

В. А. Суслов

**ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОС В ЭЛЕМЕНТАХ
ТЕПЛОТЕХНИЧЕСКОГО ОБОРУДОВАНИЯ**

ЧАСТЬ 1

Учебное пособие

**Санкт-Петербург
2024**

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«Санкт-Петербургский государственный университет
промышленных технологий и дизайна»
Высшая школа технологии и энергетики

В. А. Суслов

ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОС В ЭЛЕМЕНТАХ ТЕПЛОТЕХНИЧЕСКОГО ОБОРУДОВАНИЯ

ЧАСТЬ 1

Учебное пособие

Утверждено Редакционно-издательским советом ВШТЭ СПбГУПТД

Санкт-Петербург
2024

УДК 621.1 (075)
ББК 31.31я7
С904

Рецензенты:

доктор технических наук, главный научный сотрудник лаборатории разработки,
проектирования и технико-экономических исследований теплоэнергетических установок
и систем ОАО «НПО ЦКТИ»

П. А. Кругликов;

доктор технических наук, профессор кафедры «Процессы и аппараты химической
технологии» Высшей школы технологии и энергетики Санкт-Петербургского
государственного университета промышленных технологий и дизайна

В. С. Куров

Суслов, В. А.

С904 Тепломассоперенос в элементах теплотехнического оборудования.
Часть 1: учебное пособие / В. А. Суслов. — СПб.: ВШТЭ СПбГУПТД,
2024. — 112 с.

ISBN 978-5-91646-410-8

Учебное пособие соответствует программам и учебным планам дисциплины
«Тепломассоперенос в элементах теплотехнического оборудования» для студентов,
обучающихся по направлению подготовки 13.04.01 «Теплоэнергетика и теплотехника».

Учебное пособие содержит основные понятия, определения и расчетные уравнения по
вопросам тепломассообмена в элементах теплотехнического оборудования. Для закрепления
теоретического материала в основные главы пособия включены примеры задач с решениями.

Учебное пособие состоит из 2 частей. В часть 1 пособия включены разделы
«Теплопроводность» и «Конвекция».

Учебное пособие предназначено для магистров очной и заочной форм обучения.

УДК 621.1 184.64
ББК 31.31

ISBN 978-5-91646-410-8

© ВШТЭ СПбГУПТД, 2024
© Суслов В. А., 2024

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	5
1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ	6
2. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ	8
2.1. Коэффициент теплопроводности.....	8
2.1.1. Коэффициент теплопроводности газов.....	9
2.1.2. Коэффициент теплопроводности жидкостей	9
2.1.3. Коэффициент теплопроводности металлов.....	9
2.1.4. Коэффициент теплопроводности строительных материалов.....	10
2.2. Дифференциальное уравнение теплопроводности	10
2.3. Условия однозначности для процессов теплопроводности.....	13
2.3.1. Передача теплоты через плоскую стенку	14
2.3.1.1. Граничные условия первого рода.....	14
2.3.1.2. Граничные условия третьего рода. Теплопередача.....	17
2.3.2. Передача теплоты через цилиндрическую стенку.....	19
2.3.2.1. Граничные условия первого рода.....	19
2.3.2.2. Граничные условия третьего рода. Теплопередача.....	21
2.3.2.3. Критический диаметр цилиндрической стенки	23
2.3.2.4. Критический диаметр тепловой изоляции	24
2.3.3. Передача теплоты через шаровую стенку	24
2.3.3.1. Граничные условия первого рода.....	24
2.3.3.2. Граничные условия третьего рода.....	25
2.3.4. Интенсификация теплопередачи	26
2.3.5. Теплопроводность и теплопередача в стержне постоянного поперечного сечения.....	27
2.4. Примеры с решениями.....	29
3. НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ	33
3.1. Нестационарные процессы теплопроводности в телах простой формы. Граничные условия третьего рода.....	34
3.2. Регулярный режим процессов теплопроводности	41
3.3. Численные методы решения задач теплопроводности. Метод конечных разностей	42
3.4. Исследование процессов теплопроводности методом аналогии (электротепловая аналогия).....	43
3.5. Примеры с решениями.....	46
4. КОНВЕКТИВНЫЙ ТЕПЛООБМЕН В ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ.....	49
4.1. Основные физические свойства жидкости	50
4.2. Дифференциальные уравнения конвективного теплообмена.....	50
4.2.1. Уравнение энергии.....	51
4.2.2. Уравнение движения.....	52
4.2.3. Уравнение сплошности.....	54
4.3. Основы теории подобия и размерностей	54
4.3.1. Условия однозначности.....	55
4.3.2. Условия подобия и вывод ее основных критериев.....	56

4.3.3. Теория размерностей	61
4.4. Теплоотдача при продольном омывании плоской поверхности	62
4.4.1. Условия прилипания	62
4.4.2. Гидродинамический пограничный слой	63
4.4.3. Тепловой пограничный слой	64
4.4.4. Турбулентный перенос теплоты и количества движения	65
4.4.5. Система уравнений турбулентного пограничного слоя	67
4.4.6. Теплоотдача в ламинарном пограничном слое	69
4.4.7. Переход ламинарного течения в турбулентное	72
4.4.8. Теплоотдача при турбулентном пограничном слое	72
4.5. Примеры с решениями	78
5. ТЕПЛОТДАЧА ПРИ ВЫНУЖДЕННОМ ТЕЧЕНИИ ЖИДКОСТИ	
В ТРУБАХ	87
5.1. Основные режимы течения в трубах	87
5.2. Теплоотдача при течении жидкости в гладких трубах и каналах	91
5.2.1. Ламинарный режим	91
5.2.2. Турбулентный режим	92
5.2.3. Переходный режим	93
5.2.4. Изогнутые трубы	93
5.2.5. Теплоотдача в шероховатых трубах	94
6. ТЕПЛОТДАЧА ПРИ ВЫНУЖДЕННОМ ПОПЕРЕЧНОМ	
ОМЫВАНИИ ТРУБ И ПУЧКОВ ТРУБ	95
6.1. Одиночная труба	95
6.2. Теплоотдача при поперечном омывании пучков труб	97
6.3. Примеры с решениями	98
7. ТЕПЛОТДАЧА ПРИ СВОБОДНОМ ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ	102
7.1. Теплоотдача при свободном движении жидкости в большом объеме	102
7.2. Теплоотдача при движении жидкости в ограниченном пространстве	104
7.3. Примеры с решениями	105
РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА	108
ПРИЛОЖЕНИЯ	109

ВВЕДЕНИЕ

Вопросы тепло- и массообмена в инженерных разработках занимали и будут приобретать все большее значение, особенно с ограничением добычи легкодоступных углеводородных топлив.

Правильность проведения теплового расчета, основанного на теории тепло- и массообмена, построенной на его базе конструктивных характеристик теплообменных устройств, определяют эффективность и надежность работы теплообменных аппаратов и тепловых двигателей.

Решение многих задач химической технологии, вообще всей промышленности, а особенно энергетики, авиационной техники, судостроения, коммунального хозяйства неразрывно связано с успехами теории теплообмена.

Теория тепло- и массообмена представляет собой один из важнейших разделов технической физики. Она базируется на таких дисциплинах, как физика, термодинамика и газовая динамика.

Существенный вклад в развитие теории тепло- и массообмена сделан отечественными учеными: М. В. Кирпичевым, М. А. Михеевым, А. А. Гухманом, Г. Н. Кружилиным, С. С. Кутателадзе, А. В. Лыковым, Б. С. Петуховым, В. П. Исаченко, Д. А. Лабунцовым, В. М. Иевлевым, В. М. Антуфьевым, В. И. Субботиным и многими другими.

Данное учебное пособие состоит из 2 частей.

В часть 1 пособия включены разделы «Теплопроводность» и «Конвекция».

Настоящее учебное пособие составлено в соответствии с требованиями образовательных стандартов и охватывает минимальный, но необходимый объем материала по данной дисциплине и поэтому может быть использовано в качестве конспекта лекций студента-теплоэнергетика.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Теплопередача или теплообмен – это учение о самопроизвольных и необратимых процессах распространения теплоты в пространстве, обусловленных неоднородным температурным полем. Пространство может быть заполнено многокомпонентной смесью веществ. Если концентрация компонентов в различных точках пространства разная, происходит процесс переноса массы компонентов из одной области в другую. Этот процесс называется массообменом. Совместно протекающий процесс переноса теплоты и массы вещества называется тепломассообменом.

Температурным полем называется совокупность мгновенных значений температуры в объеме тела или системы тел для каждого рассматриваемого момента времени:

$$t = f(x, y, z, \tau), \quad (1.1)$$

где t – температура; x, y, z – пространственные координаты; τ – время.

Температурное поле, описываемое уравнением (1.1), в котором температура зависит от времени, называется нестационарным. При установившемся тепловом режиме, когда температурное поле не зависит от времени, $dt/d\tau = 0$, температурное поле называется стационарным:

$$t = f(x, y, z); \quad \partial t / \partial \tau = 0. \quad (1.2)$$

Уравнения (1.1) и (1.2) являются многомерными или пространственными. Для одномерного стационарного температурного поля уравнение записывается так:

$$t = f(x), \quad \partial t / \partial y = \partial t / \partial z = 0, \quad \partial t / \partial \tau = 0. \quad (1.3)$$

В этом случае температура в процессе нагрева или охлаждения определяется одной координатой.

Геометрическое место точек в температурном поле, имеющих одинаковую температуру, называют изотермическими поверхностями. Изотермические поверхности не пересекаются, они либо оканчиваются на поверхности тела, либо располагаются внутри его. Температура в теле изменяется только в направлениях, пересекающих изотермические поверхности. Скорость изменения температуры по нормали к изотермической поверхности характеризуется градиентом температуры – вектором, направленным по нормали к изотермической поверхности в сторону возрастания температуры и численно равным производной от температуры по этому направлению:

$$\text{grad}t = \bar{n}_0 \frac{\partial t}{\partial n}, \quad (1.4)$$

где n_0 – единичный вектор, нормальный к изотермической поверхности и направленный в сторону возрастания температуры (рис. 1.1).

Количество теплоты, переносимое за единицу времени через изотермическую поверхность площадью F , называется тепловым потоком Q , [Дж/с] или [Вт].

Тепловой поток, проходящий через единицу площади поверхности, называют плотностью теплового потока: $q = Q/F$, [Вт/м²]. Вектор q направлен в сторону убывания температуры.

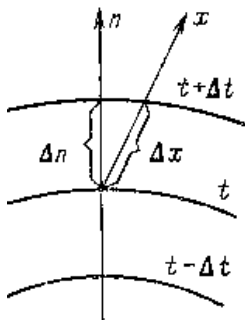


Рисунок 1.1 – К определению температурного градиента

Если $gradt$ для различных точек изотермической поверхности различен, то количество теплоты, которое пройдет через всю изотермическую поверхность в единицу времени определится следующим образом:

$$Q = \int_F q \cdot dF, \text{ [Вт]}, \quad (1.5)$$

где dF – элемент изотермической поверхности.

Полное количество теплоты Q , прошедшее за время τ через изотермическую поверхность F , найдется по уравнению:

$$Q_\tau = \int_0^\tau \int_F q \cdot dF \cdot d\tau, \text{ [Дж]}. \quad (1.6)$$

Количество теплоты, проходящее через элементарную площадку dF , расположенную под углом φ к плоскости, касательной к изотермической поверхности, определяется по уравнению: $dQ_\tau = q \cdot dF \cdot \cos \varphi \cdot d\tau$ (1.7)

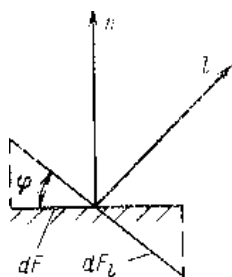


Рисунок 1.2 – Пояснение к уравнению 1.7

Из уравнения (1.7) следует, что самой большой плотностью теплового потока будет та, которая направлена по нормали к изотермическим поверхностям (рис. 1.2).

Таким образом, для определения количества теплоты, проходящего через какую-либо поверхность твердого тела, необходимо знать температурное поле внутри рассматриваемого тела. Нахождение температурного поля тела является главной задачей теории теплопроводности.

Различают три вида теплообмена:

- а) теплопроводность;
- б) конвективный теплообмен, характеризующийся переносом теплоты самим теплоносителем – макроскопическими элементами среды;
- в) теплообмен излучением, характеризующийся тем, что часть

внутренней энергии тела преобразуется в энергию излучения и передается через пространство электромагнитными волнами.

Плотность конвективного теплового потока на поверхности теплообмена определяется уравнением Ньютона-Рихмана:

$$q = \alpha (t_{\text{ж}} - t_{\text{с}}), \quad (1.8)$$

где α , [Вт/(м²·К)] – коэффициент теплоотдачи; $t_{\text{ж}}$ и $t_{\text{с}}$ – температуры теплоносителя и стенки.

В реальных условиях отдельные виды теплообмена – теплопроводность, конвективный теплообмен и лучистый теплообмен – сопутствуют один другому.

Теплопередачей называется теплообмен между двумя теплоносителями через разделяющую их твердую стенку. Плотность теплового потока в этом случае рассчитывается как:

$$q = k (t_2 - t_1), \quad (1.9)$$

где k , [Вт/(м²·К)] – коэффициент теплопередачи; $t_2 - t_1 = \Delta t$ – температурный напор, равный разности температур горячего и холодного теплоносителей, разделенных твердой стенкой.

2. ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ

Теплопроводность – процесс молекулярного переноса теплоты в сплошной среде, обусловленный наличием градиента температуры. Перенос теплоты теплопроводностью в телах происходит в результате последовательного обмена энергией движения структурных частиц от более нагретых к соседним, менее нагретым частям среды. В газах перенос энергии осуществляется путем диффузии молекул и атомов. В жидкостях и твердых телах – путем упругих волн. В металлах перенос энергии осуществляется путем диффузии свободных электронов.

Основной закон теплопроводности формулируется уравнением Фурье:

$$q = - \lambda \operatorname{grad} t = - \lambda \cdot n_0 \frac{\partial t}{\partial n}, \quad (2.1)$$

вектор плотности теплового потока, передаваемого теплопроводностью, пропорционален вектору градиента температуры в той же точке и тот же момент времени. Множитель пропорциональности λ , [Вт/(м·К)] называется коэффициентом теплопроводности и является физическим параметром вещества. Знак “-“ в (2.1) учитывает противоположное направление вектора q и вектора $\operatorname{grad} t$.

2.1. Коэффициент теплопроводности

Коэффициент теплопроводности для различных материалов определяется экспериментально:

$$\lambda = \frac{|\bar{q}|}{|\text{grad } t|}, \quad [\text{Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})]. \quad (2.2)$$

Согласно (2.2) λ численно равен количеству теплоты, которое проходит в единицу времени через единицу изотермической поверхности при $\text{grad } t = 1$.

При наличии теплообмена тела имеют различную температуру. Поэтому необходимо знать зависимость λ от температуры. опыты показывают, что для многих материалов эта зависимость близка к линейной:

$$\lambda = \lambda_0 [1 + b(t - t_0)], \quad (2.3)$$

где λ_0 – коэффициент теплопроводности при t_0 ; b – опытная постоянная.

2.1.1. Коэффициент теплопроводности газов

Согласно кинетической теории газ при обычных давлениях и температурах рассматривается как совокупность молекул, находящихся в хаотическом движении и столкновениях. При этом теплопроводность определяется соотношением:

$$\lambda = \bar{w} l c_v \rho / 3, \quad (2.4)$$

где \bar{w} – средняя скорость перемещения молекул газа; l – средняя длина пробега молекул; c_v – теплоемкость при $v = \text{const}$; ρ – плотность.

При увеличении давления ρ увеличивается, а l – уменьшается. При этом $\rho l = \text{const}$. Поэтому λ остается постоянным при изменении давления. С увеличением температуры \bar{w} и c_v – увеличиваются. Поэтому λ также увеличивается. Для газов $\lambda = 0,006 - 0,6$ [Вт/ (м·К)]. λ для водяного пара и других реальных газов отличается от идеальных и зависит, в том числе, и от давления.

2.1.2. Коэффициент теплопроводности жидкостей

Коэффициент теплопроводности жидкости можно определить по уравнению:

$$\lambda = A (c_p \cdot \rho^{4/3}) / \mu^{1/3}, \quad (2.5)$$

где μ – молекулярная масса; A – коэффициент, пропорциональный скорости распространения упругих волн в жидкости, зависящий от температуры. Так как ρ убывает с повышением температуры, то для жидкостей при $\mu = \text{const}$, λ – убывает. Исключение составляют вода и глицерин. λ жидкостей – 0,07–0,7. С возрастанием давления λ увеличивается [1].

2.1.3. Коэффициент теплопроводности металлов

В металлах транспорт теплоты осуществляется в основном свободными электронами, которые движутся из областей более нагретых в менее нагретые, где они отдают энергию, и обратно для восполнения ее в более нагретых зонах. С повышением температуры в металлах усиливается рассеивание электронов.

Поэтому λ уменьшается. При наличии примесей λ металлов убывает, что связано со структурными неоднородностями металла и связанным с этим рассеиванием электронов. Так λ чистой меди – 396, а λ меди со следами мышьяка – 142. λ сплавов и λ диэлектриков с увеличением температуры увеличиваются [2].

2.1.4. Коэффициент теплопроводности строительных материалов

Многие строительные и теплоизоляционные материалы имеют пористое строение. Поэтому λ сильно зависит от их плотности, поскольку поры таких тел заполняют воздух, теплопроводность которого низкая. λ пористых материалов в значительной степени зависит от влажности. Так λ влажного кирпича – 1; λ сухого кирпича – 0,35; а λ воды – 0,6. У строительных материалов $\lambda = 0,023 - 2,9$. Материалы, имеющие $\lambda < 0,25$, относят к теплоизоляционным.

2.2. Дифференциальное уравнение теплопроводности

Для решения задач, связанных с нахождением температурного поля, необходимо иметь дифференциальное уравнение теплопроводности. Интегрируя это уравнение, можно получить аналитическую зависимость между величинами для всего рассматриваемого промежутка времени.

Рассмотрим в бесконечно малом промежутке времени dt бесконечно малый элементарный объем dv со сторонами dx , dy и dz . Введем следующие допущения (рис. 2.1):

- тело однородно и изотропно;
- физические параметры постоянны;
- деформация рассматриваемого объема, связанная с изменением температуры, мала по сравнению с самим объемом;
- внутренние источники теплоты в теле заданы как: $q_v = f(x; y; z; \tau)$ и распределены равномерно.

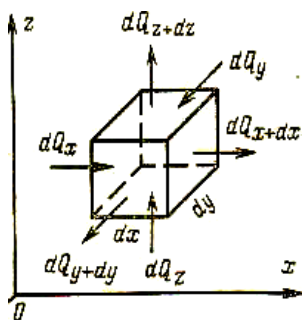


Рисунок 2.1 – К выводу дифференциального уравнения теплопроводности

Вывод дифференциального уравнения теплопроводности основан на законе сохранения энергии. Количество теплоты dQ , сообщенное элементарному объему извне за время dt за счет теплопроводности и от внутренних источников, в зависимости от рассмотрения изохорного или

изобарного процессов равно изменению внутренней энергии или энтальпии вещества:

$$dQ_1 + dQ_2 = dU + dL = dQ, \quad (2.6)$$

где dQ_1 , [Дж] – количество теплоты, введенное в объем теплопроводностью за время $d\tau$; dQ_2 – количество теплоты, выделившееся за время $d\tau$ в объеме dv от внутренних источников теплоты; dU – изменение внутренней энергии и dL – работы, совершенной телом над окружающей средой, или наоборот.

Пусть механическая работа телом не совершается – $dL = 0$. Тогда dQ равно изменению внутренней энергии dU или энтальпии вещества di , содержащегося в элементарном объеме dv , за время $d\tau$.

Количество теплоты, которое подводится к граням элементарного объема за время $d\tau$ в направлении осей x ; y ; z обозначим через dQ_x ; dQ_y ; dQ_z .

При этом количество теплоты, подведенное к грани $dy \cdot dz$ в направлении оси X за время $d\tau$, будет равным: $dQ_x = q_x \cdot dy \cdot dz \cdot d\tau$, где q_x – проекция плотности теплового потока на ось X , $dy \cdot dz$ – элементарная площадка.

Количество теплоты, которое отводится через противоположные грани в тех же направлениях, обозначим через dQ_{x+dx} ; dQ_{y+dy} ; dQ_{z+dz} .

Относительно оси X оно пишется как:

$$dQ_{x+dx} = q_{x+dx} \cdot dy \cdot dz \cdot d\tau.$$

Разница между подведенным и отведенным количеством теплоты от элементарного параллелепипеда за время $d\tau$ в направлении оси X представляет:

$$dQ_{x1} = dQ_x - dQ_{x+dx} = q_x \cdot dy \cdot dz \cdot d\tau - q_{x+dx} \cdot dy \cdot dz \cdot d\tau = (q_x - q_{x+dx}) \cdot dy \cdot dz \cdot d\tau.$$

Функция q_{x+dx} является непрерывной и в рассматриваемом интервале dx раскладывается в ряд Тейлора:

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx + \frac{\partial^2 q_x}{\partial x^2} \frac{dx^2}{2!} + \dots$$

Ограничившись двумя первыми членами ряда, получим:

$$dQ_{x1} = (q_x - q_x - \frac{\partial q_x}{\partial x} dx) \cdot dy \cdot dz \cdot d\tau.$$

Аналогично находится количество теплоты, подводимое к элементарному объему в направлении координатных осей Y и Z .

В результате количество теплоты dQ_1 , подведенное за счет теплопроводности к рассматриваемому объему, будет равно:

$$dQ_1 = - \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) dx \cdot dy \cdot dz.$$

Пусть количество теплоты, выделяемое внутренними источниками в единице объема тела в единицу времени будет q_v , [Вт/м³].

Тогда вторая составляющая левой части уравнения (2.6) будет равна:

$$dQ_2 = q_v \cdot dv \cdot d\tau.$$

Третью составляющую уравнения (2.6) определим в зависимости от термодинамического процесса, протекающего в системе.

В изохорном процессе вся теплота, подведенная к элементарному объему, расходуется на изменение внутренней энергии его объема: $dQ = dU$.

Известно, что $dU = C_v \frac{\partial t}{\partial \tau} d\tau \cdot dv = c_v \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} d\tau \cdot dv$,

где C_v – изохорная теплоемкость единицы объема, [Дж/(м³·К)]; c_v – изохорная теплоемкость единицы массы, [Дж/(кг·К)]; ρ – плотность вещества, [кг/м³].

Подставим полученные выражения в (2.6):

$$c_v \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} d\tau \cdot dv = - \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) dx \cdot dy \cdot dz \cdot d\tau + q_v \cdot dv \cdot d\tau,$$

или
$$c_v \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} = -\operatorname{div} \bar{q} + q_v. \quad (2.7)$$

Уравнение (2.7) – дифференциальное уравнение энергии для изохорного процесса переноса теплоты.

В изобарном процессе вся теплота, подведенная к рассматриваемому объему, расходуется на повышение теплосодержания вещества этого объема.

Известно, что $di = C_p \frac{\partial t}{\partial \tau} d\tau \cdot dv = c_p \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} d\tau \cdot dv = \rho \frac{\partial i}{\partial \tau} d\tau \cdot dv$,

где C_p – изобарная теплоемкость единицы объема, [Дж/(м³·К)];

c_p – изобарная теплоемкость единицы массы, [Дж/кг·К].

Подставим полученные значения dQ_1 , dQ_2 и di в (2.6). Тогда

$$\rho \frac{\partial i}{\partial \tau} = - \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) + q_v = -\operatorname{div} \bar{q} + q_v. \quad (2.8)$$

Уравнение (2.8) – дифференциальное уравнение энергии для изобарного процесса переноса теплоты.

В твердых телах теплота распространяется в соответствии с законом Фурье: $q = -\lambda \operatorname{grad} t$, а $C_p \approx C_v = C$. Тогда (2.7) перепишем как:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = -\frac{1}{c \cdot \rho} \operatorname{div} \bar{q} + \frac{q_v}{c \cdot \rho} = \frac{1}{c \cdot \rho} \operatorname{div}(\lambda \cdot \operatorname{grad} t) + \frac{q_v}{c \cdot \rho}. \quad (2.9)$$

Уравнение (2.9) – дифференциальное уравнение теплопроводности.

Перепишем (2.9) в виде:
$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{1}{c \cdot \rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial z} \right) \right] + \frac{q_v}{c \cdot \rho}.$$

Так как теплофизические характеристики const по условию задачи, то

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\lambda}{c \cdot \rho} \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) + \frac{q_v}{c \cdot \rho}, \quad (2.10)$$

где $a = \frac{\lambda}{c \cdot \rho}$, [м²/с] – коэффициент температуропроводности. Характеризует скорость изменения температуры и является мерой теплоинерционных свойств тела. Жидкости и газы обладают большой тепловой инерционностью и, значит, малым «а». Металлы обладают малой тепловой инерционностью, значит у них большой «а».

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = \nabla^2 t \quad - \text{второй оператор Лапласа по}$$

температуре.

С учетом обозначений перепишем (2.10):

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \cdot \nabla^2 t + \frac{q_v}{c \cdot \rho} . \quad (2.11)$$

Если система тел не содержит внутренних источников теплоты $q_v=0$, то

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \cdot \nabla^2 t . \quad (2.12)$$

При стационарном состоянии температурного поля при наличии внутренних источников уравнение (2.11) запишется как:

$$\nabla^2 t + \frac{q_v}{\lambda} = 0 \text{ – уравнение Пуассона.} \quad (2.13)$$

При отсутствии внутренних источников $q_v = 0$ и стационарном режиме (2.11) запишется как $\nabla^2 t = 0$ – уравнение Лапласа. (2.14)

2.3. Условия однозначности для процессов теплопроводности

Явление теплопроводности описывается уравнениями энергии и закона Фурье:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \cdot \nabla^2 t + \frac{q_v}{c \cdot \rho} , \quad (2.15)$$

$$dq = -\lambda \frac{\partial t}{\partial n} . \quad (2.16)$$

Уравнения (2.15) и (2.16) отражают общий характер процесса и имеют множество решений. Для получения конкретного решения необходимо задание условий однозначности, т. е. дать математическое описание всех частных особенностей рассматриваемого процесса:

- геометрические – определяют форму и размеры тела, в котором протекает процесс;

- физические – характеризуют физические свойства среды и тела, то есть определяют числовые значения всех физических параметров тела, входящих в дифференциальное уравнение;

- временные (начальные) – определяют распределение температур в начальный момент времени;

- граничные – определяют взаимодействие тела с окружающей средой и могут быть заданы следующим образом:

- а) граничные условия первого рода характеризуют распределение температуры на поверхности тела для каждого момента времени:

$$t_c = f(x, y, z, \tau);$$

- б) граничные условия второго рода – распределение плотности теплового потока на поверхности тела:

$$q_c = f(x, y, z, \tau);$$

- в) граничные условия третьего рода – задаются температура окружающей среды и закон теплообмена между средой и поверхностью тела:

$$q = -\lambda \left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_{\bar{n}} = \alpha (t_a - t_{\bar{n}});$$

г) граничные условия четвертого рода характеризуются равенством тепловых потоков, проходящих через поверхность контакта двух тел:

$$\lambda_1 \left. \frac{\partial t}{\partial n} \right|_1 = \lambda_2 \left. \frac{\partial t}{\partial n} \right|_2 .$$

2.3.1. Передача теплоты через плоскую стенку

2.3.1.1. Граничные условия первого рода

Рассмотрим однородную, изотропную, плоскую стенку (рис. 2.2), толщина которой значительно меньше длины и ширины. На поверхностях пластины поддерживаются постоянными температурами t_{c1} и t_{c2} , а теплопроводность материала равна λ .

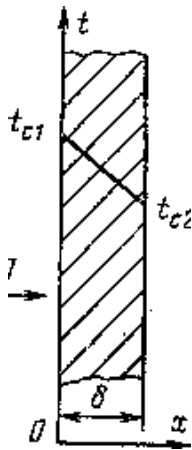


Рисунок 2.2 – Распределение температуры в плоской стенке

В стационарном тепловом режиме для одномерного температурного поля дифференциальное уравнение теплопроводности имеет вид:

$$\frac{d^2 t}{dx^2} = 0. \quad (2.17)$$

Граничные условия первого рода заданы следующим образом:

при $x = 0 \rightarrow t = t_{c1}$; при $x = \delta \rightarrow t = t_{c2}$.

Интегрируем (2.17):

$$\frac{dt}{dx} = C_1, \quad dt = C_1 \cdot dx; \quad t(x) = C_1 \cdot x + C_2 . \quad (2.18)$$

Из (2.18) следует, что при $\lambda = \text{const}$ температура в стенке меняется по линейному закону.

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяем из граничных условий.

При $x = 0 \rightarrow C_2 = t_{c1}$. При $x = \delta \rightarrow t_{c2} = C_1 \cdot \delta + t_{c1}$.

$$C_1 = \frac{t_{c2} - t_{c1}}{\delta} . \quad (2.19)$$

Подставив C_1 в формулу (2.18), получим:

$$t_{(x)} = t_{c1} - \frac{t_{c1} - t_{c2}}{\delta} x , \quad (2.20)$$

отсюда видно, что распределение температуры в плоской стенке осуществляется по закону прямой.

При подстановке в уравнение Фурье $\frac{\partial t}{\partial x} = C_1$ определим:

$$q = -\lambda \frac{\partial t}{\partial n} = \frac{\lambda}{\delta} (t_{c1} - t_{c2}) . \quad (2.21)$$

Из (2.21) следует, что количество теплоты, проходящее через единицу поверхности стенки в единицу времени, прямо пропорционально λ , разности температур на наружных поверхностях стенки и обратно пропорционально толщине стенки.

Величина $\frac{\lambda}{\delta}$ называется тепловой проводимостью, а ей обратная $-\frac{\delta}{\lambda}$ – термическим сопротивлением стенки. Оно представляет собой падение температуры в стенке на единицу плотности теплового потока.

Перепишем (2.21) в виде:

$$\frac{q}{\lambda} = \frac{t_{c1} - t_{c2}}{\delta} .$$

Полученное подставим в (2.20) и получим:

$$t_{(x)} = t_{c1} - \frac{q}{\lambda} x . \quad (2.22)$$

Из (2.22) видно, что при прочих равных условиях температура в стенке убывает быстрее при большей плотности теплового потока. Общее количество теплоты Q_τ , которое передается через стенку за промежуток времени τ , определяют:

$$Q_\tau = q \cdot F \cdot \tau = \frac{\lambda}{\delta} (t_{c1} - t_{c2}) F \cdot \tau . \quad (2.23)$$

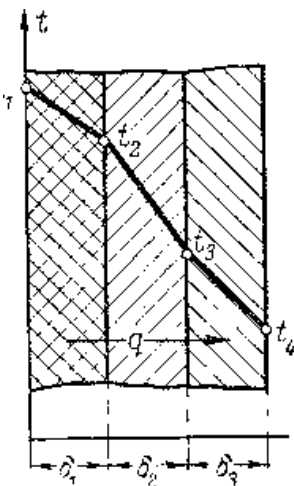


Рисунок 2.3 – Многослойная плоская стенка

Рассмотрим теплопроводность многослойной стенки, показанной на рисунке 2.3 и состоящей из n слоев. Поверхности слоев идеально контактируют, поэтому температура соприкасающихся поверхностей одинакова. При стационарном режиме тепловой поток, проходящий через любую изотермическую поверхность неоднородной стенки, один и тот же. Тогда на основании (2.22):

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{\lambda_1}{\delta_1}(t_1 - t_2); \\ q &= \frac{\lambda_2}{\delta_2}(t_2 - t_3); \\ q &= \frac{\lambda_3}{\delta_3}(t_3 - t_4). \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Изменение температуры в каждом слое равно:

$$\left. \begin{aligned} t_1 - t_2 &= q \frac{\delta_1}{\lambda_1}; \\ t_2 - t_3 &= q \frac{\delta_2}{\lambda_2}; \\ t_3 - t_4 &= q \frac{\delta_3}{\lambda_3}. \end{aligned} \right\} \quad (б)$$

Сложим левые и правые части системы (б):

$$q (\delta_1 / \lambda_1 + \delta_2 / \lambda_2 + \delta_3 / \lambda_3) = t_1 - t_4$$

или

$$q = \frac{t_1 - t_4}{\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{\delta_3}{\lambda_3}} .$$

Для многослойной стенки, состоящей из n слоев, по аналогии получим:

$$q = \frac{t_1 - t_{n+1}}{\sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i}} , \quad (2.24)$$

где n – количество слоев в стенке.

Величина $\sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i}$ – полное термическое сопротивление теплопроводности многослойной стенки, равное сумме термических сопротивлений всех слоев.

