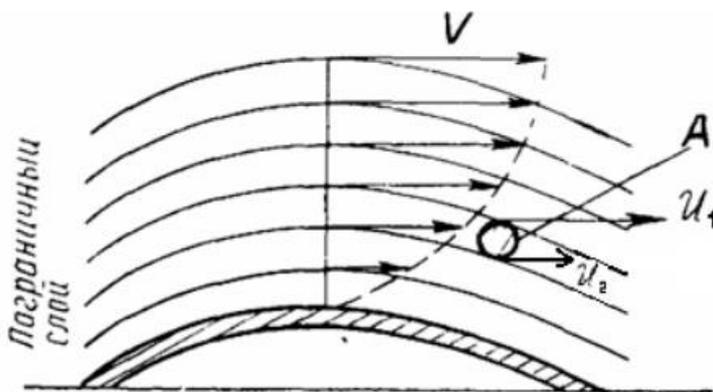


Рисунок 5.2 – Обтекание тела воздушным потоком. Торможение потока в пограничном слое

Частицы газа из пограничного слоя уносятся потоком в область, расположенную позади обтекаемого тела, называемую спутной струей. Скорости частиц в спутной струе всегда меньше скорости внешнего потока, т. к. частицы попадают из пограничного слоя уже приторможенными.

При небольшой скорости набегающего потока газ в пограничном слое течет спокойно в виде отдельных слоев. Такой пограничный слой называется ламинарным (см. рис. 5.3). Пограничный слой завихрен, но движение газа упорядочено, слои не смешиваются, частицы вращаются в пределах одного и того же тонкого слоя.

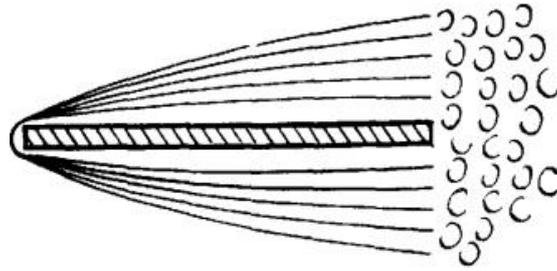


Рисунок 5.3 – Ламинарный пограничный слой

Если в пограничном слое происходит энергичное перемешивание частиц в поперечном направлении и весь пограничный слой беспорядочно завихрен, такой пограничный слой называется турбулентным (см. рис. 5.4).

В турбулентном пограничном слое наблюдается непрерывное перемещение струек воздуха во всех направлениях, что требует большего количества энергии. Сопротивление воздушного потока увеличивается.

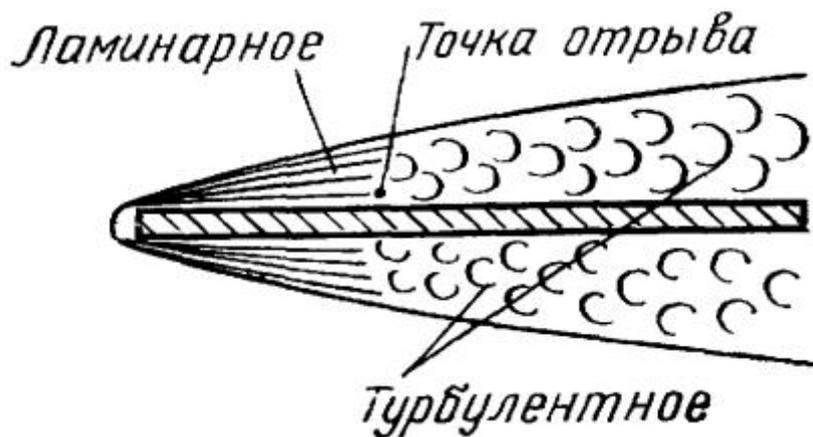


Рисунок 5.4 – Турбулентный пограничный слой

У передней части обтекаемого тела образуется ламинарный пограничный слой, который затем переходит в турбулентный. Такой пограничный слой называется смешанным. (см. рис. 5.5).

При смешанном течении в определенной точке происходит переход пограничного слоя из ламинарного в турбулентный. Расположение ее на поверхности тела зависит от скорости струек, формы тела и его положения в воздушном потоке, а также от шероховатости поверхности. Положение точки определяется координатой X_c .

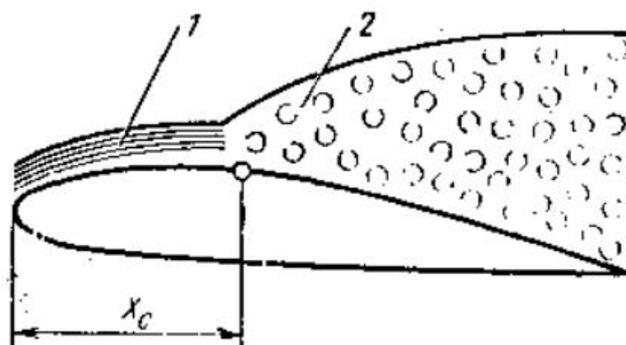


Рисунок 5.5 – Смешанный пограничный слой

При обтекании тела с криволинейной поверхностью давление и скорости в разных точках поверхности будут неодинаковыми. (см. рис. 5.6). При движении потока от точки А к точке Б происходит диффузное расширение потока.

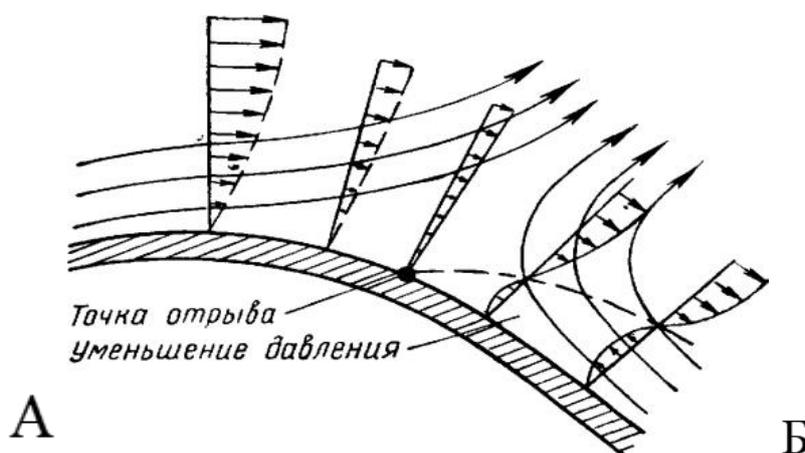


Рисунок 5.6 –Точка отрыва пограничного слоя

Поэтому давление растет, а скорость уменьшается, так как у самой поверхности тела скорости частиц очень малы, под влиянием разности давлений между точками А и Б на этом участке происходит движение газа в обратном направлении. При этом внешний поток продолжает двигаться вперед.

Из-за обратного течения газа внешний поток отесняется от поверхности тела. Пограничный слой набухает и отрывается от поверхности тела. Точка на поверхности тела, в которой происходит отрыв пограничного слоя, называется точкой отрыва.

Отрыв пограничного слоя приводит к образованию вихрей за телом. Положение точки отрыва зависит от характера течения в пограничном слое. При турбулентном течении место отрыва потока лежит значительно дальше по потоку, чем при ламинарном. Вихревая область за телом в этом случае значительно меньше. Это парадоксальное явление объясняется тем, что при турбулентном движении происходит более интенсивное поперечное перемешивание частиц.

Отрыв пограничного слоя наблюдается при обтекании криволинейных поверхностей, например, профиля крыла на больших углах атаки. Это явление очень опасно, т.к. приводит к резкому уменьшению подъемной силы, значительному возрастанию сопротивления движению потока, потере устойчивости.

5.1. Расчет турбулентного пограничного слоя. Гипотеза Прандтля

Ламинарное течение, как показывает опыт, устойчиво только при некоторых условиях, определяемых значением критического числа Рейнольдса. Так, например, при $Re > 2320$ ламинарное течение становится неустойчивым и переходит в турбулентное. Этот переход связан с возникновением в потоке незатухающих возмущений.

Явление изменения характера течения при повышении скорости потока или уменьшения вязкости впервые было установлено в опытах Хагена (1839 г.). Однако закон перехода от ламинарного течения в турбулентное был сформулирован Рейнольдсом значительно позднее, в 1883 г. Им же было введено понятие об осредненном и пульсационном движении. Течение в пограничном слое также может быть либо ламинарным, либо турбулентным. При турбулентном течении скорость, давление и температура не остаются постоянными во времени, а очень часто и неравномерно изменяются.

Явление изменения характера течения при повышении скорости потока или уменьшения вязкости впервые было установлено в опытах Хагена (1839 г.). Однако закон перехода от ламинарного течения в турбулентное был сформулирован Рейнольдсом значительно позднее, в 1883 г. Им же было введено понятие об осредненном и пульсационном движении. Течение в пограничном слое также может быть либо ламинарным, либо турбулентным. При турбулентном течении скорость, давление и температура не остаются постоянными во времени.

Такие изменения называют пульсациями, они являются наиболее характерными признаками турбулентности. Для математического моделирования турбулентного течения выполняется его разложение на осредненное движение и на пульсационное движение. Осредненное по времени значение составляющей скорости u обозначают \bar{u} , а пульсационной скорости – u' . Тогда для составляющей скорости, давления и температуры записывают:

$$u = \bar{u} + u'; \quad v = \bar{v} + v'; \quad P = \bar{P} + P'; \quad T = \bar{T} + T'.$$

Уравнение движения для турбулентного пограничного слоя имеет вид:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - u'v' \right).$$

Уравнение турбулентного пограничного слоя отличается от уравнения ламинарного пограничного слоя наличием дополнительных касательных напряжений. Отсутствие достаточных теоретических предпосылок для замыкания системы уравнений движения Рейнольдса привело к возникновению

различных полуэмпирических теорий, содержащих эмпирические константы турбулентности (от двух до пяти – шести).

Приближенные методы расчета турбулентного пограничного слоя часто основываются на теореме импульсов, используемой и для расчета ламинарного пограничного слоя на пластине. Продольное обтекание пластины характеризуется тем, что для него градиент давления вдоль стенки равен нулю, и поэтому скорость вне пограничного слоя остается постоянной. Закономерности пограничного слоя на плоской пластине являются основой для расчета сопротивления всех тел, у которых при обтекании не возникает резко выраженного отрыва.

Механизм турбулентного течения в упрощенном виде представлен Прандтлем. Для этого вводится понятие пути перемешивания l , аналогичный пути свободного пробега молекул в кинетической теории газов. Разница заключается лишь в том, что там происходит микроскопическое движение молекул, а здесь макроскопическое движение турбулентных объемов. Осредненное по времени значение $\overline{u'v'}$ по теории Прандтля записывается в виде:

$$\overline{u'v'} = -l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \frac{d\bar{u}}{dy}.$$

Для описания процесса переноса импульса Буссинеск предположил, что турбулентное касательное напряжение τ определяется аналогичной формулой закона трения Ньютона:

$$\tau = -\mu \frac{du}{dy}.$$

Тогда для турбулентного течения:

$$\tau = -\rho \overline{u'v'} = -\mu_T \frac{d\bar{u}}{dy},$$

где вместо истинной скорости u входит осредненная скорость \bar{u} , а вместо коэффициента молекулярной вязкости μ – коэффициент турбулентного обмена μ_T или $\nu_T = \mu_T / \rho$. Коэффициент μ_T не является физической константой и в первую очередь зависит от распределения скорости \bar{u} .

Уравнение движения запишется в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left[(\nu + \nu_T) \frac{\partial u}{\partial y} \right].$$

Для определения характера пограничного слоя служит коэффициент C_f . Тело определенной конфигурации имеет свой коэффициент. Так, например, для плоской пластины коэффициент сопротивления турбулентного пограничного слоя равен: $C_f = \frac{0,074}{\sqrt{Re}}$.

Гипотеза Прандтля о пути перемешивания позволяет выполнять практические расчеты турбулентных течений в промышленных аппаратах.

5.2. Пример расчета ламинарного пограничного слоя на плоской пластине, обтекаемой потоком вязкого газа

Покажем на примере расчета ламинарного пограничного слоя на плоской пластине, обтекаемой потоком вязкого газа с постоянной скоростью U_0 , использование интегрального соотношения для пограничного слоя, которое имеет вид:

$$\frac{d}{dx} \left(\int_0^{\delta_n} \rho u^2 dy - u_0 \int_0^{\delta_n} \rho u dy \right) = -\delta_n \frac{dp}{dx} - \tau_0, \quad (5.1)$$

где u – продольная скорость в рассматриваемой точке сечения пограничного слоя, м/с;

u_0 – продольная скорость в ядре потока (вне пограничного слоя), м/с;

ρ – плотность среды, кг/м³;

y – координата рассматриваемой точки по нормали к пластине, м;

x – координата рассматриваемой точки по оси x , м³;

δ_n – толщина пограничного слоя, м;

dp/dx – изменение давления вдоль оси x ;

τ_0 – напряжение трения на твердой стенке, Н/м².

Приведенное интегральное соотношение пригодно для любых режимов течения. На рис. 5.7 показаны основные расчетные параметры пограничного слоя. Линия $A-C$ является верхней границей пограничного слоя; $A-B$ – толщина пограничного слоя на входе в выделенный элемент; $C-D$ – толщина пограничного слоя на выходе из выделенного элемента; $C-C$, $k-k$, $1-1$ – линии тока внешнего потока. Определим число Рейнольдса:

$$Re = \frac{l \cdot u_0}{\nu}, \quad (5.2)$$

где l – длина пластины, м³;

ν – коэффициент кинематической вязкости.

При $Re < 2300$ режим течения будет ламинарным, при $Re > 10000$ – развитым турбулентным. При низких скоростях течение можно принять плотность среды постоянной:

$$Re = \frac{P}{R \cdot T} = const. \quad (5.3)$$

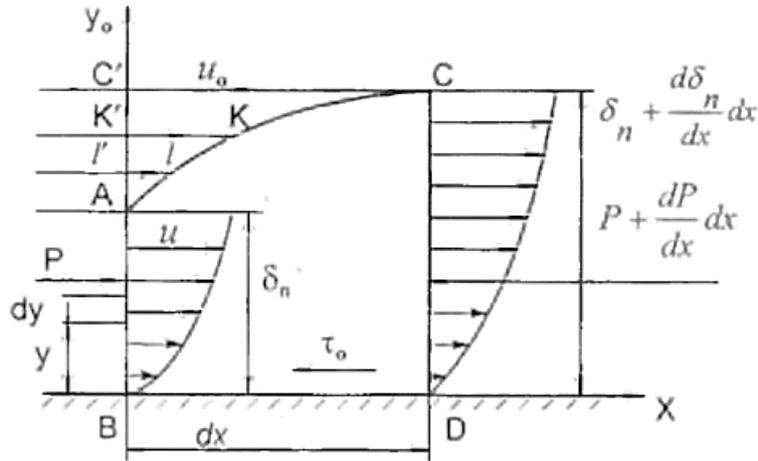


Рисунок 5.7 – Пограничный слой на плоской пластине

Тогда уравнение (5.1) приводится к виду:

$$\frac{d}{dx} \left(\int_0^{\delta_n} u^2 dy - u_0 \int_0^{\delta_n} u dy \right) = -\frac{\delta_n}{\rho} \cdot \frac{dp}{dx} - \frac{\tau_0}{\rho}. \quad (5.4)$$

Определим величину $\frac{dp}{dx}$, входящую в правую часть уравнения (5.4), по условиям данной задачи. Напишем уравнение Бернулли для плоского потока движущегося с постоянной скоростью u_0 :

$$\rho + \rho \frac{u_0^2}{2} = const. \quad (5.5)$$

Продифференцируем уравнение (5.4) по x :

$$\frac{dp}{dx} + \rho u_0 \frac{du_0}{dx} = 0. \quad (5.6)$$

Так как $u_0 = const$, то $du_0 = 0$ и тогда:

$$\frac{dp}{dx} = 0. \quad (5.7)$$

В силу равенства (5.7) уравнение (5.4) примет вид:

$$\frac{d}{dx} \left(\int_0^{\delta_n} u^2 dy - u_0 \int_0^{\delta_n} u dy \right) = -\frac{\tau_0}{\rho}. \quad (5.8)$$

Для решения этого интегрального уравнения необходимо найти зависимость $U = f(y)$ для заданных условий.

Для ламинарного пограничного слоя распределение скоростей $u = u(y)$ можно выразить многочленом вида:

$$u = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + \dots + a_n y^n. \quad (5.9)$$

Для упрощения решения ограничимся тремя первыми членами ряда:

$$u = a_0 + a_1 y + a_2 y^2. \quad (5.10)$$

Неизвестные коэффициенты в этом уравнении найдем из граничных условий задачи.

Первое граничное условие (на неподвижной стенке-пластины).

При $y=0$ скорость в пограничном слое равна нулю $u = 0$ (частицы газа прилипли к стенке пластины). Тогда из равенства (5.10) и первого граничного условия следует:

$$a_0 = u - a_1 y - a_2 y^2 = 0 - a_1 \cdot 0 - a_2 \cdot 0 = 0. \quad (5.11)$$

Второе пограничное условие (на верхней границе пограничного слоя).

При $y = \delta_n$ скорость $u = u_0$. Для этого условия равенство (5.11) записывается следующим образом:

$$u = a_1 \delta_n + a_2 \delta_n^2. \quad (5.12)$$

Третье пограничное условие (на верхней границе пограничного слоя).

При $y = \delta_n$ справедливо очевидное равенство $\left(\frac{du}{dy}\right)_{y=\delta_n} = 0$, на верхней границе $u = u_0$, и далее с ростом «у» скорость остается постоянной и равной u_0 .

Продифференцировав равенство (5.12) по y , получим:

$$\frac{du}{dy} = a_1 + 2a_2 y. \quad (5.13)$$

Воспользовавшись третьим граничным условием, приведем (5.11) к виду:

$$\left(\frac{du}{dy}\right)_{y=\delta_n} = a_1 + 2a_2 y = 0, \quad (5.14)$$

откуда

$$a_1 = -2a_2 \delta_n. \quad (5.15)$$

Подставляя значение a_1 из (5.15) в равенство (5.13), получим:

$$u_0 = -2a_2 \delta_n^2 + a_2 \delta_n^2 = -a_1 \delta_n^2,$$

откуда

$$a_2 = -\frac{u_0}{\delta_n^2}. \quad (5.16)$$

В силу равенства (5.16) получим следующее выражение:

$$a_1 = 2\frac{u_0}{\delta_n}. \quad (5.17)$$

Определив таким образом коэффициенты a_1 и a_2 и подставив их в равенство (5.12), найдем искомый закон распределения скоростей в пограничном слое:

$$a_1 = 2\frac{u_0}{\delta_n} y - \frac{u_0}{\delta_n^2} y^2 = \frac{2u_0}{\delta_n} \left(y - \frac{y^2}{2\delta_n}\right). \quad (5.18)$$

Теперь необходимо выразить в уравнении (5.8) напряжение трения через параметры потока и толщину пограничного слоя. При ламинарном движении среды в пограничном слое напряжение трения τ_0 можно определить по формуле Ньютона:

$$\tau_0 = \mu \left(\frac{du}{dy}\right)_{y=0}. \quad (5.19)$$

Входящую в равенство (5.19) производную $\frac{du}{dy}$ найдем из уравнения (5.19), дифференцируя его по y :

$$\frac{du}{dy} = 2\frac{u_0}{\delta_n} \left(1 - \frac{y}{\delta_n}\right). \quad (5.20)$$

При $y = 0$ эта производная будет иметь следующее значение:

$$\left(\frac{du}{dy}\right)_{y=0} = 2\frac{u_0}{\delta_n}. \quad (5.21)$$

В силу (5.21) уравнение (5.19) имеет вид:

$$\tau_0 = 2\mu \frac{u_0}{\delta_n}. \quad (5.22)$$

Воспользовавшись теперь уравнением (5.18) и равенством (5.22), приведем интегральное соотношение для пограничного слоя к виду:

$$\frac{4u_0^2}{\delta_n^2} \cdot \frac{d}{dx} \int_0^{\delta_n} \left(y^2 - \frac{y^3}{\delta_n} + \frac{y^4}{4\delta_n^2} \right) dy - \frac{2u_0 d}{\delta_n dx} \int_0^{\delta_n} \left(y - \frac{y^2}{2\delta_n} \right) dy = -\frac{2\mu\mu_0}{\rho\delta_n}. \quad (5.23)$$

Для решения этого интегрального уравнения сначала нужно его проинтегрировать, а затем полученное выражение продифференцировать по y :

$$\int_0^{\delta_n} \left(y^2 - \frac{y^3}{\delta_n} + \frac{y^4}{4\delta_n^2} \right) dy = \int_0^{\delta_n} y^2 dy - \int_0^{\delta_n} \frac{y^3}{\delta_n} dy + \int_0^{\delta_n} \frac{y^4}{4\delta_n^2} dy = \frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4\delta_n^2} + \frac{y^5}{5 \cdot 4\delta_n^2} = \frac{\delta_n^3}{3} + \frac{\delta_n^4}{4\delta_n^2} + \frac{\delta_n^5}{5 \cdot 4\delta_n^2}. \quad (5.24)$$

Аналогично вычисляется второй интервал. После всех преобразований получим следующее выражение:

$$\frac{1}{15} u_0^2 \frac{d}{dx} (\delta_n^2) = 2 \frac{u_0 \mu}{\rho}. \quad (5.25)$$

Дифференцируя последнее уравнение, окончательно будем иметь:

$$\frac{1}{15} \frac{u_0^2}{\mu} \delta_n d\delta_n = dx. \quad (5.26)$$

Интегрируя уравнение (5.26), при условии, что $\delta_n = 0$ при $x = 0$, получим следующую зависимость:

$$\delta_n = \sqrt{\frac{30\mu x}{\rho u_0}} = 5,477 \sqrt{\frac{\nu x}{u_0}}. \quad (5.27)$$

Подставляя δ_n из уравнения (5.27) в уравнение (5.22), получим следующее выражение для определения напряжения трения на поверхности пластины δ_n :

$$\tau_0 = 0,365 \sqrt{\frac{\mu \rho u_0}{x}}. \quad (5.28)$$

Как следует из формулы (5.27), толщина пограничного слоя увеличивается вдоль стенки пропорционально корню квадратному от x . Следовательно, верхняя граница пограничного слоя представляет собой параболу второй степени. При одинаковых значениях ν их толщина слоя δ_n уменьшается с ростом скорости потока u_0 . Из формулы (5.28) следует: напряжение трения при ламинарном режиме уменьшается с ростом x и возрастает с увеличением скорости внешнего потока u_0 .

Зная закон распределения τ_0 вдоль стенки, легко найти полную силу трения:

$$x_{\text{тр}} = \int_0^x \tau_0 b dx, \quad (5.29)$$

где b – ширина пластины, м.

В рассматриваемом случае:

$$x_{\text{тр}} = 0,365 \sqrt{\mu \rho u_0^3} \int_0^x x^{-0,5} dx = 0,73 b \sqrt{\mu \rho u_0^3 x}. \quad (5.30)$$

В качестве безразмерной характеристики силы трения используется коэффициент сопротивления трения, определяемый по следующей формуле:

$$C_f = \frac{x_{\text{тр}}}{\rho \frac{u_0^2}{2} b x}. \quad (5.31)$$

Подставляя в уравнение (5.31) значения x_{mp} из уравнения (5.30), получим:

$$C_f = 1,46 \sqrt{\frac{\mu}{\rho u_0 x}}. \quad (5.32)$$

Поскольку $\frac{\rho u_0 x}{\mu} = \frac{u_0 x}{\nu} = Re_x$ – есть число Рейнольдса, отнесенное к длине пластины, коэффициент сопротивления трения представяют в виде:

$$C_f = \frac{1,46}{\sqrt{Re_x}}. \quad (5.33)$$

Полученное таким образом значение несколько больше опытного. Для его уточнения следует сохранить в равенстве (5.9) первые пять членов ряда.

В этом случае получим следующее выражение для определения коэффициента трения:

$$C_f = \frac{1,372}{\sqrt{Re_x}}. \quad (5.34)$$

5.3. Пограничный слой, его влияние на режимы работы осевого компрессора. Помпаж

Рассматривая различные режимы эксплуатации газотурбинных двигателей, необходимо обратить внимание на появление такого явления, как «помпаж» [8].

Воздух, при прохождении компрессора, участвует в сложном движении. Изменение величины скоростей C и U этого движения, зависящих от расхода воздуха и частоты вращения, определяет углы обтекания лопаток.

При превышении этими углами критических значений происходит срыв и турбулизация потока воздуха. Например, как видно из треугольника скоростей, это может произойти при уменьшении расхода воздуха через двигатель. В этом случае уменьшается величина скорости потока c и растет угол атаки.

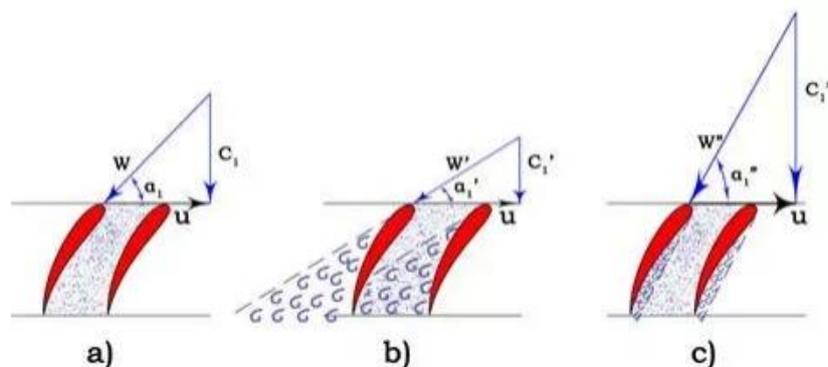


Рисунок 5.8 – Обтекание лопаток осевого компрессора:

a) – расчетный режим; *б)* – уменьшенная подача; *в)* – увеличенная подача

То есть в межлопаточном пространстве появляется турбулентная зона. Она сразу нарушает работу ступени, так как в определенном смысле запирает (или дросселирует) ее, соответственно уменьшая напор и КПД турбины.

Срывные турбулентные зоны образуются не на всех лопатках сразу из-за имеющихся в реальных условиях некоторых различий в их геометрии и

асимметрии потока. Но такая зона в свою очередь может вызвать срыв в соседней ступени (например, дросселируя впереди стоящую) и таким образом увеличить область срыва вплоть до распространения ее по всему тракту компрессора.

Характеристики ОК (рис. 5.8б) показывают, что помпаж может возникать только при малых (режим запуска, останова) подачах компрессора.

Причем вихревые зоны могут формироваться как на спинках, так и на корытцах лопаток в зависимости от величины расхода и, соответственно, углов атаки лопаток. Иной раз этот процесс может происходить достаточно быстро, за сотые доли секунды.

Локальных срывных зон может быть несколько, и они могут занимать разное положение по высоте лопаток, по периметру ступени и быть довольно развитыми по величине. Существует такое явление, как вращающийся срыв. Это область срыва, вращающаяся вокруг оси рабочего колеса в сторону его вращения, но с меньшей окружной скоростью.

В зависимости от условий и режима работы двигателя срывные зоны могут распространяться на несколько ступеней и существовать, не нарушая устойчивой работы компрессора в целом. При этом, однако, они очень опасны, потому что вызывают вибрацию лопаток вплоть до возможности их поломки, и поэтому абсолютно недопустимы.

При распространении зон вращающегося срыва на весь компрессор происходит глобальная потеря устойчивости его работы. Падает напорность ступеней (особенно в области малых расходов воздуха), появляются колебания давления за компрессором, расхода воздуха, частоты вращения, возможен некоторый рост температуры газа за турбиной. Двигатель теряет эффективность, растет вибрация и опасность разрушения лопаток компрессора.

В эксплуатации наблюдается еще один неустойчивый режим работы компрессора, именуемый достаточно известным словом «помпаж». Это название, впрочем, не придумано специально для ГТД. Оно относится к лопаточным компрессорам и насосам вообще и суть его для всех этих агрегатов одинакова.

Теневые фотографии образования ламинарного и турбулентного пограничного слоя при обтекании пластины приведены на рис. 5.9.



Рисунок 5.9 – Эксперимент. Пограничный слой

5.4. Лобовое сопротивление движению тел в жидкостях и газах

Рассмотрим теорию движения тела в жидкости или газе с небольшой скоростью, подробно описанную в библиографических источниках [1-6]. Сопротивление движению тела обусловлено силами трения, и, как установил Стокс, эта сила (сила вязкого трения) пропорциональна произведению коэффициента динамической вязкости среды на линейные размеры тела и скорость движения. Для тел шарообразной формы силу вязкого трения можно найти по формуле Стокса:

$$F_{\text{вязк.тр.}} = 6\pi r\eta v, \quad (5.35)$$

где η – коэффициент динамической вязкости среды;

v – скорость движения тела;

r – радиус шара.

Формулу Стокса применяют для вычисления силы вязкого трения со стороны жидкости (газа) при движении тел шарообразной формы. Например, формула Стокса применяется для вычисления скорости равномерного падения тела в вязкой среде:

$$v = \frac{2}{9} \frac{\rho_1 - \rho_2}{\eta} g r^2, \dots \quad (5.36)$$

где ρ_1 – плотность тела;

ρ_2 – плотность среды.

Также формулу Стокса применяют для вычисления радиуса капелек или пылинок по измеренной скорости их равномерного падения в воздухе или в жидкости.

Однако при больших скоростях движения материального тела в реальной среде причиной сопротивления со стороны жидкости или газа является в основном совершение работы на образование вихрей. В этих случаях сила сопротивления при движении тела, которое называется силой лобового сопротивления, пропорциональна квадрату скорости движения тела и площади проекции тела на плоскость, перпендикулярную к направлению движения (так называемое «миделево сечение» тела S):

$$F_{\text{сопр}} = C_x \frac{\rho v^2}{2} S, \dots \quad (5.37)$$

где ρ – плотность среды;

C_x – коэффициент лобового сопротивления.

Гидродинамическое давление:

$$P = \rho v^2. \quad (5.38)$$

Лобовое сопротивление при движении тел в жидкости (газе) создается по двум причинам:

1) действие сил вязкого трения;

2) действие сил инерции, вследствие которого происходит вихреобразование. Зная, что лобовое сопротивление обусловлено главным образом возникающими в среде вихрями, мы можем получить формулу (5.37), используя следующее (нестрогое) рассуждение. Выразим объем, занимаемый

жидкостью в единицу времени t , через произведение площади его поперечного сечения S на скорость его движения v . Тогда тело, движущееся в жидкости, вытесняет вследствие своего движения единицу времени массу жидкости, равную произведению плотности жидкости ρ на объем: ρSv .

Будем считать, что всем частицам вытесняемого объема жидкости сообщается скорость, пропорциональная скорости движения тела v . Тогда этому объему жидкости в единицу времени передается импульс, равный ρSv^2 . Тогда по третьему закону Ньютона, жидкость должна оказывать телу силу сопротивления, прямо пропорциональную приращению импульса за единицу времени, т. е. ρSv^2 . Вихреобразование в жидкости обусловлено силами инерции. Поэтому при равномерном движении тела в жидкости в отсутствии вихреобразования сопротивление определялось бы только силами трения.

В идеальной жидкости вследствие отсутствия сил инерции относительные скорости частиц жидкости на некотором расстоянии позади тела должны были бы оставаться такими же, как и перед ним.

Рассмотрим обтекание жидкостью поверхности тела симметричной геометрической формы. Достигая поверхности тела в точке А (рис. 5.9), частицы жидкости изменяют первоначальное прямолинейное направление движения на криволинейное, то есть приобретают некоторое ускорение. Вследствие этого на поверхности тела возникает действие сил инерции, что ведет к повышению давления в пространстве АВ. На рис. 5.10 области повышенного давления отмечены знаком «плюс». На участке ВС направление частиц жидкости также меняется, так как теперь жидкость стремится по инерции уйти от тела. На этом участке давление понижается. На рис. 5.9 области пониженного давления обозначены знаком «минус». На участке CD частицы жидкости снова будут оказывать повышенное давление на поверхность тела. Аналогично силы инерции распределяются и на нижней поверхности тела. Вследствие симметричной формы тела распределение давлений также окажется симметричным, поэтому равнодействующая сила будет равна нулю.

В наших рассуждениях мы пришли к выводу, находящемуся в противоречии с формулой (5.37): *в невязкой жидкости при равномерном движении тело не должно было бы испытывать никакого сопротивления движению (парадокс Эйлера)*.

Однако сопротивление движению по формуле (5.37) вызывается силами инерции жидкости. Эти силы инерции создаются вследствие отрыва пограничного слоя обтекающей тело жидкости, что в свою очередь и приводит к вихреобразованию. Более реальная картина обтекания, в отличие от изображенной на рис. 5.10 картины, показана на рис. 5.11 и рис. 5.12.