Из рассмотрения многослойной стенки, как однородной и однослойной, толщиной $\sum_{i=1}^n \delta_i$, выводится эквивалентный коэффициент теплопроводности $\lambda_{\text{эКВ}}$ многослойной стенки. Он равен коэффициенту теплопроводности однородной стенки, толщина которой равна толщине многослойной, а термическое сопротивление равно термическому сопротивлению рассматриваемой многослойной стенки: $q = \frac{\lambda_{\text{эКВ}}}{\sum_{i=1}^n \delta_i} (t_1 - t_{n+1})$. Тогда

$$\frac{\sum_{i=1}^n \delta_i}{\lambda_{\text{эКВ}}} = \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i} \rightarrow \lambda_{\text{эКВ}} = \frac{\sum_{i=1}^n \delta_i}{\sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i}} . \quad (2.25)$$

Из (2.25) следует, что $\lambda_{\text{эКВ}}$ зависит только от термических сопротивлений и толщины отдельных слоев.

2.3.1.2. Граничные условия третьего рода. Теплопередача

Передача теплоты от одного теплоносителя к другому через разделяющую их твердую стенку называется теплопередачей. Это сложный теплообмен, включающий теплоотдачу от горячего теплоносителя к стенке, теплопроводность внутри стенки и теплоотдачу от стенки к холодному теплоносителю.

Пусть плоская однородная стенка (рис. 2.4) имеет толщину δ значительно меньшей высоты. Заданы коэффициенты теплопроводности стенки λ , температуры теплоносителей $t_{\text{ж1}}$ и $t_{\text{ж2}}$ и коэффициенты теплоотдачи α_1 и α_2 . Режим стационарный.

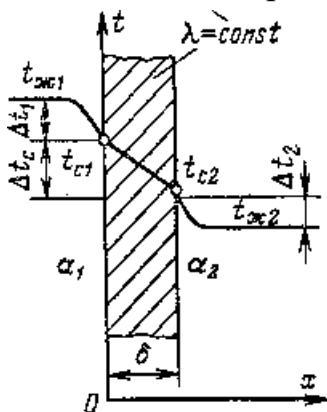


Рисунок 2.4 – Теплопередача через плоскую стенку

При заданных условиях необходимо найти тепловой поток от горячей жидкости к холодной и температуры на поверхности стенки. Плотность теплового потока от горячего теплоносителя к стенке определяется уравнением Ньютона – Рихмана: $q = \alpha_1 (t_{\text{ж1}} - t_{c1})$.

При стационарном режиме эта же плотность теплового потока, обусловленная теплопроводностью внутри твердой стенки, определяется уравнением (2.21):

$$q = \lambda / \delta (t_{c1} - t_{c2}) .$$

Эта же плотность теплового потока от стенки к холодному теплоносителю определяется уравнением Ньютона – Рихмана:

$$q = \alpha_2 (t_{c2} - t_{ж2}).$$

Сведем уравнения в систему:

$$\left. \begin{aligned} q \frac{1}{\alpha_1} &= (t_{ж1} - t_{c1}); \\ q \frac{\delta}{\lambda} &= (t_{c1} - t_{c2}); \\ q \frac{1}{\alpha_2} &= (t_{c2} - t_{ж2}). \end{aligned} \right\} (*)$$

Решаем систему (*) относительно q , складывая равенства, почленно:

$$q \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} \right) = t_{ж1} - t_{ж2}$$

или

$$q = \frac{t_{ж1} - t_{ж2}}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}}, \quad [\text{Вт/м}^2]. \quad (2.26)$$

Перепишем (2.26) в виде: $q = K (t_{ж1} - t_{ж2})$,

где $K = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}}, \left[\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}} \right]$ – коэффициент теплопередачи. (2.27)

K – численно равен количеству теплоты, которое передается через единицу поверхности стенки в единицу времени от горячего теплоносителя к холодному при разности температур между ними в один градус.

Величина, обратная коэффициенту теплопередачи, называется полным термическим сопротивлением теплопередачи:

$$R = \frac{1}{K} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} . \quad (2.28)$$

Так как полное термическое сопротивление состоит из частных термических сопротивлений, то, очевидно, что для многослойной стенки необходимо учитывать термическое сопротивление каждого слоя:

$$R = \frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2} \quad \text{или} \quad K = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}} .$$

Тогда плотность теплового потока через многослойную плоскую стенку

определится как:

$$q = \frac{t_{ж1} - t_{ж2}}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}} . \quad (2.29)$$

Тепловой поток Q [Вт], через поверхность F твердой стенки равен:

$$Q = q \cdot F = k \cdot \Delta t \cdot F . \quad (2.30)$$

Температуры поверхностей стенки найдем из системы (*)

$$t_{c1} = t_{ж1} - q \frac{1}{\alpha_1}; \quad t_{c2} = t_{ж1} - q \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} \right); \quad t_{c2} = t_{ж2} + q \frac{1}{\alpha_2} .$$

На основании приведенных уравнений температура на границе любых двух слоев определяется по уравнению:

$$t_{c(i+1)} = t_{ж1} - q \left(\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i} \right) . \quad (2.31)$$

2.3.2. Передача теплоты через цилиндрическую стенку

2.3.2.1. Граничные условия первого рода

Рассмотрим тонкостенную трубу с внутренним диаметром $d_1 = 2r_1$ и наружным $d_2 = 2r_2$ (рис. 2.5). На поверхностях стенки заданы постоянными температуры t_1 и t_2 . Теплопроводность материала стенки постоянна. Режим теплопроводности стационарный. Вертикальная ось OZ совмещена с осью трубы.

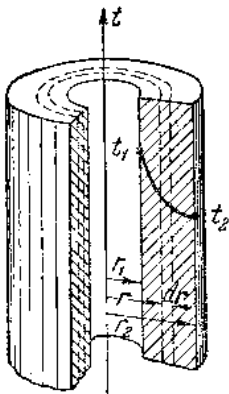


Рисунок 2.5 – Однородная цилиндрическая стенка

Второй оператор Лапласа дифференциального уравнения теплопроводности в цилиндрической системе координат имеет вид:

$$\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0 . \quad (2.32)$$

Поскольку труба тонкостенная, то температура будет меняться только в радиальном направлении. Следовательно, температурное поле – одномерное.

Тогда $\frac{\partial t}{\partial z} = 0$ и $\frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0$.

В связи с тем, что температуры на поверхностях трубы неизменны,

изотермические поверхности – цилиндрические, имеющие с трубой общую ось. Следовательно, температура постоянна по φ , где φ – угол между координатами в горизонтальной плоскости:

$$\frac{\partial t}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} = 0 .$$

Тогда (2.32) примет вид:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} = 0 . \quad (2.33)$$

Зададимся граничными условиями:

$$r = r_1 \rightarrow t = t_1 \quad \text{и} \quad r = r_2 \rightarrow t = t_2 .$$

Введем новую переменную $U = \frac{\partial t}{\partial r}$.

Тогда
$$\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} = \frac{\partial U}{\partial r} , \quad \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} = \frac{U}{r} .$$

Перепишем (2.33) в виде $\frac{\partial U}{\partial r} + U \frac{1}{r} = 0$. Разделим переменные:

$$\frac{\partial U}{U} + \frac{\partial r}{r} = 0 . \quad (2.34)$$

Интегрируем (2.34) и получим: $\ln U + \ln r = \ln C_1$. (2.35)

Потенцируем (2.35), получим: $U \cdot r = C_1$, тогда $U = C_1 \frac{1}{r}$.

Перепишем, подставив обозначенное через U : $\frac{\partial t}{\partial r} = C_1 \frac{1}{r}$. (*)

Разделим переменные: $\partial t = C_1 \frac{\partial r}{r}$.

Интегрируем полученное выражение: $t = C_1 \cdot \ln r + C_2$. (2.36)

Уравнение (2.36) – уравнение температурной кривой в цилиндре.

Постоянные C_1 и C_2 в (2.36) находим, используя граничные условия:

при $r = r_1 \rightarrow t = t_1 = C_1 \ln r_1 + C_2$ и при $r = r_2 \rightarrow t = t_2 = C_1 \ln r_2 + C_2$.

Тогда $C_2 = t_1 - C_1 \cdot \ln r_1$ и $t_2 = C_1 \cdot \ln r_2 + t_1 - C_1 \cdot \ln r_1$. Следовательно, перепад температур на стенке определится как: $t_1 - t_2 = C_1(\ln r_1 - \ln r_2)$ и постоянная

$C_1 = \frac{t_1 - t_2}{\ln r_1 / r_2}$. Подставив C_1 в уравнение температурной кривой, получим:

$$t_1 = \frac{t_1 - t_2}{\ln r_1 / r_2} \ln r_1 + C_2 . \quad \text{Откуда} \quad C_2 = t_1 - (t_1 - t_2) \frac{\ln r_1}{\ln r_1 / r_2} .$$

Подставим постоянные интегрирования в (2.36):

$$\begin{aligned} t &= (t_1 - t_2) \frac{\ln r}{\ln r_1 / r_2} + t_1 - (t_1 - t_2) \frac{\ln r_1}{\ln r_1 / r_2} = t_1 + (t_1 - t_2) \left(\frac{\ln r}{\ln r_1 / r_2} - \frac{\ln r_1}{\ln r_1 / r_2} \right) \\ &= t_1 - (t_1 - t_2) \frac{\ln r / r_1}{\ln r_2 / r_1} = t_1 - (t_1 - t_2) \frac{\ln d / d_1}{\ln d_2 / d_1} . \end{aligned} \quad (2.37)$$

Из (2.37) следует, что распределение температуры в цилиндрической стенке происходит по логарифмической кривой.

Воспользуемся уравнением Фурье: $Q = -\lambda \frac{dt}{dr} F$; подставим в него (*):

$$Q = -\lambda \frac{C_1}{r} F = -\lambda \frac{(t_1 - t_2) \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot l}{\ln r_1 / r_2 \cdot r} = \frac{2\pi \cdot \lambda \cdot l}{\ln r_2 / r_1} (t_1 - t_2), \text{ [Вт]}. \quad (2.38)$$

Тепловой поток в (2.38) может быть отнесен либо к единице внутренней или внешней поверхностей. Мы отнесем его к единице длины. Тогда

$$\frac{Q}{l} = q_l = \frac{\pi(t_1 - t_2)}{\frac{1}{2\lambda} \ln d_2 / d_1}, \text{ [Вт/м]}. \quad (2.39)$$

Тепловой поток, отнесенный к единице длины трубы, называется линейной плотностью теплового потока. Как видно из (2.38), q_l при $d_2/d_1 = \text{const}$ не зависит от поверхности цилиндрической стенки.

2.3.2.2. Граничные условия третьего рода. Теплопередача

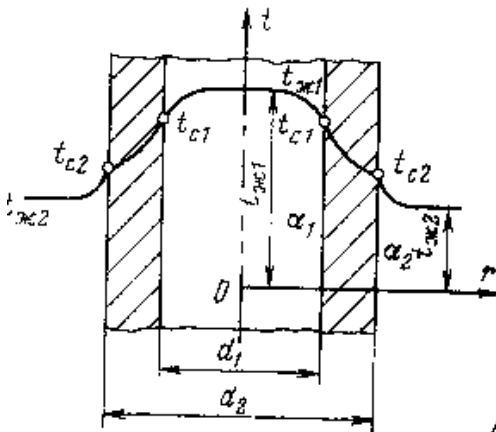


Рисунок 2.6 – Теплопередача через однородную цилиндрическую стенку

Рассмотрим однородную трубу (рис. 2.6) с постоянным коэффициентом теплопроводности λ . Температуры теплоносителей $t_{ж1}$ и $t_{ж2}$, коэффициенты теплоотдачи α_1 и α_2 постоянны. Длина трубы велика по сравнению с толщиной стенки. Тепловой режим – установившийся и постоянный. Тогда через стенку передается одно и то же количество теплоты. Следовательно, справедливы следующие равенства:

$$\left. \begin{aligned} q_l &= \alpha_1 \cdot \pi \cdot d_1 (t_{ж1} - t_{c1}); \\ q_l &= \frac{\pi(t_{c1} - t_{c2})}{\frac{1}{2\lambda} \ln d_2 / d_1}; \\ q_l &= \alpha_2 \cdot \pi \cdot d_2 (t_{c2} - t_{ж2}). \end{aligned} \right\}$$

Перепишем полученную систему следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} t_{ж1} - t_{c1} &= \frac{q_l}{\pi \alpha_1 d_1}; \\ t_{c1} - t_{c2} &= \frac{q_l}{\pi} \left(\frac{1}{2\lambda} \ln d_2 / d_1 \right); \\ t_{c2} - t_{ж2} &= \frac{q_l}{\pi \alpha_2 d_2}. \end{aligned} \right\} \quad (*)$$

Для определения температурного напора между теплоносителями сложим почленно уравнения системы (*):

$$t_{ж1} - t_{ж2} = \frac{q_\ell}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2} \right).$$

Из полученного уравнения находится линейная плотность теплового потока через цилиндрическую поверхность:

$$q_\ell = \frac{\pi(t_{ж1} - t_{ж2})}{\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}}, \text{ [Вт/м]}. \quad (2.40)$$

Перепишем (2.40) в виде:

$$q_\ell = K_\ell \cdot \pi(t_{ж1} - t_{ж2}), \quad (2.41)$$

где
$$K_\ell = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}}, \text{ [} \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}} \text{]}. \quad (2.42)$$

Величина K_ℓ – линейный коэффициент теплопередачи. Она характеризует интенсивность передачи теплоты от одного теплоносителя к другому через разделяющую их стенку и равна количеству теплоты, которое проходит через стенку, длиной 1 м в единицу времени от одной среды к другой при разности температур между ними в 1 К.

Величина, обратная коэффициенту теплопередачи, называется линейным термическим сопротивлением теплопередачи:

$$R_\ell = \frac{1}{K_\ell} = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}, \quad (2.43)$$

и равна сумме частных термических сопротивлений (теплоотдачи и теплопроводности).

Если тепловой поток через цилиндрическую стенку отнести к внутренней или наружной поверхности стенки, то получим плотность теплового потока, Вт/м², отнесенную к соответствующей поверхности трубы

$$q_1 = Q/(\pi \cdot d_1 \cdot l) = (t_{ж1} - t_{ж2}) \cdot K_l/d_1,$$

или
$$q_2 = Q/(\pi \cdot d_2 \cdot l) = (t_{ж1} - t_{ж2}) \cdot K_l/d_2,$$

и
$$q_1 = K_1(t_{ж1} - t_{ж2}); q_2 = K_2(t_{ж1} - t_{ж2}),$$

где $K_1 = K_l/d_1; K_2 = K_l/d_2$.

В случае, если $d_2/d_1 < 2$, в практических расчетах можно пользоваться зависимостью
$$Q = K \cdot \pi \cdot d_x \cdot \ell (t_{ж1} - t_{ж2}), \quad (2.44)$$

где K рассчитывается согласно (2.26).

Погрешность расчета уменьшится, если в качестве расчетной поверхности в (2.43) брать поверхность, со стороны которой α меньше:

$$1. \alpha_1 \gg \alpha_2 \rightarrow d_x = d_2;$$

$$2. \alpha_2 \gg \alpha_1 \rightarrow d_x = d_1;$$

$$3. \alpha_1 \approx \alpha_2 \rightarrow d_x = 0,5 (d_1 + d_2).$$

При рассмотрении теплопередачи через многослойную цилиндрическую стенку система равенств (*) заменяется системой, учитывающей сопротивления теплопроводности всех слоев. После решения этой системы относительно q_ℓ получим:

$$q_\ell = \frac{\pi(t_{ж1} - t_{ж2})}{\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}} = K_\ell \cdot \pi(t_{ж1} - t_{ж2}), \quad (2.45)$$

где $\frac{1}{K_\ell} = R_\ell = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}$ – полное термическое сопротивление многослойной цилиндрической стенки.

$$\text{Из системы (*) следует, что } t_{c(i+1)} = t_{ж1} - \frac{q_\ell}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i} \right). \quad (2.46)$$

2.3.2.3. Критический диаметр цилиндрической стенки

Термическое сопротивление однородной цилиндрической стенки определяется уравнением (2.43): $R_\ell = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}$.

В условиях эксплуатации $\alpha_1; d_1; \lambda; \alpha_2 - const$. Поэтому $R_\ell = f(d_2)$.

Исследуем функцию R_ℓ . $R_{\ell 1} = \frac{1}{\alpha_1 d_1} = const$. $R_{\ell c} = \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1}$ – при увеличении d_2 , будет возрастать. $R_{\ell 2} = \frac{1}{\alpha_2 d_2}$ – при увеличении d_2 будет уменьшаться.

Таким образом, $R_\ell = f(R_{\ell c}; R_{\ell 2})$. Исследуем R_ℓ на *extrem*. Для этого возьмем производную от R_ℓ по d_2 и приравняем ее к 0.

$$\frac{d(R_\ell)}{d(d_2)} = \frac{1}{2\lambda \cdot d_2} - \frac{1}{\alpha_2 d_2^2} = 0. \quad (2.47)$$

Значение d_2 из (2.47) соответствует экстремальной точке кривой $R_\ell = f(d_2)$.

Из рисунка 2.7 видно, что при $d_2 < d_{кр}$ с увеличением d_2 R_ℓ – уменьшается. При $d_2 > d_{кр}$ с увеличением d_2 R_ℓ – возрастает. Исследуя кривую на *max* и *min*, увидим, что кривая имеет экстремальную точку, равную $d_2 = \frac{2\lambda}{\alpha_2}$, где термическое сопротивление теплопередачи будет минимальным.

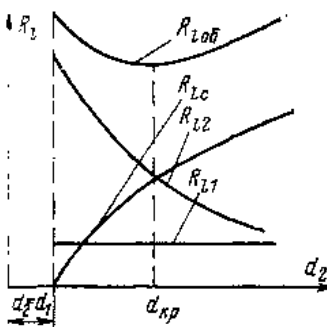


Рисунок 2.7 – Зависимость термического сопротивления цилиндрической стенки от d_2

Значение внешнего диаметра трубы, соответствующее минимальному полному термическому сопротивлению, называется критическим диаметром.

2.3.2.4. Критический диаметр тепловой изоляции

Термическое сопротивление трубы с изоляцией составляет:

$$R_{\ell} = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda_c} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{2\lambda_{из}} \ln \frac{d_{н}}{d_2} + \frac{1}{\alpha_2 d_{н}}$$

Так как R_{ℓ} – обратно пропорционально плотности теплового потока при всех прочих постоянных величинах, то $q_{\ell} = f(d_{из})$. Критический диаметр изоляции определяется уравнением: $d_{кр.из} = \frac{2\lambda_{из}}{\alpha_2}$. (2.48)

При выборе изоляционного материала необходимо рассчитать критический диаметр по зависимости (2.48).

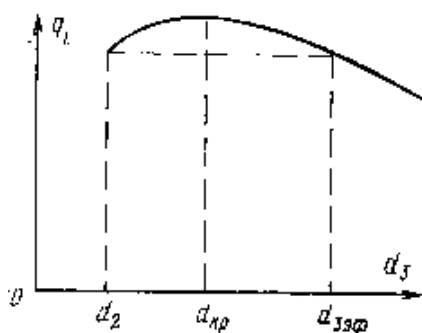


Рисунок 2.8 – Зависимость тепловых потерь от толщины изоляции трубы

Согласно рисунку 2.8 плотность теплового потока с ростом внешнего диаметра увеличивается, при $d = d_{кр}$ достигает максимума и с дальнейшим ростом d_2 уменьшается. При $d_{эф}$ тепловые потери сравниваются с потерями неизолированной трубы и с дальнейшим увеличением толщины изоляции будут снижаться. Эту зависимость необходимо учитывать при выборе тепловой изоляции. Если $d_{кр.из} > d_2$, применение выбранного материала в качестве изоляционного нецелесообразно. Для эффективной работы тепловой изоляции должно выполняться условие: $d_{кр.из} < d_2$.

2.3.3. Передача теплоты через шаровую стенку

2.3.3.1. Граничные условия первого рода

Рассмотрим полый шар с радиусами r_1 и r_2 , постоянной теплопроводностью λ и температурами поверхностей t_1 и t_2 , представленный на рисунке 2.9. Температура изменяется только в радиальном направлении. Режим теплопроводности постоянный: $\nabla^2 t = 0$. Оператор Лапласа в сферических координатах записывается как:

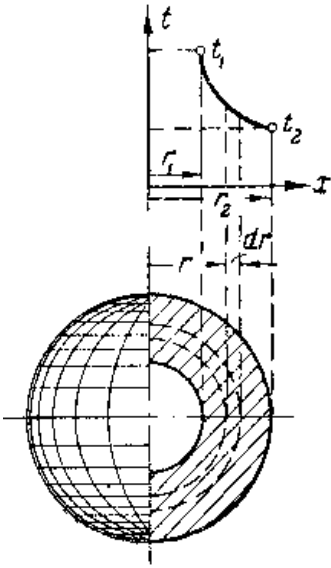


Рисунок 2.9 – Однородная шаровая стенка

$$\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial t}{\partial r} = \nabla^2 t. \quad (2.49)$$

Граничные условия первого рода:

$$r = r_1 \rightarrow t = t_1; \quad r = r_2 \rightarrow t = t_2.$$

Дважды интегрируя (2.49), получим:

$$\frac{\partial t}{\partial r} = \frac{c_1}{r^2}; \quad t = c_2 - \frac{c_1}{r}. \quad (2.50)$$

Постоянные интегрирования находим из граничных условий:

$$c_1 = -\frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \quad c_2 = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \cdot \frac{1}{r_1}.$$

Подставим постоянные интегрирования в (2.50):

$$t = t_{c1} - \frac{t_1 - t_{c2}}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right). \quad (2.51)$$

Из (2.51) видно, что температура внутри шаровой стенки изменяется по закону гиперболы.

Количество теплоты, проходящее через шар, поверхностью $F = 4\pi \cdot r^2$ в единицу времени:

$$Q = -\lambda \frac{\partial t}{\partial r} F = \frac{4\pi \cdot \lambda \cdot r^2 (t_1 - t_2)}{r^2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)} = \frac{2\pi \cdot \lambda \cdot \Delta t}{\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}} = \pi \cdot \lambda \frac{d_1 d_2}{\delta} \Delta t, \quad (2.52)$$

где $\delta = \frac{d_2 - d_1}{2}$ – толщина стенки.

2.3.3.2. Граничные условия третьего рода

При граничных условиях третьего рода, кроме r_1 и r_2 , t_1 и t_2 , λ , известны температуры горячей и холодной жидкостей $t_{ж1}$ и $t_{ж2}$ и коэффициенты теплоотдачи на поверхностях шаровой стенки α_1 и α_2 .

Процесс теплопроводности стационарный. Тогда можно записать:

$$\left. \begin{aligned} Q &= \alpha_1 \pi \cdot d_1^2 (t_{\alpha 1} - t_1); \\ Q &= \frac{2\lambda \cdot \pi}{\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}} (t_1 - t_2); \\ Q &= \alpha_2 \pi \cdot d_2^2 (t_{c2} - t_{\alpha 2}). \end{aligned} \right\} \quad (2.53)$$

Решая (2.53) относительно Q , получим:

$$Q = \frac{\pi(t_{жс1} - t_{жс2})}{\frac{1}{\alpha_1 d_1^2} + \frac{1}{2\lambda} \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right) + \frac{1}{\alpha_2 d_2^2}} = K_{ш} \pi \cdot \Delta t, \quad (2.54)$$

где $K_{ш}$ – коэффициент теплопередач шаровой стенки, [Вт/°К].

$$R_{ш} = \frac{1}{k_{ш}} = \frac{1}{\alpha_1 d_1^2} + \frac{1}{2\lambda} \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right) + \frac{1}{\alpha_2 d_2^2} \quad - \quad \text{термическое сопротивление}$$

теплопередачи шаровой стенки.

2.3.4. Интенсификация теплопередачи

Пути интенсификации теплообмена найдем в результате анализа коэффициента теплопередачи K , являющегося определяющей величиной при заданных размерах стенки и температурах теплоносителей:

$$K = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}}.$$

При тонких стенках с большим λ :

$$K = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}} = \frac{\alpha_1}{1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}} = \frac{\alpha_2}{1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}} = \frac{\alpha_1 \cdot \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}. \quad (2.55)$$

Из (2.55) следует, что K не может быть больше самого малого значения α . Если $\alpha_2 \rightarrow \infty$, то $K \rightarrow \alpha_1$. Если $\alpha_1 \rightarrow \infty$, то $K \rightarrow \alpha_2$. Следовательно, для увеличения K следует уменьшать большее из термических сопротивлений.

При передаче теплоты через цилиндрическую и шаровую стенки термические сопротивления последних определяются не только коэффициентами теплоотдачи, но и размерами поверхностей: $\frac{1}{\alpha \cdot d}$; $\frac{1}{\alpha \cdot d^2}$.

Следовательно, если α мало, то термическое сопротивление теплоотдачи можно уменьшить за счет соответствующей поверхности.

Этот результат можно получить за счет их оребрения поверхности (рис. 2.10), поскольку термические сопротивления пропорциональны: $\frac{1}{\alpha_1 F_1}$

и $\frac{1}{\alpha_2 F_2}$. Исходя из этого, при $\alpha_1 \ll \alpha_2$, оребряют поверхность со стороны α_1 до тех пор, пока $\alpha_1 \cdot F_1 \cong \alpha_2 \cdot F_2$. Дальнейшее увеличение F_1 малоэффективно.

На рисунке 2.10 представлены рисунки прямых и цилиндрических ребер.

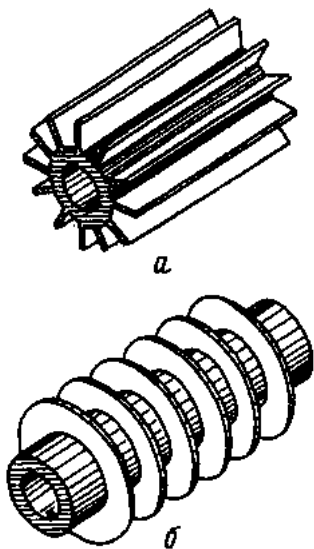


Рисунок 2.10 – Различные виды оребрения труб

2.3.5. Теплопроводность и теплопередача в стержне постоянного поперечного сечения

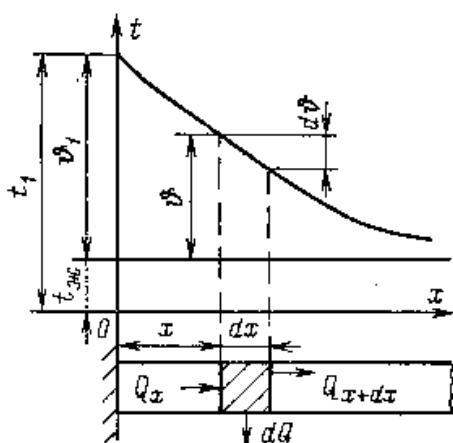


Рисунок 2.11 – Стержень постоянного поперечного сечения

Рассмотрим распространение теплоты в прямом стержне с постоянным поперечным сечением по длине (рис. 2.11). Площадь поперечного сечения – f , периметр – u . Стержень находится в среде с постоянной температурой $t_{ж}$. Коэффициент теплоотдачи от стержня в окружающую среду постоянный. Значение коэффициента теплопроводности материала стержня λ высокое.

Площадь поперечного сечения пренебрежимо мала по сравнению с его длиной, т. е. температура в стержне изменяется только вдоль его оси.

Отсчет температуры ведем от выбранной температуры $t_{ж}$. Избыточную в результате этого температуру стержня обозначим как ϑ . Тогда $\vartheta = t - t_{ж}$, где t – текущая температура стержня; $t_{ж}$ – температура среды, окружающей стержень. При температуре основания стержня t_1 его избыточная температура определяется как: $\vartheta_1 = t_1 - t_{ж}$.

Выделим элемент стержня длиной dx на расстоянии x от основания стержня. Для этого участка уравнение материального баланса определится:

$$dQ = Q_x - Q_{x+dx}, \quad (2.56)$$

где dQ – количество теплоты, отдаваемое в единицу времени единицей наружной поверхности элемента окружающей среде; Q_x – количество теплоты, входящее в левую грань элемента в единицу времени; Q_{x+dx} – количество теплоты, выходящей из противоположной грани элементарного элемента в этот же промежуток времени.

На основании уравнения Фурье запишем:

$$Q_{x+dx} = -\lambda \frac{d\left(\vartheta + \frac{\partial \vartheta}{\partial x} dx\right)}{dx} f = -\lambda \cdot f \frac{d\vartheta}{dx} - \lambda \cdot f \frac{d^2 \vartheta}{dx^2} dx.$$

При этом очевидно, что $Q_x = -\lambda \cdot f \frac{d\vartheta}{dx}$.

Подставим Q_x и Q_{x+dx} в (2.56): $dQ = \lambda \cdot f \frac{d^2 \vartheta}{dx^2} dx$.

Вместе с тем $dQ = \alpha \cdot \vartheta \cdot U \cdot dx$, где U – геометрический размер ребра – периметр поперечного сечения ребер: $U = 2b$.

Тогда $\lambda \cdot f \frac{d^2 \vartheta}{dx^2} dx = \alpha \cdot \vartheta \cdot U \cdot dx$ или $\frac{d^2 \vartheta}{dx^2} = \frac{\alpha \cdot U}{\lambda \cdot f} \vartheta$.

$$\text{Обозначим } m = \sqrt{\frac{\alpha \cdot U}{\lambda \cdot f}}, [1/\text{м}]. \quad \text{Тогда} \quad \frac{d^2 \vartheta}{dx^2} = m^2 \vartheta. \quad (2.57)$$

Пусть $m = const$ при $\alpha = const$ по всей поверхности; $\lambda = const$ в рассматриваемом диапазоне температур и постоянных габаритах ребра.

$$\text{Интегрируя (2.57), получим: } \vartheta = C_1^{mx} + C_2^{-mx}. \quad (2.58)$$

Уравнение (2.58) – уравнение изменения избыточной температуры стержня вдоль его длины. Постоянные C_1 и C_2 определяются из граничных условий в зависимости от длины стержня и его температуры.

Из анализа m следует, что при оребрении следует выбирать материал ребер с $\lambda = max$ и делать тонкие ребра.

Используя (2.58), определим количество теплоты, отданное стержнем в окружающую среду:

$$\text{При } x = \infty \quad Q = \lambda \cdot f \cdot m \cdot \vartheta_1 = \vartheta_1 \sqrt{\alpha_p \lambda \cdot U \cdot f}.$$

$$\text{При } x = l \quad Q_p = \lambda \cdot f \cdot m \cdot \vartheta_1 \cdot th(ml) = \vartheta_1 \sqrt{\alpha_p U \cdot \lambda \cdot f} \cdot th(ml),$$

где α_p – теплопередача с поверхности ребра; th – гиперболический тангенс.

При рассмотрении теплопередачи через ребристую плоскую стенку (рис. 2.12) найдем расчетное уравнение для определения потока теплоты с поверхности ребра:

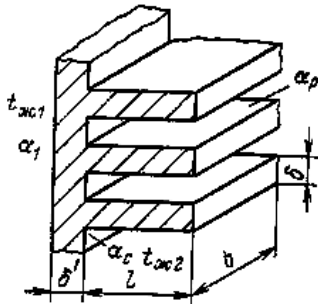


Рисунок 2.12 – Теплопередача через ребристую стенку

$$Q_p = \alpha_p \vartheta_1 F_p \frac{th\left(\frac{l}{d} \sqrt{\frac{2\alpha_p \delta}{\lambda}}\right)}{\left(\frac{l}{d}\right) \sqrt{2\alpha_p \delta / \lambda}}. \quad (2.59)$$

В (2.59) $\alpha_p \delta / \lambda = Bi$ – число Био. Критерий Био представляет собой отношение внутреннего термического сопротивления теплопроводности к внешнему термическому сопротивлению теплоотдачи:

$$Bi = \frac{\delta / \lambda}{1 / \alpha_p}. \quad \text{Перепишем (2.59) как:}$$

$$Q_p = \alpha_p \cdot \vartheta_1 \cdot F_p \cdot E, \quad \text{где } E = \frac{th\left(\frac{l}{d} \sqrt{2Bi}\right)}{\frac{l}{d} \sqrt{2Bi}} - \text{коэффициент эффективности ребра.}$$

Число E стремится к 1 при $Bi \rightarrow 0$, а $\lambda \rightarrow \infty$.

$$Q = Q_p + Q_c = \alpha_{np} \cdot \vartheta_1 \cdot F_{p,c},$$

где $Q_c = \alpha_c \cdot S_1 \cdot F_c$ – поток теплоты с гладкой части ребристой поверхности; $F_{p.c} = F_p + F_c$; $\alpha_{пр} = \alpha_p \cdot E(F_p/F_{p.c}) + \alpha_c (F_c/F_{p.c})$ – приведенный коэффициент теплоотдачи, учитывающий теплоотдачу поверхности ребра, поверхности гладкой стенки и эффективность работы ребра. Тогда общий тепловой поток через стенку определится как:

$$Q = \frac{t_{ж1} - t_{ж2}}{\frac{1}{\alpha_1 F_c} + \frac{\delta'}{\lambda \cdot F_c} + \frac{1}{\alpha_{пр} F_{p.c}}}. \quad (2.60)$$

Отнесем (2.60) к единице оребренной поверхности:

$$\frac{Q}{F_{p.c}} = K_{p.c} (t_{ж1} - t_{ж2}); \quad K_{pc} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} \frac{F_{pc}}{F_c} + \frac{\delta'}{\lambda} \frac{F_{pc}}{F_c} + \frac{1}{\alpha_{пр}}}$$

где $F_{p.c}/F_c$ – отношение оребренной поверхности к гладкой называется коэффициентом оребрения.

Практическое определение эффективности оребрения является более сложной задачей. Во-первых, теоретический коэффициент эффективности ребра E заметно меньше единицы. Как следствие, при высоких значениях высоты ребра возникают сложности по определению α для подстановки в число Био. Во-вторых, раздельное определение α_p и α_c практически невозможно. Поэтому приведенный коэффициент теплоотдачи $\alpha_{пр}$ определяют, как правило,

по зависимости
$$\alpha_{пр} = \left(E \cdot \mu_p \cdot \psi \frac{F_p}{F_{p.c}} + \frac{F_c}{F_{p.c}} \right) \alpha_k,$$

где α_k – условно конвективный коэффициент теплоотдачи, подставляемый в число Би; μ_p – коэффициент, учитывающий уширение ребер к основанию; ψ – поправочный, для коэффициента эффективности E , коэффициент, учитывающий неравномерное распределение теплоотдачи по поверхности ребра. Их значения, как правило, находят по справочным данным.

При заданных соотношениях коэффициентов теплоотдачи при оребрении плоской стенки со стороны малого α с коэффициентом оребрения $F_{p.c}/F_c = 2$, передача теплоты увеличится примерно в два раза.

2.4. Примеры с решениями

Пример 2.4.1. Определить потери теплоты от кирпичной стены длиной 10 м, высотой 5 м и толщиной 250 мм. Температуры на поверхностях стенок соответственно равны: $t_1 = 25 \text{ } ^\circ\text{C}$ и $t_2 = -30 \text{ } ^\circ\text{C}$. Коэффициент теплопроводности кирпича $\lambda = 0,7 \text{ Вт/м} \cdot \text{град}$.

Согласно уравнению (2.29):

$$q = \frac{\lambda}{\delta} (t_1 - t_2) = \frac{0,7}{0,25} [25 - (-30)] = 154 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2};$$

$$Q = q \cdot F = 154 \cdot 10 \cdot 5 = 7700 \text{ Вт}.$$

Пример 2.4.2. Найти значение коэффициента теплопроводности материала стенки, если $\delta = 30 \text{ мм}$, $\Delta t = 50 \text{ } ^\circ\text{C}$, $q = 200 \text{ кВт/м}^2$.

$$\lambda = \frac{q \cdot \delta}{\Delta t} = \frac{200000 \cdot 0,03}{50} = 120 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{град}}.$$

Пример 2.4.3. Рассчитать плотность теплового потока, проходящего через стенку котла толщиной $\delta_1 = 20$ мм и коэффициентом теплопроводности материала $\lambda_1 = 50 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{град}}$, если с внутренней стороны стенка покрыта слоем

накипи толщиной $\delta_2 = 2$ мм с коэффициентом теплопроводности $\lambda_2 = 1,0 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{град}}$

Температура наружной поверхности $t_1 = 250$ °С и внутренней поверхности $t_2 = 200$ °С.

$$q = \frac{t_1 - t_2}{\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2}} = \frac{250 - 200}{\frac{0,02}{50} + \frac{0,002}{1,0}} = \frac{50}{0,0024} = 20800 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}.$$

Для определения температуры поверхности железного листа под слоем накипи используем зависимость (2.31):

$$t_2 = t_1 - q \cdot \frac{\delta_1}{\lambda_1} = 250 - 20800 \cdot 0,0004 = 250 - 8,3 = 241,7 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

Пример 2.4.4. Найти потери теплоты в окружающую среду от кирпичной обмуровки котла толщиной $\delta = 250$ мм и ее температуру, с коэффициентом теплопроводности $\lambda = 0,7 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{град}}$ при температуре дымовых газов $t_2 = 800$ °С,

температуре наружного воздуха $t_{\text{в}} = 15$ °С, коэффициентах теплоотдачи от дымовых газов к стенке $\alpha_1 = 40 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{град}}$ и от стенки к окружающей среде

$$\alpha_2 = 10 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{град}}.$$

$$\text{Согласно (2.27) } K = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}} = \frac{1}{\frac{1}{40} + \frac{0,25}{0,7} + \frac{1}{10}} = 2,07 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{град}}.$$

Потери теплоты в окружающую среду с одного метра поверхности обмуровки составят: $q = 2,07(800 - 15) = 1625 \text{ Вт/м}^2$.

Температура обмуровки котла определяется по зависимости (2.31):

$$t_{\text{ст.вн}} = t_{\text{г}} - q \cdot \frac{1}{\alpha_1} = 800 - \frac{1624,95}{40} = 759,4 \text{ } ^\circ\text{C};$$

$$t_{\text{о}} = t_{\text{в}} + q \cdot \frac{1}{\alpha_2} = 15 + 1625 \cdot \frac{1}{10} = 177,5 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Пример 2.4.5. Паропровод диаметром 170/160 мм покрыт двухслойной изоляцией. Толщина первого слоя $\delta_2 = 30$ мм и второго слоя $\delta_3 = 50$ мм. Коэффициенты теплопроводности трубы и изоляции соответственно равны: $\lambda_1 = 50$, $\lambda_2 = 0,15$ и $\lambda_3 = 0,08 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{град}}$. Температура внутренней поверхности паропровода $t_{\text{вн}} = 300$ °С и внешней поверхности изоляции $t_{\text{н}} = 50$ °С. Определить потерю теплоты 1 м трубопровода и температуры на поверхностях

раздела отдельных слоев.

По условиям задачи имеем: $d_1 = 0,16$ м, $d_2 = 0,17$ м, $d_3 = 0,23$ м и $d_4 = 0,33$ м.

Согласно формуле (2.40) получаем:

$$q_l = \frac{\pi(t_1 - t_n)}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{2 \cdot \lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i}} = \frac{3,14 \cdot (300 - 50)}{\frac{1}{2 \cdot 50} \ln \frac{170}{160} + \frac{1}{2 \cdot 0,15} \ln \frac{230}{170} + \frac{1}{2 \cdot 0,08} \ln \frac{330}{230}} = 240,6 \frac{\text{Вт}}{\text{м}};$$

$$t_2 = 300 - \frac{240,6}{2 \cdot 3,14} 0,0006 = 300 - 0,0229 \approx 300 \text{ } ^\circ\text{C};$$

$$t_3 = 50 + \frac{240,6}{2 \cdot 3,14} 4,525 = 50 + 173,3 = 223,3 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

Пример 2.4.6. Стальной паропровод с коэффициентом теплопроводности $\lambda_1 = 40 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{град}}$, диаметром $\frac{200}{216}$ мм покрыт слоем изоляции толщиной 120 мм ($\lambda_2 = 0,1 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{град}}$). Температура пара $t_{\text{п}} = 300 \text{ } ^\circ\text{C}$ и окружающего воздуха $t_{\text{в}} = 25 \text{ } ^\circ\text{C}$. Коэффициенты теплоотдачи со стороны пара и воздуха равны соответственно: $\alpha_1 = 100 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{град}}$ и $\alpha_2 = 8,5 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{град}}$. Требуется определить линейный коэффициент теплопередачи K_l , линейную плотность теплового потока q_l и температуру изоляции $t_{\text{и}}$.

На основании формулы (2.42) имеем:

$$k_l = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1 \cdot d_1} + \frac{1}{2\lambda_1} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{2\lambda_2} \ln \frac{d_3}{d_2} + \frac{1}{\alpha_2 \cdot d_3}} =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{100 \cdot 0,2} + \frac{1}{2 \cdot 40} \ln \frac{216}{200} + \frac{1}{2 \cdot 0,1} \ln \frac{456}{216} + \frac{1}{8,5 \cdot 0,456}} =$$

$$= \frac{1}{0,05 + 0,0009 + 3,75 + 0,258} = 0,248 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{град}}.$$

На основании (2.44) $q_l = k_l \cdot \pi(t_n - t_e) = 0,248 \cdot 3,14 \cdot 275 = 214 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{град}}$.

$$t_{\text{и}} = t_{\text{в}} + \frac{q_l}{\pi} \cdot \frac{1}{\alpha_2 \cdot d_3} = 25 + \frac{214}{3,14} 0,258 = 25 + 17,5 = 42,5 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

$$t_{\text{ст,и}} = t_{\text{в}} + q \cdot \frac{1}{\alpha_2} = 25 + \frac{1624,95}{10} = 177,5 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

Пример 2.4.7. Для паропровода диаметром 150/159 мм и длиной $l = 350$ м, проходящего в закрытом помещении с температурой окружающей среды $t_{\text{ж}} = 10 \text{ } ^\circ\text{C}$, требуется рассчитать изоляцию. Пар подается со следующими параметрами: на входе давление и температура пара соответственно равны: $P_1 = 1,5$ мПа, $t_{\text{п1}} = 350 \text{ } ^\circ\text{C}$; на выходе – $P_{\text{п2}} = 1,3$ мПа, $t_{\text{п2}} = 330 \text{ } ^\circ\text{C}$. Скорость протекания пара равна: $w = 25$ м/сек. Трубопровод сварной, фланцевые

соединения отсутствуют. Имеются две задвижки. В течение года паропровод эксплуатируется 7000 ч. Стоимость 1 гДж теплоты составляет 200 руб. Найти годовую экономию от применения изоляции.

Допустимые тепловые потери определяются исходя из заданного падения температуры пара. Часовой расход пара определяется следующей зависимостью:

$$G = \rho \cdot w \cdot f = 7,12 \cdot 25 \frac{3,14 \cdot 0,15^2}{4} = 3,14 \frac{\text{кг}}{\text{с}},$$

где $\rho = 7,12 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ – плотность пара при давлении $P = 1,4$ мПа.

По таблицам водяного пара при $p_1 = 1,5$ мПа и $t_{п1} = 350$ °С находим теплосодержание пара: $i_1 = 3147,6$ кДж/кг; при $P_2 = 1,3$ мПа и $t_2 = 330$ °С теплосодержание пара: $i_2 = 3108,5$ кДж/кг.

Допустимые потери тепла на всей длине паропровода:

$$Q = G \cdot (i_1 - i_2) = 3,14 \cdot (3147,6 - 3108,5) = 122,8 \text{ кВт}.$$

Потеря теплоты одним вентилем или задвижкой эквивалентна потере теплоты трубопроводом длиной $l = 6$ м. Таким образом, для учета потерь теплоты двумя задвижками необходимо к заданной длине паропровода добавить 12 м.

Допустимые потери теплоты с 1 погонного метра длины паропровода составят:

$$q_l = \frac{Q}{l_p} = \frac{122,8}{362} = 0,339 \frac{\text{кВт}}{\text{м}}.$$

При расчете изоляции термическими сопротивлениями теплоотдачи от пара к стенке и самой стенки трубы пренебрегаем. Тогда температура поверхности трубы t_c будет равна температуре пара $t_{п1} = 350$ °С.

Дальнейший расчет проведем для совелитовой мастичной изоляции. Пусть температура поверхности изоляции $t_n = 26$ °С. Тогда средняя температура изоляционного слоя равна: $t_{из} = \frac{t_c + t_n}{2} = \frac{350 + 26}{2} = 188$ °С .

Для мастичного совелита

$$\lambda_{из} = 0,0901 + 0,000087 \cdot t_{из} = 0,0901 + 0,000087 \cdot 188 = 0,106 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{град}}.$$

Количество переданной теплоты q_l при заданных температурах стенки трубопровода равно: $q_l = \frac{2 \cdot \pi \cdot \lambda_{из} (t_{п1} - t_n)}{\ln \frac{d_{из}}{d_2}}$,

где d_2 – внешний диаметр трубы; $d_{из}$ – внешний диаметр изоляции.

$$\text{Тогда } \ln \frac{d_{из}}{d_2} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \lambda_{из} (t_{п1} - t_n)}{q_l} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 0,106 \cdot (350 - 26)}{339} = 0,636,$$

$$\frac{d_{из}}{d_2} = e^{0,636} = 1,902;$$

$$d_{из} = 1,902 \cdot d_2 = 1,902 \cdot 0,159 = 0,302 \text{ м и толщина слоя изоляции}$$

$$\delta_{из} = \frac{d_n - d_2}{2} = 0,071 \text{ м.}$$

Проверяем температуру наружного слоя изоляции t_n . При температуре помещения $t_{ж} = 10 \text{ }^{\circ}\text{C}$ коэффициент теплоотдачи от поверхности изоляции к воздуху составит: $\alpha = 20 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{град}}$, то $t_n = t_{ж} + \frac{q_l}{\pi \cdot d_n \cdot \alpha_2} = 10 + \frac{339}{3,14 \cdot 0,302 \cdot 20} = 27,8 \text{ }^{\circ}\text{C}$

Потери теплоты неизолированного паропровода по низшей температуре пара $t_{п2} = 330 \text{ }^{\circ}\text{C}$ могут быть найдены как:

$$q_l' = \alpha (t_{п2} - t_{ж}) = 20(330 - 10) = 6400 \text{ Вт/м}.$$

Потери теплоты изолированного паропровода составляют: $q_l = 339 \text{ Вт/м}$.

Тогда экономия теплоты определится из

$$\Delta q_l = q_l' - q_l = 6400 - 339 = 6061 \text{ Вт/м}.$$

Для всей длины паропровода экономия теплоты равна: $Q = \Delta q_l \cdot l_p = 6,061 \cdot 363 = 2200,1 \text{ кВт}$ и годовая прибыль от экономии за счет изоляции теплоты: $Q_{год} = Q \cdot 7000 \cdot 3600 \cdot 200 = 0,0022 \cdot 3600 \cdot 7000 \cdot 200 = 11088504 \text{ руб/год}$

3. НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Перенос теплоты за счет теплопроводности, когда температура системы изменяется не только от точки к точке, но и с течением времени, называется нестационарным. Эти тепловые процессы всегда связаны с изменением внутренней энергии или энтальпии вещества. Нестационарные процессы существуют при прогреве или охлаждении материала и оборудования при пуске, остановке или изменении технологического режима процесса, производстве стекла, обжиге кирпича и т. д.

Различают две группы процессов:

- процесс стремится к тепловому равновесию при прогреве или охлаждении тел, помещенных в среде с заданным тепловым состоянием;
- температура тела претерпевает периодические изменения в периодически действующих подогревателях (регенераторах).

Аналитическое описание процесса теплопроводности включает в себя дифференциальное уравнение теплопроводности: $\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right)$ и

условия однозначности, состоящие из:

- физических условий λ, c, ρ, \dots ;
- формы и размеров тела $l_0, l_1, l_2 \dots l_n$;
- начальных условий (температура тела в начальный момент времени): $\tau = 0 \rightarrow t = t_0 = f(x, y, z)$.

- граничных условий, которые задаются в виде условий третьего рода:

$$\left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_{n=0} = -\frac{\alpha}{\lambda} (t_{n=0} - t_{ж}) .$$

Математическая формулировка рассматриваемой задачи заключается в отыскании функции: $t = f(x; y; z; \tau; \alpha; a; t_0; t_{ж}; l_1; \dots l_n)$, которая бы удовлетворяла уравнению теплопроводности и условиям однозначности.

3.1. Нестационарные процессы теплопроводности в телах простой формы. Граничные условия третьего рода

Рассмотрим неограниченную пластину толщиной 2δ , сделанную из однородного изотропного материала с постоянными физическими характеристиками (рис. 3.1). В начальный момент времени $\tau = 0$ температура в пластине распределена равномерно и равна t_0 . Пластина помещена в среду с постоянной температурой $t_{ж} < t_0$. Теплообмен на обеих поверхностях пластины происходит при $\alpha = const$. Требуется найти распределение температуры в пластине: $t = f(x, \tau)$.

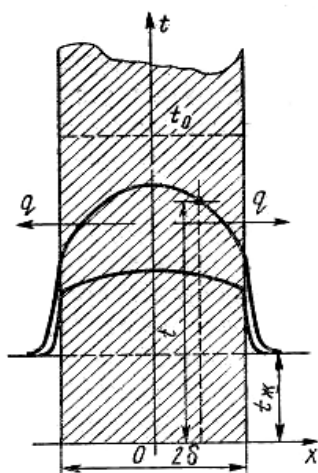


Рисунок 3.1 – Распределение температуры в пластине

При поставленных условиях распределение температуры по толщине пластины должно быть симметричным: $\frac{\partial t(0,\tau)}{\partial x} = 0$, искомая функция $t(x, \tau)$ должна быть четной функцией координаты x . (График четной функции симметричен относительно оси координат, нечетный – относительно начала координат).

Введем понятие "избыточной" температуры: $\vartheta = t - t_{ж}$. Тогда дифференциальное уравнение теплопроводности для пластины запишется:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}, \quad (3.1)$$

при следующих условиях однозначности:

- начальные условия: при $\tau = 0 \rightarrow \vartheta(x, 0) = \vartheta_0$;
- граничные условия: при $x = \delta \rightarrow \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)_{x=\delta} = -\frac{\alpha}{\lambda} \vartheta_{x=\delta}$;
- условия симметрии: при $x = 0 \rightarrow \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)_{x=0} = 0$.

Найдем функцию $\vartheta(x, \tau)$ распределения температуры в пластине в любой

момент времени процесса охлаждения или нагревания. Для этого используем метод разделения переменных. Решаем уравнение (3.1) в виде произведения двух функций, одна из которых $\varphi(x)$ – функция координаты, другая – $f(\tau)$ – времени:

$$\mathcal{A}(x, \tau) = \varphi(x) \cdot f(\tau) . \quad (3.2)$$

Подставим данную функцию в уравнение (3.1):

$$\frac{\partial[f(\tau)]}{\partial \tau} \varphi(x) = a \frac{\partial^2[\varphi(x)]}{\partial x^2} f(\tau) .$$

Разделим переменные:

$$\frac{1}{f(\tau)} \frac{\partial[f(\tau)]}{\partial \tau} = a \frac{1}{\varphi(x)} \frac{\partial^2[\varphi(x)]}{\partial x^2} .$$

Левая часть уравнения зависит от τ , правая – только от x . Известно, что две функции от двух разных и не зависящих друг от друга аргументов могут быть равны при любых значениях последних только в том случае, если они постоянны. Величина эта отрицательна, так как тепловые процессы стремятся к равновесию и обозначаются K . Тогда получим два дифференциальных уравнения:

$$\frac{1}{f(\tau)} \frac{d[f(\tau)]}{d\tau} = -aK^2 ; \quad (3.3)$$

$$\frac{d^2[\varphi(x)]}{dx^2} + K^2 \cdot \varphi(x) = 0 . \quad (3.4)$$

В (3.3) разделим переменные: $\frac{d[f(\tau)]}{f(\tau)} = -a \cdot K^2 \cdot d\tau$.

Интегрируем полученное уравнение: $\ln[f(\tau)] = -a \cdot \tau \cdot K^2 + \ln C_1$,

или $f(\tau) = C_1 e^{-aK^2 \tau}$. (3.5)

Решение уравнения (3.4) имеет вид:

$$\varphi(x) = C_2 \cos(kx) + C_3 \sin(kx) . \quad (3.6)$$

Подставим (3.5) и (3.6) в (3.2) и получим:

$$\mathcal{A} = [C_2 \cos(Kx) + C_3 \sin(Kx)] C_1 e^{-aK^2 \tau} .$$

Обозначим $C_1 \cdot C_2 = C$ и $C_1 \cdot C_3 = D$.

Тогда $\mathcal{A} = [C \cos(Kx) + D \sin(Kx)] e^{-aK^2 \tau}$.

Постоянные C , D и K определяются из начальных и граничных условий.

D – из условий симметрии:

$$\left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x} \right)_{x=0} = [-C \cdot K \sin(Kx) + D \cdot K \cos(Kx)] e^{-aK^2 \tau} . \quad (3.7)$$

Поскольку рассматривается тепловой процесс, то при $x = 0$; $K \neq 0$; $K \cos(Kx) \neq 0$ и следовательно: $D = 0$. Таким образом, $\mathcal{A} = C e^{-aK^2 \tau} \cos(Kx)$. (3.8)

Слагаемое $C \cdot K \cdot \sin(Kx)$ должно быть отброшено, как не удовлетворяющее граничным условиям. Значения $k = k_n$ найдем, используя граничные условия. На левой поверхности пластины $x = -\delta$. Подставим в граничные условия

$$\left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x} \right)_{x=\delta} = -\frac{\alpha}{\lambda} \mathcal{A}_{x=\delta}$$
 выражения (3.7) и (3.8):

$$C \cdot K \cdot e^{-aK^2\tau} \sin(K\delta) = \frac{\alpha}{\lambda} C \cdot e^{-aK^2\tau} \cos(K\delta).$$

При сокращении подобных получим: $ctg(K\delta) = \frac{K\lambda}{\alpha}$.

Умножим числитель и знаменатель правой части уравнения на δ :

$$ctg(K\delta) = \frac{K\delta}{(\alpha \cdot \delta) / \lambda} = \frac{K \cdot \delta}{Bi}. \quad (3.9)$$

Обозначим $k\delta = \mu$. Тогда (3.9) перепишем: $ctg(\mu) = \mu/Bi$. (3.10)

Характеристическое (с постоянными коэффициентами) трансцендентное (не являющееся алгебраическим) уравнение (3.10) имеет для μ бесчисленное множество решений. Наиболее просто оно решается графическим путем.

Обозначим $ctg(\mu) = y_1$, а $\mu/Bi = y_2$. Построим графики этих функций:

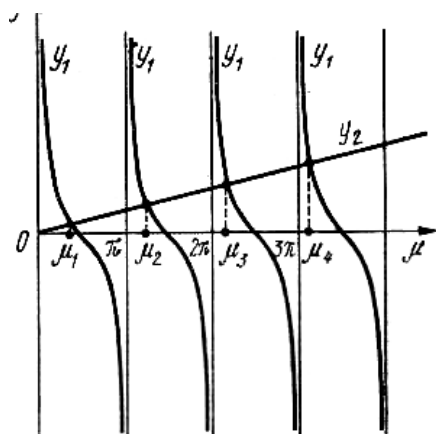


Рисунок 3.2 – Графический способ определения корней характеристического уравнения

График y_1 на рисунке 3.2 представляет собой котангенсоиду, являющуюся периодической функцией аргумента μ с периодом π . График y_2 – прямая, тангенс угла наклона которой к абсциссе равен: $1/Bi$. Абсциссы точек пересечения этих графиков дают значения корней μ уравнения (3.10). Как видно из рисунка 3.2, уравнение (3.10) имеет бесчисленное множество корней μ_n ($n = 1, 2, 3, \dots$), удовлетворяющих уравнению (3.10) и граничному условию. Из (3.10) следует также, что значения μ_n , которые называются собственными числами, зависят от порядкового номера n и числа Bi . При $Bi = 0$ прямая $y_2 = \mu/Bi$ совпадает с осью ординат, тогда: $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = \pi, \dots, \mu_n = (n-1)\pi$.

При $Bi = \infty$ прямая $y = \mu/Bi$ совпадает с осью абсцисс, тогда корни уравнения (3.10) будут равны: $\mu_1 = \pi/2$; $\mu_2 = 3\pi/2, \dots, \mu_n = (2n-1)\pi/2$.

Метод разделения переменных позволяет получить совокупность частных решений \mathcal{A} , удовлетворяющих дифференциальному уравнению теплопроводности и граничным условиям. Каждому значению корня μ_n соответствует частное распределение температуры. Сумма частных решений является общим решением уравнения теплопроводности:

$$\mathcal{A}(x; \tau) = \sum_{n=1}^{n=\infty} C_n \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) e^{-\mu_n^2 Fo}, \quad (3.11)$$

где $Fo = \frac{a \cdot \tau}{\ell^2}$ – критерий Фурье, имеющий смысл обобщенного времени;

характеризует связь между скоростью изменения температурного поля, физическими свойствами и размерами тела.

Константа C_n – определяется из начальных условий. При $F_0 = 0$ ($\tau = 0$):

$$\vartheta_0 = \vartheta(x,0) = \sum_{n=1}^{n=\infty} C_n \cos\left(\mu_n \frac{x\delta}{\delta}\right). \quad (3.12)$$

Умножим (3.12) на $\cos(\mu_m x)$ и проинтегрируем в пределах: $-\delta \leq x \leq \delta$:

$$\vartheta_0 \int_{-\delta}^{\delta} \cos(\mu_m x) dx = \sum_{n=1}^{n=\infty} C_n \int_{-\delta}^{\delta} \cos(\mu_m x) \cos(\mu_n x) dx.$$

Используем свойство ортогональности тригонометрической функции. Для данного случая оно может быть записано в виде:

$$\int_{-\delta}^{\delta} \cos(\mu_m x) \cos(\mu_n x) dx = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n \\ \int_{-\delta}^{\delta} \cos^2(\mu_n x) dx & \text{при } m = n \end{cases}, \quad (3.13)$$

при $m = n$ (3.13) имеет вид:

$$\int_{-\delta}^{\delta} \cos^2\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) dx = \delta \left(\frac{\sin 2\mu_n}{2\mu_n} + 1 \right).$$

При этом C_n из (3.13) становится равным:

$$C_n = \frac{\vartheta_0 \int_{-\delta}^{\delta} \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) dx}{\int_{-\delta}^{\delta} \cos^2\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) dx} = \frac{\vartheta_0 \frac{2\delta}{\mu_n} \sin \mu_n}{\delta \left(1 + \frac{\sin 2\mu_n}{2\mu_n}\right)} = \vartheta_0 \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n}. \quad (3.14)$$

Подставив значение C_n в (3.11), получим уравнение распределения температур в симметрично охлаждаемой однородной пластине:

$$\vartheta = \sum_{n=1}^{n=\infty} \vartheta_0 \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n} \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) e^{-\mu_n^2 \frac{a\tau}{\delta^2}}. \quad (3.15)$$

В безразмерной форме уравнение (3.15) запишется как:

$$\theta = \frac{\vartheta}{\vartheta_0} = \frac{t(x, \tau) - t_{жс}}{t_0 - t_{жс}} = \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) e^{-\mu_n^2 Fo}, \quad (3.16)$$

где

$$A_n = \frac{2 \sin \mu_n}{(\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n)}.$$

Уравнение (3.16) действительно и для случая прогрева пластины. Для этого необходимо θ рассчитывать как: $\theta_{нагр} = 1 - \theta_{охл} = \frac{t(x, \tau) - t_0}{t_{жс} - t_0}$.

Так как $\cos(\mu_n x/\delta)$ – величина ограниченная, а $\exp(-\mu_n^2 Fo)$ – величина быстро убывающая, то при $F_0 \geq 0,25$ ряд становится быстро сходящимся и может быть заменен только первым членом. В этом случае распределение температуры в пластине рассчитывается как:

$$\vartheta = A_1 \cos\left(\mu_1 \frac{x}{\delta}\right) \exp(-\mu_1^2 Fo) . \quad (3.17)$$

Область вырождения функции (3.16), ($Fo \geq 0,25$), в (3.17) называют регулярным тепловым режимом.

При заданных координатах x искомая температура θ есть функция критериев Bi и Fo : $\theta = f(Bi, Fo)$. (3.18)

Для практических расчетов температуры в центре и на поверхности пластины обычно пользуются номограммами $\theta = f(Bi, Fo)$, приведенными на рисунке 3.3 и рисунке 3.4.

Пользуясь этими диаграммами, можно выполнить следующие расчеты:

1. Определить время охлаждения $Fo = \frac{a \cdot \tau}{\delta^2}$ до заданной температуры

$\theta_x = \delta$ или $\theta_x = 0$ – по известным условиям теплоотдачи на поверхностях;

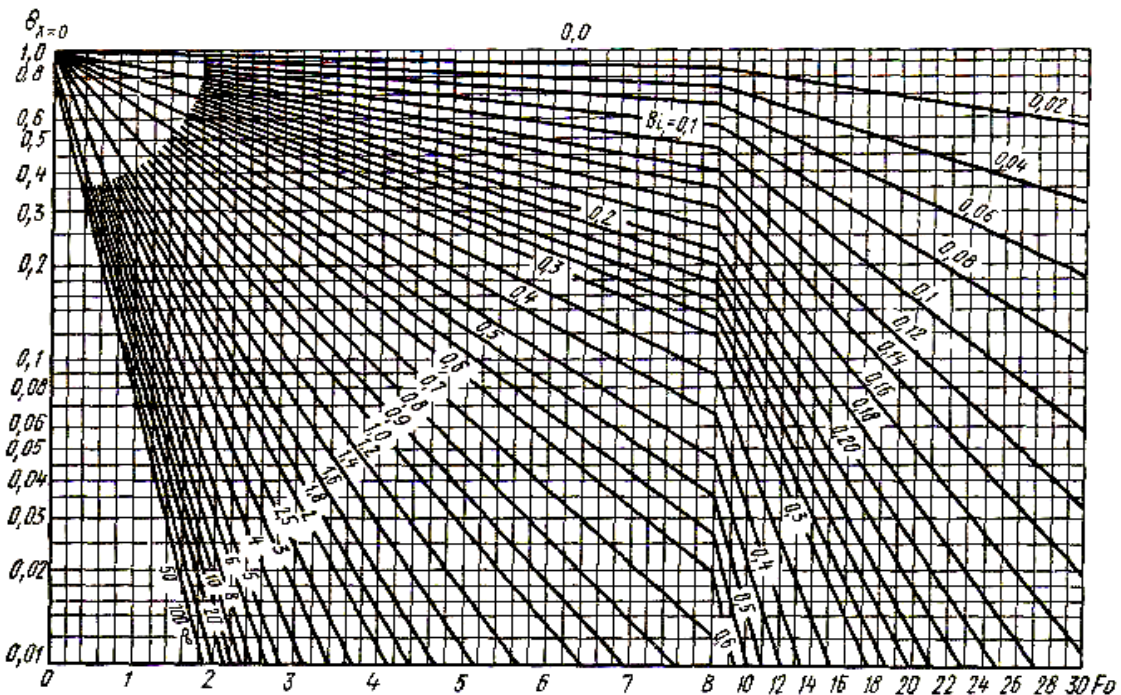


Рисунок 3.3 – Зависимость безразмерного перепада температур от чисел Фурье и Био для середины пластины

2. Определить температуру через заданное время;

3. Определить интенсивность теплоотдачи на поверхностях при заданных Fo и θ .

При $Bi \rightarrow \infty$; $t_c = t_{ж}$; $\theta_{x=\delta} = 0$ такие условия обеспечивают $Bi \geq 100$.

Тогда
$$\theta_{x=0} = \frac{4}{\pi} e^{-Fo \left(\frac{\pi^2}{4}\right)}, \quad (3.19)$$

и
$$\tau = \frac{4\delta^2}{\pi^2} \frac{1}{a} \ln \left(\frac{4}{\pi \theta_{x=0}} \right). \quad (3.20)$$

При $Bi \rightarrow 0$, когда внутреннее термическое сопротивление мало по сравнению с термическим сопротивлением на поверхности, температуры по толщине пластины распределяются равномерно: $\theta = \cos\left(\sqrt{Bi} \frac{x}{\delta}\right) e^{-Bi}$. (3.21)

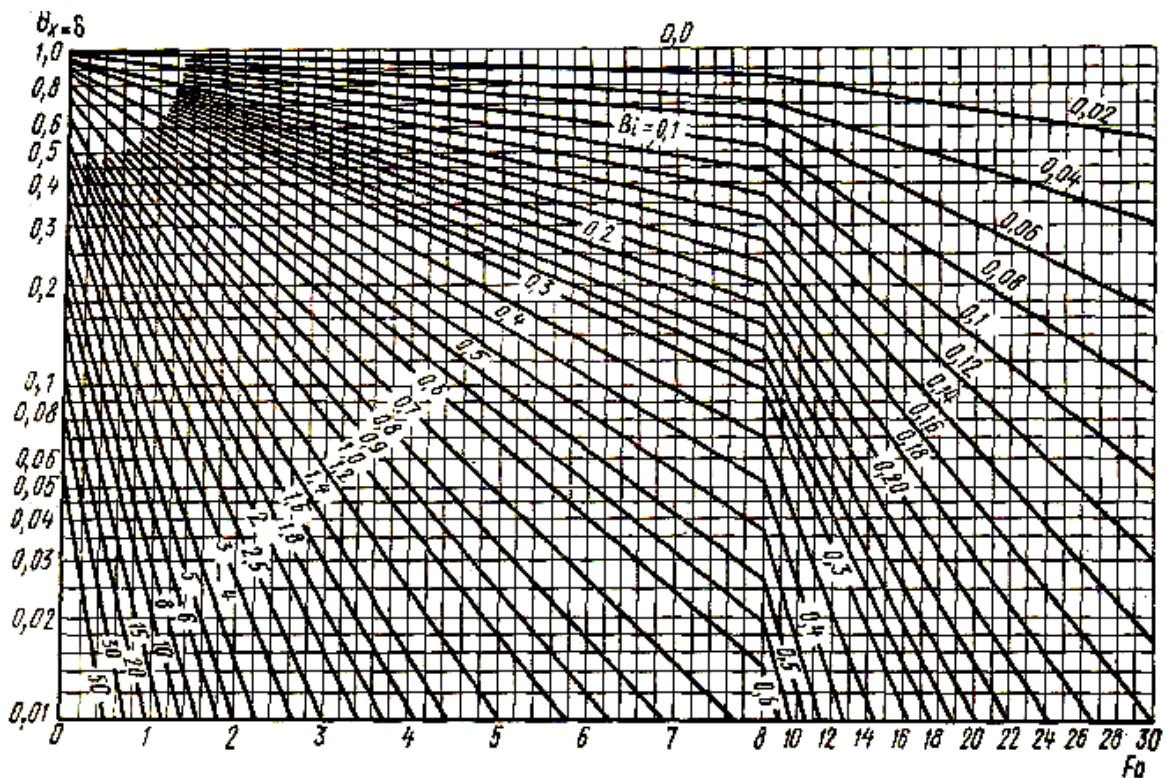


Рисунок 3.4 – Зависимость безразмерного перепада температур от чисел Фурье и Био для поверхности пластины

Безразмерные температуры поверхности и оси пластины практически равны.