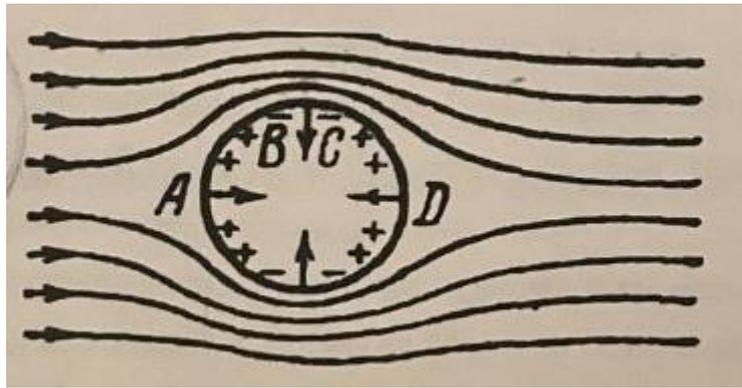


Рисунок 5.10 – К пояснению парадокса Эйлера

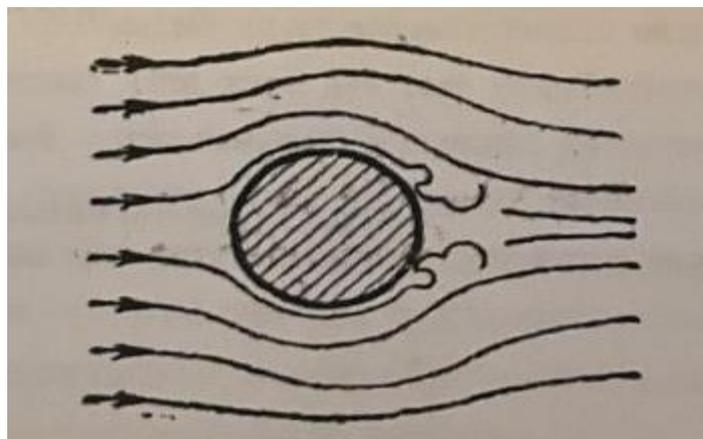


Рисунок 5.11 – Поток, обтекающий цилиндр небольшое время

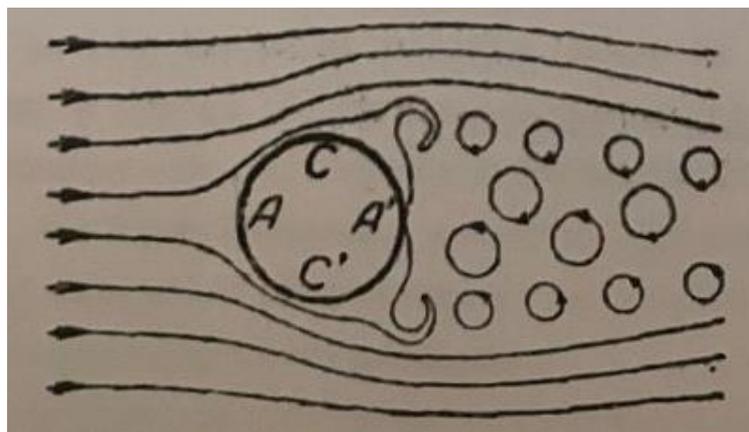


Рисунок 5.12 – Схема движений жидкости за цилиндрическим телом

В точках поверхности C и C' тела сферической обтекаемой формы (см. рис. 5.12) скорость жидкости больше, чем в невозмущенном потоке, поэтому давление здесь понижается. Создается разность давлений, под действием которой жидкость в пограничном слое направлена от A к C и C' (по направлению потока) и от A' к C и C' (против потока). Такие встречные потоки сталкиваются друг с другом у точек C и C' . Образуется некий пограничный слой с выступом, у

которого потоки закручиваются. Таким образом, создаются вихри, которые отрываются от поверхности тела и уносятся (см. рис. 5.12). Перемешивание вихрей с окружающей жидкостью образует позади тела расширяющуюся турбулентную зону, или вихревую пелену.

Из всего вышесказанного понятно, почему коэффициент пропорциональности C_x , входящий в формулу (5.37), то есть коэффициент лобового сопротивления, зависит от формы тела: форма тела либо способствует, либо противодействует возникновению вихрей при обтекании тела жидкостью. При этом для тела «удобообтекаемой» формы разности давлений, создаваемые в различных участках его поверхности, вызванные различием скорости, будут незначительны, так как встречное движение потоков жидкости, описанное выше, будет выражено слабо. Также по этой причине будет практически отсутствовать срыв струй, а, следовательно, и вихреобразование, и испытываемое телом сопротивление движению будет невелико.

Если теперь рассмотреть обтекание жидкостью тела, ограниченного острыми углами, например, плоскую пластинку, находящуюся перпендикулярно к потоку, то картина возникает противоположная. Вызванные изменением скорости при обтекании острых углов разности давлений будут, наоборот, большими, а поэтому образуется много вихрей, которые отрываются от пограничного слоя и лобовое сопротивление в этом случае оказывается значительным.

На рис. 5.13 изображены тела различных размеров и форм, обладающие различным коэффициентом лобового сопротивления. Среди них наиболее выгодной, то есть «удобообтекаемой», оказывается вытянутая, каплеобразная форма. Поэтому именно подобную форму придают фюзеляжам самолетов (форма «болид» в виде очертаний крупного метеорита, падающего в атмосфере Земли). Тело подобной формы почти совсем не создает в потоке вихрей (рис. 5.14). У тела «удобообтекаемой» формы лобовое сопротивление движению обусловлено, главным образом, силами трения.

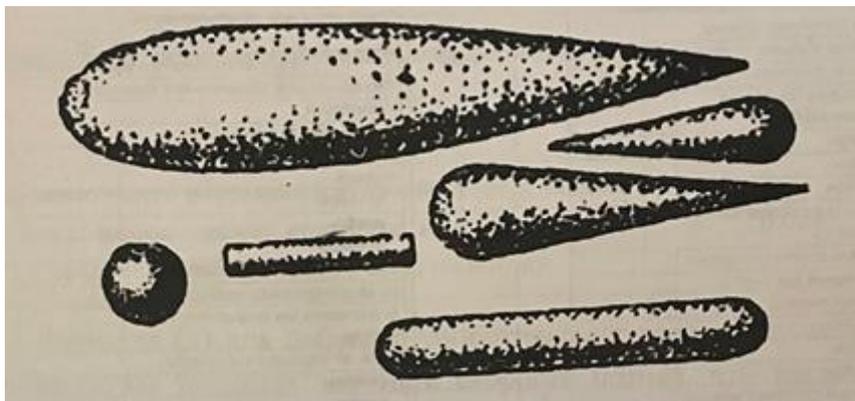


Рисунок 5.13 – Различные тела, обладающие одинаковым лобовым сопротивлением (поток среды движется слева направо)

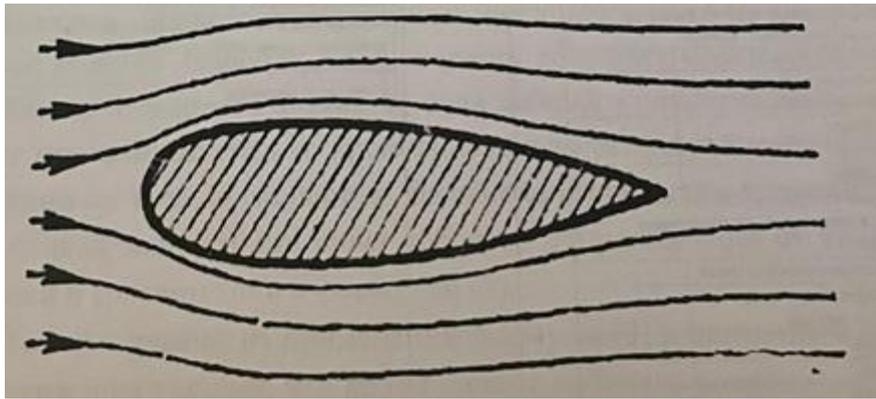


Рисунок 5.14 – Тело «удобообтекаемой» формы

Для наглядности приведем таблицу значений коэффициентов лобового сопротивления C_x для некоторых тел (табл. 5.1).

Таблица 5.1 – Значения коэффициентов лобового сопротивления C_x для некоторых тел

Форма обтекаемости тела	Значение коэффициента C_x
Квадратная пластинка, перпендикулярная к направлению потока	1,28
Диск, перпендикулярный к направлению потока	1,18
Шар	0,50
Тело наилучшего обтекания (сигарообразное, с задним заостренным концом) при длине, в четыре раза превышающей диаметр, с осью по потоку	0,026

Формула (5.37) для лобового сопротивления применима только в определенных пределах значений скорости потока, что также подтверждается опытом. Например, при малых скоростях (в воздухе – до 1 м/с) силы инерции малы в сравнении с силами внутреннего трения, и тогда сила лобового сопротивления пропорциональна не квадрату, а первой степени скорости. Если скорость достигает большой величины (близка к скорости звука), то сила лобового сопротивления зависит от нее приблизительно пропорционально ее третьей степени. При движении же тела со скоростью большей скорости звука, снова будет справедлива зависимость силы лобового сопротивления от квадрата скорости в соответствии с формулой (5.37).

Таким образом, из применения формулы (5.37) к различным скоростям движения следует, что коэффициент лобового сопротивления C_x надо рассматривать как некоторую функцию скорости движения. Но поскольку

вихреобразование зависит еще и от коэффициента динамической вязкости среды, плотности среды ρ и характерных линейных размеров тела l , можно совершенно строго доказать, что коэффициент сопротивления C зависит в совокупности от всех перечисленных характеристик.

Из перечисленных выше величин составили безразмерную величину. Коэффициент лобового сопротивления C сам является безразмерной физической величиной, поэтому его функциональная зависимость от величин ρ , n , v и l сводится к зависимости от такой их комбинации, которая представляет собой безразмерное число.

Данное безразмерное отношение называют числом Рейнольдса.

$$Re = \rho l \frac{v}{\eta}$$

Итак, коэффициент лобового сопротивления является некоторой, до сих пор теоретически еще не вполне обоснованной для всех практически возможных случаев, функцией чисел Рейнольдса: $C_x = f(Re)$.

Отношение коэффициента динамической вязкости среды η к плотности среды ρ называют кинематической вязкостью $\nu = \eta/\rho$, поэтому число Рейнольдса выражают также через кинематическую вязкость ν , то есть $Re = lv/\nu$.

Нетрудно убедиться в том, что число Рейнольдса пропорционально отношению сил инерции $S\rho v^2$ к силам вязкости $\eta Sv/l$, действующим на поверхность тела:

$$Re = \frac{[S\rho v^2]}{\left[\frac{\eta Sv}{l}\right]} = \frac{\rho vl}{\eta}$$

Коэффициент кинематической вязкости зависит от плотности жидкости (газа) обратно пропорционально. Вследствие этого получается, например, что значение кинематической вязкости у воздуха больше, чем у воды. Так, разреженный воздух при давлении 7,6 мм рт. ст. и при температуре 0 °С имеет кинематическую вязкость в два раза превышающую значение кинематической вязкости глицерина.

Из данного сравнения следует, что в лобовом сопротивлении в газах силы инерции начинают преобладать над силами трения при значительно больших скоростях, чем в случае движения в жидкости. Такое обстоятельство обусловлено малой плотностью газов по сравнению с плотностью жидкостей. Например, при полете дирижабля в атмосфере лобовое сопротивление обусловлено в основном трением; если вместо воздуха была бы вода, силы инерции в лобовом сопротивлении возросли бы пропорционально плотности, т. е. по порядку величины почти в 1000 раз, вязкость же воды только примерно в 100 раз превышает вязкость воздуха.

Назовем значение скорости потока жидкости (газа) критическим, при котором ламинарное течение вдруг превращается в турбулентное. Такая скорость должна соответствовать определенному числу Рейнольдса. Переход ламинарного режима течения в турбулентный для всех жидкостей и газов независимо от их кинематической вязкости должен происходить при одном и

том же значении числа Рейнольдса.

Этот вывод подтверждается экспериментами, но при этом на переход в турбулентный режим течения достаточно сильное влияние оказывает форма входного отверстия, через которое жидкость втекает в трубу или в канал.

Наиболее высокое значение числа Рейнольдса:

$$Re = r \cdot v/\nu,$$

где r – радиус трубы;

ν – кинематическая вязкость;

v – скорость течения, при котором в гладкой трубе еще может происходить ламинарное течение, может достигать нескольких десятков тысяч.

Если входное отверстие сконструировано таким образом, чтобы содействовать возникновению турбулентности, то переход ламинарного течения в турбулентное происходит при числах Рейнольдса порядка 1000–2000.

На рис. 5.15 изображена зависимость коэффициента сопротивления λ для любой жидкости при течении в трубе от числа Рейнольдса. На данном графике Δ – абсолютная шероховатость, r_0 – радиус трубы.

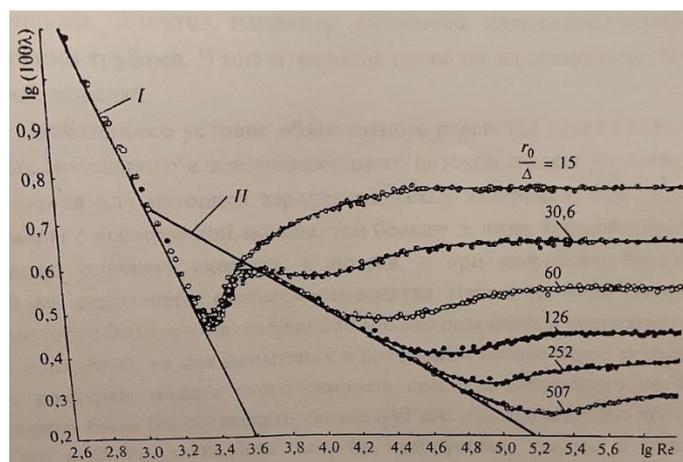


Рисунок 5.15 – Зависимость коэффициента сопротивления λ течению жидкости по трубе от чисел Рейнольдса

Числа Рейнольдса вычисляют при теоретическом моделировании течения рек, обтекании самолета воздухом во время полета и т. п. Для такого моделирования в лаборатории необходимо экспериментировать с «модельным» потоком, который характеризуется числом Рейнольдса, соответствующим воспроизводимому потоку. Конечно, модельный поток при этом должен быть геометрически подобен исследуемому потоку, а объекты, возмущающие их, также должны быть геометрически подобны. Но даже при полном геометрическом соответствии картины движения и вычисляемые коэффициенты сопротивления будут различными, если числа Рейнольдса для модельного и воспроизводимого потоков различны. Например, если уменьшать линейные размеры потока в несколько раз, то необходимо во столько же раз увеличить

скорость либо заменить среду другой средой, кинематическая вязкость которой была бы во столько же раз меньше. Тогда число Рейнольдса останется постоянным.

Устройства, позволяющие проводить лабораторные исследования для обтекания воздухом движущихся объектов, например, самолетов, называются аэродинамическими трубами. В них измерения проводят на геометрически подобных моделях.

Необходимое условие обязательного равенства чисел Рейнольдса для модельного и воспроизводимого потоков создает большие затруднения для методики аэродинамических измерений: чем меньше размеры в исследуемой модели, тем больше должна быть при прочих равных условиях скорость потока, а при скоростях, больших 100 м/с, сказывается сжимаемость воздуха. Например, если скорость самолета 1000 км/ч (примерно 280 м/с для дозвукового пассажирского самолета), то для испытания в воздушном потоке втрое меньшей по размерам модели этого самолета скорость воздушного потока должна была бы составлять свыше 840 м/с, т. е. значительно превышать скорость звука.

Это было бы не допустимо, так как в случае сверхзвуковых скоростей картина обтекания коренным образом изменяется. Таким образом, производить испытания уменьшенных моделей скоростных дозвуковых самолетов в аэродинамических трубах нельзя; приходится вести испытания отдельных частей самолетов или строить очень большие трубы.

ГЛАВА 6. ПОДЪЕМНАЯ СИЛА КРЫЛА

6.1. Теорема Жуковского

На рис. 6.1 представлено крыло в потоке воздуха, расположенное к оси потока под углом атаки α . Здесь Y – подъемная сила, Q – лобовое сопротивление, которое в 20–25 раз меньше подъемной силы Y .

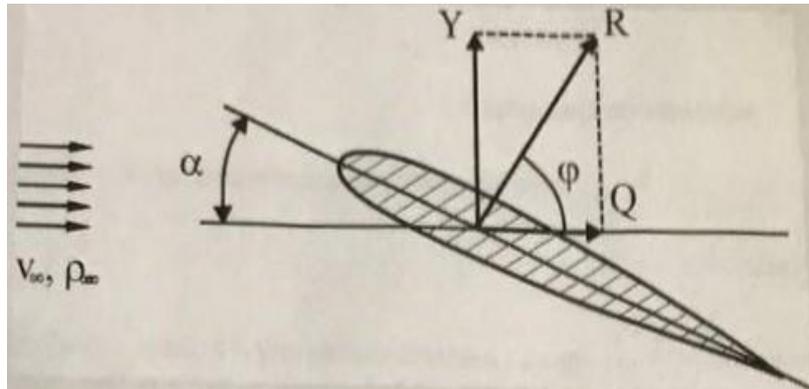


Рисунок 6.1 – Крыло в потоке воздуха

В 1906 году Николай Егорович Жуковский для крыла бесконечного размаха доказал теорему о том, что на такое тело (при наличии циркуляции « Γ » вокруг него) действует подъемная сила Y . Закон основан на применении закона количества движения к массам жидкости, обтекающего крыло.