Для определения расхода теплоты за произвольный промежуток времени на охлаждение (нагревание) пластины пользуются уравнением вида:

$$Q = C \cdot \rho (t_0 - t_{ж}) (1 - \bar{\theta}), \quad (3.22)$$

где $\bar{\theta}$ – средняя температура по толщине пластины определяется по уравнению при $Fo \geq 0,25$:

$$\bar{\theta} = B \cdot e^{-\mu^2 Fo},$$

где коэффициент $B = \frac{2Bi}{\mu_1^2 (Bi^2 + Bi + \mu_1^2)}$ на практике находится по графику, приведенному на рисунке 3.5.

Все принципиальные выводы о влиянии Bi на температурные поля, сделанные для неограниченной пластины, остаются в силе и для случая охлаждения бесконечного цилиндра. При $Fo \geq 0,25$ для практических расчетов можно использовать зависимость для расчета температуры на поверхности цилиндра:

$$\theta_{r=r_n} = A_1 \cdot I_0(\mu_1 R) e^{-\mu^2 Fo}, \quad (3.23)$$

где $R = r/r_n$ – безразмерный радиус $0 < R < 1$; $I_0(\mu_1)$ – функция Бесселя первого

рода нулевого порядка:
$$I_p = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{p+2m}}{\Gamma(m+1)\Gamma(p+m+1)} .$$

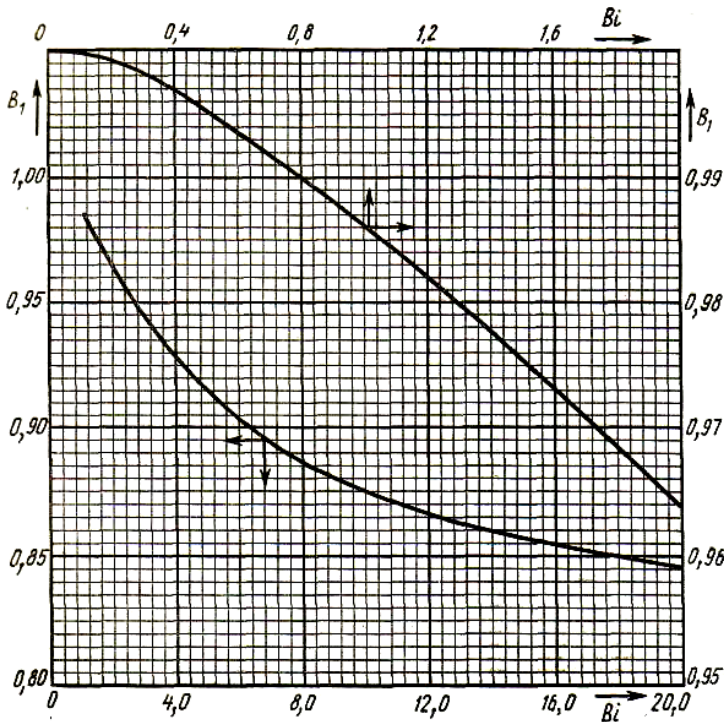


Рисунок 3.5 – Зависимость между коэффициентом B и критерием Bi для неограниченной пластины

Для оси цилиндра:
$$\theta_{r=0} = A_1 e^{-\mu^2 Fo} . \quad (3.24)$$

Для практического определения температур используют номограммы, аналогичные приведенным на рисунке 3.3 и рисунке 3.4.

Изменение количества теплоты тела за время τ определяется зависимостью:

$$Q = c \cdot \rho (\vartheta_0 - \bar{\vartheta}) , \quad (3.25)$$

где средняя относительная температура цилиндра $\bar{\vartheta}$ для $Fo \geq 0,25$ определяется как:

$$\bar{\vartheta} = B \cdot \exp(-\mu^2 Fo) , \quad (3.26)$$

где $B = \frac{4Bi}{\mu_1^2 (\mu_1^2 + Bi^2)}$, или определяемый по номограммам, аналогично рис. 3.5.

Решая уравнение теплопроводности шара совместно с краевыми условиями, получим уравнение для расчета безразмерной температуры при

$$Fo \geq 0,25: \quad \theta = \frac{\vartheta}{\vartheta_0} = \frac{2Bi \sqrt{\mu_1^2 - (Bi-1)^2}}{\mu_1^2 + Bi^2 - Bi} \frac{\sin \mu_1 R}{\mu_1 R} e^{-\mu_1^2 Fo} . \quad (3.27)$$

Средняя температура шара определяется как:

$$\bar{\vartheta} = B \cdot \exp(-\mu_1^2 Fo) , \quad (3.28)$$

где

$$B = \frac{6Bi}{\mu_1^2 (\mu_1^2 + Bi^2 - Bi)} . \quad (3.29)$$

Температуры и величина B могут быть определены графически по аналогии с пластиной. Расход теплоты определяется уравнением:

$$Q = c \cdot \rho (\vartheta_0 - \bar{\vartheta}). \quad (3.30)$$

3.2. Регулярный режим процессов теплопроводности

Анализ решений дифференциального уравнения теплопроводности, полученных в виде ряда, показывает, что с ростом времени они все представляют собой быстро сходящийся ряд. Поэтому при $F_0 \geq 0,25$ используют для расчётов только первый член ряда, например, для неограниченной пластины:

$$\vartheta = A_1 \cos\left(\mu_1 \frac{x}{\delta}\right) e^{-\mu_1^2 F_0} \quad \text{или} \quad \vartheta = A \cdot P \cdot e^{-m\tau}, \quad (3.31)$$

где A – постоянная, определяемая начальным распределением температуры, в теле; $P = \cos(\mu_1 x/\delta)$ – функция, определяемая координатами, и Bi ; $m = \mu_1^2 \frac{a}{\delta^2}$ – темп регулярного режима, $\mu = \kappa \cdot \delta$.

Нестационарный процесс теплопроводности, описываемый уравнением (3.31), называется регулярным тепловым режимом.

Прологарифмируем (3.31). Получим: $\ln \vartheta = \ln(A \cdot P) - m\tau$ или

$$\ln \vartheta = -m \cdot \tau + C(x, y, z). \quad (3.32)$$

Из уравнения (3.32) следует, что логарифм относительной температуры – линейная функция времени, что справедливо для любой точки тела.

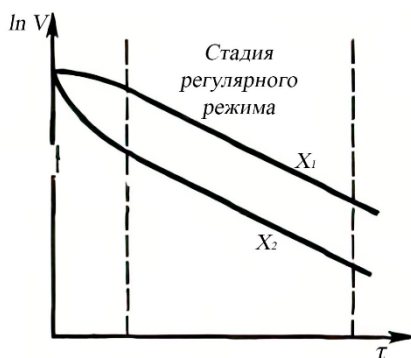


Рисунок 3.6 – Зависимость логарифма избыточной температуры от времени

На рисунке 3.6 показано изменение температуры в точках x_1 и x_2 при охлаждении тела. Автомоделность относительной температуры v во времени – характерная особенность регулярного режима.

Продифференцировав уравнение (3.32), получим:

$$m = -\frac{1}{\vartheta} \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = \operatorname{tg} \varphi, \quad [1/c]. \quad (3.33)$$

Из уравнения (3.33) видно, что темп регулярного режима охлаждения (нагрева) не зависит ни от координат, ни от времени, представляет собой относительную скорость изменения температуры и в любой точке тела остается постоянным. Темп регулярного режима определяется геометрической формой, размерами тела, его физическими свойствами и условиями теплообмена на

поверхности тела.

При $Bi \rightarrow \infty$, m пропорционален a :

$$m_\infty = \mu_1^2 \frac{a}{\delta^2} \quad \text{или} \quad a = \kappa \cdot m_\infty, \quad (3.34)$$

где κ – коэффициент формы, зависящий от геометрии форм и размеров тела и равен:

а) для параллелепипеда со сторонами $2\delta_1; 2\delta_2; 2\delta_3$:

$$k = \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2\delta_1}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2\delta_2}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2\delta_3}\right)^2}; \quad (3.35)$$

б) для цилиндра длиной l и радиусом r_0 :

$$k = \frac{1}{(2,405/r_0)^2 + (\pi/l)^2}; \quad (3.36)$$

в) для шара радиусом r_0 :

$$k = \frac{1}{(\pi/r_0)^2}. \quad (3.37)$$

3.3. Численные методы решения задач теплопроводности Метод конечных разностей

Задачи теплопроводности для тел сложной формы или при сложных краевых условиях не всегда удается решить аналитически. Метод конечных разностей позволяет решить практически любую задачу теплопроводности. Сущность метода состоит в замене непрерывной функции $t(x, \tau)$ сеточной функцией, определенной в дискретных точках, соответствующих дискретным значениям аргументов x, τ , которые задаются с некоторым шагом. Совокупность этих дискретных значений называется сеткой. Если шаги разбивки являются постоянными, то сетка называется равномерной.

Дифференциальный оператор уравнения теплопроводности заменяют его сеточным или разностным аналогом, который содержит значения сеточной функции в нескольких узлах сетки.

Для неограниченной пластины дифференциальное уравнение запишется в виде:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}. \quad (3.38)$$

Заменим дифференциалы в уравнении (3.38) на их сеточные аналоги. Для этого заменим непрерывную координату x сеткой с шагом $\Delta x (x_i = i \cdot \Delta x)$, а время τ сеткой с шагом $\Delta \tau (\tau = j \cdot \Delta \tau)$. Рассмотрим точку сетки с координатами $i = n, j = k$. При этом t_{nk} означает температуру в пространственной точке $x = n \cdot \Delta x$ в момент времени $\tau = k \cdot \Delta \tau$. Заменим производные температуры в (3.38) разностными (сеточными) выражениями.

Тогда в простейшем варианте

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} \approx \frac{t_{(k+1),n} - t_{k,n}}{\Delta \tau}; \quad \frac{\partial t}{\partial x} \approx \frac{t_{k,(n+1)} - t_{k,n}}{\Delta x}; \quad \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{t_{k,n} - t_{k,(n-1)}}{\Delta x};$$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{t_{k,(n+1)} - t_{k,n}}{\Delta x} - \frac{t_{k,n} - t_{k,(n-1)}}{\Delta x} \right] = \frac{t_{k,(n+1)} - 2t_{k,n} + t_{k,(n-1)}}{\Delta x^2}.$$

Подставим полученные выражения производной от температуры в уравнение теплопроводности (3.38):

$$\frac{t_{(k+1),n} - t_{k,n}}{\Delta \tau} = \frac{a}{\Delta x^2} [t_{k,(n+1)} - 2t_{k,n} + t_{k,(n-1)}]. \quad (3.39)$$

Уравнение (3.39) является разностным аналогом уравнения теплопроводности. Решим (3.39) относительно $t_{(k+1),n}$:

$$\begin{aligned} (t_{(k+1),n} - t_{k,n}) &= \frac{a\Delta\tau}{\Delta x^2} [t_{k,(n+1)} - 2t_{k,n} + t_{k,(n-1)}] \\ t_{(k+1),n} &= \frac{a\Delta\tau}{\Delta x^2} [t_{k,(n+1)} + t_{k,(n-1)}] + \left(1 - \frac{2a\Delta\tau}{\Delta x^2}\right) t_{k,n}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Уравнение (3.40) является решением сеточного уравнения (3.39). Оно устанавливает связь между искомой температурой в точке n и температурами в предыдущий расчетному интервалу времени k в соседних узлах сетки ($n-1$) и ($n+1$). Выбор значений $\Delta\tau, \Delta x$ должен определяться по условию устойчивости, обеспечивающему

$$\frac{a\Delta\tau}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}, \quad (3.41)$$

положительность коэффициента при $t_{n,k}$ в уравнении (3.40).

Уравнение (3.40) описывает нестационарное температурное поле в бесконечной пластине. При граничных условиях третьего рода температуры – поверхностей пластины определяются условиями теплообмена:

$$\alpha(t_{жс} - t_{c,0}) = \frac{\lambda}{\Delta x} (t_{c,0} - t_{c,1}). \quad (3.42)$$

Температура на поверхности пластины

$$t_{c,0} = \frac{\frac{\alpha \cdot \Delta x}{\lambda} t_{жс} + t_{c,1}}{\frac{\alpha \cdot \Delta x}{\lambda} + 1}. \quad (3.43)$$

В каждом расчетном интервале времени $\Delta\tau$ уравнения (3.39) и (3.40) решаются столько раз, сколько интервалов (Δx) содержится в пространственной сетке. Разностная схема называется явной, поскольку температуры $t_{i,j+1}$ определяются по известным значениям $t_{i,j}$ в предыдущий расчетный момент времени. Точность расчета увеличивается при уменьшении $\Delta\tau$ и Δx .

3.4. Исследование процессов теплопроводности методом аналогии (электротепловая аналогия)

Сходство аналогичных явлений заключается в одинаковом характере протекания процессов. Отдельные тепловые и электрические явления описываются одинаковыми дифференциальными уравнениями и условиями однозначности, хотя физическое содержание и размерность входящих в них величин различны:

$$dQ = -\lambda \frac{\partial t}{\partial n_T} dF_T ; \quad (3.44)$$

$$dI = -\sigma \frac{\partial U}{\partial n_3} dF_3 , \quad (3.45)$$

где dQ и dI – элементарные потоки теплоты и электричества, прошедшие в единицу времени через площадки dF_T и dF_3 в направлении нормалей n_T и n_3 ; t и U – температура и электрический потенциал; λ и σ – коэффициенты теплопроводности и электропроводности.

Для двухмерной задачи уравнения теплопроводности и электропроводности имеют вид:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x_T^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y_T^2} = 0 ; \quad (3.46)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y_3^2} = 0 , \quad (3.47)$$

то есть уравнения имеют одинаковую структуру.

Аналогичные явления должны протекать в геометрически подобных системах. Задаемся граничными условиями третьего рода:

$$-\lambda \cdot \text{grad } t = \alpha \cdot \Delta t ; \quad - \text{grad } t = \Delta t / (\lambda \alpha) = \Delta t / l_T , \text{ где: } l_T = \lambda / \alpha ; \quad - \text{grad } U = \Delta U / l_3 .$$

Для установления количественной связи между аналогичными физическими величинами математические описания приводят к безразмерной форме. Для этого в качестве масштаба для температурного напора принимают величину Δt_0 ; для электропотенциала – ΔU_0 ; для линейных размеров – сходственные линейные отрезки l_{T0} и l_{30} . Тогда

$$x_T / l_{T0} = X_T ; \quad y_T / l_{T0} = Y_T ; \quad l_T / l_{T0} = L ; \quad \Delta t / \Delta t_0 = \theta .$$

$$\text{Отсюда получаем отношения: } x_T = X_T l_{T0} ; \quad y_T = l_{T0} Y_T ; \quad \Delta t = \Delta t_0 \theta .$$

Аналогичные соотношения будут иметь место для величин электрического поля. После подстановки этих соотношений в дифференциальные уравнения тепло- и электропроводности последние будут иметь вид:

$$\Delta t_0 / l_{T0}^2 (d^2 \theta / dx_T^2 + d^2 \theta / dy_T^2) = 0 \text{ или } d^2 \theta / dx_T^2 + d^2 \theta / dy_T^2 = 0 ; \quad (3.48)$$

$$\Delta U_0 / l_{30}^2 (d^2 U / dx_3^2 + d^2 U / dy_3^2) = 0 \text{ или } d^2 U / dx_3^2 + d^2 U / dy_3^2 = 0 . \quad (3.49)$$

Тождественность приведенных уравнений имеет место при любом выборе сходственных масштабов для температуры и электропотенциала.

Граничные условия в безразмерном виде имеют вид:

$$\text{grad } \theta = \theta / L_T ; \quad - \text{grad } U = U / L_3 .$$

Уравнения тождественно одинаковы. Следовательно, решения безразмерных дифференциальных уравнений теплопроводности и электропроводности тождественно одинаковы при выполнении условия:

$$L_T = L_{эл} \text{ или } l_T / l_{T0} = l_3 / l_{30} . \quad (3.50)$$

Поскольку $l_T = \lambda/\alpha$, то получим зависимость для выбора линейных размеров электрических моделей явления: $l_3 = (l_{30}/l_{T0}) \lambda/\alpha$.

При $l_{30} = l_{T0}$, $l_3 = \lambda/\alpha$.

При $\alpha = const$ и $\lambda = const$, тогда $l_3 = const$.

При выполнении условия (3.50) безразмерная температура и безразмерное электрическое напряжение в сходственных точках систем имеют численно одинаковые значения: $\theta_1 = U_1$ или $\Delta t_1/\Delta t_0 = \Delta U_1/\Delta U_0$;

$$\theta_2 = U_2 \text{ или } \Delta t_2/\Delta t_0 = \Delta U_2/\Delta U_0.$$

.....

$$\text{Тогда } \Delta t_1/\Delta U_1 = \Delta t_2/\Delta U_2 = \dots = \Delta t_0/\Delta U_0 = C_{T,3} = const. \quad (3.51)$$

Соотношение (3.51) показывает, что при заданных условиях распределение температуры и электрического потенциала является подобным.

Изменение теплового потока пропорционально изменению теплоемкости и температуры: $dQ = C_T (\partial t/\partial \tau_T) d\tau_T$.

Изменение электрического тока пропорционально емкости и изменению напряжения: $dI = C_3 (\partial U/\partial \tau_3) d\tau_3$ – подобное уравнение.

В моделях теплоемкости заменяются соответствующими электрическими емкостями.

При разработке электрических моделей, имитирующих процессы теплопроводности, применяются два способа. В первом способе (рис. 3.7) электрические модели повторяют геометрию тепловой системы и изготавливаются из материала с непрерывной проводимостью: тонкие листовые электропроводящие материалы или слои, нанесенные на пластинки, или жидкие электролиты. Во втором способе (рис. 3.8) применяются электрические модели с сосредоточенными параметрами процесса. В них тепловые системы заменяются моделирующими электрическими цепями. Свойства исследуемой системы сосредотачиваются в отдельных узловых точках, расположенных вдоль электрических цепей.

Таким образом исследуются распределения температурных полей внутри здания; внутри турбинных лопаток, котлоагрегатах и т. д.

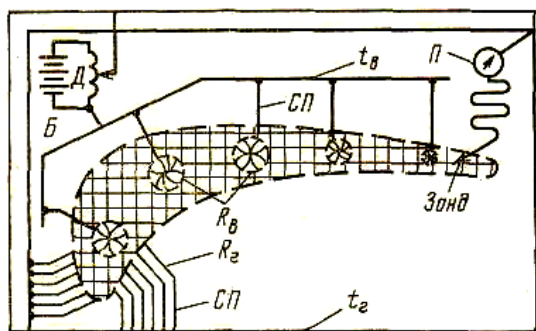


Рисунок 3.7 – Проволочная модель турбинной лопатки

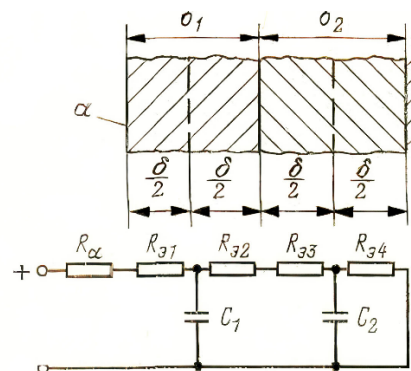


Рисунок 3.8 – Электрическая модель двухслойной плоской стенки

3.5. Примеры с решениями

Пример 3.5.1. Картонный лист толщиной $2\delta = 2$ мм после сушки в картоноделательной машине с температурой $t_0 = 140$ °C помещен в цеху, где омывается воздухом с температурой $t_B = 20$ °C.

Определить температуры в середине и на поверхности листа через $\tau = 30$ мин после начала охлаждения.

Коэффициент теплопроводности картона $\lambda = 0,2 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{град}}$, коэффициент

теплоотдачи от поверхности картона к окружающему воздуху $\alpha = 35 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{град}}$.

Плотность картона $\rho = 350 \text{ кг/м}^3$, теплоемкость картона $c = 1,5 \frac{\text{кДж}}{(\text{кг} \cdot \text{град})}$.

Рассчитываем коэффициент температуропроводности:

$$a = \frac{\lambda}{\rho \cdot c} = \frac{0,2}{350 \cdot 1500} = 0,381 \cdot 10^{-6} \frac{\text{м}^2}{\text{с}}.$$

$$\text{Находим } Bi = \frac{35 \cdot 0,001}{0,2} = 0,175, \quad Fo = \frac{0,381 \cdot 10^{-6} \cdot 1800}{(0,002)^2} = 171.$$

Температуры в середине и на поверхности картона при его охлаждении в среде с постоянной температурой определяем с помощью графика $\theta_{x=0} = f_1(Bi, Fo)$, представленного на рисунке 3.3, и графика $\theta_{x=\delta} = f_2(Bi, Fo)$, на рисунке 3.4, — $\theta_{x=0} = 0,01$; $\theta_{x=\delta} = 0,01$. В условиях охлаждения листа картона для безразмерной температуры справедливо

$$\theta = \frac{t - t_B}{t_0 - t_B}.$$

Тогда температуры в середине и на поверхности листа:

$$t_{x=0} = t_B + \theta_{x=0}(t_0 - t_B) = 20 + 0,01(140 - 20) = 21,2 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

Пример 3.5.2. Стальной брусок с размерами граней 100; 300 и 600 мм и температурой $t_0 = 10$ °C помещен в муфельную печь, где температура ее объема составляет 1600 °C.

Определить температуру в центре бруска через два часа после загрузки его в печь, если коэффициенты теплопроводности и температуропроводности стали равны соответственно:

$\lambda = 18 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{град}}$ и $a = 3,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, а коэффициент

теплоотдачи на поверхности бруска составляет:

$$\alpha = 200 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{град}}.$$

Безразмерная температура бруска определяется как произведение безразмерных температур трех безграничных пластин, пересечением которых определяется тело бруска. Тогда

$$\theta_{\text{ц}} = \frac{t_{\text{ж}} - t_{\text{ц}}}{t_{\text{ж}} - t_0} = \theta_{x=0} \cdot \theta_{y=0} \cdot \theta_{z=0} .$$

Температуры пластин $\theta_{x=0}$, $\theta_{y=0}$, $\theta_{z=0}$ находятся по графику на рисунке 3.3 зависимости температуры середины безграничной пластины от критериев Bi и Fo .

$$\text{Для пластины толщиной } 2\delta_x = 100 \text{ мм, } Fo_x = \frac{3,5 \cdot 10^{-6} \cdot 7200}{(0,05)^2} = 10,1,$$

$$Bi_x = \frac{200 \cdot 0,05}{18} = 0,55 .$$

По графику на рисунке 3.4 определяем $\theta_x = 0,016$.

$$\text{Для пластины толщиной } 2\delta_y = 300 \text{ мм, } Fo_y = \frac{3,5 \cdot 10^{-6} \cdot 7200}{(0,15)^2} = 1,12,$$

$$Bi_y = \frac{200 \cdot 0,15}{18} = 1,7, \quad \theta_y = 0,3 .$$

$$\text{Для пластины толщиной } 2\delta_z = 600 \text{ мм, } Fo_z = \frac{3,5 \cdot 10^{-6} \cdot 7200}{(0,3)^2} = 0,28 ,$$

$$Bi_z = \frac{200 \cdot 0,3}{18} = 3,3, \quad \theta_z = 0,7 .$$

Следовательно, $\frac{t_{\text{ж}} - t_{\text{ц}}}{t_{\text{ж}} - t_0} = 0,016 \cdot 0,3 \cdot 0,7 = 0,00336$ и температура в центре

бруска: $t_{\text{ц}} = t_{\text{ж}} - 0,00336(t_{\text{ж}} - t_0) = 1600 - 0,00336(1600 - 10) = 1594,5 \text{ } ^\circ\text{C}$.

Пример 3.5.3. Внутренняя часть реактора выполнена из кислотостойкого материала. Внешняя часть представляет собой тепловую изоляцию. Коэффициент теплопроводности кислотостойкого слоя толщиной $\delta = 250$ мм составляет: $\lambda = 1,86 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{град}}$, а коэффициент температуропроводности

$a = 3,8 \cdot 10^{-7} \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$. Температура реактора равна $t_0 = 40 \text{ } ^\circ\text{C}$. Рассчитать температуру внутренней и внешней поверхности реактора через 10 часов после принятия реактором раствора с температурой $300 \text{ } ^\circ\text{C}$. Коэффициент теплоотдачи от раствора к стенке реактора $\alpha = 350 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{град}}$.

$$Fo = \frac{3,8 \cdot 10^{-7} \cdot 3600 \cdot 12}{(0,25)^2} = 0,263, \quad Bi = \frac{350 \cdot 0,25}{1,86} = 47,0 .$$

Так как $Fo > 0,25$, то установился регулярный режим и можно ограничиться первым членом ряда $\theta = N \cdot \exp(-\varepsilon_1^2 Fo) \cos\left(\varepsilon_1 \frac{x}{\delta}\right)$. Значения величин N , P , ε_1 и ε_1^2 в зависимости от Bi приведены в таблицах приложений [3]. В рассматриваемом случае при $Bi = 47,0$ из таблицы находим: $N = 1,272$, $P = 0,043$,

$\varepsilon_1^2 = 2,364$. Тогда безразмерные температуры на внешней ($x=0$) и внутренней ($x=1$) поверхностях будут соответственно равны:

$$\theta_{x=0} = N \cdot \exp(-\varepsilon_1^2 Fo) = 1,272 \cdot \exp(-2,364 \cdot 0,263) = 0,682,$$

$$\theta_{x=1} = P \cdot \exp(-\varepsilon_1^2 Fo) = 0,043 \cdot \exp(-2,364 \cdot 0,263) = 0,023.$$

Температура на внутренней поверхности реактора:

$$t_{x=\delta} = 300 - 0,023 \cdot (300 - 40) = 294 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

Температура на внешней поверхности реактора:

$$t_{x=0} = 300 - 0,682(300 - 40) = 123 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

Пример 3.5.4. Водяной экономайзер котлоагрегата изготовлен из круглых ребристых чугунных труб, наружным диаметром $d=76$ мм, диаметр ребер $D = 200$ мм, толщиной $\delta = 5$ мм. Определить количество теплоты, которое будет передаваться от горячих газов с температурой $t = 400$ $^\circ\text{C}$ к внешней поверхности трубы, температуру на конце ребра, если температура у основания ребер $t_0=180$ $^\circ\text{C}$. Длина обогреваемой части трубы $l = 3$ м, количество ребер по длине трубы $n = 150$. Коэффициент теплоотдачи от газов к ребристой поверхности $\alpha = 46 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{град}}$, коэффициент теплопроводности чугуна

$$\lambda = 52 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{град}}.$$

Количество теплоты, передаваемое от горячих газов к внешней поверхности трубы, пренебрегая теплоотдачей с торца ребра, и температуру на конце ребра, определяем с помощью графиков и таблиц [4].

$$\text{Согласно (2.57)} \quad m = \sqrt{\frac{\alpha \cdot U}{\lambda \cdot f}} \approx \sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda \cdot \delta}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 46}{52 \cdot 0,005}} = 18,8 \text{ 1/м};$$

$$r_1 = d/2 = 76/2 = 38 \text{ мм}; \quad r_2 = D_p/2 = 200/2 = 100 \text{ мм};$$

$$m \cdot r_1 = 18,8 \cdot 0,038 = 0,714; \quad m \cdot r_2' = 18,8 \cdot 0,1025 = 1,93.$$

Здесь теплоотдача с торца ребра приближенно учтена увеличением r_2 на половину толщины ребра: $r_2' = r_2 + \delta/2 = 0,1 + 0,0025 = 0,1025$.

Подставив значения $m \cdot r_1$ и $m \cdot r_2'$ в выражение для избыточной температуры конца ребра, получим:

$$\vartheta_2 = \vartheta_1 \frac{I_0(1,93)K_1(1,93) + I_1(1,93)K_0(1,93)}{I_0(0,714)K_1(1,93) + I_1(1,93)K_0(0,714)} =$$

$$= (400 - 180) \frac{0,2644 \cdot 0,128 + 1,491 \cdot 0,1245}{1,1319 \cdot 0,128 + 1,491 \cdot 0,65} = 43,3 \text{ } ^\circ\text{C},$$

где значения функций Бесселя берутся из приложений [4].

Температура конца ребра:

$$t_1 = t_\infty - \vartheta_2 = 400 - 43,3 = 356,7 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

Определяем количество теплоты, воспринимаемого одним ребром:

$$\psi = \frac{I_1(1,93)K_1(0,714) - I_1(0,714)K_1(1,93)}{I_0(0,714)K_1(1,93) + I_1(1,93)K_0(0,714)} = \frac{1,4910 \cdot 1,024 - 0,3804 \cdot 0,154}{1,1319 \cdot 0,128 + 1,491 \cdot 0,65} = 1,318.$$

$$Q_p = 2 \cdot 3,14 \cdot 0,038 \cdot 52 \cdot 0,005 \cdot 18,8 \cdot 220 \cdot 1,318 = 338,2 \text{ Вт}.$$

Для 150 ребер $Q_{\Sigma p} = 150 \cdot 338,2 = 50730 \text{ Вт}.$

Количество теплоты, отдаваемое гладкой поверхностью между ребрами:

$$Q_c = \alpha \cdot \vartheta_1 \cdot 2\pi \cdot r_1 (l - n \cdot \delta) = 46 \cdot 220 \cdot 2 \cdot 3,14 \cdot 0,038 (3 - 150 \cdot 0,005) = 5434 \text{ Вт.}$$

Общее количество передаваемой теплоты:

$$Q_{p.c.} = Q_{\Sigma p} + Q_c = 50730 + 5434 = 56164 \text{ Вт.}$$

Данную задачу можно решить по упрощенной методике, воспользовавшись зависимостью для круглых ребер.

Определим высоту прямого ребра:

$$h = r_2 - r_1 + \frac{\delta}{2} = 100 - 38 + \frac{5}{2} = 64,5 \text{ мм.}$$

Находим произведение mh , $m = 18,81 \text{ 1/м}$ – по результатам предыдущего решения. $mh = 18,81 \cdot 0,0645 = 1,21$.

Находим отношения избыточных температур на вершине и у основания ребра:

$$\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1} = \frac{1}{ch(mh)} = \frac{1}{ch(1,21)} = 0,54.$$

Определяем отношения наружных радиусов ребра и трубы: $\frac{r_2}{r_1} = \frac{100}{38} = 2,64$.

Зная отношения $\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1}$ и $\frac{r_2}{r_1}$, находим поправочный коэффициент $\varepsilon'' = 0,84$. Он представляет собой отношение расходов теплоты с единицы поверхностей круглого и прямого ребер одинаковой толщины:

$$\varepsilon'' = \frac{q_{pl}}{q} = \frac{F_{pl}}{F} \cdot \frac{Q}{Q_{pl}}.$$

Количество теплоты, воспринимаемого прямым ребром длиной $l = 1 \text{ м}$, сечением $f = \delta \cdot l = 0,005 \cdot 1 = 0,005 \text{ м}^2$,

$$Q = \lambda \cdot m \cdot f \cdot \vartheta_1 \cdot th(mh) = 52 \cdot 18,8 \cdot 1 \cdot 0,005 \cdot 220 \cdot th(1,21) = 978 \text{ Вт.}$$

Поверхность ребра составит: $F = 2h \cdot l = 2 \cdot 0,0645 \cdot 1 = 0,129 \text{ м}^2$.

Плотность теплового потока: $q = \frac{Q}{F} = \frac{978}{0,129} = 7581 \text{ Вт/м}^2$.

Поверхность круглого ребра составит:

$$F_{pl} = 2\pi \left(\frac{D}{2} \right)^2 - \left(\frac{d}{2} \right)^2 = 2 \cdot 3,14 (0,1^2 - 0,038^2) = 0,0537 \text{ м}^2.$$

Количество теплоты, воспринимаемое круглым ребром:

$$Q_{pl} = \varepsilon'' \cdot q \cdot F_{pl} = 0,84 \cdot 7581 \cdot 0,0537 = 341 \text{ Вт.}$$

4. КОНВЕКТИВНЫЙ ТЕПЛООБМЕН В ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Теплообмен между движущейся средой и поверхностью твердого тела называется конвективным теплообменом или теплоотдачей. Конвекция возможна только в движущейся среде. Под конвекцией теплоты понимают процесс переноса теплоты при перемещении объемов жидкости и газа в пространстве, имеющим разные температуры в отдельных его частях. При этом перенос теплоты неразрывно связан с переносом самой среды.

В качестве теплоносителей в технике применяются разнообразные вещества: воздух, вода, масла, нефть, спирты, ртуть, расплавленные металлы и др. Особенности жидкости как теплоносителя определяются ее физическими свойствами.

4.1. Основные физические свойства жидкости

В зависимости от физических свойств жидкостей, являющихся функцией параметров состояния, процесс теплообмена может протекать различно. Большое влияние оказывают коэффициент теплопроводности λ , удельная теплоемкость C_p , плотность ρ , коэффициент температуропроводности a , встречавшиеся ранее в разделе теплопроводности.

Все жидкости обладают вязкостью. При движении жидкости возникает сила трения, противодействующая движению $S = \mu \frac{dw}{dn}$. Эта сила определяется динамическим коэффициентом вязкости μ [Па·с]. При $\frac{dw}{dn} = 1 \Rightarrow S = \mu$. В теплотехнике часто пользуются кинематическим коэффициентом вязкости $\nu = \frac{\mu}{\rho}$, [м²/с]. У капельных жидкостей вязкость слабо зависит от давления, но резко уменьшается с повышением температуры. У газов вязкость увеличивается как с повышением давления, так и температуры.

На теплоотдачу оказывает влияние сжимаемость жидкости или коэффициент сжатия тела: $\varepsilon = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_t$, [1/Па]. (4.1)

Изотермической сжимаемостью при постоянной температуре называют величину, представляющую собой относительное изменение плотности вещества при изменении давления. Для капельных жидкостей сжимаемостью можно пренебречь, но для газов он в 20000 раз выше, чем у жидкостей. Если скорость газа менее 1/4 скорости звука, то к нему можно применять законы несжимаемой жидкости.

Имеет значение для теплообмена тепловое расширение жидкости, которое оценивается температурным коэффициентом объемного расширения:

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_p, [1/^\circ\text{K}], \quad (4.2)$$

представляющее собой относительное изменение объема при изменении температуры на один градус. Для жидкостей β мал. Для воды при температуре $t > 4$ °C β может быть отрицательным. Для идеального газа $\beta = 1/T$.

4.2. Дифференциальные уравнения конвективного теплообмена

Для описания полей температур, скоростей и определения плотности теплового потока необходимо иметь соответствующий математический аппарат.

4.2.1. Уравнение энергии

Рассмотрим однородную и изотропную жидкость. Пусть ее физические параметры будут постоянны, а энергия деформации мала по сравнению с изменением внутренней энергии. Выделим в потоке жидкости неподвижный относительно координат элементарный параллелепипед с ребрами dx , dy и dz , представленный на рисунке 4.1.

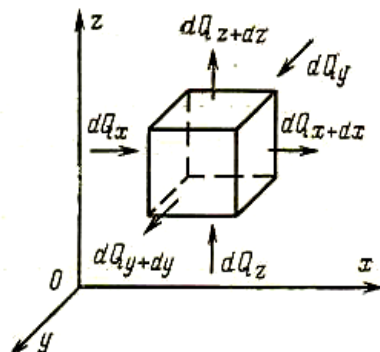


Рисунок 4.1 – Параллелепипед
в потоке жидкости

Теплота через грани параллелепипеда переносится теплопроводностью и конвекцией, а также может выделяться внутренними источниками.

Вывод уравнения энергии, соответствующего принятым условиям, рассматривался ранее при выводе уравнения теплопроводности:

$$\rho \frac{\partial i}{\partial \tau} = -\text{div} \bar{q} + q_v, \quad (4.3)$$

где $\text{div} \bar{q} = \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}$; ρ – плотность жидкости. У капельных жидкостей она слабо зависит от температуры. У газов плотность с повышением температуры значительно уменьшается.

Поскольку конвекция теплоты всегда сопровождается теплопроводностью, так как при движении жидкости или газа происходит соприкосновение частиц с различными температурами, то конвективный теплообмен можно рассчитать по уравнению: $\bar{q} = q_{\text{тпр}} + q_{\text{конв}} = -\lambda \nabla t + \rho \cdot w \cdot i$. (4.4)

Согласно (4.4) проекции плотности теплового потока q на координатные оси Q_x, Q_y, Q_z : $q_x = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x} + \rho \cdot w_x \cdot i$; $q_y = -\lambda \frac{\partial t}{\partial y} + \rho \cdot w_y \cdot i$; $q_z = -\lambda \frac{\partial t}{\partial z} + \rho \cdot w_z \cdot i$.

Подставив проекции в (4.3), получим:

$$\rho \frac{\partial i}{\partial \tau} = \lambda \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) - \rho \left(w_x \frac{\partial i}{\partial x} + w_y \frac{\partial i}{\partial y} + w_z \frac{\partial i}{\partial z} \right) - \rho \cdot i \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) + q_v.$$

Для несжимаемых жидкостей ($\rho = \text{const}$): $\text{div} w = \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0$.

Тогда $\frac{\partial i}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial i}{\partial x} + w_y \frac{\partial i}{\partial y} + w_z \frac{\partial i}{\partial z} = \frac{\lambda}{\rho} \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) + \frac{q_v}{\rho}$.

Так как $i = \int C_p \cdot dt$, то

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} + w_z \frac{\partial t}{\partial z} = a \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) + \frac{q_v}{\rho \cdot C_p}. \quad (4.5)$$

Уравнение (4.5) является уравнением энергии. Многочлен в левой части этого уравнения – полная производная от температуры по времени:

$$\frac{Dt}{d\tau} = \frac{\partial t}{\partial \tau} + \frac{\partial t}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial t}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \tau} + \frac{\partial t}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \tau}, \quad \text{где } \frac{\partial t}{\partial \tau} \text{ – локальная производная по } t;$$

$$w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} + w_z \frac{\partial t}{\partial z} \text{ – характеризует изменение температуры по потоку, т. е.}$$

это конвективная производная по t .

Пользуясь обозначением оператора Лапласа, уравнение (4.5) запишем в виде:

$$\frac{Dt}{d\tau} = a\nabla^2 t + \frac{q_v}{\rho \cdot C_p}.$$

При $w_x = w_y = w_z = 0$ уравнение (4.5) превращается в уравнение теплопроводности. Как видно, температурное поле в движущейся жидкости зависит от скорости. Поэтому в систему, описывающую процесс конвективного теплообмена, необходимо добавить уравнение движения.

4.2.2. Уравнение движения

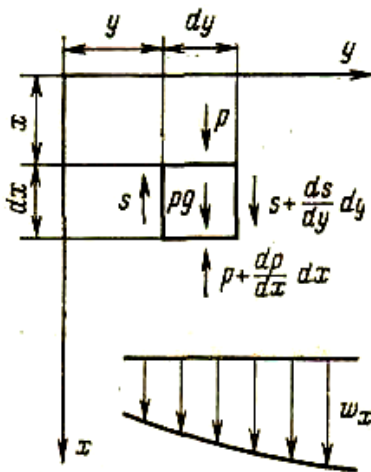


Рисунок 4.2 – Элементарный объем в потоке жидкости

Выделим в потоке жидкости элементарный объем с размерами ребер dx , dy и dz (рис. 4.2). Скорость потока изменяется только в направлении оси y . Вывод уравнения движения базируется на втором законе Ньютона: $F = m \cdot a$.

На элементарный объем действуют следующие силы: сила тяжести, равнодействующая сил давления и равнодействующая сил трения. Найдем проекции этих сил на ось OX .

1. Проекция силы тяжести на ось OX равна произведению проекции ускорения свободного падения g_x на массу элемента: $df_1 = \rho \cdot g_x \cdot dv$.

2. Так как на верхней грани элемента давление жидкости равно p , то на площадку $dy \cdot dz$ действует сила $p \cdot dy \cdot dz$. На нижней грани давление равно $p + \frac{dp}{dx} dx$. Сила, действующая на эту грань, определится как: $-\left(p + \frac{dp}{dx} dx\right) dy dz$.

Знак “ - ” указывает противоположность направления действия силы направлению движения потока. Тогда равнодействующая сил давления равна $df_2 = -\frac{dp}{dx} dv$.

3. Вследствие изменения скорости только в направлении оси OY , сила трения возникает на боковых гранях элементарного объема $dx \cdot dz$. Около левой грани скорость движения частиц жидкости меньше, чем в центре элемента. Поэтому на участке «у» сила трения направлена против движения и равна

$S \cdot dx \cdot dz$. У правой грани скорость частиц потока больше, чем в самом элементе. Поэтому на участке « $y+dy$ » сила трения направлена в сторону движения.

Равнодействующая сил трения $df_3 = \left(S + \frac{dS}{dy} dy \right) dx dz - S dx dz = \frac{dS}{dy} dy dv$.

Так как $S = \mu \left(\frac{dw_x}{dy} \right)$, то $df_3 = \mu \frac{d^2 w_x}{dy^2} dv$.

Проекция на ось OX , равнодействующих всех сил, приложенных к объему, определяется как сумма df_1, df_2, df_3 : $df = \left(\rho g_x - \frac{dp}{dx} + \mu \frac{d^2 w_x}{dy^2} \right) dv$. (а)

Согласно второму закону механики, эта равнодействующая сила, учитывающая силы инерции, равна: $df = \rho \frac{dw_x}{d\tau} dv$. (в)

Тогда $\rho \frac{dw_x}{d\tau} = \rho g_x - \frac{dp}{dx} + \mu \frac{d^2 w_x}{dy^2}$.

В случае трехмерного движения несжимаемой жидкости с постоянными физическими параметрами скоростное поле описывается системой уравнений движения в проекциях на оси OX , OY и OZ :

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{dw_x}{d\tau} &= \rho g_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial z^2} \right) \\ \rho \frac{dw_y}{d\tau} &= \rho g_y - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial z^2} \right) \\ \rho \frac{dw_z}{d\tau} &= \rho g_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \right\} \cdot \quad (4.6)$$

Уравнения системы (4.6) называются уравнениями Навье-Стокса. Поскольку составляющие скорости w_x, w_y, w_z изменяются во времени и пространстве, то член левой части уравнений (4.6) должен представлять собой полную производную от скорости по времени:

$$\frac{Dw_x}{d\tau} = \frac{\partial w_x}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_x}{\partial z} \quad (4.7)$$

Аналогично для других осей.

В векторной форме уравнения системы (4.6) запишутся как:

$$\rho \frac{D\bar{w}}{d\tau} = \rho \bar{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \bar{w} \quad (4.8)$$

Известно, что $\rho = \rho_0(1 - \beta \cdot \vartheta)$, где β – коэффициент объемного расширения; $\vartheta = t - t_0$; t_0 – фиксированная температура. Тогда уравнение движения можем записать в виде: $\frac{D\bar{w}}{d\tau} = -\bar{g} \cdot \beta \cdot \vartheta - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \cdot \nabla^2 \bar{w}$. (4.9)

Так как в систему уравнений, описывающих процесс теплообмена, вошла неизвестная величина ΔP – давление, то система оказалась незамкнутой. Поэтому необходимо добавить уравнение сплошности.

4.2.3. Уравнение сплошности

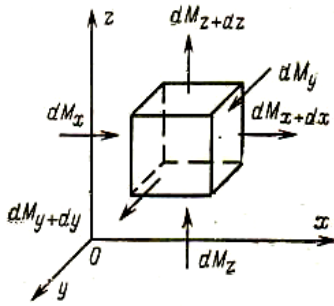


Рисунок 4.3 – Параллелепипед в потоке неподвижной жидкости

Выделим в потоке движущейся жидкости неподвижный параллелепипед со сторонами dx , dy и dz (рис. 4.3). Подсчитаем массу жидкости, протекающей через него в направлении осей OX , OY , OZ за время $d\tau$. В направлении оси OX в объем жидкости втекает масса

$$dM_x = \rho \cdot w_x \cdot dy \cdot dz \cdot d\tau, \quad (a)$$

где $\rho \cdot w_x$ – количество массы, протекающей в единицу времени через единицу грани $dy \cdot dz$.

Из противоположной грани вытекает количество жидкости $dM_{x+dx} = \rho \cdot w_{x+dx} \cdot dy \cdot dz \cdot d\tau$. Взяв два первых члена ряда разложения, получим, что масса жидкости dM_{x+dx} , вытекающая из объема в направлении оси OX :

$$dM_{x+dx} = \left[\rho w_x + \frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x} dx \right] dy dz d\tau. \quad (б)$$

Вычтем (а) из (б). Получим излишек массы жидкости, вытекающей из объема в направлении оси OX :

$$dM_{x+dx} - dM_x = \frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x} dv d\tau. \quad (в)$$

Аналогично по направлениям OY и OZ :

$$dM_{y+dy} - dM_y = \frac{\partial(\rho \cdot w_y)}{\partial y} dv \cdot d\tau ; \quad (г)$$

$$dM_{z+dz} - dM_z = \frac{\partial(\rho \cdot w_z)}{\partial z} dv \cdot d\tau . \quad (д)$$

Суммируя (в), (г) и (д), получим полный избыток массы, вытекающей из объема. Он обусловлен изменением плотности жидкости в объеме dv и равен изменению массы объема во времени $\frac{\partial \rho}{\partial \tau} dv d\tau$. Сократив сумму на dv и $d\tau$ и перенося все члены в правую часть равенства, получим дифференциальное уравнение сплошности или неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w_z)}{\partial z} = 0 . \quad (4.10)$$

Для несжимаемых жидкостей при $\rho = const$:

$$\frac{\partial(w_x)}{\partial x} + \frac{\partial(w_y)}{\partial y} + \frac{\partial(w_z)}{\partial z} = 0 \quad (4.11)$$

или

$$div \vec{w} = 0. \quad (4.12)$$

4.3. Основы теории подобия и размерностей

Решение системы дифференциальных уравнений теплообмена средствами математического анализа связано с большими трудностями, иногда

непреодолимыми. Поэтому такие задачи решаются либо численными методами с применением ЭВМ, либо экспериментальным путем. Вследствие этого обобщение полученных решений ограничено. При изменении аргументов требуется новое решение. Преодолеть эти трудности позволяет теория подобия.

4.3.1. Условия однозначности

Для выделения конкретно рассматриваемого процесса из бесчисленного множества, описываемого полученными дифференциальными уравнениями, к ним необходимо добавить условия однозначности. Они состоят из:

- 1) геометрических условий;
- 2) физических условий;
- 3) временных или начальных условий;
- 4) граничных условий.

Система дифференциальных уравнений в совокупности с условиями однозначности представляет собой математическую формулировку краевой задачи, которая является основой теории подобия.

Пусть поверхность твердого тела размером l_0 омывается жидкостью с постоянными вдали от тела температурой t_0 и скоростью w_0 . Поверхность тела имеет температуру t_c ; $t_c > t_0$. Физические параметры жидкости постоянны. Процесс стационарный и описывается уравнениями энергии, движения и сплошности. Граничные условия процесса:

1) вдали от тела ($y=\infty$) - $\vartheta = \vartheta_0 = 0; w_x = w_0; w_y = 0; \vartheta = t - t_0$, где t – текущая температура жидкости;

2) на поверхности тела ($y = 0; 0 \leq X \leq l_0; -\infty \leq Z \leq +\infty$) -
 $\vartheta = \vartheta_c = t_c - t_0 = const; w_x = w_y = w_z = 0$.

Различают три вида величин:

- независимые переменные: координаты x, y ;
- зависимые переменные: v, w_x, w_y – определяются значениями независимых переменных при задании величин, входящих в условие однозначности;

- постоянные величины: $w_0, t_0, l_0, \nu, a, g, \beta, \dots$, – задаются условиями однозначности и не являются функцией независимых переменных.

Для приведения к безразмерному виду граничных условий выбираем масштабы приведения: l_0, w_0, ϑ_c .

Обозначим безразмерные величины:

$$X = \frac{x}{l_0}; Y = \frac{y}{l_0}; W_x = \frac{w_x}{w_0}; W_y = \frac{w_y}{w_0}; \theta = \frac{v}{\vartheta_c}.$$

Тогда граничные условия в безразмерном виде:

1) вдали от тела ($Y=\infty$) $\theta = \theta_0 = 0; W_x = 1; W_y = 0;$

2) на поверхности тела ($Y = 0; 0 \leq X \leq 1$); $\theta = \theta_c = 1; W_x = W_y = 0$.

Из граничных условий в безразмерном виде следует, что при w_0, t_c, t_0 , имеющих различные условные значения, безразмерные величины θ_0, θ_c, W имеют вполне конкретные значения.

4.3.2. Условия подобия и вывод ее основных критериев

Теория подобия – это учение о подобных явлениях. Как известно, геометрические фигуры одинаковой формы подобны, если соответственные углы равны и сходственные стороны пропорциональны.

Тогда
$$\frac{x''}{x'} = \frac{y''}{y'} = \frac{z''}{z'} = \frac{l''}{l'} = C_\ell,$$

где x, y, z, ℓ – координаты сходственных точек и сходственные отрезки. В этом случае C_ℓ – константа геометрического подобия.

Понятие подобия может быть распространено на любые физические явления. Однако физические явления могут рассматриваться как подобные, если они относятся к классу явлений одной и той же природы.

По этому признаку в физическом подобии выделяют:

- кинематически подобные процессы, если подобны движения потоков жидкости;
- динамическое подобие означает подобие силовых полей;
- тепловое подобие означает подобие температурных полей и тепловых потоков.

Обязательной предпосылкой физического подобия является геометрическое подобие. Сопоставлять можно только однородные величины (размерность которых и смысл одинаковы) в сходственных точках пространства и в сходственные моменты времени. Сходственными точками называются точки, удовлетворяющие условию геометрического подобия

$$\frac{l''}{l'} = C_\ell.$$

Тогда при кинематическом подобии имеем подобие полей скоростей и равенство

$$\frac{w''}{w'} = C_w.$$

При динамическом подобии – подобие полей давления:

$$\frac{p''}{p'} = C_p.$$

При тепловом – подобие температурных полей

$$\frac{t''}{t'} = C_t.$$

Значения констант подобия C показывают, во сколько раз физические величины одной системы отличаются от тех же величин другой. Константы

подобия C_w, C_p, C_t для подобных систем сохраняют одно и то же значение $C_w = idem; C_p = idem; C_t = idem$ в сходственные моменты времени. Два промежутка времени τ'', τ' называются сходственными, если они имеют общее начало отсчета и связаны равенством:

$$\frac{\tau''}{\tau'} = C_\tau = idem .$$

Рассмотрим подобие двух систем, описываемых уравнениями энергии, движения и теплообмена на границе с теплообменной поверхностью. Эти системы должны удовлетворять трем условиям подобия:

- подобные явления должны быть качественно одинаковы. То есть они должны иметь одинаковую физическую природу, относиться к одному и тому же роду и описываться одинаковыми по форме записи дифференциальными уравнениями, а величины, характеризующие подобие явлений, подобны, т. е. в сходственных точках и в сходственные моменты времени однородные величины φ'' одной системы и φ' другой системы пропорциональны – связаны константой подобия: $\varphi'' = C_\varphi \cdot \varphi'$;

- условия однозначности подобных процессов должны протекать в геометрически подобных системах и быть одинаковыми во всем, кроме числовых значений размерных постоянных, содержащихся в этих условиях;

- одноименные определяющие безразмерные переменные подобных процессов должны иметь одинаковое числовое значение.

Обозначим величины дифференциальных уравнений первой системы одним штрихом, второй – двумя штрихами. Первая система будет состоять из

уравнения энергии:

$$\frac{\partial t'}{\partial \tau'} + w'_x \frac{\partial t'}{\partial x'} + w'_y \frac{\partial t'}{\partial y'} + w'_z \frac{\partial t'}{\partial z'} = a' \cdot \nabla^2 t' + \frac{q'_v}{c'_p \cdot \rho'};$$

уравнения движения :

$$\frac{\partial w'_x}{\partial \tau'} + w'_x \frac{\partial w'_x}{\partial x'} + w'_y \frac{\partial w'_x}{\partial y'} + w'_z \frac{\partial w'_x}{\partial z'} = g'_x \cdot \beta' \cdot \vartheta' - \frac{1}{\rho'} \frac{\partial P'}{\partial x'} + \nu' \cdot \nabla^2 w'_x; \quad (a)$$

уравнения теплообмена :

$$\alpha' \cdot \Delta t' = -\lambda' \frac{\partial t'}{\partial x'} .$$

Вторая система будет состоять из уравнений:

$$\left. \begin{aligned}
\frac{\partial t''}{\partial \tau''} + w_x'' \frac{\partial t''}{\partial x''} + w_y'' \frac{\partial t''}{\partial y''} + w_z'' \frac{\partial t''}{\partial z''} &= a'' \cdot \nabla^2 t'' + \frac{q_v''}{c_p'' \cdot \rho''}; \\
\frac{\partial w_x''}{\partial \tau''} + w_x'' \frac{\partial w_x''}{\partial x''} + w_y'' \frac{\partial w_x''}{\partial y''} + w_z'' \frac{\partial w_x''}{\partial z''} &= g_x'' \cdot \beta'' \cdot \vartheta'' - \frac{1}{\rho''} \frac{\partial P''}{\partial x''} + \nu'' \cdot \nabla^2 w_x''; \\
\alpha'' \cdot \Delta t'' &= -\lambda'' \frac{\partial t''}{\partial x''}.
\end{aligned} \right\} (6)$$

В соответствии со вторым условием подобия однородные величины должны быть подобны, т. е.

$$t''/t' = C_b, \quad \tau''/\tau' = C_\tau, \quad \omega''/\omega' = C_\omega, \quad l''/l' = C_l, \quad a''/a' = C_a, \quad \beta''/\beta' = C_\beta, \\
\rho''/\rho' = C_\rho, \quad \rho''/\rho' = C_\rho, \quad \nu''/\nu' = C_\nu, \quad \lambda''/\lambda' = C_\lambda, \quad \text{и т. д.}$$

Выразим переменные второй системы через переменные первой и подставим в уравнения второй системы. Тогда

$$\left. \begin{aligned}
\frac{C_t}{C_\tau} \frac{\partial t'}{\partial \tau'} + \frac{C_w \cdot C_t}{C_\ell} \left(w_x' \frac{\partial t'}{\partial x'} + w_y' \frac{\partial t'}{\partial y'} + w_z' \frac{\partial t'}{\partial z'} \right) &= \frac{C_a \cdot C_t}{C_\ell^2} a' \nabla^2 t' + \frac{C_q}{C_\rho \cdot C_c} \frac{q_v'}{C_p' \cdot \rho'}; \\
\frac{C_w}{C_\tau} \frac{\partial w'}{\partial \tau'} + \frac{C_w^2}{C_\ell} \left(w_x' \frac{\partial w_x'}{\partial x'} + w_y' \frac{\partial w_x'}{\partial y'} + w_z' \frac{\partial w_x'}{\partial z'} \right) &= C_g \cdot C_\beta \cdot C_{\Delta t} \cdot g_x' \cdot \rho' \cdot \Delta t' - \\
-\frac{C_p}{C_\rho \cdot C_\ell} \frac{1}{\rho'} \frac{\partial P'}{\partial x'} + \frac{C_\nu \cdot C_w}{C_\ell^2} \nu' \cdot \nabla^2 w'; \\
C_\alpha \cdot C_t \cdot \alpha' \cdot \Delta t' &= C_\lambda \frac{C_t}{C_\ell} \left(-\lambda \frac{\partial t'}{\partial x'} \right).
\end{aligned} \right\} (B)$$

Для подобных систем уравнения должны быть тождественны. На этом основании уравнения системы (а) должны быть тождественны уравнениям системы (в).

Для этого необходимо, чтобы комплексы из констант подобия в уравнениях (в) сократились, т. е. должны быть равенства:

$$\frac{C_t}{C_\tau} = \frac{C_w \cdot C_t}{C_\ell} = \frac{C_a \cdot C_t}{C_\ell^2} = \frac{C_q}{C_\rho \cdot C_c}; \quad (4.13)$$

$$\frac{C_w}{C_\tau} = \frac{C_w^2}{C_\ell} = C_g \cdot C_\beta \cdot C_{\Delta t} = \frac{C_p}{C_\rho \cdot C_\ell} = \frac{C_\nu \cdot C_w}{C_\ell^2}; \quad (4.14)$$

$$C_\alpha \cdot C_t = C_\lambda \frac{C_t}{C_\ell}. \quad (4.15)$$

Уравнения (4.13) ÷ (4.15) – есть искомые условия подобия, которыми ограничивается произвольный выбор констант подобия.

Рассматривая члены соотношения (4.13) попарно, получим:

$$\frac{C_t}{C_\tau} = \frac{C_a \cdot C_t}{C_\ell^2} \text{ или } \frac{C_a \cdot C_\tau}{C_\ell^2} = 1. \quad (4.16)$$

$$\frac{C_w \cdot C_t}{C_\ell} = \frac{C_a \cdot C_t}{C_\ell^2} \text{ или } \frac{C_w \cdot C_\ell}{C_a} = 1. \quad (4.17)$$

$$\frac{C_a \cdot C_t}{C_\ell^2} = \frac{C_q}{C_\rho \cdot C_c} \text{ или } \frac{C_q \cdot C_\ell^2}{C_a \cdot C_t \cdot C_\rho \cdot C_c} = 1. \quad (4.18)$$

Из соотношения (4.14):

$$\frac{C_w}{C_\tau} = \frac{C_w^2}{C_\ell} \text{ или } \frac{C_w \cdot C_\tau}{C_\ell} = 1. \quad (4.19)$$

$$\frac{C_w^2}{C_\ell} = C_g \cdot C_\beta \cdot C_{\Delta t} \text{ или } \frac{C_g \cdot C_\beta \cdot C_{\Delta t} \cdot C_\ell}{C_w^2}. \quad (4.20)$$

$$\frac{C_w^2}{C_\ell} = \frac{C_p}{C_\rho \cdot C_\ell} \text{ или } \frac{C_p}{C_w^2 \cdot C_\rho} = 1. \quad (4.21)$$

$$\frac{C_w^2}{C_\ell} = \frac{C_v \cdot C_w}{C_\ell^2} \text{ или } \frac{C_w \cdot C_\ell}{C_v} = 1. \quad (4.22)$$

Из соотношения (4.15)

$$C_\alpha \cdot C_t = C_\lambda \frac{C_t}{C_\ell} \text{ или } \frac{C_\alpha \cdot C_\ell}{C_\lambda} = 1. \quad (4.23)$$

Подставим в уравнения (4.16) ÷ (4.23) значения констант подобия, величины сгруппируем по индексам и получим условия подобия двух систем в новом выражении:

$\frac{a \cdot \tau}{\ell^2} = Fo = idem$ – критерий Фурье, характеризует связь между скоростью изменения температурного поля, физическими свойствами и размерами тела;

$\frac{w \cdot \ell}{a} = Pe = idem$ – критерий Пекле, является мерой отношения конвективного и молекулярного переносов теплоты в потоке.

$\frac{w \cdot \tau}{\ell} = Ho = idem$ – критерий гомохронности, характеризует скорость изменения поля скоростей при течении среды во времени.

$\frac{\Delta P}{\rho \cdot w^2} = Eu = idem$ – критерий Эйлера, характеризует подобие полей давления и является мерой отношения сил давления и инерционных сил.

$\frac{w \cdot \ell}{\nu} = Re = idem$ – критерий Рейнольдса, характеризует гидродинамический режим потока, являясь мерой отношения сил инерции и сил вязкого трения.

$\frac{\alpha \cdot \ell}{\lambda} = \frac{\alpha}{\lambda/\ell} = Nu = idem$ – критерий Нуссельта, характеризует интенсивность передачи теплоты конвекцией к интенсивности передачи теплоты теплопроводностью в слое толщиной l .

При делении $Pe/Re = \nu/a = Pr$ – критерий Прандтля, мера подобия температурных и скоростных полей в потоке.

Если (4.20) $\frac{g \cdot \beta \cdot \Delta t \cdot \ell}{w^2}$ умножить на $Re^2 \frac{g \cdot \beta \cdot \Delta t \cdot \ell^3}{\nu^2} = Gr$ – число Грасгофа, характеризует подъемную силу, возникающую в жидкости из-за разности плотностей.

Так как $\beta \cdot \Delta t = \frac{(\rho_0 - \rho)}{\rho_0}$, то можно записать более общую модификацию:

$$\frac{g \cdot \ell_0^3}{\nu^2} \left(\frac{\rho_0 - \rho}{\rho_0} \right) = Ar - \text{число Архимеда. Для однородной среды при}$$

$\beta = const$ Ar идентичен Gr .

Безразмерные величины $\theta, W_x, W_y, X, Y, Nu, Re, Pe, Gr...$ можно рассматривать как новые переменные. Их можно поделить на:

- независимые переменные – безразмерные координаты X, Y – соответствуют поверхности теплоотдачи;
- зависимые переменные – θ, W_x, W_y, Nu – определяются значениями независимых переменных;
- постоянные величины – Re, Pe, Gr ; они заданы условиями однозначности и для конкретной задачи постоянны. Можно написать:

$$Nu = f_1(X, Y, Pr, Re, Gr) = F_1(X, Y, Pr, Re, Gr);$$

$$\theta = f_2(X, Y, Pr, Re, Gr) = F_2(X, Y, Pr, Re, Gr);$$

$$W_x = f_3(X, Y, Pr, Re, Gr) = F_3(X, Y, Pr, Re, Gr);$$

$$W_y = f_4(X, Y, Pr, Re, Gr) = F_4(X, Y, Pr, Re, Gr);$$

Приведенные уравнения называются уравнениями подобия. На основании этих уравнений безразмерные переменные делятся на:

- определяемые – числа, в которые входят искомые зависимые переменные: $\alpha, \vartheta, w_x, w_y, \theta, W_x, W_y, Nu$;
- определяющие – числа, составленные из независимых переменных и постоянных величин, входящих в условия однозначности: X, Y, Pr, Re, Gr .

Основные положения теории подобия формулируются в виде трех теорем.

1. Подобные между собой явления имеют одинаковые критерии подобия. Теорема устанавливает связь между константами подобия и позволяет выявить критерии подобия: запись дифференциальных уравнений должна быть одинаковой.

2. Условия однозначности подобных процессов должны быть одинаковыми во всем, кроме числовых значений размерных постоянных, содержащихся в этих условиях: теорема позволяет сократить число переменных в задачах теплообмена.

Из 1 и 2 теорем следует, что подобные процессы должны описываться одинаковыми безразмерными дифференциальными уравнениями и безразмерными граничными условиями.

3. Подобны те явления, которые имеют подобные условия однозначности и одинаковые определяющие критерии.

Критерии, представляющие собой безразмерную форму условий однозначности, называются определяющими. Понятие «определяющий» не является свойством, присущим определенным критериям. Так в задачах конвективного теплообмена критерий Nu есть величина определяемая.

Для подобия необходимо, чтобы одноименные определяющие безразмерные переменные были численно равны.

4.3.3. Теория размерностей

Для получения замкнутой системы дифференциальных уравнений, описывающих то или иное явление, приходится с целью уменьшения числа переменных вводить комплексные переменные, как правило, безразмерные. Неправильное определение числа безразмерных переменных, актуальных для рассматриваемого процесса, может привести к серьезным ошибкам при описании экспериментальных данных в виде уравнений подобия.

Различают:

- первичные физические величины, которые непосредственно без связи с другими величинами характеризуют физическое явление (длина, время...);
- вторичные физические величины выражаются через первичные на основании физических законов (скорость). Физические величины характеризуются также числовыми значениями. Числовые значения первичных величин получают путем прямого измерения, вторичных – косвенным путем по

числовым значениям первичных величин.

Символическое выражение вторичной величины через первичные называется размерностью. Размерность можно представить в виде степенной формулы: $[\varphi] = L^{n_1} M^{n_2} T^{n_3} \theta^{n_4} I^{n_5} j^{n_6}$,

где $[\varphi]$ – произвольная единица измерения; n_i – действительные числа.

Число безразмерных переменных указывает π -теорема: физическое уравнение, содержащее $n \geq 2$ размерных величин, из которых $k \geq 1$ величин имеют независимую размерность (первичные величины), после приведения к безразмерному виду будет содержать $n - k$ безразмерных величин.

4.4. Теплоотдача при продольном омывании плоской поверхности

Пусть плоская поверхность омывается потоком несжимаемой жидкости. Скорость и температура жидкости постоянны и равны ω_0 и t_0 .

Поток направлен вдоль пластины, температура поверхности тела во времени не меняется. Внутренние источники теплоты в жидкости отсутствуют. Теплота трения пренебрежимо мала.

4.4.1. Условия прилипания

Из гидродинамики вязкой жидкости известно, что частицы жидкости, непосредственно прилегающие к твердому телу, адсорбируются или прилипают к его поверхности и их скорость становится равной нулю относительно поверхности тела. Этот слой «прилипшей» жидкости рассматривается как бесконечно тонкий слой. Скорость жидкости на стенке остается равной нулю до тех пор, пока она представляет собой сплошную среду. В газах, по мере увеличения разрежения, ослабляется взаимодействие газа со стенкой, и молекулы газа у стенки начинают проскальзывать.

Степень разрежения потока характеризуется числом Кнудсена: $K_n = \frac{\bar{\ell}}{\ell_0}$,

где $\bar{\ell}$ – средняя длина свободного пробега молекул газа; ℓ_0 – характерный размер твердого тела (диаметр).