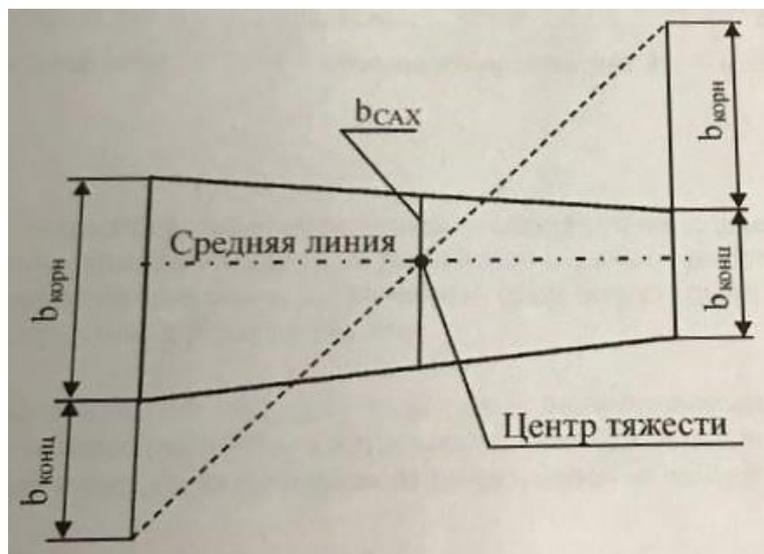


Рисунок 6.2 – Геометрические характеристики крыла:
 $b_{\text{корн}}$ – корневая хорда; $b_{\text{конц}}$ – концевая хорда; $b_{\text{сax}}$ – средняя аэродинамическая хорда

Н. Е. Жуковский рассматривал крыло бесконечного размаха, у которого отношение корневой хорды ($b_{\text{корн}}$) к концевой хорде ($b_{\text{конц}}$) равно бесконечности, то есть при $b_{\text{конц}} \approx 0$ или $b_{\text{корн}}/b_{\text{конц}} \approx \infty$.

Теорема Жуковского формулируется следующим образом: если поток, имеющий в бесконечности скорость V_∞ и плотность ρ_∞ , обтекает цилиндрическое тело (крыло) и циркуляция скорости вокруг этого тела равна Γ , то на тело со стороны жидкости будет действовать сила Y , перпендикулярная направлению скорости V_∞ и равная произведению циркуляции на плотность и скорость потока в бесконечности.

Математическая теорема Жуковского может быть записана формулой:

$$Y = \rho_\infty V_\infty L, \quad (6.1)$$

где L – длина части крыла бесконечного размаха, подъемную силу которой хотят определить (см. рис. 6.3).

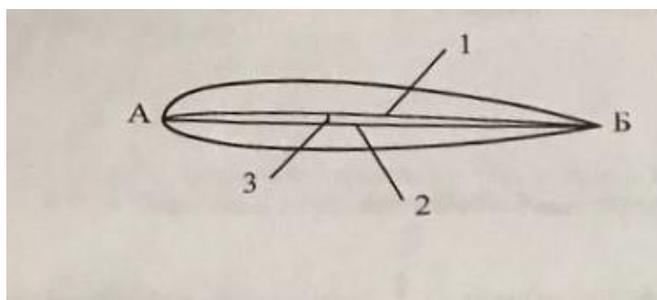


Рисунок 6.3 – Геометрические параметры профиля крыла:

1 – средняя линия; 2 – хорда; 3 – кривизна абсолютная

Величина циркуляции была предложена Жуковским в виде:

$$\Gamma = \pi b V_\infty \sin(\alpha + 2f), \quad (6.2)$$

где b – хорда профиля крыла;

α – угол атаки крыла в радианах;

f – относительная кривизна профиля крыла (т. е. отношение кривизны к хорде).

Подставив последнее выражение (6.2) в предыдущее (6.1), получим:

$$Y = \rho_\infty V_\infty^2 b l \pi \sin(\alpha + 2f). \quad (6.3)$$

Положив $b \cdot l = S$ (площадь крыла) $\sin(\alpha + 2f) \approx \alpha + 2f$ в радианах, с учетом того что суммарный угол $(\alpha + 2f)$ обычно не превышает $15^\circ \approx 0,26$ радиана, будем иметь :

$$Y = \pi(\alpha + 2f)\rho_\infty S V_\infty^2. \quad (6.4)$$

Как показала дальнейшая практика определения подъемной силы, выведенная теоретическая зависимость не полностью отражает действительность. Связано это с тем, что при выводе не был учтен пограничный слой вокруг крыла.

В начале зарождения теории полета практика обгоняла теорию.

Как уже было сказано, для продувок аэродинамических тел в авиации служат аэродинамические трубы, в которых определяются реальные характеристики, в том числе и подъемные силы и силы лобового сопротивления конкретных тел.

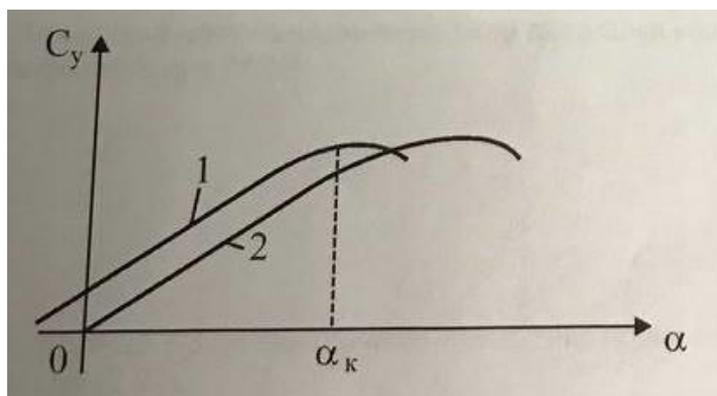


Рисунок 6.4 – График зависимости безразмерного коэффициента подъемной силы C_y от угла атаки α :

1 – несимметричное тело; 2 – симметричное тело

На рис. 6.4 приведена зависимость коэффициента подъемной силы C_y от угла атаки.

$$Y = C_y^a \frac{\rho v^2}{2} a. \quad (6.5)$$

Коэффициент $C_y^a = \frac{dC_y}{da}$ и зависит от многих конструктивных параметров обтекаемого тела (крыла):

$$C_y^a = f(\lambda, \eta, \chi, M, f, \dots), \quad (6.6)$$

де λ – удлинение крыла, $\lambda = l^2/S$;

l – длина крыла;

S – площадь крыла

η – сужение крыла, $\eta = b_{\text{корн}} / b_{\text{конц}}$;

$b_{\text{корн}}$ – корневая хорда;

$b_{\text{конц}}$ – концевая хорда крыла;

χ – стреловидность крыла;

M – число Маха

f – относительная кривизна крыла.

Для крыла с большим удлинением ($\lambda > 2$) и сужением (крыло бесконечного удлинения) все перечисленные параметры имеют существенное влияние на величину коэффициента C_y^a .

Однако для крыла с малым удлинением коэффициент C_y^a в основном зависит от удлинения. При этом малым удлинением считается величина $\lambda \leq 2$.

У крыльев бесконечного размаха по опытным данным коэффициент $C_{y\infty}^a \approx 0,1$.

Для крыльев конечного размаха этот коэффициент меньше. Зная величину 1/град значение $C_{y\infty}^a$ можно теоретически определить значение коэффициента подъемной силы для любого удлинения $C_y^a = \frac{C_{y\infty}^a}{1 + \frac{1+\tau}{\pi\lambda} \times C_{y\infty}^a}$, где τ – поправочный коэффициент, равный $\tau \approx 0,18$.

Для точного определения значения всех коэффициентов крыло продувается в аэродинамической трубе.

Для крыла малого удлинения типа флюгарки коэффициент c_y^a имеет следующую зависимость при $M < 1$:

$$c_y^a = \frac{\pi\lambda}{2}. \quad (6.7)$$

Формула пересчета (6.7) мало пригодна для крыльев с малым удлинением, но хорошо приемлема для крыльев с большим удлинением ($\lambda > 2$). У крыльев с малым удлинением коэффициент c_y^a значительно меньше коэффициента крыла с большим удлинением, что видно из рис. 6.5.

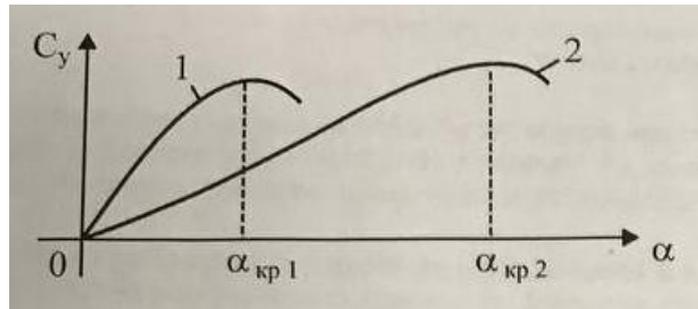


Рисунок 6.5 – Сравнение $C_y(\alpha)$ пластин больших и малых удлинений:
 $1-\lambda > 2$; $2-\lambda < 2$

Теорема Жуковского явилась основой теории полета и аэродинамики крыла. Она отвечает на вопрос: «Почему самолет летает?».

Теорема Жуковского вместе с гипотезой о неразрывности движения потока объясняет принцип образования подъемной силы крыла самолета, особенности восприятия статического давления в ПВД и др.

На рис. 6.6 показано крыло в потоке воздуха. Показано, что под крылом давление больше по сравнению с давлением над профилем крыла. Струи воздуха чтобы соединиться в одной точке (разрыв не допустим) после прохождения крыла должны двигаться с разными скоростями, так как их пути следования разные. Верхний слой движется с большей скоростью, а значит давление над крылом меньше давления под крылом. Разность давления, умноженная на площадь крыла, создает подъемную силу. (Альтернативное объяснение механизма образования подъемной силы крыла приведено в Приложении).

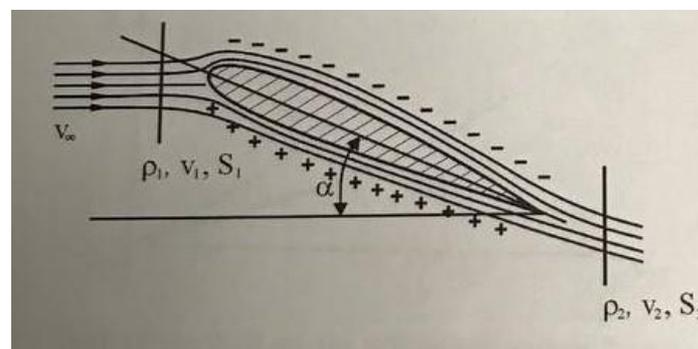


Рисунок 6.6 – Характер обтекания крыла в потоке воздуха, установленного под углом атаки α к потоку:

----- давление над крылом; + + + + - давление под крылом

Идеальный шар в потоке не имеет подъемной силы, если он не вращается. Стоит его закрутить, как появляется подъемная сила.

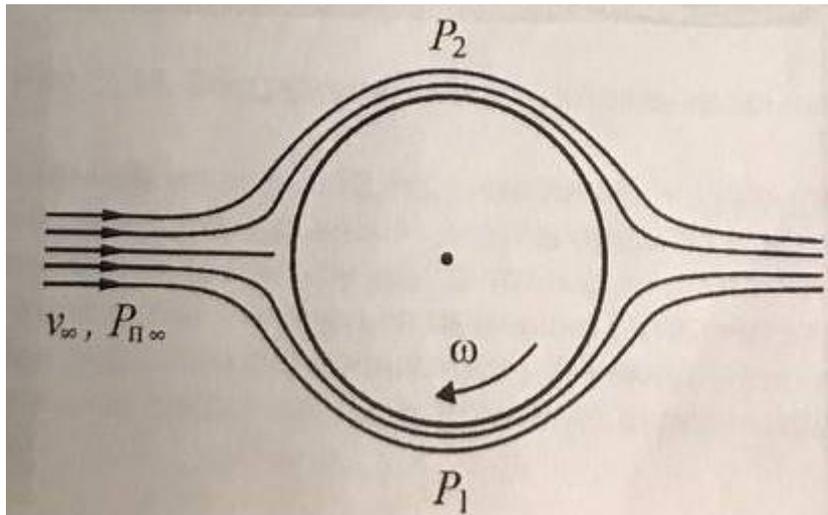


Рисунок 6.7 – Шар в потоке воздуха

При вращении ω шар будет иметь подъемную силу, так как $P_1 > P_2$ (рис. 6.7).

Это объясняется тем что в верхней точке движение потока ускоряется, а в нижней точке замедляется.

Приведенные здесь положения не действуют в свободном молекулярном потоке. Там применима теория Ньютона, ударная теория. Из этой теории следует, что образуется только сила лобового сопротивления, подъемная сила отсутствует, так как сплошности нет, гипотеза о неразрывности не действует, циркуляции вокруг тела нет. Но практически в отличие от теории Ньютона небольшая подъемная сила появляется.

Аэродинамическое качество $k = C_y/C_x$ в свободномолекулярном потоке при диффузионном отражении молекул мало. Так, при $M = 1$, $K = 0,5$, а при $M = 20$, $K = 0,1$. Это подтверждает факт того, что эффективность несущей поверхности летательного аппарата в разреженной атмосфере мала.

Основные выводы о природе образования подъемной силы

- Подъемная сила независимо от направления набегающего потока всегда направлена перпендикулярно этому направлению и лежит в плоскости симметрии самолета.
- Подъемная сила может быть положительной, если угол атаки положителен, и отрицательной при отрицательном угле атаки.
- Симметричные профили при нулевом угле атаки не создают подъемной силы.

Формула подъемной силы $Y = c_y^a S \frac{\rho v^2}{2} a$ является полуэмпирической и не дает возможности найти теоретически наиболее выгодные формы профиля и крыла в плане. На эти вопросы отвечает теория крыла Н. Е. Жуковского.

При отсутствии циркуляции нет разности давлений и скоростей на верхней и нижней поверхностях обтекаемого тела, а, следовательно, нет и подъемной силы.

Это значит, что при наличии подъемной силы в потоке должны существовать вихри.

Циркуляция вокруг несимметричных тел в потоке возникает самостоятельно, без помощи его вращения за счет разгонного вихря.

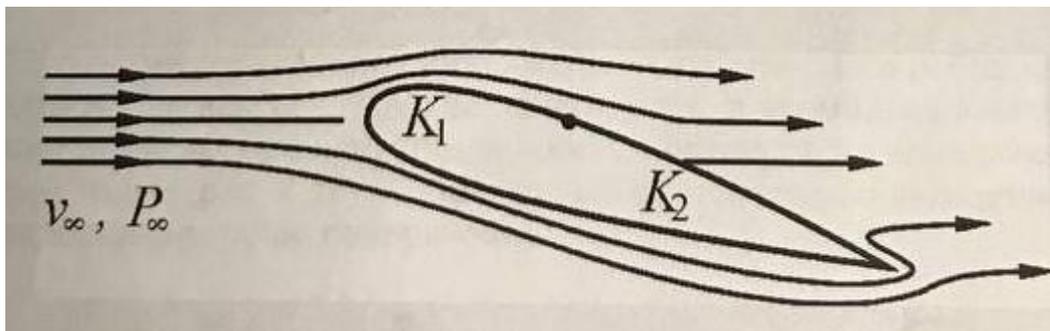


Рисунок 6.8 – Бесциркуляционное обтекание крыла

При обтекании, изображенном на рис. 6.8, подъемная сила на крыле не образуется, так как давления над крылом и под крылом равны. При этом предполагается, что струйки движутся с одинаковой скоростью по контуру крыла как над крылом, так и под крылом. Задняя критическая точка K_2 при этом должна оказаться на верхней стороне профиля. Но такое обтекание невозможно. При реальном обтекании точка K_2 , немедленно окажется у задней кромки крыла. Появляется вихрь вокруг крыла, и обтекание будет напоминать картину, изображенную на рис. 6.8.