При $\frac{\bar{\ell}}{\ell_0} > 0,001$ газ не рассматривается сплошной средой и условия прилипания нарушаются. Мы рассматриваем сплошные среды, где около пластины образуется тонкий слой заторможенной жидкости, в пределах которого скорость изменяется от нуля на поверхности тела до скорости невозмущенного потока вдали от поверхности. Этот слой заторможенной жидкости Л. Прандтль (1904 г.) назвал гидродинамическим пограничным слоем.

С увеличением расстояния x от передней кромки пластины (рис. 4.4) толщина пограничного слоя δ увеличивается, поскольку по мере движения

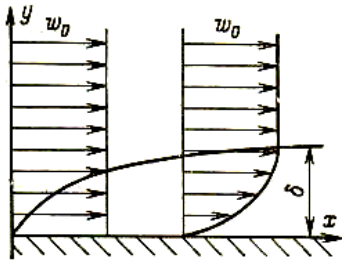


Рисунок 4.4 – Распределение скорости в пограничном слое

жидкости вдоль тела влияние вязкости распространяется в глубину невозмущенного потока. Течение жидкости внутри пограничного слоя определяется условием: $\frac{\partial \omega_x}{\partial y} \neq 0$; вне пограничного слоя и на его внешней границе: $\frac{\partial \omega_x}{\partial y} = 0$; $\omega_x = \omega_0$.

4.4.2. Гидродинамический пограничный слой

При омывании тела поток жидкости разделяют на две части: пограничный слой и внешний поток. Во внешнем потоке преобладают силы инерции. Вязкостные силы не проявляются. В пограничном слое силы вязкости и инерционные силы соизмеримы. Резкого перехода от пограничного слоя к течению жидкости вне слоя нет. Скорость в пограничном слое, по мере увеличения толщины потока, стремится к ω_0 . Под толщиной пограничного слоя δ подразумевают некоторое расстояние от стенки, на котором скорость будет отличаться от скорости потока вдали от тела на определенную заранее заданную малую величину.

Напишем систему дифференциальных уравнений, описывающих стационарное поле скоростей при омывании плоской пластины, бесконечной в направлении оси OZ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_x \frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial \omega_x}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 \omega_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{g} \frac{\partial P}{\partial x}; \end{array} \right. \quad (4.24)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_x \frac{\partial \omega_y}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial \omega_y}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 \omega_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_y}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{g} \frac{\partial P}{\partial y}; \end{array} \right. \quad (4.25)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \omega_y}{\partial y} = 0. \end{array} \right. \quad (4.26)$$

Ввиду малой толщины пограничного слоя примем, что поперек его давление не меняется:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0.$$

При постоянной скорости внешнего потока ω_0 , давление во внешнем потоке на основании уравнения Бернулли также не меняется:

$$P + \frac{g\omega_0^2}{2} = \text{const.}$$

Такое течение в гидродинамике называют безградиентным течением. Поскольку $\frac{\partial P}{\partial y} = 0$ – для пограничного слоя; $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$ – для внешнего потока, то по аналогии и для пограничного слоя

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0.$$

Для пограничного слоя уравнение (4.25) можно опустить, так как члены уравнения движения на ось OY малы по сравнению с членами уравнения (4.24). Поэтому для плоского безградиентного стационарного течения вязкой жидкости в пограничном слое у плоской поверхности можно записать:

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}; \quad (4.27)$$

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0. \quad (4.28)$$

Уравнение (4.27) можно записать в виде:

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial S}{\partial y},$$

где S – напряжение трения в плоскости, параллельной плоскости XZ .

4.4.3. Тепловой пограничный слой

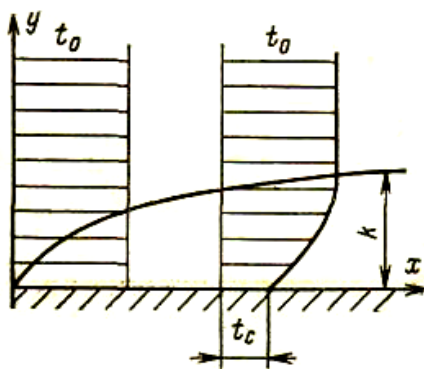


Рисунок 4.5 – Распределение температуры внутри теплового пограничного слоя

Тепловой пограничный слой (рис. 4.5) – это слой жидкости у стенки, в пределах которого температура изменяется от значения, равного температуре стенки, до значения температуры жидкости вдали от тела. Условие распределения температуры внутри теплового пограничного слоя

$$\frac{\partial t}{\partial y} \neq 0;$$

на внешней границе и вне границ теплового погран. слоя $\rightarrow \frac{\partial t}{\partial y} = 0; t = t_0$.

Толщины гидродинамического δ и теплового пограничных слоев K , как

правило, не совпадают. Это зависит от рода жидкости и параметров процесса ее течения и теплообмена. Ввиду малого K можно пренебречь теплопроводностью вдоль слоя по сравнению с поперечным переносом теплоты, т. е.

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = 0.$$

Тогда уравнение энергии примет вид:

$$w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} = a \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \quad (4.29)$$

Так как

$$q_y = -\lambda \left(\frac{\partial t}{\partial y} \right),$$

а

$$\frac{\partial q_y}{\partial y} = \lambda \left(\frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right),$$

то правую часть (4.29) можно записать в виде:

$$-\frac{1}{\rho \cdot C_p} \frac{\partial q_y}{\partial y}.$$

Чтобы замкнуть задачу к уравнению (4.29), добавим систему из уравнений (4.27) и (4.28).

4.4.4. Турбулентный перенос теплоты и количества движения

Имеются два основных режима течения: ламинарный и турбулентный. При ламинарном режиме частицы жидкости движутся без перемешивания, слоисто. При турбулентном – неупорядоченно, хаотически. Направление и значения скоростей отдельных частиц непрерывно меняются. Эти режимы течения наблюдаются и в пограничном слое. При малых значениях x течение в пограничном слое может быть ламинарным: уравнения (4.27–4.29). С увеличением x толщина пограничного слоя возрастает, слой делается неустойчивым и течение в пограничном слое становится турбулентным. Теплоотдача существенно зависит от режима течения, поскольку перенос теплоты при ламинарном течении определяется теплопроводностью.

При турбулентном течении мгновенная скорость частиц пульсирует около среднего во времени значения. Кроме того, дополнительно к изменению абсолютной величины w происходит еще и изменение направления мгновенной скорости. Отклонение мгновенной скорости w от средней во времени \bar{w} называют пульсациями скорости (пульсационные скорости): $w = \bar{w} + w'$, таким образом, турбулентное движение состоит как бы из регулярного течения, описываемого осредненными значениями скоростей, и из наложенного на него хаотического пульсационного течения.

При наличии в потоке температурного поля происходит перенос теплоты, из-за чего возникают пульсации температур. Аналогично обозначению

скоростей: $t = t' + \bar{t}$. Пульсации скорости и температуры приводят к пульсациям давления и физических свойств. Таким образом, турбулентное течение является квазистационарным процессом. Проведя определенные преобразования, выдвинув ряд гипотез, можно получить систему дифференциальных уравнений для осредненного турбулентного течения. Однако в строгой постановке этот вопрос не решен.

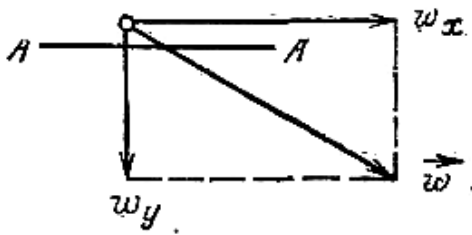


Рисунок 4.6 – Мгновенное значение скорости в плоском турбулентном потоке

Пусть в некоторый момент времени $\tau + d\tau$ скорость в некоторой точке турбулентного потока имеет свои компоненты w_x, w_y . Температура жидкости в данной точке A равна t . Контрольная поверхность $A-A$ расположена у фиксированной точки и параллельна плоскости XZ . За время $d\tau$ через поверхность $A-A$ проходит масса $\rho \cdot w_y \cdot d\tau$, [кг/м²].

В направлении оси OY проходят относительно оси OX : количество движения $\rho \cdot w_y \cdot w_x \cdot d\tau$ и теплота $\rho \cdot w_y \cdot i \cdot d\tau \approx \rho \cdot c_p \cdot w_y \cdot t \cdot d\tau$. Пусть $\rho, c_p = \text{const}$. Поскольку компоненты скорости постоянно меняются, среднеинтегральное значение плотности теплового потока q_y в направлении OY :

$$q_y = \frac{1}{\Delta\tau} \int_{\tau}^{\tau+d\tau} \rho \cdot c_p \cdot w_y \cdot t \cdot d\tau = \rho \cdot c_p \cdot \bar{w}_y \bar{t}. \quad (4.30)$$

Используя свойства среднеинтегрального осреднения, запишем (4.30) в виде:

$$q_y = \rho \cdot c_p \cdot \bar{w}_y \cdot \bar{t} + \rho \cdot c_p \cdot \bar{w}_y' \bar{t}'. \quad (4.31)$$

Среднеинтегральное значение количества движения относительно OX , переносимое в направлении OY за единицу времени через единицу поверхности, аналогично (4.31) запишем как:

$$S = \frac{1}{\Delta\tau} \int_{\tau}^{\tau+d\tau} \rho \cdot w_x \cdot w_y \cdot d\tau = \rho \cdot \bar{w}_x \bar{w}_y = \rho \cdot \bar{w}_x \cdot \bar{w}_y + \rho \cdot \bar{w}_x' \bar{w}_y'; \quad (4.32)$$

В соответствии с уравнениями (4.31) и (4.32) конвективный перенос складывается из осредненного и пульсационного (турбулентного) переноса.

Обозначим:

$$q_{п.т.} = q_T = \rho \cdot c_p \cdot \bar{w}_y' \bar{t}'; \quad (4.33)$$

$$S_{xy.T} = S_T = -\rho \cdot \bar{w}_x' \bar{w}_y'. \quad (4.33,a)$$

Знак (-) в (4.33,a) поставлен из-за противоположного направления пульсационного переноса количеству движения.

Поскольку теплота переносится, а количество движения осуществляется на отрезке ℓ , где пульсация существует, то можно записать:

$$q_T = -\rho \cdot C_p \cdot \bar{w}_y \cdot \bar{\ell}' \frac{d\bar{t}}{dy} ; \quad (4.34)$$

$$S_T = \rho \cdot \bar{w}_y \cdot \bar{\ell}' \frac{d\bar{w}_x}{dy} . \quad (4.35)$$

Из (4.34) и (4.35) следует, что q_T и S_T пропорциональны производным $\frac{d\bar{t}}{dy}$ и $\frac{d\bar{w}_x}{dy}$. Тогда перепишем (4.34) и (4.35) в виде:

$$q_T = -\rho \cdot C_p \cdot \varepsilon_q \frac{d\bar{t}}{dy} = -\lambda_T \frac{\partial \bar{t}}{\partial y} ; \quad (4.36)$$

$$S_T = \rho \cdot \varepsilon_s \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y} = \mu_T \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y} ; \quad (4.37)$$

где λ_T, μ_T – коэффициенты турбулентного переноса теплоты и количества движения; $\varepsilon_q = \frac{\lambda_T}{(\rho \cdot c_p)}$; $\varepsilon_s = \frac{\mu_T}{\rho}$ – кинематические коэффициенты турбулентного переноса теплоты и количества движения. Размерность λ_T, μ_T ; ε_q ; ε_s соответствует λ, μ, a, ν при молекулярном переносе.

Теплота и количество движения в направлении оси OY переносятся одновременно и молекулярным механизмом. Тогда

$$q_y = -(\lambda + \lambda_T) \frac{\partial \bar{t}}{\partial y} ; \quad (4.38)$$

$$S_{xy} = (\mu + \mu_T) \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y} . \quad (4.39)$$

4.4.5. Система уравнений турбулентного пограничного слоя

Уравнение энергии $w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} = a \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}$, движения $w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}$ и сплошности $\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0$ на основании изложенного для турбулентного пограничного слоя выше могут быть записаны в виде:

$$\rho \cdot C_p \left(\bar{w}_x \frac{\partial \bar{t}}{\partial x} + \bar{w}_y \frac{\partial \bar{t}}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left[(\lambda + \lambda_m) \frac{\partial \bar{t}}{\partial y} \right]; \quad (4.40)$$

$$\rho (\bar{w}_x \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial x} + \bar{w}_y \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y}) = \frac{\partial}{\partial y} [(\mu + \mu_m) \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y}]; \quad (4.41)$$

$$\frac{\partial \bar{w}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}_y}{\partial y} = 0. \quad (4.42)$$

Из (4.33,а) следует, что турбулентный перенос $S_m = -\rho \bar{w}'_x \bar{w}'_y$. Введя в (4.33,а) величину ℓ , называемую длиной пути смешения или масштабом турбулентности, получим:

$$S_m = \rho \cdot \ell^2 \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} \right)^2. \quad (4.43)$$

Из (4.35) и (4.43) имеем:

$$\bar{w}'_y \bar{\ell}' = \ell^2 \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y}. \quad (4.44)$$

Подставив (4.44) в (4.34), получим:

$$q_m = -\rho \cdot c_p \cdot \ell^2 \left| \frac{dw_x}{dw_y} \right| \frac{d\bar{t}}{dy}. \quad (4.45)$$

В пристенной области турбулентного течения масштаб турбулентности должен уменьшаться по мере приближения к стенке. Согласно Прандтлю:

$$\ell = \varkappa \cdot y, \quad (4.46)$$

где $\varkappa = 0,4$ – безразмерная величина. Тогда

$$\varepsilon_s = \varepsilon_q = \ell^2 \left| \frac{d\bar{w}_x}{dy} \right| = (\varkappa \cdot y)^2 \left| \frac{d\bar{w}_x}{dy} \right|. \quad (4.47)$$

Из (4.47) следует, что существует аналогия между переносом количества движения и переносом теплоты.

Турбулентное течение характеризуется также кинетической энергией турбулентного течения E :

$$E = \frac{1}{2} \left[(\bar{w}'_x)^2 + (\bar{w}'_y)^2 + (\bar{w}'_z)^2 \right] \quad (4.48)$$

и степенью турбулентности Tu :

$$Tu = \frac{\sqrt{2E}}{\sqrt{3w_0^2}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{3} \left[(w'_x)^2 + (w'_y)^2 + (w'_z)^2 \right]}}{w_0}, \quad (4.49)$$

где $w'_x; w'_y; w'_z$ – пульсационные составляющие скорости в определенной точке турбулентного потока; w_0 – характерная скорость процесса (скорость набегающего потока).

Перепишем уравнение энергии (4.29) в виде

$$\rho \cdot c_p \left(w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} \right) = -\frac{\partial q_y}{\partial y}. \quad (4.50)$$

Уравнение (4.50) названо уравнением Кружилина.

Проинтегрируем (4.50) от $y=0$ до $y=\infty$ по частям.

Правая часть:

$$-\int_0^{\infty} \frac{\partial q_y}{\partial y} dy = q_c . \quad (*)$$

Интегрируя и применяя метод подстановки, получим для левой части:

$$\int_0^{\infty} w_x \frac{\partial t}{\partial x} dy - \int_0^{\infty} (t_0 - t) .$$

Приравняем полученные значения правой и левой частей уравнения:

$$\frac{d}{dx} \int_0^k w_x (t_0 - t) dy = -\frac{q_c}{\rho \cdot c_p} . \quad (4.51)$$

Уравнение (4.51) называется интегральным уравнением теплового потока для теплового пограничного слоя. В (4.51) предел интегрирования ∞ заменен на K , так как за пределами пограничного слоя производные уравнения (4.50) равны нулю по определению [1]. При известных распределениях скорости и температуры с помощью (4.51) можно определить толщину теплового пограничного слоя $k = k(x)$.

Поскольку $S = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)$, запишем уравнение движения (4.27) в виде

$$\rho \left(w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} \right) = \frac{\partial S}{\partial y} , \quad (4.52)$$

где S – касательное напряжение трения. Уравнение (4.52) названо уравнением Кармана.

Так как уравнение (4.52) аналогично уравнению энергии (4.50), то проведя интегрирование (4.52) в пределах $y = 0$ и $y = \delta$ при аналогичных преобразованиях получим:

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} w_x (w_0 - w_x) dy = \frac{S_c}{\rho} . \quad (4.53)$$

Уравнение (4.53) – интегральное уравнение импульсов для гидродинамического слоя.

4.4.6. Теплоотдача в ламинарном пограничном слое

Для расчета теплоотдачи в слое по уравнению (4.51) необходимо знать в нем распределение скорости, которое близко к параболе: $w_x = a + b \cdot y + c \cdot y^2 + d \cdot y^3$ (кубическая парабола). Рассмотрим граничные условия: $y = 0 \rightarrow w_x = 0$. При этом полагаем, что

$$\left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} \right)_{y \rightarrow \delta} = 0 .$$

На внешней границе пограничного слоя:

$$y=\delta, w_x = w_0, \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} \right)_{y=\delta} = 0.$$

Из (4.27), когда силы инерции пренебрежимо малы, получаем условие:

$$\left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} \right)_{y=0} = 0.$$

Уравнение распределения скорости будет удовлетворять граничным условиям при постоянных: $a = 0$; $b = \frac{3}{2} \frac{w_0}{\delta}$; $C = 0$; $d = -\frac{1}{2} \frac{w_0}{\delta^3}$. Тогда уравнение распределения скорости примет вид:

$$w_x/w_0 = \frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^2. \quad (*)$$

Согласно этому распределению скорости, из уравнения импульсов (4.52) получаем толщину гидродинамического пограничного слоя:

$$\delta = \sqrt{\frac{280}{13}} \sqrt{\frac{\nu \cdot x}{w_0}} \approx 4,64 \sqrt{\frac{\nu \cdot x}{w_0}}. \quad (4.54)$$

Из (4.54) видно, что δ меняется пропорционально квадратному корню из расстояния от переднего края пластины до данной точки. В безразмерном виде (4.54) может быть записано как:

$$\delta/x = \frac{4,64}{\sqrt{\frac{w_0 \cdot x}{\nu}}} = \frac{4,64}{\sqrt{\text{Re}_x}}. \quad (4.55)$$

Пусть $t_c = \text{const}$, т. е. t_c не зависит от x . Обозначим: $\vartheta = t - t_c$; $\vartheta_0 = t_0 - t_c$; где t_0 – температура жидкости за пределами пограничного слоя.

Распределение температуры описывается уравнением, аналогичным уравнению распределения скорости (*), т. е. $\frac{\vartheta}{\vartheta_0} = 1,5 \left(\frac{y}{k} \right) - 0,5 \left(\frac{y}{k} \right)^2$, откуда

$$\left(\frac{d\vartheta}{dy} \right)_{y=0} = \frac{1,5 \cdot \vartheta_0}{k}. \quad (**)$$

Решая интегральное уравнение теплового потока для теплового пограничного слоя (4.51) с использованием зависимости для распределения скоростей и температуры и приняв $k < \delta$, получим в конечном итоге:

$$k/\delta = \frac{1}{\sqrt[3]{\text{Pr}}}. \quad (4.56)$$

Подставив δ из (4.55) в (4.56), получим:

$$k = \frac{4,64x}{\sqrt{\text{Re}_x} \sqrt[3]{\text{Pr}}}, \quad (4.57)$$

где $\text{Re} = \frac{w_0 \cdot x}{\nu}$.

При известном температурном поле плотность теплового потока от

стенки к слою определяется уравнением Фурье:

$$q_c = -\lambda \left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_{n-1} .$$

Согласно уравнению Ньютона – Рихмана эта же плотность равна $q_c = \alpha (t_c - t_{ж})$. Решая эти уравнения относительно α , получим уравнение теплоотдачи:

$$\alpha = -\frac{\lambda}{t_c - t_{ж}} \left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_{n \rightarrow 0} . \quad (4.58)$$

Опустив в (4.58) знак минус и решая его в соответствии с уравнением распределения температуры (**), получим:

$$\alpha = \frac{\lambda}{g_0} \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)_{y \rightarrow 0} = \frac{3}{2} \lambda / K . \quad (4.59)$$

Из (4.59) следует, что α обратно пропорционален толщине пограничного слоя.

После умножения левой и правой частей (4.59) на x/λ и подставления в него k из (4.57) получим:

$$Nu_x = 0,33 \sqrt{Re_x} \sqrt[3]{Pr} , \quad (4.60)$$

где $Nu_x = \frac{\alpha \cdot x}{\lambda} = \frac{\alpha \cdot \ell \cdot x}{\lambda \cdot \ell} = Nu_\ell \cdot X$; $Re = \frac{w_0 \cdot x}{\nu} = \frac{w_0 \cdot \ell \cdot x}{\nu \cdot \ell} = Re \cdot X$; $X = \frac{x}{\ell}$,

где ℓ – длина пластины вдоль потока.

Перепишем (4.59) в виде

$$Nu_\ell = 0,33 X^{-0,5} Re_\ell^{0,5} Pr^{1/3} . \quad (4.61)$$

Тогда $Nu_\ell = a \cdot X^{-0,5}$ или $\alpha = C \cdot X^{-0,5}$.

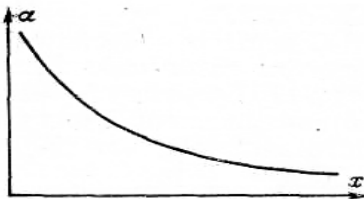


Рисунок 4.7 – Изменение α по длине пластины при ламинарном пограничном слое

Величины a и C независимы от x . При $x = 0$ значение α бесконечно велико. При увеличении x α принимает конечные и постоянно уменьшающиеся значения (рис. 4.7). Это, как следует из уравнений (**) и (4.57), объясняется постоянством температурного напора $g_0 = t_0 - t_c$ пластины при непрерывно уменьшающемся температурном градиенте с ростом x .

Физические параметры, входящие в приведенные выше уравнения, выбирают по температуре набегающего потока t_0 . Уравнение (4.61) получено при постоянных физических параметрах потока. Для учета переменности физических параметров потока жидкости и направления теплового потока М. А. Михеевым был предложен множитель:

$$\left(\frac{Pr_{ж}}{Pr_c} \right)^{0,25} .$$

4.4.7. Переход ламинарного течения в турбулентное

Законы теплообмена, определяемые режимом течения при ламинарном и турбулентном режимах различны. О режиме течения судят по критическим значениям числа Re :

$$Re_{кр.1} = \frac{w_0 \cdot x_{кр.1}}{\nu}; \quad Re_{кр.2} = \frac{w_0 \cdot x_{кр.2}}{\nu};$$

где x – продольная координата, отсчитываемая от передней кромки поверхности (рис. 4.8).

$$Re_{кр} = \frac{w_0 \cdot x_{кр}}{\nu} = 10^4 \div 4 \cdot 10^6.$$

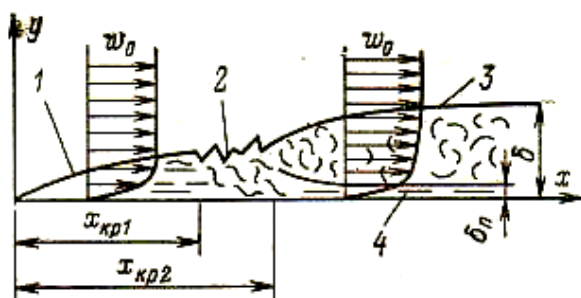


Рисунок 4.8 – Пограничный слой:
1 – ламинарный пограничный слой;
2 – переходная область;
3 – турбулентный пограничный слой;
4 – вязкий ламинарный подслой

Участок, где осуществляется переход ламинарного течения в турбулентное, называется переходным. На преобразование режима влияют характеристики течения внешнего потока: степень турбулентности, масштаб турбулентности, частота пульсаций и т. д., параметры омываемого тела: (волнистость, шероховатость, вибрация и т. д.), интенсивность теплообмена. При сравнительно малых значениях степени турбулентности

$$Tu = \sqrt{\frac{2E}{3w_0^2}}$$

смена режима не зависит от Tu внешнего потока, а определяется характеристиками ламинарного слоя. Увеличение Tu приводит к уменьшению $Re_{кр}$.

Течение в переходной области не является стабильным. Турбулентность появляется в некоторой части пограничного слоя, затем турбулентно текущая жидкость уносится потоком. Смена ламинарных и турбулентных состояний течения происходит через разные промежутки времени. Такой характер течения характеризуют коэффициентом перемежаемости ω – доля определенного промежутка времени, в которой существует турбулентное течение. $\omega = 1$ – турбулентное течение. $\omega = 0$ – ламинарное.

4.4.8. Теплоотдача при турбулентном пограничном слое

Схема строения турбулентного пограничного слоя представлена на рисунке 4.9. Уравнение переноса теплоты (4.38) и количества движения (4.39)

поперек пограничного слоя можно записать в следующем виде:

$$q = -\lambda \left(1 + \frac{\text{Pr} \varepsilon_s}{\text{Pr}_t \nu} \right) \frac{\partial \bar{t}}{\partial y}; \quad (4.62)$$

$$S = \rho \cdot \nu \left(1 + \frac{\varepsilon_s}{\nu} \right) \frac{\partial w_x}{\partial y}, \quad (4.63)$$

где Pr_t – турбулентное число Pr , характеризуется $\varepsilon_s / \varepsilon_q$, где ε_s и ε_q – кинематические коэффициенты переноса количества движения и теплоты.

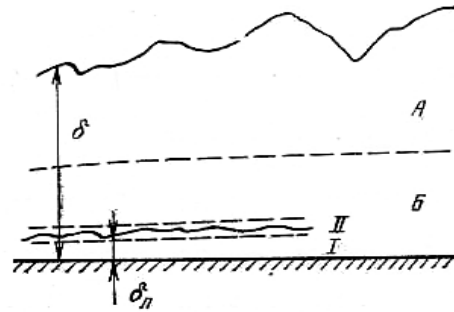


Рисунок 4.9 – Схема строения турбулентного – пограничного слоя:

A – внешняя область; *B* – пристенная область; *I* – вязкий подслей; *II* – промежуточный слой

С учетом (4.62) и (4.63) дифференциальные уравнения энергии (4.40) и движения (4.41) для турбулентного пограничного слоя можно записать в следующем виде:

$$\bar{w}_x \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} + \bar{w}_y \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} = a \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(1 + \frac{\text{Pr} \varepsilon_s}{\text{Pr}_t \nu} \right) \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} \right]; \quad (4.64)$$

$$\bar{w}_x \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial x} + \bar{w}_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(1 + \frac{\varepsilon_s}{\nu} \right) \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y} \right]. \quad (4.65)$$

Для решения уравнений (4.64) и (4.65) необходимо знать коэффициенты турбулентного переноса теплоты и количества движения, а также распределения скорости и температуры в турбулентном потоке.

Запишем уравнения (4.43), введя обозначения (4.46):

$$S_m = \rho \cdot \ell^2 \left(\frac{dw_x}{dy} \right)^2 = \rho (\aleph \cdot y)^2 \left(\frac{dw_x}{dw_y} \right)^2; \quad \sqrt{\frac{S_\tau}{\rho}} = \ell \frac{dw_x}{dy} = \aleph \cdot y \frac{dw_x}{dy},$$

где ℓ – длина пути смещения.

Пусть касательное напряжение турбулентного течения не меняется в направлении y . Тогда:

$$\sqrt{\frac{S_\tau}{\rho}} = \sqrt{\frac{S_c}{\rho}} = const.$$

Обозначим $\sqrt{\frac{S_c}{\rho}} = w_*$ – динамическая скорость.

Тогда
$$w_* = \aleph y \frac{dw_x}{dy}, \quad dw_x = \frac{w_*}{\aleph} \frac{dy}{y} \quad \text{и} \quad \bar{w}_x = \frac{w_*}{\aleph} \ln y + C. \quad (4.66)$$

Уравнение (4.66) характеризует логарифмическое распределение осредненной скорости турбулентного течения в пристенной области. Решение (4.66) при $y=0$ дает неприемлемый результат $\bar{w}_x = -\infty$ из-за неучета значительных сил вязкости непосредственно у стенки. Слой жидкости у стенки, в котором преобладают силы вязкости, и являющийся составной частью турбулентного пограничного слоя называется вязким подслоем. Уравнение движения для него запишется в виде:

$$d^2 \bar{w}_x / dy^2 = 0.$$

Откуда $\bar{w}_x = C_1 y + C_2$, то есть в вязком подслое скорость меняется по линейному закону. Тогда

$$S = S_c = \mu \frac{d\bar{w}_x}{dy} = \text{const} \quad \text{и} \quad S_c = \mu \frac{w_\tau}{\delta_n} = \rho \cdot w_*^2, \quad (4.66a)$$

где δ_n – толщина вязкого подслоя; $w_\tau = \bar{w}_x(\delta_n)$ – скорость на внешней границе вязкого подслоя.

Согласно (4.66a),

$$\delta_n = \nu \cdot \frac{w_\tau}{w_*^2}.$$

Постоянная интегрирования C из (4.66) определится из граничных условий:

$$y = \delta_n = \nu \frac{w_\tau}{w_*^2}; \quad w_x = w_\tau.$$

Тогда
$$C = w_\tau - \frac{w_*}{\aleph} \ln \delta_n = w_\tau - \frac{w_*}{\aleph} \ln \frac{\nu \cdot w_\tau}{w_*^2}.$$

Подставив постоянную C в (4.66) и проведя необходимые преобразования, получим универсальное логарифмическое распределение осредненной скорости в пристенной области турбулентного потока. Оно представлено на рисунке 4.10 и имеет следующий вид:

$$W^+ = \frac{\bar{w}_x}{w_*} = \frac{1}{\aleph} \lg y + \eta, \quad (4.67)$$

где $y_* = \frac{w_* \cdot y}{\nu}; \quad \eta = \frac{w_\tau}{w_*} - \frac{1}{\aleph} \ln \frac{w_\tau}{w_*}.$

На рисунке 4.10 кривой 1 показано линейное изменение скорости в вязком подслое I :

$$w_x = w_* \cdot y_* = \frac{w_*^2}{\nu} y = \frac{S_c}{\mu} y. \quad (4.68)$$

Кривой 2 изображено логарифмическое распределение осредненной скорости в пристенной турбулентной части B (рис. 4.9) пограничного слоя:

$$\frac{\bar{w}_x}{w_*} = 5,61 \cdot \lg y_* + 4,9. \quad (4.69)$$

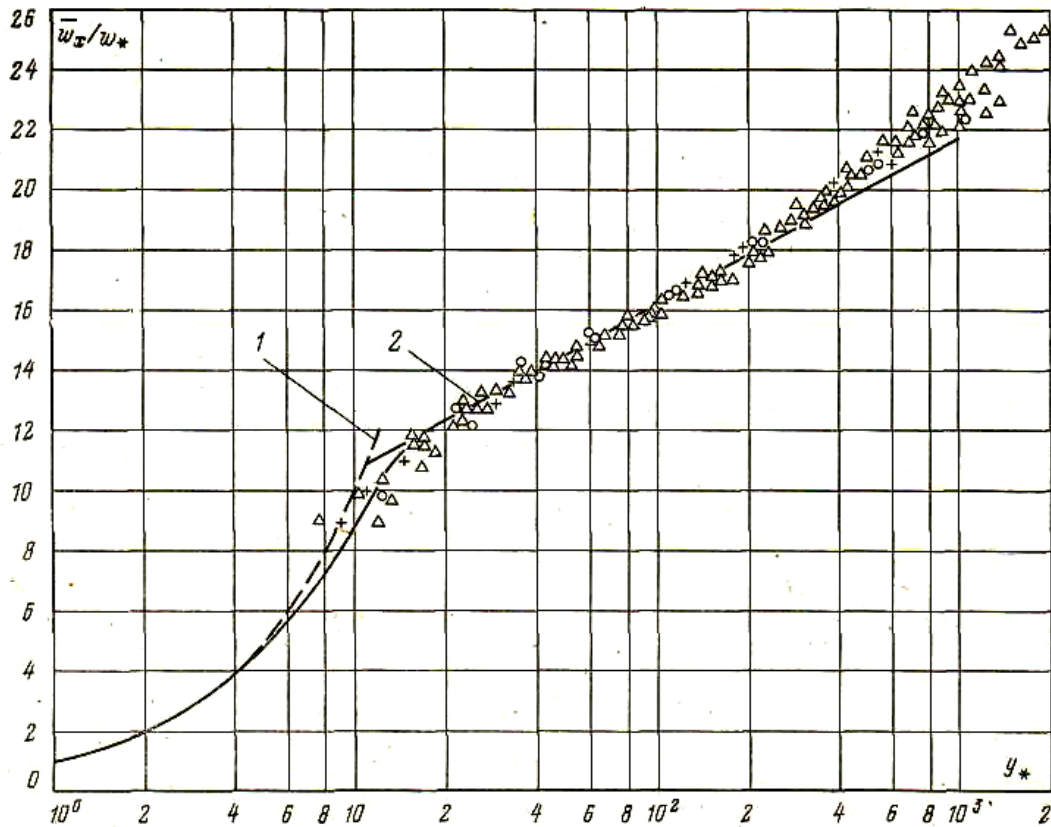


Рисунок 4.10 – Распределение безразмерной скорости по толщине турбулентного пограничного слоя

Пересечению кривых 1 и 2 соответствует

$$y_* = \frac{w_* \cdot y}{\nu},$$

примерно равный 12. При этом расчетная толщина вязкого подслоя равна:

$$\delta_{\text{п}} \approx 12 \frac{\nu}{w_*} = 12\nu \sqrt{\rho/S_c}. \quad (4.70)$$

Вязкий подслои (рис. 4.9) не имеют строго ламинарного течения. В него проникают пульсации, граница подслоя четко не определена. Она является генератором пульсационного движения. Пристенная область составляет примерно 20 % толщины пограничного слоя; толщина вязкого подслоя около 2 %; толщина внешней области примерно 80 %.

Аналогично вязкому подслою у стенки можно выделить тепловой подслои. Он характеризуется преобладанием переноса теплоты теплопроводностью над турбулентным переносом. Пульсации, проникающие в вязкий подслои, не являются определяющими для теплового подслоя. Основным механизмом передачи – это молекулярный вязкостный перенос ($Pr > 1$). Для жидкостей – малотеплопроводные, вязкие среды с большими числами

$Pr = \frac{\mu \cdot c_p}{\lambda}$ – тепловой подслоя является основным термическим сопротивлением.

Ввиду интенсивного турбулентного переноса, толщины теплового K и динамического δ пограничных слоев практически совпадают. При турбулентном течении толщина пограничного слоя δ больше, чем при ламинарном вследствие влияния турбулентной вязкости.

В тепловом подслое перенос теплоты определяется теплопроводностью, поэтому температура по его толщине изменяется по закону прямой. Представим распределение температуры в вязком подслое, где скорость меняется по линейному закону, как:

$$\theta = Pr \cdot y_* , \quad (4.71)$$

где $\theta = \frac{\vartheta}{\vartheta_*}$; $\vartheta_* = \frac{q_c}{\rho \cdot c_p \cdot w_*}$; $y_* = \frac{w_* \cdot y}{\nu}$.

Распределение температуры в зоне логарифмического распределения осредненной скорости запишется как:

$$\theta = \frac{Pr_T}{\aleph} \ln y_* + C_q (Pr) , \quad (4.72)$$

где $C_q = f(Pr)$ – учитывает изменение температуры, связанное с неравенством толщин подслоев K_{II} и δ_{II} .

Зная распределения скорости и температуры, с помощью уравнений теплового потока (4.51) и импульса (4.53) можно рассчитать теплоотдачу.

Поскольку скорости температуры в вязком и тепловом подслоях изменяются по линейному закону, то

$$S_c = \mu \frac{w_T}{\delta_{II}} ; \quad q_c = \lambda \frac{\vartheta_T}{K_{II}} .$$

S и q постоянны внутри K_{II} и δ_{II} . Тогда

$$q_c = S_c \frac{\lambda}{\mu} \frac{\vartheta_T}{w_T} \frac{\delta_{II}}{K_{II}} , \quad (4.73)$$

где $\vartheta_T = t_T - t_c$; t_T – температура на внешней границе теплового подслоя;

$y = K_{II}$; w_T – скорость при $y = \delta_{II}$; t_c – температура поверхности стенки.

Для турбулентной части пограничного слоя молекулярный перенос теплоты и количества движения пренебрежимо мал. Поэтому распределение осредненных скорости и температуры идентичны. Тогда на основании уравнений переноса теплоты (4.34) и количества движения (4.35) запишем

$$q_T = S_T \cdot c_p \frac{t_0 - t_c}{w_0 - w_{II}} . \quad (4.74)$$

На границе теплового подслоя нет разрыва теплового потока, поэтому (4.73) и (4.74) приравняем и решим их относительно разности температур:

$$t_0 - t_c = \frac{q_c \cdot w_0}{S_c \cdot c_p} \left[1 + \frac{\mu \cdot c_p}{\lambda} \frac{w_T}{w_0} \frac{K_{II}}{\delta_{II}} - \frac{w_T}{w_0} \right] . \quad (4.75)$$

Поскольку согласно (4.70) $\delta_{II} \approx 12 \frac{\nu}{w_*}$, то

$$w_T = \frac{\delta \cdot w_*^2}{\nu} = 12w_* = 12\sqrt{\frac{S_c}{\rho}}. \quad (4.76)$$

Пусть $K_{II}/\delta_{II} = \frac{1}{\sqrt[3]{Pr}}$ – на основании аналогии с уравнением (4.56). Подставив (4.76) и K_{II}/δ_{II} в (4.75) и решая его относительно q_c , получим:

$$q_c = \frac{S_c \cdot c_p (t_0 - t_c)}{w_0 \left[1 + \frac{12}{w_0} \sqrt{\frac{S_c}{\rho}} (Pr^{2/3} - 1) \right]}. \quad (4.77)$$

Обозначим $C_f = \frac{2S_c}{\rho \cdot w_0^2}$ – коэффициент трения, характеризующий касательное напряжение трения на стенке S_c . Подставим C_f в (4.77) и, поделив левую и правую его части на $\rho \cdot c_p \cdot w_0 (t_0 - t_c)$, получим:

$$\frac{\alpha}{\rho \cdot c_p \cdot w_0} \equiv St = \frac{C_f/2}{1 + 12\sqrt{\frac{C_f}{2}} (Pr^{2/3} - 1)}, \quad (4.78)$$

где

$$St = \frac{\alpha}{\rho \cdot C_p \cdot w_0} = \frac{Nu}{Re \cdot Pr}. \quad (4.79)$$

При $Pr = 1$ (4.78) переходит в

$$St = C_f/2. \quad (4.80)$$

$St = C_f/2$ – математическое выражение аналогии переноса теплоты и количества движения. Используя формулу Прандтля

$$C_f = \frac{0,0592}{Re_{f,x}^{0,2}}, \quad (4.81)$$

введя поправку $(Pr_f/Pr_w)^{0,25}$, получим:

$$Nu_{f,x} = 0,0296 Re_{f,x}^{0,8} Pr_{f,x}^{0,43} \left(\frac{Pr_f}{Pr_c} \right)^{0,25}. \quad (4.82)$$

За определяющую температуру принята температура жидкости вдали от тела - t_0 . Определяющим размером является координата x от начала участка теплообмена. Распределение интенсивности теплообмена внутри пограничного слоя представлено на рис. 4.11.

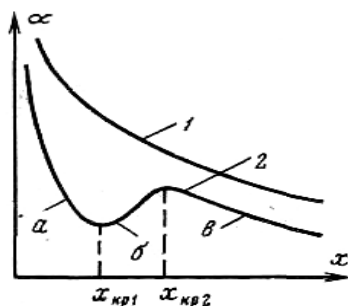


Рисунок 4.11 – Распределение интенсивности теплообмена внутри пограничного слоя:
 1 – турбулентное течение; 2 – смешанное течение;
 а – ламинарное; б – переходное;
 в – турбулентное

4.5. Примеры с решениями

Пример 4.5.1. Верхняя панель колпака бумагоделательной машины длиной $l_0 = 40$ м и шириной $a = 3,0$ м, обтекается продольным потоком воздуха. Скорость и температура набегающего потока равны соответственно: $w_0 = 0,5$ м/с и $t_0 = 24$ °С. Температура поверхности колпака $t_c = 46$ °С.

Определить средний по длине пластины коэффициент теплоотдачи и количество теплоты, отдаваемой колпаком воздуху.

Решение.

Находим параметры воздуха при $t_0 = 24$ °С; $\nu = 15,03 \cdot 10^{-6}$ м²/с; $\lambda = 2,63 \cdot 10^{-2}$ Вт/(м·град); $Pr = 0,702$.

Находим число Рейнольдса

$$Re = \frac{w_0 \cdot \ell_0}{\nu} = \frac{0,5 \cdot 12}{15,03 \cdot 10^{-6}} = 3,99 \cdot 10^5 < 5 \cdot 10^5,$$

следовательно, расчетное число Re меньше критического числа. Откуда следует, что режим течения в пограничном слое ламинарный. Тогда средний по длине коэффициент теплоотдачи может быть рассчитан по формуле

$$Nu_\ell = 0,67 \cdot Re_\ell^{0,5} \cdot Pr^{1/3},$$

где $Nu_\ell = \frac{\alpha \cdot \ell_0}{\lambda}$; $Re = \frac{w_0 \cdot \ell_0}{\nu}$.

$$Nu_\ell = 0,67(3,99 \cdot 10^5)^{0,5} \cdot (0,702)^{0,33} = 0,67 \cdot 631,66 \cdot 0,89 = 376,6;$$

$$\alpha = \frac{Nu \cdot \lambda}{\ell_0} = \frac{376,6 \cdot 2,63 \cdot 10^{-2}}{12} = 0,825 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{град}}.$$

Количество отдаваемой верхней панелью колпака теплоты определится как $Q = \alpha(t_c - t_0)F = 0,825(46 - 24)40 \cdot 3 = 2178$ Вт.

Пример 4.5.2. Найти для условий задачи 4.5.1 толщину гидродинамического пограничного слоя и значения местных коэффициентов теплоотдачи на разных расстояниях от передней кромки верхней панели колпака бумагоделательной машины: $x = (0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,7; 0,9; 1,0)l_0$. Построить график зависимости толщины гидродинамического пограничного слоя δ_π и коэффициента теплоотдачи от расстояния x/l_0 .

Решение.

Толщина пограничного слоя и локальный коэффициент теплоотдачи в нем на расстоянии x от передней кромки панели колпака при ламинарном режиме течения жидкости, когда $Re_x < Re_{кр} = 5 \cdot 10^5$, определяется по формулам:

$$\delta_\pi = \frac{4,64x}{\sqrt{Re_x}} \quad \text{и} \quad Nu = 0,33 Re_x^{0,5} Pr^{1/3},$$

где $Nu_x = \frac{\alpha \cdot x}{\lambda}$ и $Re_x = \frac{w_0 \cdot x}{\nu}$.

На расстоянии $x = 0,1l_0 \Rightarrow Re_x = \frac{0,5 \cdot 0,1 \cdot 40}{15,03 \cdot 10^{-6}} = 13,31 \cdot 10^4$; $\delta_\pi = \frac{4,64 \cdot 0,1 \cdot 40}{\sqrt{13,31 \cdot 10^4}} = 0,051$ м.

$$Nu_x = 0,33(13,31 \cdot 10^4)^{1/2}(0,702)^{1/3} = 0,33 \cdot 364,8 \cdot 0,889 = 107,0;$$

$$\alpha_x = Nu_x \frac{\lambda}{x} = 107,0 \frac{2,63 \cdot 10^{-2}}{0,1 \cdot 40} = 0,7 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{град}};$$

$$x = 0,2l_0 \Rightarrow Re_x = \frac{0,5 \cdot 0,2 \cdot 40}{15,03 \cdot 10^{-6}} = 26,61 \cdot 10^4; \quad \delta_{\text{л}} = \frac{4,64 \cdot 0,2 \cdot 40}{\sqrt{26,61 \cdot 10^4}} = 0,072 \text{ м.}$$

$$Nu_x = 0,33(26,61 \cdot 10^4)^{1/2}(0,702)^{1/3} = 0,33 \cdot 515,85 \cdot 0,889 = 151,33;$$

$$\alpha_x = 151,33 \frac{2,63 \cdot 10^{-2}}{0,2 \cdot 40} = 0,5 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{град}};$$

$$x = 0,3l_0 \Rightarrow Re_x = \frac{0,5 \cdot 0,3 \cdot 40}{15,03 \cdot 10^{-6}} = 39,92 \cdot 10^4; \quad \delta_{\text{л}} = \frac{4,64 \cdot 0,3 \cdot 40}{\sqrt{39,92 \cdot 10^4}} = 0,088 \text{ м.}$$

$$Nu_x = 0,33(39,92 \cdot 10^4)^{1/2}(0,702)^{1/3} = 0,33 \cdot 631,82 \cdot 0,889 = 185,35;$$

$$\alpha_x = 185,35 \frac{2,63 \cdot 10^{-2}}{0,3 \cdot 40} = 0,41 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{град}};$$

$$x = 0,4l_0 \Rightarrow Re_x = \frac{0,5 \cdot 0,4 \cdot 40}{15,03 \cdot 10^{-6}} = 53,22 \cdot 10^4; \quad Re_x = 5,32 \cdot 10^5 > Re_{\text{кр}} = 5 \cdot 10^5.$$

Следовательно, при $x = 0,4l_0$ ламинарный режим течения в слое при данных параметрах переходит в турбулентный, когда среднее значение теплоотдачи при обтекании колпака воздухом определяется по формуле

$$Nu = 0,032 Re^{0,8},$$

локальный коэффициент теплоотдачи и толщина турбулентного гидродинамического пограничного слоя определяется по формулам:

$$Nu_x = 0,0255 Re_x^{0,8} \text{ и } \delta_{\text{т}} = \frac{0,37x}{\sqrt[5]{Re_x}} \text{ соответственно.}$$

$$\delta_{\text{т}} = \frac{0,37x}{\sqrt[5]{Re_x}} = \frac{0,37 \cdot 0,4 \cdot 40}{\sqrt[5]{53,22 \cdot 10^4}} = 0,424 \text{ м.}$$

$$Nu_x = 0,0255 \cdot (53,22 \cdot 10^4)^{0,8} = 971,40; \quad \alpha_x = 971,4 \frac{2,63 \cdot 10^{-2}}{0,4 \cdot 40} = 1,6 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{град}}.$$

$$x = 0,5l_0 \Rightarrow Re_x = \frac{0,5 \cdot 0,5 \cdot 40}{15,03 \cdot 10^{-6}} = 66,53 \cdot 10^4; \quad \delta_{\text{т}} = \frac{0,37 \cdot 0,5 \cdot 40}{\sqrt[5]{66,53 \cdot 10^4}} = 0,506 \text{ м.}$$

$$Nu_x = 0,0255 \cdot (66,53 \cdot 10^4)^{0,8} = 1161,32; \quad \alpha_x = 1161,32 \frac{2,63 \cdot 10^{-2}}{0,5 \cdot 40} = 1,53 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{град}}.$$

$$x = 0,7l_0 \Rightarrow Re_x = \frac{0,5 \cdot 0,7 \cdot 40}{15,03 \cdot 10^{-6}} = 93,15 \cdot 10^4; \quad \delta_{\text{т}} = \frac{0,37 \cdot 0,7 \cdot 40}{\sqrt[5]{93,15 \cdot 10^4}} = 0,663 \text{ м.}$$

$$Nu_x = 0,0255 \cdot (93,15 \cdot 10^4)^{0,8} = 1520,15; \quad \alpha_x = 1520,15 \frac{2,63 \cdot 10^{-2}}{0,7 \cdot 40} = 1,43 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{град}}.$$

$$x = 0,9l_0 \Rightarrow Re_x = \frac{0,5 \cdot 0,9 \cdot 40}{15,03 \cdot 10^{-6}} = 119,76 \cdot 10^4; \quad \delta_{\text{т}} = \frac{0,37 \cdot 0,9 \cdot 40}{\sqrt[5]{119,76 \cdot 10^4}} = 0,811 \text{ м.}$$

$$Nu_x = 0,0255 \cdot (119,76 \cdot 10^4)^{0,8} = 1858,61; \quad \alpha_x = 1858,61 \frac{2,63 \cdot 10^{-2}}{0,9 \cdot 40} = 1,36 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{град}}.$$

$$x = 1,0l_0 \Rightarrow Re_x = \frac{0,5 \cdot 1,0 \cdot 40}{15,03 \cdot 10^{-6}} = 133,07 \cdot 10^4; \quad \delta_\tau = \frac{0,37 \cdot 1,0 \cdot 40}{\sqrt[5]{133,07 \cdot 10^4}} = 0,882 \text{ м.}$$

$$Nu_x = 0,0255 \cdot (133,07 \cdot 10^4)^{0,8} = 2022,11; \quad \alpha_x = 2022,11 \frac{2,63 \cdot 10^{-2}}{1,0 \cdot 40} = 1,33 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{град}}.$$

Результаты расчетов представлены в таблице 4.1 и на рисунке 4.12.

Таблица 4.1

x/l_0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,7	0,9	1,0
δ_x , мм	51	72	88	424	506	663	811	882
α_x , $\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{град}}$	0,7	0,5	0,4	1,6	1,53	1,43	1,36	1,33



Рисунок 4.12 – Изменение толщины гидродинамического пограничного слоя по длине колпака машины

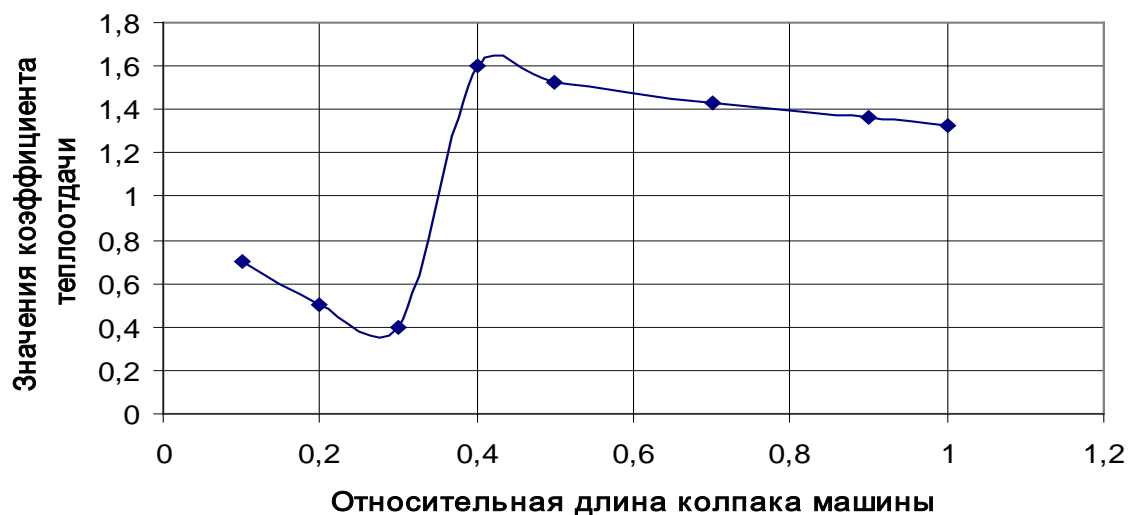


Рисунок 4.13 – Изменение коэффициента теплоотдачи по длине гидродинамического пограничного слоя

Пример 4.5.3.

Вычислить средний коэффициент теплоотдачи и температуры на входе и выходе из трубы при течении трансформаторного масла в трубах, диаметром $d = 16$ мм и длиной $l = 1,5$ м; системы смазки подшипников бумагоделательной машины. Определить падение давления по длине трубки. Скорость масла в трубе составляет $w = 0,3$ м/с. Средняя температура масла в трубе $t_{ж} = 70$ °С, средняя температура стенки трубы $t_c = 25$ °С.

Решение.

По значению числа Re определяем режим течения масла. При $t_{ж} = 70$ °С находим коэффициент кинематической вязкости масла $\nu_{ж} = 4,54 \cdot 10^{-6}$ м²/с

$$Re_{ж} = \frac{w \cdot d}{\nu} = \frac{0,3 \cdot 0,016}{4,54 \cdot 10^{-6}} = 1057.$$

Режим течения ламинарный, поскольку $Re_{ж} < 2300$. В этих условиях необходимо найти величину влияния, оказываемого естественной конвекцией на теплоотдачу. Для этого рассчитываем комплекс $(GrPr)_{Г}$. Находим определяющую температуру пленки $t_{Г} = 0,5(t_{ж} + t_c) = 0,5(70 + 25) = 47,5$ °С. При этой температуре находим значения физических свойств масла:

$$\nu_{Г} = 8,26 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}; \quad \beta_{Г} = 7,037 \cdot 10^{-4}, \text{ 1/град}; \quad Pr_{Г} = 119,75.$$

$$(Gr \cdot Pr)_{Г} = g \cdot \beta_{Г} \frac{(t_{ж} - t_c) d^3}{\nu_{Г}^2} Pr = 0,81 \cdot 7,037 \cdot 10^{-4} \frac{(70 - 25)(0,016)^3}{(8,26 \cdot 10^{-6})^2} 119,75 = 1,8 \cdot 10^5.$$

Поскольку $(Gr \cdot Pr)_{Г} < 8 \cdot 10^5$, влиянием естественной конвекции на теплоотдачу можно пренебречь, и режим течения масла считать вязкостным.

Средний коэффициент теплоотдачи при вязкостном режиме течения жидкости в трубах при $Re_{ж} < 2300$ можно рассчитывать по формуле:

$$Nu_{Г} = 1,5 \left(Pe_{Г} \frac{d}{l} \right)^{1/3} \left(\frac{\mu_{ж}}{\mu_c} \right)^{0,14} \varepsilon,$$

$$\text{где } Nu_{Г} = \frac{\alpha \cdot d}{\lambda_{Г}}; \quad Pe_{Г} \frac{d}{l} = \frac{4G \cdot c_{pГ}}{\pi \lambda_{Г}}; \quad \alpha = \frac{q}{t_{ж} - t_c}; \text{ индексы «с» и «Г»}$$

означают, что физические свойства жидкости находятся по справочникам при температуре стенки t_c и определяющей температуре $t_{Г}$ соответственно.

Поправка на участок гидродинамической стабилизации

$$\varepsilon = 0,6 \left(\frac{1}{Re_{ж}} \cdot \frac{l}{d} \right)^{-1/7} \left(1 + 2,5 \frac{1}{Re_{ж}} \cdot \frac{l}{d} \right)$$

вводится в случаях, когда перед обогреваемым участком трубы отсутствует участок гидродинамической стабилизации и $\frac{1}{Re} \frac{l}{d} < 0,1$;

$$\frac{1}{Pe_{Г}} \frac{l}{d} \leq 0,05; \quad (Gr \cdot Pr)_{Г} \leq 8 \cdot 10^5; \quad 0,07 \leq \frac{\mu_c}{\mu_{ж}} \leq 1500.$$

Для расчета теплоотдачи по средней температуре масла $t_{ж} = 70^{\circ} C$, температуре стенки $t_c = 25^{\circ} C$ и температуре пленки $t_{\Gamma} = 47,5^{\circ} C$ находим необходимые значения его физических параметров:

$$\rho_{ж} = 850 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}; \mu_{ж} = 38,6 \cdot 10^{-4} \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{м}^2}; \lambda_{\Gamma} = 0,1084 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{град}};$$

$$C_{p\Gamma} = 1,831 \frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{град}}; \mu_c = 163,3 \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{м}^2}.$$

Определяем расход масла в трубе:

$$G = \rho_{ж} \cdot w \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} = 850 \cdot 0,3 \frac{3,14 \cdot (0,016)^2}{4} = 0,0512 \text{ кг/с}.$$

Проверяем условия ввода поправки на участок гидродинамической стабилизации:

$$Pe_{\Gamma} \frac{d}{l} = \frac{w \cdot l \cdot d}{a \cdot l} = \frac{4G \cdot d \cdot \rho_{\Gamma} \cdot C_{p\Gamma}}{\rho_{ж} \cdot \pi \cdot d^2 \cdot \lambda_{\Gamma}} = \frac{4G \cdot C_{p\Gamma}}{\pi \cdot d \cdot \lambda_{\Gamma}} = \frac{4 \cdot 0,0512 \cdot 1,831}{3,14 \cdot 0,016 \cdot 0,1084} = 68,8.$$

Таким образом $\frac{1}{Pe_{\Gamma}} \frac{l}{d} = \frac{1}{68,8} = 0,014 \leq 0,05$. Следовательно, одно из

условий ввода поправки на участок гидродинамической стабилизации выполнено:

$$\frac{1}{Re_{ж}} \frac{l}{d} = \frac{1}{1057} \frac{1,5}{0,016} = 0,087 < 0,1.$$

Поправка на участок гидродинамической стабилизации

$$\varepsilon = 0,6(0,087)^{-1/7} (1 + 2,5 \cdot 0,087) = 0,6 \cdot 1,414 \cdot 1,217 = 1,03.$$

Число Нуссельта

$$Nu_{\Gamma} = 1,55(68,8)^{1/3} \left(\frac{38,6}{163,3} \right)^{0,14} \cdot 1,03 = 1,55 \cdot 4,092 \cdot 0,817 \cdot 1,03 = 5,33.$$

Коэффициент теплоотдачи

$$\alpha = 5,33 \frac{0,1084}{0,016} = 36,1 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{град}}.$$

Для нахождения температур масла на входе и выходе из трубы определяем количество передаваемой в ней теплоты:

$$Q = \alpha(t_{ж} - t_c) \cdot F = \alpha(t_{ж} - t_c) \pi \cdot d \cdot l = 36,1 \cdot (70 - 25) \cdot 3,14 \cdot 0,016 \cdot 1,5 = 122,4 \text{ Вт}.$$

Находим разность температур на входе и выходе из трубы:

$$\delta_t = t_{\text{ВЫХ}} - t_{\text{ВХ}} = \frac{Q}{G \cdot C_{pж}} = \frac{122,4}{0,0512 \cdot 1,964 \cdot 10^3} = 1,2^{\circ} C,$$

где $C_{pж} = 1,964 \frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{град}}$ теплоемкость масла при $t_{ж} = 70^{\circ} C$.

Среднее арифметическое значение температуры масла $t_{ж} = 0,5 \cdot (t_{\text{ВХ}} + t_{\text{ВЫХ}}) = 70^{\circ} C$. Следовательно, $t_{\text{ВХ}} = 71^{\circ} C$ и $t_{\text{ВЫХ}} = 69^{\circ} C$.

При вязкостном неизотермическом течении жидкости в трубах

коэффициент сопротивления трения определяется по формуле $\xi = \xi_{из} \left(\frac{\mu_c}{\mu_{ж,вх}} \right)^n$,

где $\xi_{из} = \frac{64}{Re}$ – коэффициент сопротивления трения при изотермическом

течении; $n = C \left(Pe_{вх} \frac{d}{l} \right)^m \left(\frac{\mu_c}{\mu_{вх}} \right)^{-0,032}$; при $Pe_{вх} \frac{d}{l} \leq 1500 \Rightarrow C = 2,3; m = -0,3$;

при $Pe_{вх} \frac{d}{l} > 1500 \Rightarrow C = 0,535; m = -0,1$.

$$Pe_{вх} \frac{d}{l} = \frac{4G \cdot C_{P,вх}}{\pi \cdot d \cdot \lambda_{вх}} = \frac{4 \cdot 0,0512 \cdot 1,97}{3,14 \cdot 0,016 \cdot 0,106} = 75,8 < 1500; C = 2,3; m = -0,3.$$

$$n = 2,3(75,8)^{-0,3} \left(\frac{163,3}{37,8} \right)^{-0,032} = 0,599.$$

$$\xi = \frac{64}{Re_{ж}} \left(\frac{\mu_c}{\mu_{вх}} \right)^n = \frac{64}{1057} \left(\frac{163,3}{37,8} \right)^{0,599} = 0,145.$$

$$\text{Падение давления } \Delta P = \xi \frac{l}{d} \frac{\rho_{ж} \cdot w^2}{2} = 0,145 \frac{1,5}{0,016} \frac{850 \cdot (0,3)^2}{2} = 520 \text{ Н/м}^2.$$

Пример 4.5.4. В вертикальном подогревателе вода с температурой на входе $t_{вх}=15^\circ\text{C}$ снизу вверх течет по трубам диаметром $d = 32$ мм. Температура стенок труб теплообменника поддерживается равной $t_c=160^\circ\text{C}$. Определить длину труб подогревателя, если температура при расходе воды $G = 0,02$ кг/с на выходе составляет $t_{вых}=80^\circ\text{C}$.

Решение.

По средней температуре воды $t_{ж} = 0,5(t_{вх}+t_{вых}) = 0,5(15+80)=47,5^\circ\text{C}$ находим ее физические параметры:

$$\rho_{ж} = 989,1 \text{ кг/м}^3; C_{Pж}=4,174 \frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{град}}; \mu_{ж} = 575,4 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{М}^2}.$$

По t_c находим:
$$\lambda_c = 0,6835 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{град}}.$$

Рассчитываем число Re :

$$Re = \frac{4 \cdot G}{\pi \cdot d \cdot \rho_{ж}} = \frac{4 \cdot 0,02}{3,14 \cdot 0,032 \cdot 989,1} = 1384 < 2300.$$

Режим течения ламинарный. Выбираем физические параметры воды по температуре пленки $t_{г} = 0,5(t_c + t_{ж}) = 0,5(160 + 47,5) = 103,7^\circ\text{C}$; $\beta_{г} = 7,73 \cdot 10^{-4}$ 1/град; $\nu_{г} = 0,286 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $a_{г} = 16,94 \cdot 10^{-8} \text{ м}^2/\text{с}$; $Pr = 1,69$.

При совпадении направлений вынужденной и свободной конвекции и вязкостно-гравитационном режиме движения расчет теплоотдачи проводим по формуле:

$$Nu_c = 0,35 \left(Pe_\Gamma \frac{d}{l} \right)^{0,3} \left[(Gr \cdot Pr)_\Gamma \frac{d}{l} \right]^{0,18}.$$

Уравнение справедливо при $\left(Pe_\Gamma \frac{d}{l} \right)_{ac} \leq Pe_\Gamma \frac{d}{l} \leq 1100$; $20 \leq \frac{l}{d} \leq 130$;

$$8 \cdot 10^5 \leq (Gr \cdot Pr)_\Gamma \leq 4 \cdot 10^8,$$

где асимптотическое значение числа Пекле

$$\left(Pe_\Gamma \frac{d}{l} \right)_{ac} \approx 1,5 \cdot \left((Gr \cdot Pr)_\Gamma \frac{d}{l} \right)_\Gamma^{0,25}.$$

Для решения уравнения с двумя неизвестными α и l используем уравнение теплового баланса: $Q = G \cdot C_{P,ж} (t_{\text{вых}} - t_{\text{вх}}) = \alpha (t_c - t_{\text{вх}}) \pi \cdot d \cdot l$.

$$Pe_\Gamma = \frac{w \cdot d}{a_\Gamma} = \frac{4 \cdot G}{\pi \cdot d \cdot \rho_{ж} \cdot a_\Gamma} = \frac{4 \cdot 0,02}{3,14 \cdot 0,032 \cdot 989,1 \cdot 16,94 \cdot 10^{-8}} = 4752.$$

Находим коэффициент теплоотдачи из критериального уравнения Нуссельта:

$$\begin{aligned} \alpha &= \lambda_c \cdot 0,35 \cdot (Pe_\Gamma)^{0,3} (Gr \cdot Pr)_\Gamma^{0,18} d^{-0,52} l^{-0,48} = \\ &= 0,6835 \cdot 0,35 \cdot (4752)^{0,3} \left(\frac{7,73 \cdot 10^{-4} \cdot 9,81 \cdot (0,032)^3}{(0,286 \cdot 10^{-6})^2} (160 - 47,5) \cdot 1,69 \right)^{0,18} (0,032)^{-0,52} l^{-0,48} = \\ &= 348 \cdot l^{-0,48}. \end{aligned}$$

Находим коэффициент теплоотдачи из уравнения теплового баланса

$$\alpha = \frac{G \cdot C_{P,ж} (t_{\text{вых}} - t_{\text{вх}})}{\pi \cdot d \cdot (t_c - t_{\text{вх}}) l} = \frac{0,02 \cdot 4174 \cdot (80 - 15)}{3,14 \cdot 0,032 \cdot (160 - 15) \cdot l} = \frac{372}{l}.$$

Приравниваем найденные значения коэффициентов теплоотдачи:

$$348 \cdot l^{-0,48} = \frac{372}{l}. \quad l^{0,52} = \frac{372}{348} = 1,069. \quad l = 1,14 \text{ м.}$$

Проверяем применимость критериального уравнения Нуссельта:

$$\frac{l}{d} = \frac{1,14}{0,032} = 35,6; \quad Pe_\Gamma \frac{d}{l} = 4752 \frac{1}{35,6} = 133,5;$$

$$\left(Pe_\Gamma \frac{d}{l} \right)_{ac} \approx 1,5 \cdot \left((Gr \cdot Pr)_\Gamma \frac{d}{l} \right)_\Gamma^{0,25} = 1,5 \left(5,8 \cdot 10^8 \cdot \frac{1}{35,6} \right)^{0,25} = 95,2.$$

Поскольку

$$20 \leq \frac{l}{d} \leq 130 \text{ и } \left(Pe_\Gamma \frac{d}{l} \right)_{ac} \leq Pe_\Gamma \frac{d}{l} \leq 1100,$$

то критериальное уравнение Нуссельта применимо для данных условий.

Пример 4.5.5. Определить коэффициент теплоотдачи от стенки трубки конденсатора паротурбинной установки к охлаждающей воде, количество передаваемой теплоты и длину трубки. Средняя по длине температура стенки $t_c = 32^\circ \text{C}$. Внутренний диаметр трубки $d = 28$ мм. Температура воды на входе

равна $t_{\text{вх}}=15\text{ }^{\circ}\text{C}$, на выходе – $t_{\text{вых}}=24\text{ }^{\circ}\text{C}$. Средняя скорость воды поддерживается равной $w = 1,5\text{ м/с}$.

Решение.