6.2. Кармановские колебания

Все тела в зависимости от их формы и положения относительно потока обтекаются по-разному. В общем случае зависимость лобового сопротивления для самолета или его крыла в потоке под углом α известна:

$$Q = \frac{c_{xP} \rho v^2}{2} = \frac{c_{xP}^a \rho v^2}{2} a.$$

Известно также, что сопротивление всякого тела в потоке есть сумма сопротивлений от нормальных напряжений (давлений на стенки) и от касательных напряжений (напряжений трения потока о стенки), распределенные по поверхности тела:

$$Q = Q_{\text{давл}} + Q_{\text{тр}} \quad (6.8)$$

или в безразмерных коэффициентах:

$$C_x = C_{x\text{давл}} + C_{x\text{тр.}}$$

Графически это можно представить так (см. рис. 6.9):

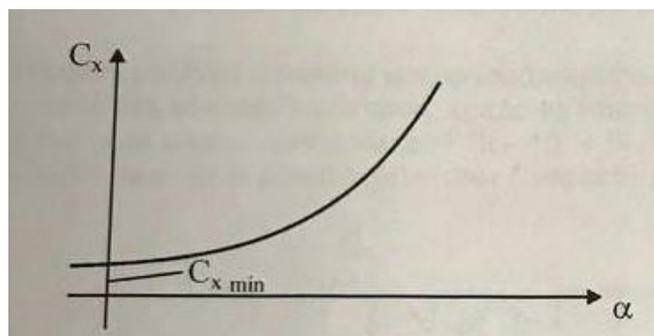


Рисунок 6.9 – Зависимость суммарного коэффициента C_x от угла атаки α

Коэффициент $C_{x\text{давл}}$ зависит от формы тела и может быть сведен либо до минимума, либо наоборот увеличен до максимума. Второе слагаемое $C_{x\text{тр}}$ слабо зависит от формы тела и определяется в основном состоянием поверхности тела.

Критерием удобообтекаемости может быть отношение $C_{x\text{давл}} / C_x$. Чем меньше отношение, тем более удобообтекаемым является тело. Это значит, что у удобообтекаемого тела лобовое сопротивление возникает в основном от трения среды о поверхность тела (рис. 6.10).

На рис. 6.10 пластинка является удобообтекаемым телом. Все лобовое сопротивление ее будет определяться трением воздуха о ее поверхность, а нормальные напряжения взаимно уничтожаются. Но поперечно установленная к потоку та же пластинка становится неудобообтекаемым телом (рис. 6.11). В этом случае ее лобовое сопротивление обусловлено давлением, распределенным по ее поверхности.

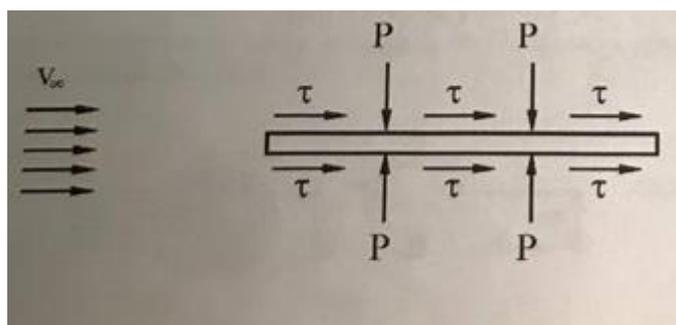


Рисунок 6.10 – Тонкая пластинка в продольно обтекаемом потоке

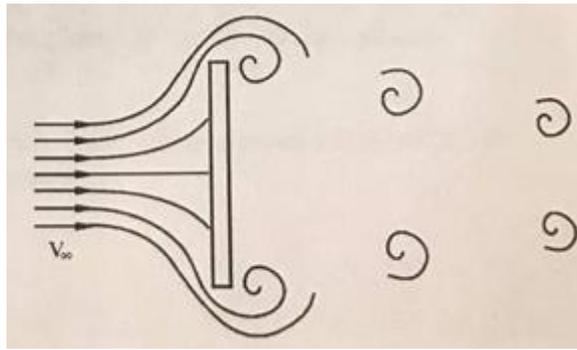


Рисунок 6.11 – Та же пластинка в поперечно обтекаемом потоке при $Re = \frac{v}{\nu} \rho = 100 - 2500$

На рис. 6.12 показана зависимость C_x от числа Re для удобообтекаемого тела. Зона I – зона ламинарного течения потока, II – смешанная зона (ламинарная и турбулентная), III – зона турбулентного течения. Точка A критическая точка при $Re = 9 \cdot 10^4 - 1,1 \cdot 10^5$.

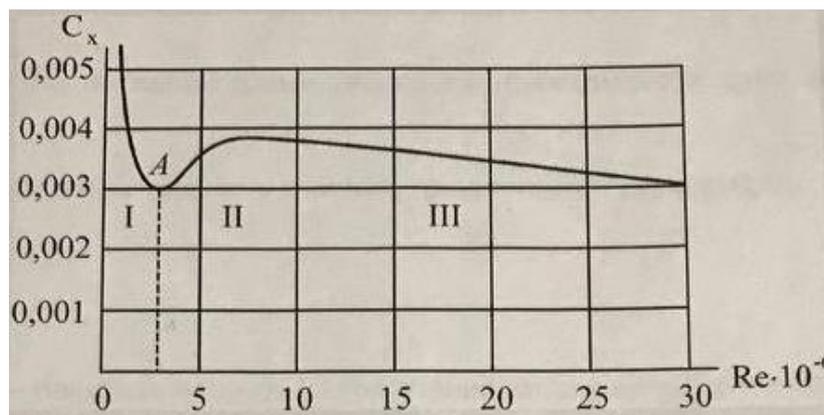


Рисунок 6.12 – Зависимость коэффициента C_x от числа Re для удобообтекаемого тела

На рис. 6.13 показано неудобообтекаемое тело в потоке в виде шара. Зона I – при $Re < 10$ – зона без пограничного слоя, среда вязкая; II – $10 < Re < 10^3$ – область, где появляется пограничный слой, начало вихрей; III – $10^3 < Re < 10^5$ область, где образуются вихри. Давление за шаром резко возрастает (скорость падает).

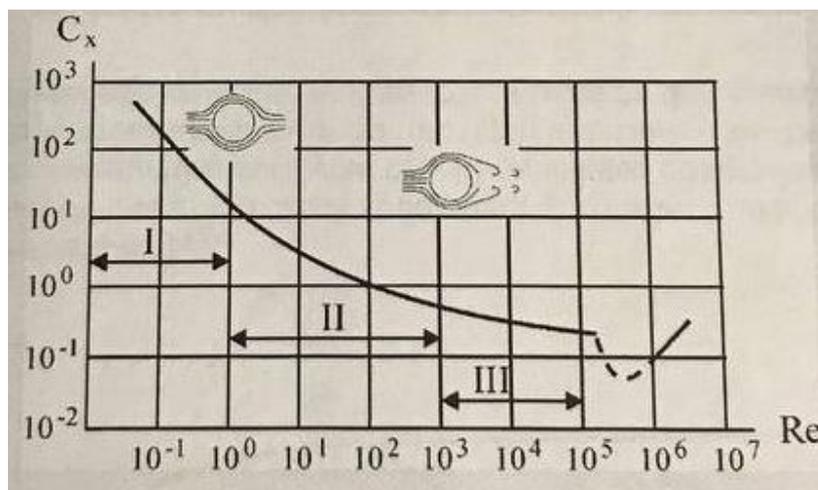


Рисунок 6.13 – Зависимость коэффициента C_x от числа Re для неудобообтекаемого тела в виде шара. Шкала Re – логарифмическая

Для целей измерительных приборов (расходомеры, счетчики) используют свойства неудобообтекаемого тела в потоке воздуха, жидкости. При этом выбирают наиболее простое с технологической точки зрения тело: цилиндр, призму, дельта-тело и др. (возможны комбинации тел).

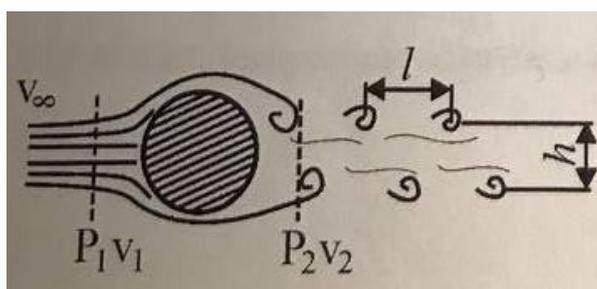


Рисунок 6.14 – Образование кармановской дорожки

Образование вихрей в одной дорожке мешает их образованию в противоположной стороне (рис. 6.14). В связи с этим вихри образуются поочередно. Так за миделевым сечением образуются кармановские дорожки шириной l , с отношением постоянным для конкретного тела. Для шара это отношение равно 0,281.

Частота срыва вихрей, согласно критерию Струхала, равна:

$$f = \frac{vC}{d}, \quad (6.9)$$

где v – скорость в м/с;

d – характерный размер в метрах (диаметр шара, хорда крыла);

C – число Струхала.

Для определения расхода жидкости или газа предлагается зависимость:

$$Q = \frac{dS}{c} f, \quad (6.10)$$

где Q – расход;

S – площадь наименьшего сечения потока вокруг обтекаемого тела.

Но для этого необходимо постоянство коэффициента Струхала как можно при большем Re . Для цилиндра это число может быть $10^3 < R < 10^5$.

Кармановские колебания могут использоваться для измерения скорости воздушного потока в диапазоне $Re = 300 - 2 \cdot 10^5$.

$$v = \frac{f \times d}{c}$$

Кармановские колебания образуются, например, в потоке за флюгаркой в датчике аэродинамических углов и носят вредный характер. Под действием вихрей флюгарка колеблется, вносит дополнительную погрешность и уменьшает срок службы датчика. При необходимости можно использовать частоту колебаний флюгарки для коррекции метрологических характеристик ДАУ (см. рис. 6.15).

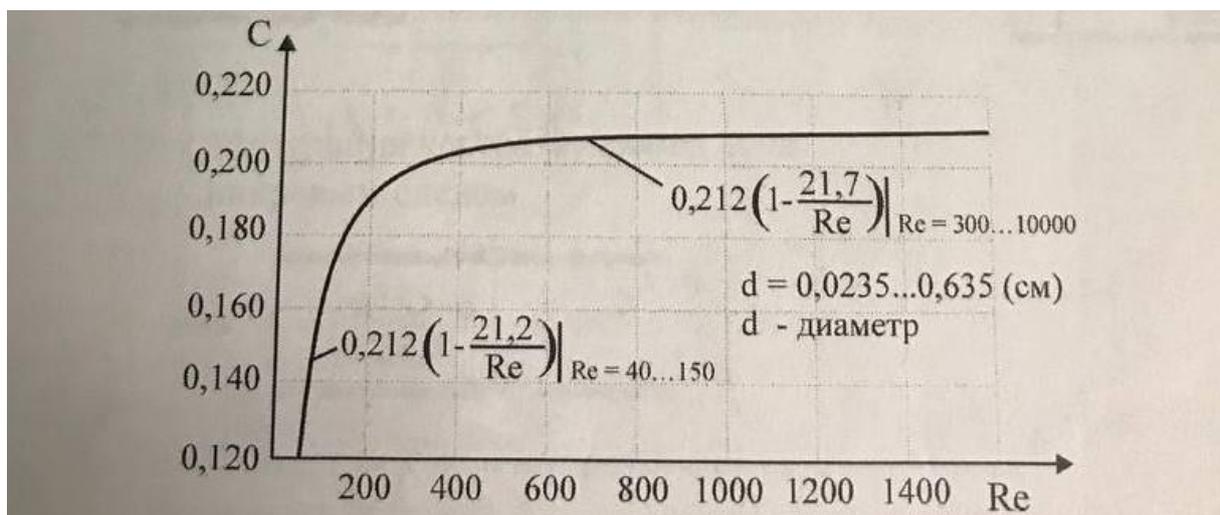


Рисунок 6.15 – Зависимость числа Рейнольдса для течения около круглого цилиндра

На рис. 6.16 изображены конструкции генераторов вихрей.

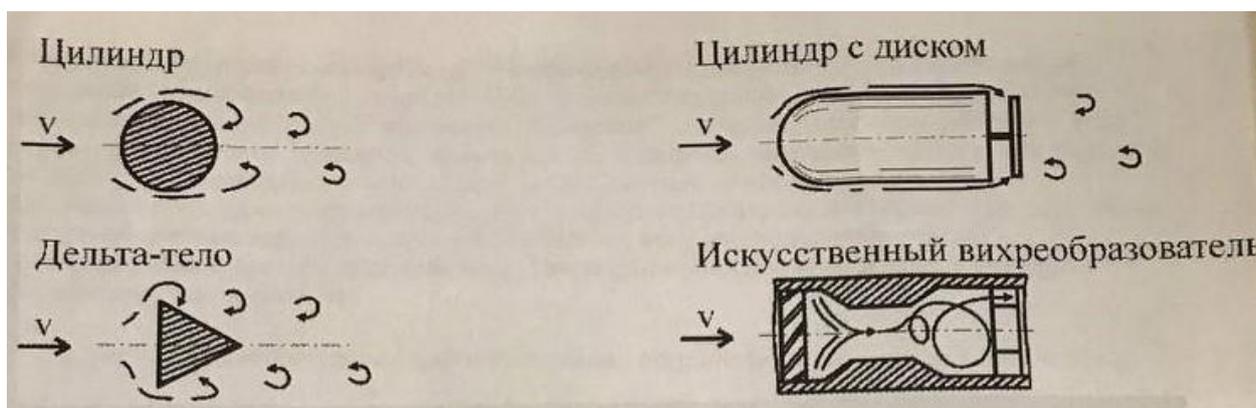


Рисунок 6.16 – Генераторы вихрей

На рис. 6.17 – приведены фотографии дорожек Кармана.

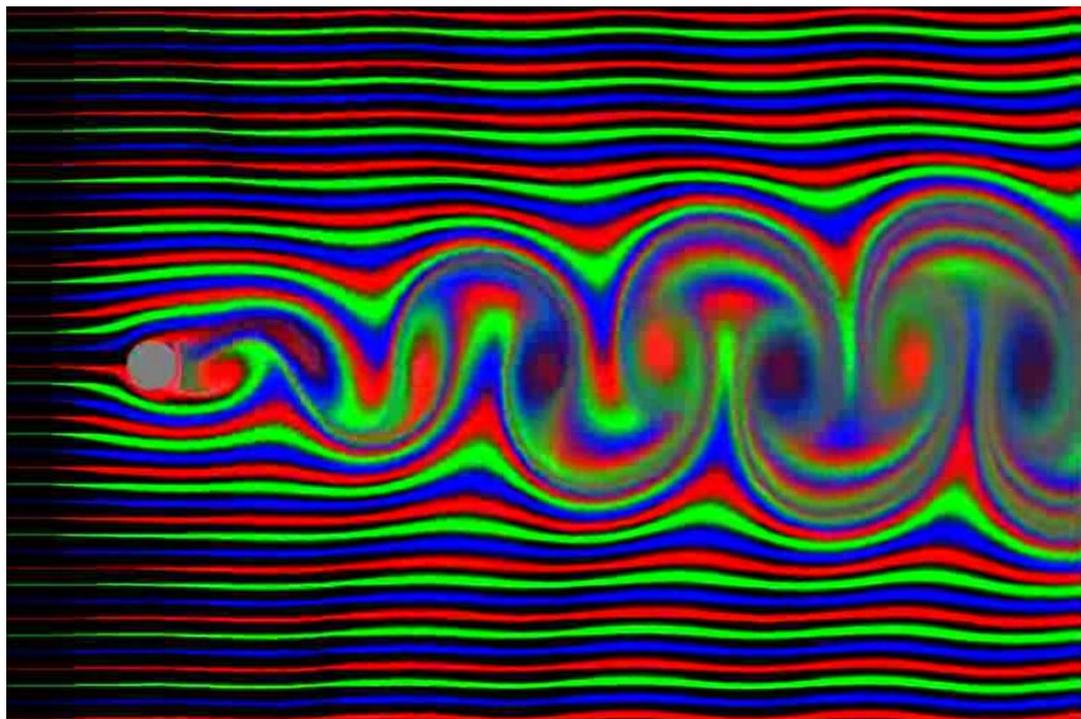


Рисунок 6.17 – Фотографии дорожек Кармана

6.3. Принцип аэродинамической интерференции

В данном случае под интерференцией понимается взаимное влияние элементов, частей конструкции самолета.

Этот принцип устанавливает аэродинамическое взаимодействие между всеми элементами самолета, между крыльями, фюзеляжем, оперением. Силы этих элементов конструкции самолета суммируются. На этом основании можно отдельно изучать и испытывать эти элементы, а результат суммировать. Это объясняет и правомерность существования отдельной «Аэродинамики крыла» Н. Е. Жуковского, «Аэродинамики органов управления летательного аппарата» «Аэродинамики фюзеляжа», «Аэродинамики корпусов ракет» и др.

Однако это не простое сложение характеристик отдельных элементов конструкции самолета. Наоборот, отдельно взятые элементы – корпус, крылья, оперение, рули, – будучи соединенными в единую конструкцию летательного аппарата как бы теряют индивидуальные аэродинамические характеристики и приобретают вследствие интерференции (взаимодействия) новые характеристики. Так, подъемная сила крыла, соединенного с фюзеляжем, увеличивается.

ГЛАВА 7. КРИТЕРИИ И КОЭФФИЦИЕНТЫ ПОДОБИЯ

В гидравлике, газовой динамике, исследовании процессов теплообмена и в ряде других наук, широко применяется метод моделирования, когда исследуется не само явление или процесс, например, поток жидкости, газа или движущееся в газе тело и т. д., а его модель, обычно в уменьшенных размерах [9]. Система понятий и законов, обосновывающих возможность переноса результатов эксперимента с одного объекта (модели) на другой (реальный) называется *теорией подобия*. Если явления подобны, то физические величины, определяющие течение процесса, входят в зависимости между константами (критериями) подобия.

Три базовые теоремы теории подобия:

1. У подобных явлений одноименные критерии одинаковы.
2. Зависимость между переменными, характеризующими какой-либо процесс, может быть представлена в виде зависимости между критериями.
3. Подобны те процессы, в которых условия однозначности подобны, а критерии, составленные из величин, входящих в условиях однозначности, численно равны.

Основные положения теории подобия

Подобными называются явления, для которых постоянны отношения характеризующих их сходственных величин.

Различают четыре вида подобия:

1. Геометрическое подобие.
2. Временное подобие (гомохронность).
3. Подобие физических величин.
4. Подобие начальных и граничных условий.

Геометрическое подобие соблюдается при равенстве отношений всех сходственных линейных размеров натуры и модели. Это как две фотографии разного размера.

Геометрическое подобие:

$$\frac{l_1}{l_2} = k_1 \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{l_1^2}{l_2^2} = k_1^2$$
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{l_1^3}{l_2^3} = k_1^3 = k_v.$$

Кинематическое подобие:

$$\frac{l_1}{l_2} = k_1 \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{l_1 t_2}{l_2 t_1} = \frac{k_1}{k_2} = k_v$$
$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{v_1 i_2}{v_2 i_1} = \frac{k_v}{k_t} = \frac{k_v^2}{k_t} = k_a.$$

Геометрическое подобие соблюдается при равенстве отношений всех сходственных линейных размеров натуре и модели. Это как две фотографии разного размера.

Геометрическое подобие:

$$\frac{l_1}{l_2} = k_1 \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{l_1^2}{l_2^2} = k_1^2 = k_s$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{l_1^3}{l_2^3} = k_1^3 = k_v.$$

Кинематическое подобие:

$$\frac{l_1}{l_2} = k_1 \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{l_1 t_2}{l_2 t_1} = \frac{k_l}{k_t} = k_v$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{v_1 t_2}{v_2 t_1} = \frac{k_v}{k_t} = \frac{k_v^2}{k_t} = k_a.$$

Динамическое подобие:

$$\frac{p_1}{p_2} = k_p$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{V_1 p_1}{V_2 p_2} = k_L^3 k_p = k_m.$$

Характерные для данного гидравлического явления параметры обозначаются следующим образом:

L – линейный размер (например, диаметр трубы, размах крыльев самолета и т. д.),

S – площадь или поверхность (например, живое сечение потока и т. д.),

V – объем,

t – время,

v – скорость,

a – ускорение,

ρ – плотность;

m – масса,

k – масштаб моделирования тех или иных параметров буквой с индексом, соответствующим принятому обозначению этого параметра.

Критерии подобия в газовой динамике и в теории тепломассообмена – безразмерные комплексы, названные именами авторов, их предложивших (см. табл. 7.1).

Таблица 7.1 – Критерии подобия

Название комплекса	Обозначение/Формула	Описание
Число Нуссельта (безразмерный коэффициент теплоотдачи)	$Nu = \frac{\alpha l}{\lambda}$	Характеризует интенсивность теплоотдачи на границе стенка-жидкость.
Число Прандтля	$Pr = \frac{\nu}{a}$	Является также физическим параметром, поскольку целиком составлен из физических параметров. Описывает меру подобия полей температуры и скорости.
Число Рейнольдса	$Re = \frac{\omega l}{\nu}$	Характеризует соотношение сил инерции и сил вязкости.
Число Грасгофа	$Gr = \frac{g\beta\Delta t l^3}{\nu^2}$	Характеризует подъемную силу, возникающую в жидкости вследствие разности плотностей.
Число Пекле	$Pe = \frac{\omega l}{a} = Re Pr$	Характеризует соотношение теплоты, переносимой конвекцией и теплопроводностью.

Этапы применения теории подобия

1. Необходимо получить полное математическое описание интересующего нас объекта. Обычно это дифференциальное уравнение.

2. Провести преобразование этого дифференциального уравнения путем формирования из него критериев подобия.

Эти критерии будут отличаться: в один из них входит неизвестная нам величина. Этот один критерий называют определяемым. Если мы говорим о теплоотдаче, то в определяемый критерий будет входить неизвестный нам коэффициент теплоотдачи α . А остальные критерии составлены из величин, которые мы знаем. Их называют определяющими.

Тогда – определяемый критерий является функцией определяющих критериев.

3. Приступаем к опытам на моделях.

В ходе этих опытов измеряют величины, входящие в критерии подобия. Получают массив экспериментальных данных.

4. Проводят математическую обработку полученных экспериментальных данных с целью выявления зависимости между определяемым и определяющими критериями.

В результате получают критериальное уравнение. Оно публикуется в специальной литературе и используется в технологических расчетах.

Пример

Подробно рассмотрим явления теплового подобия. Наша цель – научиться рассчитывать коэффициенты теплоотдачи от ядра потока к стенке и от стенки в ядро α .

Было установлено что, к большому сожалению, эти коэффициенты зависят от большого числа переменных $\alpha = f(w, c, \rho, \mu, \lambda, d, a, \dots)$. Т. к. переменных

слишком много, на помощь приходит теория подобия. Она позволяет из этих переменных сформировать критерии подобия (комплексы переменных!).

В один из этих критериев будет входить интересующая нас величина, в данном случае коэффициент теплоотдачи α .

Как уже было сформулировано такой критерий называется определяемым. Другие – определяющие.

Ранее мы установили этапы применения теории подобия. Первый этап заключался в *получении математического описания* интересующего нас объекта. Т. е. надо выяснить, а какие переменные влияют на процесс? Обычно этот этап давным-давно сделан – все процессы и явления описаны в форме дифференциальных уравнений.

Рассмотрим уравнение конвективного теплообмена. Цель – получить математическое описание в форме дифференциального уравнения совместного переноса теплоты конвекцией и теплопроводностью.

Для его вывода в потоке выбирается элементарный прямоугольный параллелепипед объемом dV с ребрами dx , dy и dz , параллельными координатным осям.

Составляется тепловой баланс этого параллелепипеда, считая, что теплота через него передается конвекцией и теплопроводностью.

После преобразований получим:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} + \frac{\partial t}{\partial x} \omega_x + \frac{\partial t}{\partial y} \omega_y + \frac{\partial t}{\partial z} \omega_z = a \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right).$$

Это дифференциальное уравнение конвективного теплообмена или уравнение Фурье–Кирхгофа. Оно учитывает вклад времени, конвекции и теплопроводности в распределение температуры в движущемся потоке.

Первый этап применения теории подобия выполнен.

Критерии теплового подобия

Теперь на очереди второй этап – нужно сформировать критерии подобия.

В первую очередь, нас интересует прохождение теплоты через пограничный слой, где «работает» только теплопроводность. А раз теплопроводность, то можем записать закон теплопроводности Фурье:

$$dQ_\tau = -\lambda \frac{\partial t}{\partial n} dF\tau,$$

где dQ – количество теплоты, которое передается за время $d\tau$ через поверхность площадью dF в направлении нормали n этой поверхности;

λ – коэффициент теплопроводности материала, Вт/(м К).

С другой стороны, для теплоотдачи справедливо уравнение закона охлаждения Ньютона:

$$Q = a(t_{ct} - t_{ж})F.$$

Равны левые части – значит равны и правые и, после преобразования, получим:

$$Nu = \frac{aL}{\lambda_{fluid}},$$

где a – коэффициент теплоотдачи, Вт/(м²К);

λ_{fluid} – коэффициент теплопроводности жидкости, Вт/(м · К)

L – характерный размер, м.

Это первый критерий теплового подобия.

Nu – критерий Нуссельта, безразмерная величина, характеризующая интенсивность конвективного теплообмена между поверхностью тела и потоком газа или жидкости. Назван в честь Вильгельма Нуссельта.

Вильгельм Нуссельт – немецкий инженер-исследователь. (1882-1957 гг.).

Изучал машиностроение в Техническом университете Мюнхена (Мюнхенский технический университет), где он получил докторскую степень в 1907 году. Преподавал в Дрездене с 1913 по 1917 год. Работал в области создания изолирующих материалов.

В 1915 году опубликовал свою новаторскую работу: основные законы переноса тепла. В ней он впервые предложил безразмерные группы, теперь известные как основные параметры в теории подобия теплообмена.

Так как в критерий Нуссельта неизвестный нам коэффициент теплоотдачи α , то этот критерий является определяемым. Теперь надо найти определяющие критерии. Для этого рассмотрим перенос теплоты в турбулентном потоке и преобразуем уравнение Фурье–Кирхгофа.

Вклад конвекции

$$\frac{\partial t}{\partial x} \omega_x + \frac{\partial t}{\partial y} \omega_y + \frac{\partial t}{\partial z} \omega_z - \text{пропорционально } \sim (t/L)W.$$

Вклад теплопроводности:

$$a \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) - \text{пропорционально } \sim (at/L^2).$$

Влияние времени: $\frac{\partial t}{\partial \tau} \sim \frac{t}{\tau}$.

Теперь будем искать соотношения этих трех вкладов на процесс теплоотдачи. Найдем соотношение вкладов теплопроводности и времени:

$$\frac{at}{l^2} \div \frac{t}{\tau} = \frac{a\tau}{l^2} = F_0.$$

F_0 – критерий Фурье, учитывает вклад времени в распределение температуры. Применяется только для неустановившихся процессов.

Теперь найдем соотношения вкладов конвекции и теплопроводности:

$$\frac{t}{l} w \div \frac{at}{l^2} = \frac{wl}{a} = Pe.$$

Pe критерий Пекле, является мерой соотношения конвекции (в числителе скорость потока w) и теплопроводности (в знаменателе коэффициент температуропроводности – a).

Этот критерий для расчетов неудобен. Его преобразуют в два других критерия:

$$\frac{wl}{a} \frac{v}{v} = \frac{wl}{V} \frac{v}{a} = RePr.$$

Появился знакомый ранее – критерий Рейнольдса. На теплоотдачу сильно влияет турбулентность! И еще появился новый критерий – критерий Прандтля:

$$\frac{v}{a} = Pr.$$

Он назван в честь немецкого ученого Людвига Прандтля, который внес существенный вклад в основы гидродинамики и разработал теорию пограничного слоя.

Напомним механизм передачи теплоты в потоке. (см. рис. 7.1).

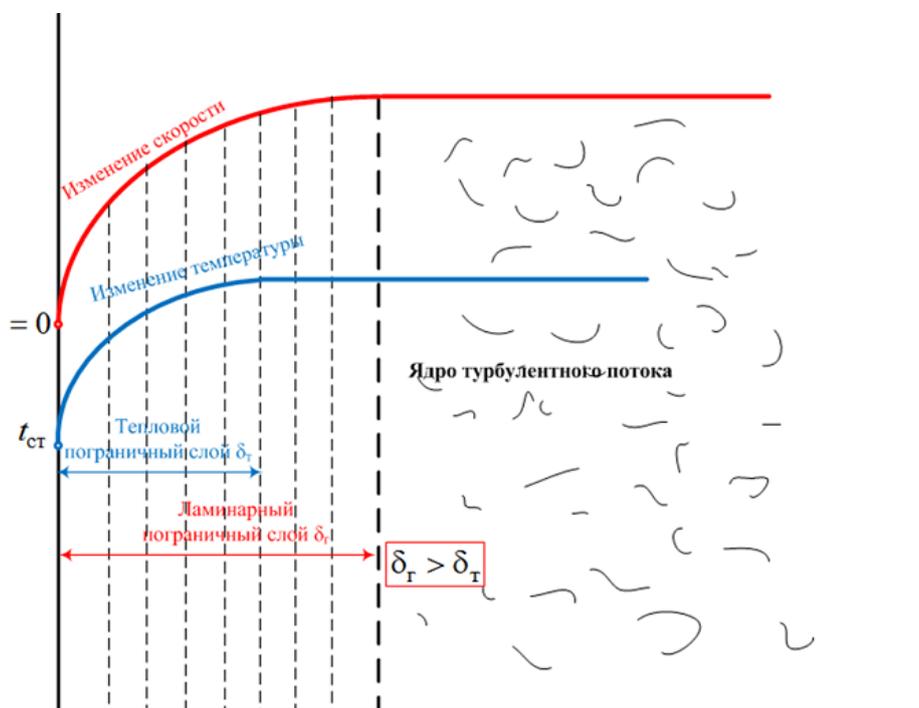


Рисунок 7.1 – Механизм передачи тепла в потоке

Можно утверждать, что критерий Прандтля является мерой соотношения толщин гидродинамического ламинарного и теплового слоев:

$$Pr = \frac{v}{a} \sim \frac{\delta_L}{\delta_T}$$

Для расчетов удобнее записать критерий Прандтля иначе:

$$Pr \equiv \frac{v}{a} = \frac{\mu c_p}{\rho \lambda} = \frac{\mu c}{\lambda}$$

И окончательно получаем:

$$Pr \equiv \frac{\mu c}{\lambda}$$

Все три величины – свойства вещества, которые приводятся в справочниках. Их найти – просто.

С ростом температуры вязкость жидкостей уменьшается. Следовательно, число Прандтля тоже уменьшается.

Например, для воды при 0°C критерий Прандтля равен 13,5, а при 100°C – 1,7.

Для газов критерий Прандтля вообще равен 1.

Критерии Рейнольдса и Прандтля – определяющие критерии. Согласно второй теореме подобия, решение любого дифференциального уравнения может быть представлено в виде зависимости между критериями подобия.

Этой зависимости принято придавать степенной вид. Так критерий Нуссельта является определяемым, то мы можем записать:

$$Nu = A Re^m Pr^n \left(\frac{l}{d}\right)^k,$$

где $\frac{l}{d}$ – симплекс геометрического подобия, учитывает геометрию потока.

Т. е., зная критерии Рейнольдса и Прандтля, а также геометрические размеры аппарата, мы можем найти значение критерия Нуссельта.

А из него – коэффициент теплоотдачи:

$$\alpha = \frac{Nu \lambda}{d}.$$

Коэффициенты A , m , n и k в уравнении:

$$Nu = A Re^m Pr^n \left(\frac{l}{d}\right)$$

определяются в результате проведения большого числа экспериментов и последующей обработки полученных результатов.

ГЛАВА 8. ТЕЧЕНИЕ ГАЗА ЧЕРЕЗ РЕШЕТКИ ТУРБОМАШИН

8.1. Геометрические и газодинамические параметры решеток

Преобразование энергии в ступени турбомашин происходит в результате взаимодействия потока газа с неподвижными и вращающимися лопатками, которые образуют направляющую и рабочую решетки.

Протекая через решетку, поток газа изменяет скорость и направление своего движения. При этом на решетку действует сила реакции. На вращающихся решетках турбины эта сила совершает работу; вращающиеся решетки компрессоров, наоборот, увеличивают энергию протекающего газа. В неподвижных решетках энергетического обмена с окружающей средой не происходит. Здесь осуществляются необходимые преобразования энергии для получения требуемой скорости и поворот потока.

Классификация решеток может быть произведена по различным параметрам. В зависимости от расчетных условий обтекания и соответствующих им геометрических параметров профиля и канала различают три основных типа решеток:

- а) конфузорные – используются в турбинах в качестве как сопловых или направляющих, так и реактивных рабочих;
- б) активные – используются в турбинах в качестве рабочих;
- в) диффузорные решетки – используются в компрессорах в качестве как направляющих, так и рабочих (см. рис. 8.1).

В зависимости от общего направления движения газа по отношению к оси вращения решетки подразделяются на осевые и радиальные.

Существуют различные способы задания формы и профилей лопаток. Наибольшее распространение нашли координатный способ (рис. 8.2а), а также способ построения профиля сопряженными дугами окружностей (рис. 8.2б).

Гипотеза плоских сечений, положенная в основу исследований и расчетов современных турбомашин, была впервые плодотворно применена Н. Е. Жуковским в 1890 г. Ценность этой гипотезы подтверждена многочисленными экспериментами.

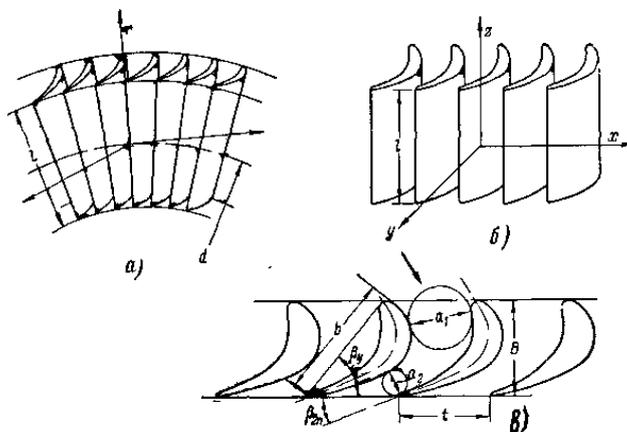
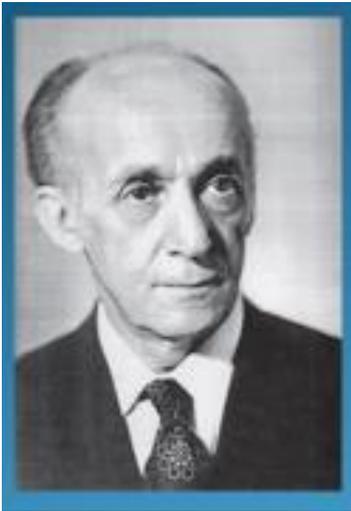


Рисунок 8.1 – Геометрические параметры решеток:
а – кольцевая (цилиндрическая) решетка; б – прямолинейная решетка;
в – плоская решетка

В проблемной лаборатории турбомашин Московского энергетического института (МЭИ) были разработаны методы расчета решеток и ступеней на влажном паре, новые методы сепарации влаги из проточных частей турбин на АЭС, решены вопросы оптимизации проточных частей турбин.



Одним из основоположников этих разработок был **Дейч Михаил Ефимович (1916-1994 гг.)**.

Советский и Российский ученый теплоэнергетик, доктор технических наук, профессор МЭИ. Внес важный вклад в развитие теории и практики аэродинамики турбин. Получил Государственную премию СССР (1981).

Создал и развил новое направление газодинамики двухфазных сред. Разработал профили лопаточных аппаратов для широкого диапазона рабочих параметров, которые используются в большинстве турбин СССР, и турбин, выпускающихся в современной России.

С началом работ по созданию в СССР атомных электростанций на кафедре Паровых и газовых турбин МЭИ, под руководством профессора М. Е. Дейча было создано новое научное направления – «газодинамика двухфазных сред», которое послужило основой по разработке турбин и турбоустановок АЭС и цилиндров низкого давления турбоагрегатов для ТЭС.

Геометрические характеристики решеток задаются, как правило, в безразмерном виде. Например, относительный шаг профилей определяется по формуле:

$$t = \frac{t}{b} \text{ или } \bar{t}_B = \frac{t}{B}$$

Относительная высота (или длина) лопатки

$$\bar{l} = \frac{l}{b} \text{ или } \bar{l}_a = \frac{l}{a_2}$$

где a_2 – ширина минимального (узкого) сечения канала (рис. 8.1).

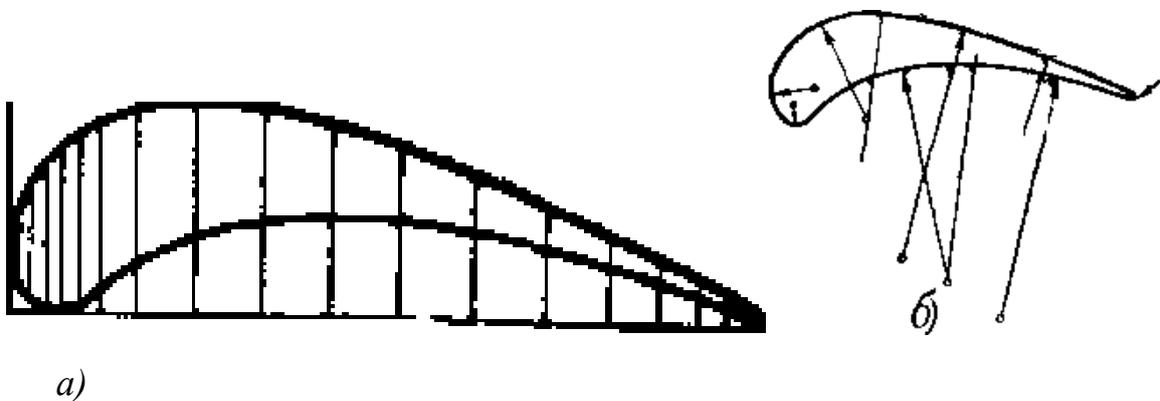


Рисунок 8.2 – Различные способы задания профиля лопатки:
a – координатный; *б* – дугами окружности

Процесс течения газа через решетки лопаточной машины является весьма сложным. Теоретическое решение задачи нестационарного пространственного движения вязкой сжимаемой жидкости в решетке представляет большие трудности. Правильный подход к решению этой задачи заключается в исследовании упрощенных моделей действительного процесса, сохраняющих его наиболее существенные черты, с учетом и последующим анализом влияния второстепенных факторов.

Рассмотрим некоторые особенности плоского потенциального течения идеальной несжимаемой жидкости на примере обтекания реактивной решетки (рис. 8.3). Вследствие периодичности потока достаточно изучить течение в одном межлопаточном канале или обтекание одного профиля. На рис. 8.3а сплошными кривыми изображены линии тока $\Psi = \text{const}$; пунктирными кривыми показаны изопотенциальные линии $\Phi = \text{const}$, нормальные к линиям тока.

Скорость c в любой точке потока равна:

$$c = \frac{d\Phi}{dS} = -\frac{d\Psi}{dn'}$$

где S и n – криволинейные координаты соответственно вдоль линий тока и изопотенциальных линий (см. рис. 8.3 течение несжимаемой жидкости через решетку).

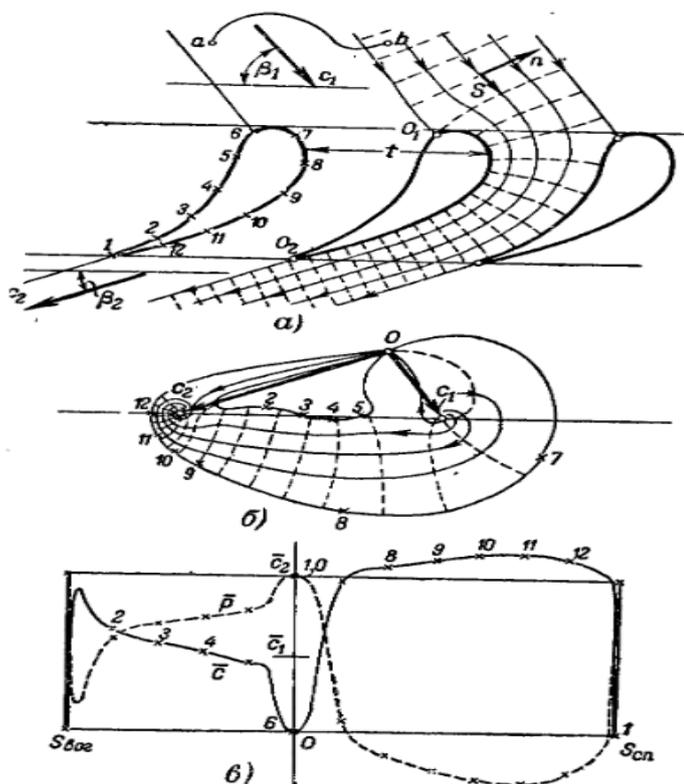


Рисунок 8.3 – Течение идеальной несжимаемой жидкости через направляющую решетку:

a – изопотенциальные линии и линии тока в решетке; $б$ – годограф скорости;
 $в$ – распределение относительных скоростей и коэффициентов давления по профилю

Другой важной характеристикой течения является план скоростей, или годограф скорости (рис. 8.3б). Рассматривая годограф скорости решетки, можно прийти к заключению, что в точках спинки профиля, касательные, параллельные направлениям скоростей на бесконечности, до и за решеткой, должны быть больше по величине, чем соответственно c_1 и c_2 .

Большой интерес представляет распределение скорости или давления на поверхности профиля. На рис. 8.3в также величины относительных скоростей или давлений не изменяются.

Общий характер распределения скорости по профилю можно оценить, рассматривая ширину межлопаточного канала и кривизну контура профиля. В частности, сужение канала, характерное для турбинной решетки реактивного типа, приводит к ускорению потока; на участке канала между профилями турбинной решетки активного типа с приблизительно постоянной шириной и кривизной средние значения скорости и давления мало изменяются (рис. 8.4).

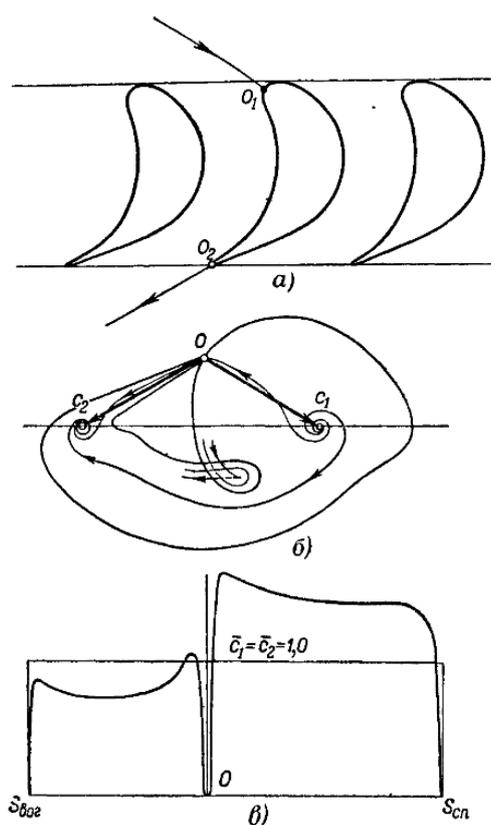


Рисунок 8.4 – Течение идеальной несжимаемой жидкости через активную решетку:

a – профиль активной решетки; $б$ – годограф скорости; $в$ – распределение относительных скоростей по профилю

В компрессорной решетке межлопаточный канал расширяется и скорость соответственно уменьшается (рис. 8.5). Распределение локальных скоростей в точках обвода профиля существенно зависит от формы вогнутой и выпуклой

поверхностей и степени сужения канала, а также геометрических и режимных параметров решетки.

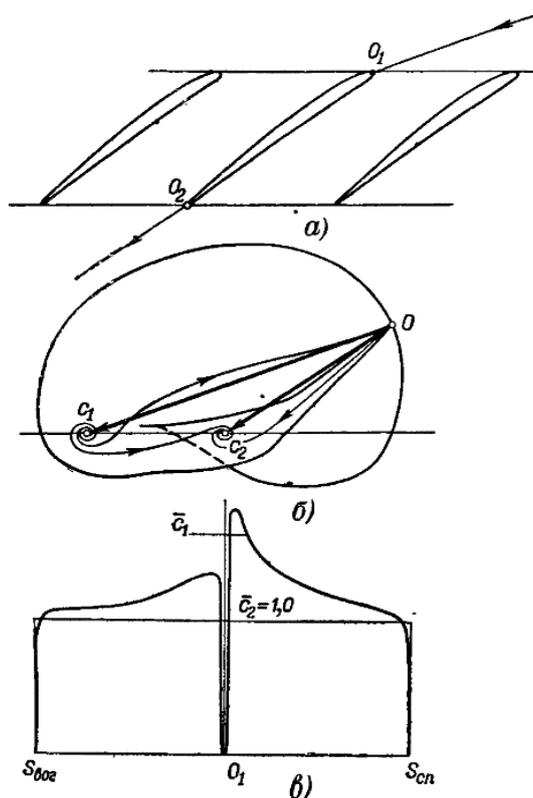


Рисунок 8.5 – Течение идеальной несжимаемой жидкости через компрессорную решетку: *a* – профиль решетки; *б* – годограф скорости; *в* – распределение относительных скоростей по профилю

Выше рассматривалось течение идеальной несжимаемой жидкости через решетку. В действительности с учетом влияния вязкости картина течения в решетке может существенно отличаться от рассмотренной.

При течении реальной вязкой жидкости на поверхности профиля образуется пограничный слой, в котором концентрируются потери энергии, обусловленные трением. Потери энергии в решетках, обусловленные при малых скоростях влиянием вязкости и периодической нестационарностью, а также высокой турбулентностью потока, а при околосвуковых и сверхзвуковых скоростях еще и необратимыми процессами изменения энергии в скачках, в значительной степени определяют КПД лопаточной машины.

Классификация применяемых решеток может быть существенно расширена. Так, в зависимости от скорости (числа M) все решетки следует разделить на три группы: *дозвуковые*, *околосвуковые* и *сверхзвуковые*.

Кроме того, применяемые решетки различают по относительной высоте: решетки малой высоты и решетки большой высоты.

8.2. Расчет потенциального потока в решетках по теории канала

В теории решеток и при их экспериментальном исследовании возникают две основные задачи. Одна из них, называемая прямой задачей, состоит в определении поля скоростей потенциального течения через решетку, состоящую из профилей заданной формы, и в последующей оценке потерь энергии при различных режимных (угол входа, числа M и Re) и геометрических (шаг, угол установки профиля, высота решетки и пр.) параметрах.

Обратная задача заключается в построении решетки, отвечающей выбранному или заданному потоку в решетке. В этой постановке практически важной является задача построения решетки с рациональным распределением скоростей (давлений) по поверхности профиля, обеспечивающим минимальные потери энергии.

Более простые способы расчета, позволяющие с достаточной точностью решать прямую и обратную задачи, основаны на теории канала. Одним из первых был предложен метод Г. Флюгеля, развитый позднее Г. Ю. Степановым.

При расчете потока на входе и в косом срезе решетки необходимо с известным приближением определить граничные линии тока. В простейшем случае граничные линии тока перед и за решеткой могут быть выбраны в виде отрезков прямых линий (рис. 8.6). Направление этих линий на входе в решетку задано (угол β_1), а на выходе оно может быть определено одним из известных методов.

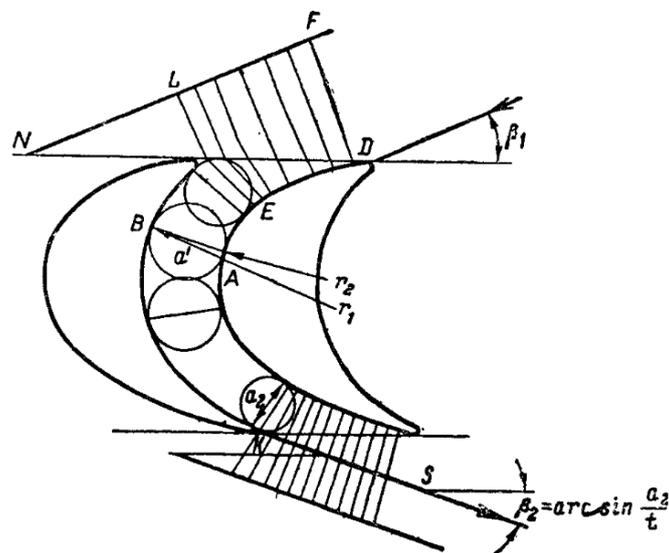


Рисунок 8.6 – К расчету обтекания решетки по методу канала

При расчете потока на входе рассматривается некоторый фиктивный входной участок EDFL (рис. 8.6), служащий непосредственным продолжением межлопаточного канала. Одна граничная линия участка проходит под углом β_1 и является линией невозмущенного потока, а вторая – спинкой профиля. Отрезок DN можно принять равным (от 1,5 до 2,0) t .

На выходе из канала граничные линии тока KS (рис. 8.6) строятся в предположении, что изопотенциалами являются лучи, ортогональные к спинке профиля. Линии тока KS в этом случае служат продолжением вогнутой поверхности соседнего профиля. На некотором расстоянии за решеткой (от точки S) линия тока переходит в прямую, проведенную под углом β_2 . Подробно методика расчета скоростей в решетке изложена в монографии [2].

8.3. Классификация потерь энергии в решетке

При движении газа через решетки турбомашин возникают потери энергии: часть кинетической энергии потока вследствие вязкости необратимо преобразуется в тепло.

Рассмотренные в настоящей главе некоторые результаты теоретических и экспериментальных исследований потока газа в решетках позволяют классифицировать потери энергии по следующей схеме:

А. *Профильные потери* (в плоской решетке, т. е. при бесконечно большой высоте), включающие: 1) потери на трение в пограничном слое; 2) вихревые потери при отрывах потока на профиле; 3) вихревые потери за выходной кромкой (кромочные потери).

Б. *Концевые потери* в прямой пространственной решетке (дополнительно к группе «А»).

В. *Волновые потери* (дополнительно к группам «А» и «Б» при околосзвуковых и сверхзвуковых скоростях) в скачках уплотнения.

Г. *Потери, вызванные не стационарностью и высокой турбулентностью* потока.

Д. *Веерные потери* в кольцевой решетке, обусловленные отклонениями геометрических параметров решетки от оптимальных значений и радиальными перетеканием газа.

При исследовании решеток устанавливаются относительные потери энергии, а профильное сопротивление характеризуется силой сопротивления, отнесенной к скоростному напору набегающего потока. Физическая природа профильных потерь и профильного сопротивления тождественна. Вихревые потери при отрыве потока на профиле и за выходной кромкой эквивалентны сопротивлению давлений.

Потери, отнесенные к группам «Б», «Г» и «Д», являются специфическими для решеток. Волновые потери (группа «В») проявляются в решетках в специфической форме. Однако эта группа потерь, обусловленная необратимыми процессами в скачках, аналогична волновому сопротивлению при обтекании одиночного профиля.

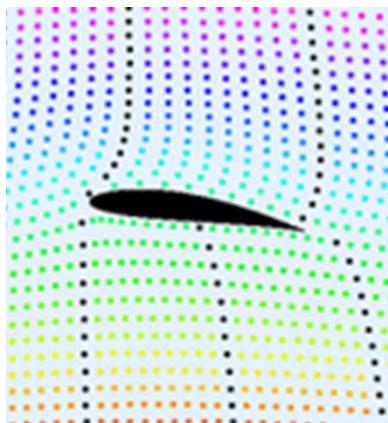
При расчете ступени турбомашин необходимо знать направление потока на выходе из решетки (угол выхода потока) и энергетические или силовые характеристики решеток.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Абрамович, Г. Н. Прикладная газовая динамика: учебник / Г. Н. Абрамович. – М., 1951. – 511 с.
2. Дейч, М. Е. Техническая газодинамика / М. Е. Дейч. – 2-е изд., перераб. – М.-Л., 1961. – 343 с.
3. Гладышев, Н. Н. Газодинамика: конспект лекций / Н. Н. Гладышев; ВШТЭ СПбГУПТД. – СПб., 2012. – 159 с.
4. Костюк, А. Г. Паровые и газовые турбины для электростанций: учебник для вузов / А. Г. Костюк. – М., 2016. – 557 с.
5. Гладышев, Н. Н. Газодинамика. Часть 2: методические указания выполнения курсовой работы для студентов очной и заочной форм обучения по специальности 13.03.01 «Теплоэнергетика и теплотехника» / Н. Н. Гладышев, Т. Ю. Короткова, А. М. Хлыновский; ВШТЭ СПбГУПТД. – СПб., 2021. – 43 с.
6. Виноградов, Л. В. Исследование геометрических параметров сопла с контуром Витошинского / Л. В. Виноградов, Ш. Р. Лотфулин // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Инженерные исследования. – 2004. – С. 44-49.
7. Шевцов, А. А. О способе повышения эффективности энергетического оборудования / А. А. Шевцов, А. М. Хлыновский // Энергетика и автоматизация в современном обществе: материалы V Международной научно-практической конференции преподавателей и учащихся, Санкт-Петербург, 20 мая 2022. – СПб.: ВШТЭ СПбГУПТД, 2022. – Ч. II. – С. 216-220.
8. Злобин, В. Г. Газотурбинные установки. Методика расчета ГТУ на номинальной мощности, пониженной мощности, расчет долговечности установки: практикум / В. Г. Злобин, А. А. Верхованцев; М-во науки и высшего образования РФ, С-Петербург. гос. ун-т пром. технологий и дизайна, Высш. шк. технологии и энергетики. – Санкт-Петербург: ВШТЭ СПбГУПТД, 2021. – 68 с. – URL: <http://nizrp.narod.ru/metod/tsuitd/1641743961.pdf> (дата обращения: 17.01.2025)
9. Филиппов, В. В. Теплообмен в химической технологии. Теория. Основы проектирования: учебное пособие / В. В. Филиппов; Самарский гос. техн. ун-т. – Самара, 2014. – 197 с.
10. Babinsky, H. How do wings work. Department of Engineering, University, Cambridge. UK, 2003.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Подъемная сила крыла: альтернативная точка зрения [10]



Популярное объяснение:

Механизм образования подъемной силы крыла:

Точка застоя (S) – место, где встречный поток разделяется на поток, движущийся над крылом, и поток, движущийся под крылом

Задняя кромка (Т) – место, где соседние частицы жидкости, которые разделились в точке S, должны встретиться.

Предположим, что две соседние частицы жидкости, которые «разделились» в точке S, должны снова встретиться в точке Т.

Тогда средняя скорость на верхней поверхности должна быть больше, чем на нижней. Уравнение Бернулли: Большая скорость подразумевает меньшее

давление: $P_1 > P_2$.

Крыло имеет несимметричный профиль снизу и сверху.

Непрерывный поток воздуха разделяется крылом на две части, одна из которых проходит над крылом, а другая под ним

Мы рассматриваем

ламинарное обтекание, в котором поток воздуха плотно прилегает к поверхности крыла.

Поскольку профиль несимметричен, то для того чтобы снова сойтись за крылом в одной точке «верхнему» потоку нужно проделать больший путь, чем «нижнему», поэтому воздуху над крылом приходится двигаться с большей скоростью, чем под ним.

Согласно закону Бернулли, статическое давление в потоке уменьшается с ростом скорости потока, поэтому в потоке над крылом статическое давление будет ниже. Разница давлений в потоке под крылом и над ним и составляет подъемную силу.

Разберем 3 аргумента, объясняющие неправоту популярного объяснения подъемной силы крыла:

1. Пример мачты и паруса.

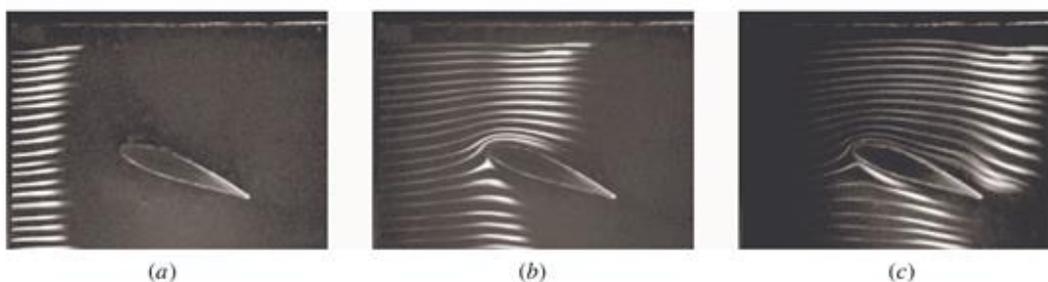


Очевидно, что расстояние между точкой застоя и кромкой крыла более или менее одинаково с обеих сторон. Это становится в точности верным при отсутствии мачты, и очевидно, что наличие мачты не имеет никакого значения для создания подъемной силы.

Таким образом, для создания подъемной силы не требуются различные расстояния вокруг верхней и нижней поверхностей.

2. Дымовая камера

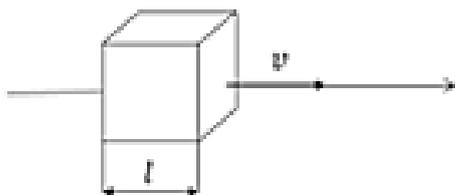
Линия дыма движется вместе с потоком, разделяясь на частицы, движущиеся выше и ниже аэродинамической спирали. К тому моменту, когда дым проходит аэродинамическое кольцо, частицы, движущиеся вдоль верхней поверхности, явно опережают частицы, движущиеся вдоль нижней поверхности. Они не встречаются у задней кромки.



Когда возникает подъемная сила, частицы жидкости, движущиеся вдоль верхней поверхности, достигают задней кромки раньше, чем частицы, движущиеся вдоль нижней поверхности.

3. Уравнение Бернулли (для движения элементарной частицы).

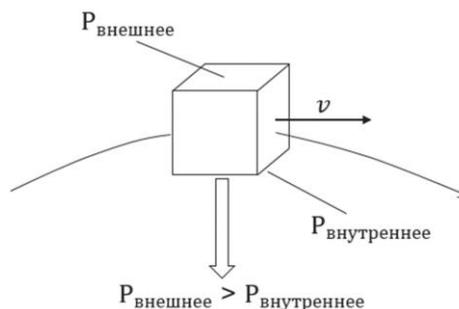
Движение вдоль прямой линии



Передняя часть и задняя часть частицы испытывают разные давления, если давление падает по мере продвижения по оси, то давление на заднюю часть выше, чем на переднюю.

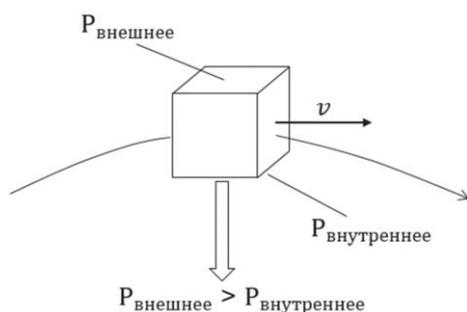
Если на частицу действует положительная сила, то согласно закону Ньютона, эта сила вызывает ускорение, и скорость частицы увеличивается по мере движения вдоль линии потока.

Движение вдоль кривой линии



Предположим, что $v = \text{const}$, поскольку частица меняет направление движения, то должна существовать центростремительная сила, действующая нормально к направлению движения. Эта сила может быть вызвана только разностью давлений (все остальные силы игнорируются). Это подразумевает, что давление на одну сторону частицы больше чем на другую.

Рассмотрим выражение для центростремительной силы.



Центростремительная сила $F = \frac{mv^2}{2}$ и мы можем определить $P_{\text{внутреннее}} = p$ и $P_{\text{внешнее}} = p + dp$.

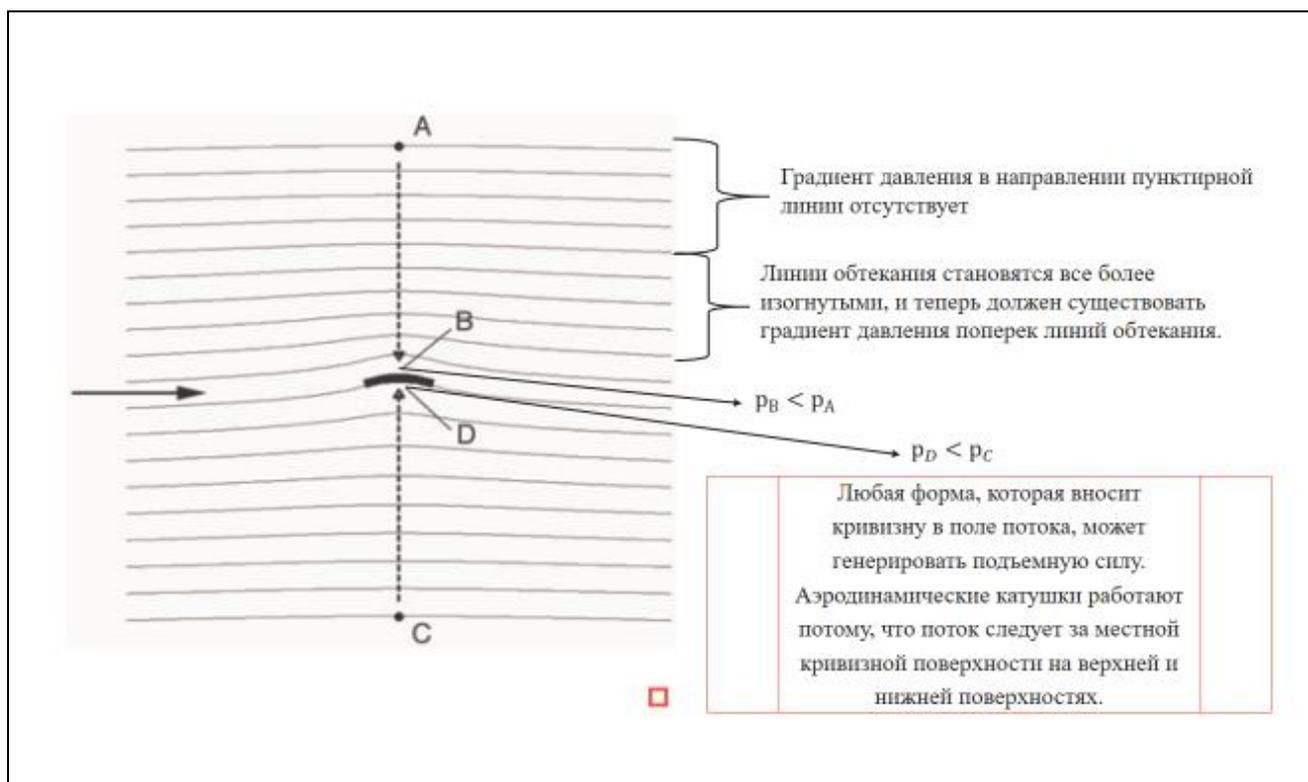
Как и ранее, мы отмечаем, что $m = \rho Ah$.

Комбинируя все вышеизложенное, получаем $F = Adp = Ah \frac{\partial p}{\partial n} = \rho Ah \frac{v^2}{R}$.

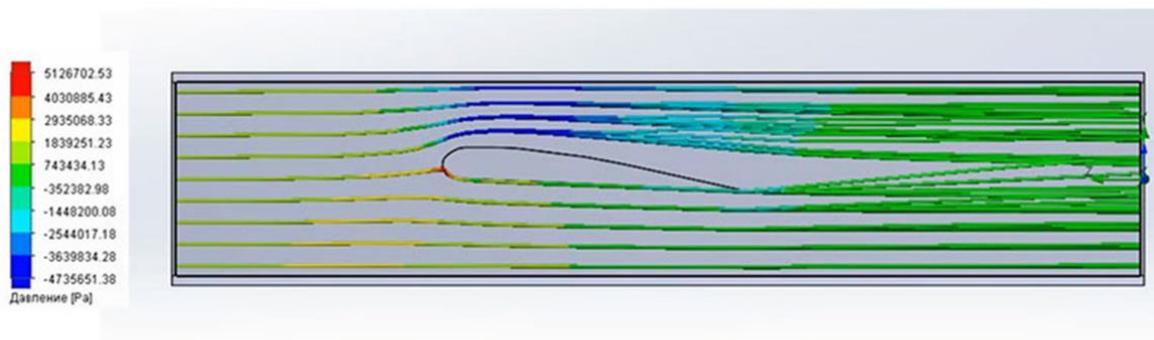
Окончательно получаем:

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \rho \frac{v^2}{R}$$

По мере приближения к криволинейному профилю наблюдают нарастание давления.



Пример численных расчетов обтекания крылового профиля потоком газа.



Итого:

1. Взаимодействие воздуха с крылом формирует вокруг крыла области высокого и низкого давления, которые искривляют воздушный поток так, что он огибает крыло.

2. Острая задняя кромка крыла приводит к тому, что в идеальном потоке из всех потенциальных решений уравнений движения реализуется только одно конкретное, исключаящее переток воздуха вокруг острой задней кромки. Это решение зависит от угла атаки и у обычного крыла имеет область пониженного давления над крылом и область повышенного давления – под ним.

3. Соответствующая разница давлений формирует подъемную силу крыла, заставляет воздух двигаться быстрее над верхней кромкой крыла и замедляет воздух под нижней.

Учебное издание

**Хлыновский Алексей Михайлович
Гладышев Николай Николаевич**

**Гидрогазодинамика
(Газодинамика)
Основы газовой динамики**

Учебное пособие

Редактор и корректор А. А. Чернышева
Техн. редактор Д. А. Романова

Темплан 2025 г., поз. 5114

Подписано к печати 20.05.2025.

Формат 60x84/16.

Бумага тип № 1.

Печать офсетная.

Печ. л. 6,7.

Уч.-изд. л. 6,7.

Тираж 30 экз.

Изд. № 13

Цена «С».

Заказ №

Ризограф Высшей школы технологии и энергетики СПбГУПТД,
198095, Санкт-Петербург, ул. Ивана Черных, 4.