Определяем среднюю температуру воды $t_{\text{ж}} = 0,5(t_{\text{вх}}+t_{\text{вых}}) = 0,5(15+24) = 19,5\text{ }^{\circ}\text{C}$ и находим ее физические параметры $\nu_{\text{ж}} = 1,021 \cdot 10^{-6}\text{ м}^2/\text{с}$;

$$C_{P_{\text{ж}}} = 4,183 \frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{град}}; \lambda_{\text{ж}} = 0,598 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{град}}; \rho_{\text{ж}} = 998,2\text{ кг/м}^3; Pr_{\text{ж}} = 7,035.$$

По $t_c = 32\text{ }^{\circ}\text{C} - Pr_c = 5,2$. Число $Re_{\text{ж}} = \frac{w \cdot d}{\nu_{\text{ж}}} = \frac{1,5 \cdot 0,028}{1,021 \cdot 10^{-6}} = 41,14 \cdot 10^3 > 1 \cdot 10^4$.

Таким образом, режим движения турбулентный и расчет теплоотдачи можно произвести по формуле:

$$Nu_{\text{ж}} = 0,021 \cdot Re_{\text{ж}}^{0,8} \cdot Pr_{\text{ж}}^{0,43} \cdot \left(\frac{Pr_{\text{ж}}}{Pr_c} \right)^{0,25} \cdot \varepsilon_l,$$

где индексы «ж» и «с» означают выбор параметров воды по ее средней температуре; ε_l – поправка на начальный участок, значения которой приведены в таблице 4.2.

Таблица 4.2

Re	l/d								
	1	2	5	10	15	20	30	40	50
$1 \cdot 10^4$	1,65	1,5	1,34	1,23	1,17	1,13	1,07	1,03	1
$2 \cdot 10^4$	1,51	1,4	1,27	1,18	1,13	1,10	1,05	1,02	1
$5 \cdot 10^4$	1,34	1,27	1,18	1,13	1,10	1,08	1,04	1,02	1
$1 \cdot 10^5$	1,28	1,22	1,15	1,10	1,08	1,06	1,03	1,02	1

Более точные результаты при значениях $Re_{\text{ж}} > 1 \cdot 10^5$ или $Pr_{\text{ж}} > 5$ могут быть получены по формуле:

$$Nu_{\text{ж}} = \frac{\frac{\xi}{8} Re_{\text{ж}} Pr_{\text{ж}}}{12,7 \sqrt{\frac{\xi}{8}} \cdot (Pr_{\text{ж}}^{2/3} - 1) + 1,07} \left(\frac{\mu_{\text{ж}}}{\mu_c} \right)^n,$$

где $\xi = \frac{1}{(1,82 \cdot \lg Re_{\text{ж}} - 1,64)^2}$ – коэффициент сопротивления трения при изотермическом турбулентном течении жидкости в гладких трубах. При нагревании $n = 0,11$; при охлаждении – $n = 0,25$.

При неизвестной длине трубки расчет ведем методом последовательных

приближений. Поправку на начальный участок принимаем $\varepsilon_l = 1$. Находим коэффициент теплоотдачи от стенки трубы к воде:

$$Nu_{ж} = 0,021(41,14 \cdot 10^3)^{0,8} (7,035)^{0,43} \left(\frac{7,035}{5,2}\right)^{0,25} = 220,1;$$

$$\alpha = Nu_{ж} \frac{\lambda_{ж}}{d} = 220,1 \frac{0,598}{0,028} = 4700 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{град}}.$$

Рассчитываем расход воды через трубку:

$$G = w \cdot \rho_{ж} \frac{\pi \cdot d^2}{4} = 1,5 \cdot 998,2 \frac{3,14 \cdot (0,028)^2}{4} = 0,921 \text{ кг/с};$$

количество передаваемой теплоты

$$Q = G \cdot C_{pж} (t_{\text{ВЫХ}} - t_{\text{ВХ}}) = 0,921 \cdot 4183 \cdot (24 - 15) = 34673 \text{ Вт}.$$

Находим среднелогарифмический температурный напор:

$$\Delta t = \frac{t_{\text{ВЫХ}} - t_{\text{ВХ}}}{2,31 \lg \frac{t_c - t_{\text{ВХ}}}{t_c - t_{\text{ВЫХ}}}} = \frac{24 - 15}{2,31 \lg \frac{32 - 15}{32 - 24}} = 11,9 \text{ } ^\circ\text{C}$$

и длину трубки $l = \frac{Q}{\alpha \cdot \Delta t \cdot \pi \cdot d} = \frac{34673}{4700 \cdot 11,9 \cdot 3,14 \cdot 0,028} = 7,05 \text{ м}.$

Рассчитываем $\frac{l}{d} = \frac{7}{0,028} = 250$. При расчете принято $\varepsilon_l = 1$, что

справедливо при $\frac{l}{d} > 50$, тогда производить следующее приближение не требуется.

Пример 4.5.6. По трубке с внутренним диаметром $d = 18$ мм и $l/d > 50$ перекачивается вода со скоростью $w = 1,5$ м/с, нагреваясь от $t_{\text{ВХ}} = 10$ °С до $t_{\text{ВЫХ}} = 60$ °С. Температура внутренней стенки трубы составляет $t_c = 105$ °С. Определить коэффициент сопротивления трения и сравнить его со значением коэффициента при изотермическом течении.

Решение.

Находим среднюю температуру воды $t_{ж} = 0,5(t_{\text{ВХ}} + t_{\text{ВЫХ}}) = 35$ °С и определяем ее физические параметры $\nu_{ж} = 0,732 \cdot 10^{-6}$ м²/с; $Pr_{ж} = 4,865$;

$$\mu_{ж} = 727,4 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{М}^2}; \quad \mu_c = 270,7 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{М}^2}.$$

Рассчитываем число $Re_{ж} = \frac{w \cdot d}{\nu_{ж}} = \frac{1,5 \cdot 0,018}{0,732 \cdot 10^{-6}} = 36885$.

При турбулентном режиме движения несжимаемой жидкости в гладких трубах в неизотермических условиях коэффициент сопротивления трения при $3,3 \cdot 10^3 < Re_{ж} < 2,5 \cdot 10^5$; $0,3 < \frac{\mu_c}{\mu_{ж}} < 38$ и $1,3 < Pr_{ж} < 178$ рассчитывается по

формуле:

$$\xi = \xi_{и} \left(\frac{\mu_c}{\mu_{ж}} \right)^n,$$

где $\xi_{и} = \frac{1}{(1,82 \cdot \lg Re_{ж} - 1,64)^2}$ – коэффициент сопротивления в изотермических условиях; $\frac{\mu_c}{\mu_{ж}}$ – отношение коэффициентов динамической вязкости жидкости, выбранных при температурах стенки и средней температуре жидкости; $n = 0,14$ при нагревании жидкости и $n = 0,28 Pr_{ж}^{-0,25}$ при ее охлаждении.

$$\xi_{и} = \frac{1}{(1,82 \cdot \lg Re_{ж} - 1,64)^2} = \frac{1}{(1,82 \cdot \lg 36885 - 1,64)^2} = 0,0224;$$

$$\xi = \xi_{и} \left(\frac{\mu_c}{\mu_{ж}} \right)^n = 0,0224 \left(\frac{270,7}{727,4} \right)^{0,14} = 0,0195; \quad \frac{\xi}{\xi_{и}} = 0,87.$$

5. ТЕПЛОТДАЧА ПРИ ВЫНУЖДЕННОМ ТЕЧЕНИИ ЖИДКОСТИ В ТРУБАХ

5.1. Основные режимы течения в трубах

Течение жидкости в трубах классифицируют на ламинарное и турбулентное в зависимости от значения числа Re :

$$Re = \frac{\bar{w} \cdot d}{\nu},$$

где \bar{w} – средняя скорость жидкости.

При $Re < Re_{кр} \approx 2000$ – течение ламинарное. $Re_{кр1} = 2000$ – нижнее критическое число Re . В случае $Re > 2000$ и возмущении потока, ламинарный режим течения нарушается. Развитое турбулентное течение устанавливается при $Re > Re_{кр2} \sim 10^4$. Течение при $Re = 2 \cdot 10^3 \div 10^4$ называют переходным.

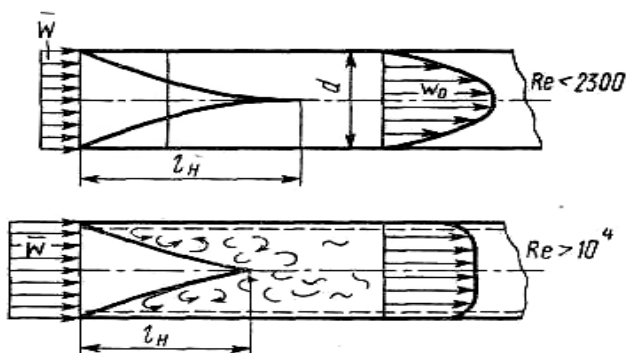


Рисунок 5.1 – Влияние начального участка на образование пограничного слоя

При движении у стенок трубы образуется гидродинамический пограничный слой, толщина которого непрерывно возрастает. На определенном расстоянии от входа пограничный слой заполняет все поперечное сечение. Расстояние от входа в трубу до слияния пограничных слоев называется длиной гидродинамического начального участка или участком гидродинамической стабилизации l_H .

Гидродинамический начальный участок существует при обоих режимах течения. Однако при $Re > 2000$ в начальном участке может существовать ламинарный режим пограничного слоя, который при достижении критической толщины переходит в турбулентный. Толщина турбулентного слоя увеличивается, и слой заполняет все сечение. Поток в зоне изменения режима течения характеризуется перемежаемостью движения.

При $Re > 5 \cdot 10^4$ – со входа в трубу развивается турбулентный пограничный слой.

Длина гидродинамического начального участка зависит от Re , степени турбулентности потока на входе и других факторов.

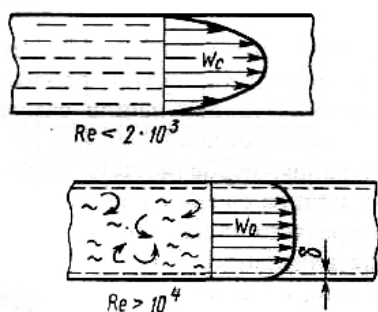


Рисунок 5.2 – Распределение скорости при ламинарном и турбулентном течении потока трубы

Для ламинарного изотермического движения скорости по сечению потока, когда он гидродинамически стабилизирован ($x > l_H$), распределяются по параболе:

$$w_x = w_{\max} \left[1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right],$$

где r_0 – радиус; w_{\max} – скорость на оси трубы.

При турбулентном течении большая часть трубы заполнена турбулентным потоком. При высоких значениях Re толщина ламинарного подслоя min , хотя именно вязкий подслой определяет термическое сопротивление теплоотдачи. При турбулентных потоках скорость по сечению трубы распределяется по усеченной параболе. В пределах вязкого подслоя можно принять линейное изменение скорости. Чем больше Re , тем резче изменяется скорость у стенки вследствие меньшей толщины подслоя.

При наличии теплообмена наблюдается нагрев или охлаждение пристенных слоев, в то время как температура ядра потока остается равной температуре выхода, т. е. все изменение температуры на этом участке осуществляется в пристенном слое.

У поверхности трубы, начиная от ее входного сечения, образуется тепловой пограничный слой, толщина которого постоянно увеличивается. Через определенное расстояние $l_{н.т}$ тепловой пограничный слой заполняет все сечение трубы, где $l_{н.т}$ – участок термической стабилизации или начальный тепловой участок. При $x > l_{н.т}$ – теплообмен считают стабилизированным.

Изменение температуры потока по сечению трубы на начальном ее участке $\frac{\partial t}{\partial r}$ происходит значительно быстрее температурного напора $\Delta t = \bar{t} - t_c$, где \bar{t} – среднemasсовая по сечению температура жидкости. Поэтому, в соответствии с уравнением теплоотдачи

$$\alpha = -\frac{\lambda}{\Delta t} \left(\frac{\partial t}{\partial r} \right),$$

α на участке тепловой стабилизации резко падает и становится постоянным при стабилизации теплообмена.

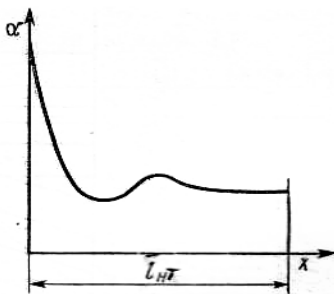


Рисунок 5.3 – Изменение α по длине трубы при турбулентном течении потока

Длина участка тепловой стабилизации $l_{н.т}$ зависит от большого количества факторов: λ жидкости, Re , распределения температур на входе, наличия гидродинамической стабилизации. При ламинарном режиме течения жидкости и постоянных ее физических параметрах при $t_c = const \rightarrow l_{н.т} = 0,55 Pe \cdot d$; при $q_c = const \rightarrow l_{н.т} = 0,07 Pe \cdot d$. При турбулентном течении $l_{н.т} = (10 \div 15)d$.

При ламинарном течении могут быть либо вязкостный, либо вязкостно-гравитационный режимы течения.

Вязкостный существует при преобладании сил вязкости над подъемными силами, когда малые диаметры труб и температурные напоры, но большая вязкость жидкости.

В вязкостно-гравитационном режиме подъемные и вязкостные силы соизмеримы.

При вязкостном режиме распределение скоростей по сечению трубы зависит от направления теплового потока (рис. 5.4).

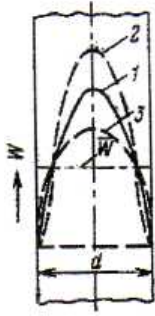


Рисунок 5.4 – Распределение скорости по сечению канала при вязкостном режиме течения жидкости:
 1 – изотермическое; 2 – охлаждение;
 3 – нагревание

В случае нагревания жидкости ее температура у стенки будет больше, чем при охлаждении, а значит – меньше вязкость. Поэтому скорость жидкости у стенки при нагревании больше, чем при охлаждении. Следовательно, α выше.

При вязкостно-гравитационном режиме значительное влияние на теплообмен оказывает направление токов естественной конвекции (вызванной разностью плотностей нагретых и холодных частиц) и ее интенсивность.

В зависимости от направления вынужденного и свободного движения различают:

1. Направления вынужденного и свободного движений совпадают (рис. 5.5) при нагревании жидкости и ее подъемном движении в вертикальной трубе: 1 – суммарная кривая скорости; 2 – распределение скорости при вынужденном движении; 3 – при свободном движении.

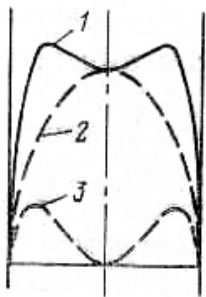


Рисунок 5.5 – Распределение скоростей в канале при подъемном течении жидкости

2. Направления свободной и вынужденной конвекции взаимно перпендикулярны. Наблюдается в горизонтальных трубах (рис. 5.6). При нагревании жидкости у стенки возникают восходящие токи и нисходящие – в середине трубы. Жидкость движется, напоминая винтовую линию. За счет турбулизации теплоотдача увеличивается. В данном случае α выше.

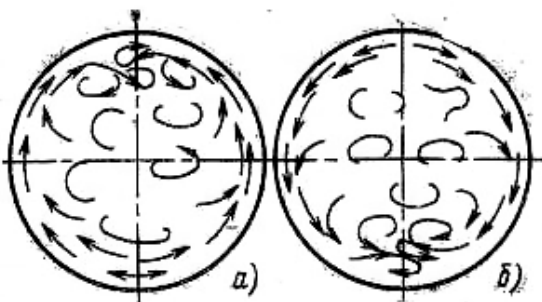


Рисунок 5.6 – Поперечные токи в горизонтальной трубе при течении жидкости:
 а – нагревание; б – охлаждение

3. Направления вынужденной и свободной конвекции противоположны:

восходящее течение в вертикальной трубе и охлаждение (рис. 5.7). Скорость жидкости у стенки из-за противоположных по направлению токов свободной конвекции уменьшается. Иногда возникают возвратные течения (вихревые). Расчет интенсивности теплообмена проводится как при турбулентном течении жидкости.

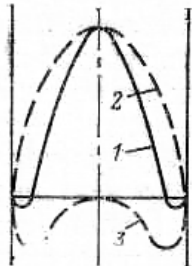


Рисунок 5.7 – Распределение скоростей в канале при противоположном движении теплоносителей. Обозначения такие же, как на рисунке 5.5

5.2. Теплоотдача при течении жидкости в гладких трубах и каналах

5.2.1. Ламинарный режим

При гидродинамическом стабилизированном ламинарном течении жидкости с постоянными физическими свойствами ее скорость в канале распределяется по закону параболы:

$$w_x = 2\bar{w}_x \left[1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right] \text{ или } W_x = 2(1 - R^2),$$

где $W_x = \frac{w_x}{\bar{w}_x}$ и $R = \frac{r}{r_0}$.

Подставим W_x в уравнение Лайона, полученного для определения стабилизированного значения числа Nu:

$$\frac{1}{Nu_d} = 2 \int_0^1 \frac{\left(\int_0^R W_x R \cdot dR \right)^2}{\left(1 + \frac{Pr}{Pr_m} \frac{\varepsilon_s}{\nu} \right) R} dR = 2 \int_0^1 \frac{dR}{R} \left[\int_0^R (1 - R^2) R \cdot dR \right]^2 = \frac{11}{48}; \text{ или } Nu_d = 4,36.$$

Данный результат получен при $q_c = const$. При $t_c = const \rightarrow Nu = 3,66$.

Такие значения могут быть получены для параболического распределения скоростей, когда постоянны физические параметры жидкости при малых температурных напорах. Поэтому необходимая адекватность полученного результата по приведенным зависимостям и реальным данным может быть недостигнута. Кроме того, данные зависимости не учитывают теплоотдачу начального участка. На начальном участке условия теплообмена в трубе близки к условиям при продольном омывании пластины, поэтому можно

воспользоваться рассмотренными расчетными зависимостями в предыдущем разделе.

Учет переменности физических параметров и ряда других факторов значительно усложняют задачу. Поэтому практические расчеты ведут по эмпирическим формулам, полученным для нагревания или охлаждения жидкости при различных положениях трубы. Приближенная оценка среднего коэффициента теплоотдачи для вязкостно-гравитационного режима может быть получена по зависимости М. А. Михеева:

$$Nu_{жд} = 0,15 Re_{жд}^{0,33} Pr_{жд}^{0,33} (Gr_{жд} \cdot Pr_f)^{0,1} \left(\frac{Pr_{ж}}{Pr_c} \right)^{0,25} \varepsilon_\ell \quad (5.1)$$

В (5.1) определяющей температурой является средняя температура жидкости в трубе $t_{ж} = 0,5(t_{вх} + t_{вых})$; определяющий размер – внутренний диаметр трубы. ε_ℓ – поправка на длину трубы. При $l/d > 50$ - $\varepsilon_\ell = 1$. При $l/d < 50$:

l/d	1	2	5	10	15	20	30	40	50
ε_ℓ	1,9	1,7	1,44	1,28	1,18	1,13	1,05	1,02	1

5.2.2. Турбулентный режим

Для определения плотности теплового потока на стенке при турбулентном пограничном слое было получено уравнение (4.77):

$$q_w = \frac{s_c \cdot c_p (t_0 - t_c)}{w_0 \left[1 + \frac{12}{w_0} \sqrt{\frac{s_c}{\rho}} \left(Pr^{2/3} - 1 \right) \right]},$$

где s_c – касательное напряжение на стенке.

Пусть $w_0 = \bar{w}$, $t_0 = \bar{t}$ – средние по сечению скорость и температура жидкости.

В случае безотрывного течения, когда гидравлическое сопротивление определяется силами трения, s_c находят, зная гидравлическое сопротивление ζ для стабилизированного течения.

Если перепад давления на участке идет на преодоление трения стенки, то $\Delta P \cdot f = S_c \cdot F$, где f – поперечное сечение трубы; F – поверхность рассматриваемого участка трубы. Перепад давления находим по закону Дарси:

$$\Delta P = \zeta \frac{l}{d} \frac{\rho \bar{w}^2}{2}. \text{ Тогда } S_c = \Delta P \frac{f}{F} = \zeta \frac{l}{d} \frac{\rho \bar{w}^2}{2} \frac{f}{F}. \text{ Для круглой трубы: } \frac{l}{d} \cdot \frac{f}{F} = \frac{1}{4}.$$

Отсюда

$$S_c = \frac{\zeta}{8} \rho \cdot w^2. \quad (5.2)$$

Подставим (5.2) в уравнение плотности теплового потока на стенке (4.77) и разделим его правую и левую части на $\rho \cdot c_p \cdot \bar{w} (t - t_c)$. После деления

получим:

$$St = \frac{\alpha}{\rho \cdot c_p \cdot \bar{w}} = \frac{\zeta/8}{1 + 12 \sqrt{\frac{\zeta}{8}} (Pr^{\frac{2}{3}} - 1)}. \quad (5.3)$$

$$\text{При } Pr = 1 \rightarrow St = \frac{\zeta}{8} \text{ или } Nu = \frac{\zeta}{8} Re \cdot Pr. \quad (5.4)$$

Если в (5.4) подставить экспериментально найденную функцию $f(Pr) = 0,91Pr^{0,43}$, а ζ рассчитывать, как $\zeta = 0,184Re_d^{-0,2}$, то получим:

$$Nu_{жд} = 0,021 Re_{жд}^{0,8} Pr_{ж}^{0,43} (Pr_{ж} / Pr_c)^{0,25} \varepsilon_\ell. \quad (5.5)$$

$$\text{При } l/d > 50 \rightarrow \varepsilon_\ell = 1. \quad \text{При } l/d < 50 \rightarrow \varepsilon_\ell \approx 1 + \frac{2}{l/d}.$$

Определяющая температура - $t_{ж} = 0,5(t_{вх} + t_{вых})$. Определяющий размер – эквивалентный диаметр: $d_s = \frac{4f}{\Pi}$.

5.2.3. Переходный режим

При числах $Re = 2 \cdot 10^3 \div 10^4$ теплоотдача зависит от большого числа факторов, трудно поддающихся учету. При $Re = const$ коэффициент перемежаемости возрастает с увеличением расстояния от входа в трубу, а также возрастает и с увеличением Re . Чем больше Re , тем на меньшей длине трубы может быть ламинарный режим. Переход от ламинарного режима течения к турбулентному может не одновременно происходить в ядре потока и в пограничном слое. Чем больше степень турбулентности на входе в трубу, тем меньше длина ламинарного пограничного слоя. Обобщенные методики расчета теплообмена в переходной области отсутствуют. Приближенная оценка max и min значений может быть получена по уравнениям для турбулентного и ламинарного режимов течения.

5.2.4. Изогнутые трубы

При движении в таких трубах в жидкости возникают центробежные силы, создающие в поперечном сечении циркуляционные токи (вторичную циркуляцию). В результате возникает движение жидкости по винтовой линии. С уменьшением радиусагиба R влияние центробежного эффекта увеличивается. Вторичная циркуляция может наблюдаться как при турбулентном, так и при ламинарном течении.

$$Re'_{кр} \approx 2000. \quad Re''_{кр} = 18500 \left(\frac{d}{2R} \right)^{0,28}; \quad Re < Re'_{кр} - \text{ламинарное течение без}$$

вторичной циркуляции. При $Re'_{кр} < Re < Re''_{кр}$ – ламинарное течение со вторичной циркуляцией. Коэффициент теплоотдачи α рассчитывается по уравнению (5.5).

При $Re > Re_{кр}''$ – турбулентное течение со вторичной циркуляцией. В этом случае расчет ведется по уравнению (5.5) с умножением на поправку

$$\varepsilon_{изг} = 1 + 1.8 \frac{d}{R}.$$

5.2.5. Теплоотдача в шероховатых трубах

При течении жидкости в данных условиях происходят дополнительные гидродинамические преобразования, связанные с высотой бугорка шероховатости δ и толщиной вязкого подслоя δ_{Π} . Рассматривают два основных случая:

- бугорки шероховатости глубоко нагружены в подслое ($\delta < \delta_{\Pi}$). В этом случае течение в подслое не нарушается, бугорки обтекаются жидкостью без ее отрыва.

- бугорки шероховатости выходят за пределы вязкого подслоя ($\delta > \delta_{\Pi}$). В этом случае происходит отрывное, турбулентное обтекание жидкостью бугорков. Пульсации у стенки заметно увеличиваются. Все это приводит к возрастанию теплоотдачи.

При ламинарном течении ни коэффициент α , ни гидравлическое сопротивление не зависят от относительной шероховатости. Теплосъем может быть увеличен за счет большей поверхности теплообмена шероховатой стенки.

При турбулентном течении эти факторы влияют на α . С уменьшением δ/d возрастает $Re_{кр}$, после которого меняется α . С увеличением α увеличивается гидравлическое сопротивление.

Оптимальный относительный шаг искусственной шероховатости: $(S/\delta)_{\text{опт}} = 12-14$; где S – расстояние между соседними неровностями. Для расчета средней теплоотдачи может быть использована зависимость:

$$Nu_{ж.д.экв} = 0,022 Re_{ж.д}^{0.8} Pr_{ж}^{0.47} (Pr_{ж} / Pr_c)^{0.25} \cdot \varepsilon_{ш}, \quad (5.6)$$

$$\varepsilon_{ш} = \exp \left[0,85 \frac{(S/\delta)_{\text{опт}}}{S/\delta} \right]; \quad \text{при } \frac{S}{\delta} > \left(\frac{S}{\delta} \right)_{\text{опт}};$$

где

$$\varepsilon_{ш} = \exp \left[0,85 \frac{S/\delta}{(S/\delta)_{\text{опт}}} \right]; \quad \text{при } \frac{S}{\delta} < \left(\frac{S}{\delta} \right)_{\text{опт}}.$$

Определяющие температура и линейный размер аналогичны уравнению (5.5).

6. ТЕПЛООТДАЧА ПРИ ВЫНУЖДЕННОМ ПОПЕРЕЧНОМ ОМЫВАНИИ ТРУБ И ПУЧКОВ ТРУБ

6.1. Одиночная труба

Плавное, безотрывное обтекание цилиндра, как показано на рисунке 6.1, существует до

$$Re = 5 = \frac{w_0 \cdot d}{\nu},$$

где w_0 – скорость набегающего потока, d – внешний диаметр.

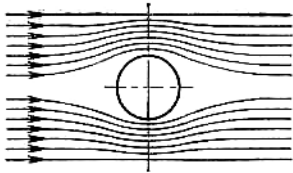


Рисунок 6.1 – Безотрывное омывание цилиндра

При $Re > 5$ картина меняется. Пограничный слой, образующийся на передней половине трубы, в кормовой части отрывается от поверхности и позади цилиндра образуются два симметричных вихря. Вихри периодически отрываются от трубы и уносятся потоком жидкости, образуя вихревую дорожку (рис. 6.2).

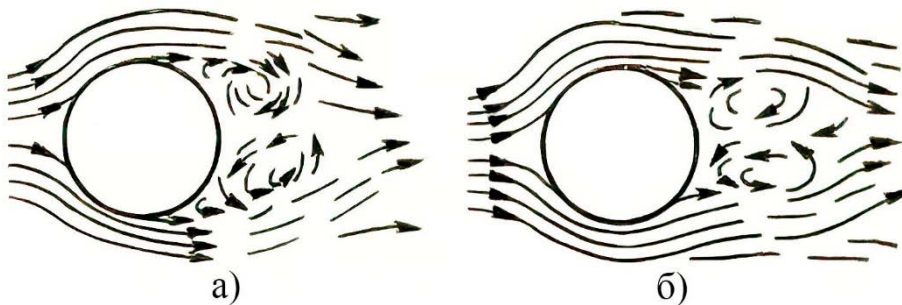


Рисунок 6.2 – Обтекание цилиндра при отрыве ламинарного (а) и турбулентного (б) пограничного слоя

Частота отрыва вихря растет до $Re \approx 10^3$. Затем рост частоты прекращается и при $Re = 10^3 \div 2 \cdot 10^5$ становится постоянной величиной, характеризуемой числом Струхалия:

$$Sh = \frac{f \cdot d}{w_0} = 0,2,$$

где f – частота отрыва.

Отрыв пограничного слоя происходит из-за снижения скорости в кормовой части трубы ($\varphi > 90^\circ$), повышения вследствие этого статического

давления, под действием которого возникают возвратные течения, оттесняющие пограничный слой с поверхности тела.

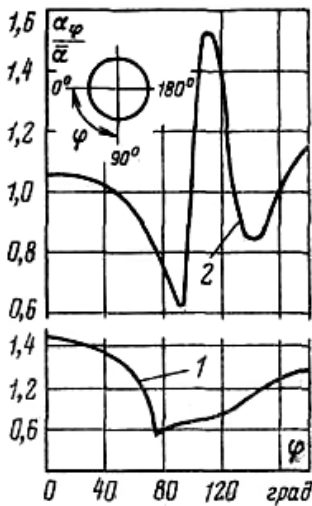


Рисунок 6.3 –
Изменение
теплоотдачи
по окружности
цилиндра

При невысоких числах Re (рис. 6.2,а) и малой степени турбулентности набегающего потока происходит отрыв ламинарного пограничного слоя ($\varphi_{кр} \approx 82^\circ$). При высоких числах Re , рост статического давления приводит не к отрыву, а к переходу режима течения в слое в турбулентное, обладающего большей кинетической энергией. В результате место отрыва турбулентного слоя резко смещается по потоку – $\varphi_{кр} \approx 140^\circ$ (рис. 6.2,б).

При постоянных числах Re повышение степени турбулентности приводит к уменьшению φ (рис. 6.3). Кривая 1 соответствует теплоотдаче при отрыве ламинарного пограничного слоя, кривая 2 – турбулентного.

Падение α на лобовой части трубы происходит из-за роста толщины ламинарного пограничного слоя. Минимум α на кривой 1 соответствует месту отрыва слоя. В кормовой части трубы наблюдается сложный вихревой характер движения. При малых Re теплоотдача на корме трубы невысокая. С возрастанием Re α могут сравняться с интенсивностью теплообмена на лобовой части. На кривой 2 первый минимум α соответствует переходу ламинарного течения в слое в турбулентное. α резко возрастает. Второй минимум α соответствует месту отрыва турбулентного пограничного слоя. После отрыва труба омывается вихрями. Вследствие этого α возрастает. Расчетные зависимости по теплоотдаче были обобщены А. Жукаускасом:

$$5 < Re < 10^3 \quad \rightarrow \quad Nu_{ж} = 0,5 Re_{ж}^{0,5} Pr_{ж}^{0,38} \left(\frac{Pr_{ж}}{Pr_c} \right)^{0,25}; \quad (6.1)$$

$$10^3 < Re < 2 \cdot 10^5 \quad \rightarrow \quad Nu_{ж} = 0,25 Re_{ж}^{0,6} Pr_{ж}^{0,38} \left(\frac{Pr_{ж}}{Pr_c} \right)^{0,25}; \quad (6.2)$$

$$Re = 2 \cdot 10^5 \div 2 \cdot 10^6 \quad \rightarrow \quad Nu_{ж} = 0,023 Re_{ж}^{0,8} Pr_{ж}^{0,38} \left(\frac{Pr_{ж}}{Pr_c} \right)^{0,25}. \quad (6.3)$$

В уравнениях (6.1 - 6.3) определяющий линейный размер – d . Скорость взята в узком сечении канала. Определяющая температура: $t_{ж} = 0,5(t_{вх} + t_{вых})$.

С увеличением степени турбулентности потока α увеличивается:

$$Nu = Nu_0 [1 + 0,09(Re \cdot Tu)^{0,2}],$$

где Nu_0 – определяется по (6.2).

С уменьшением угла атаки (φ) коэффициент теплоотдачи α уменьшается:

$$\alpha_{\varphi} = \bar{\alpha}_{\varphi=90^\circ} (1 - 0,54 \cos^2 \varphi).$$

6.2. Теплоотдача при поперечном омывании пучков труб

В промышленности трубы используются в пучках, которые классифицируются на коридорные и шахматные. Основными характеристиками пучка являются поперечный шаг S_1 и продольный шаг S_2 .

Форма течения жидкости в пучке зависит от характера течения до пучка. При низких Re течение может оставаться ламинарным.

Турбулентный пограничный слой на стенках труб пучка может появиться при меньших Re , чем при омывании одиночной трубы: $Re_{кр} = 10^5$.

При $Re < 1 \cdot 10^5$ передняя часть труб омывается ламинарным пограничным слоем, а кормовая – отдельными неупорядоченными вихрями. Таким образом, общий характер течения – смешанное. Соответственно выделяются три режима омывания: ламинарное, смешанное и турбулентное. Для смешанного режима $Re = 1 \cdot 10^3 \div 1 \cdot 10^5$.

Омывание первого ряда труб шахматного и коридорного пучков (рис. 6.4) аналогично омыванию одиночного цилиндра. Характер омывания остальных труб зависит от типа пучка.

Трубы второго и последующего рядов коридорного пучка находятся в вихревой зоне, образованной впереди стоящими трубками. Однако основной поток проходит в продольных коридорах между рядами. Поэтому как лобовая, так и кормовая часть труб коридорного пучка омываются менее интенсивно по сравнению с аналогичными трубками первого ряда.

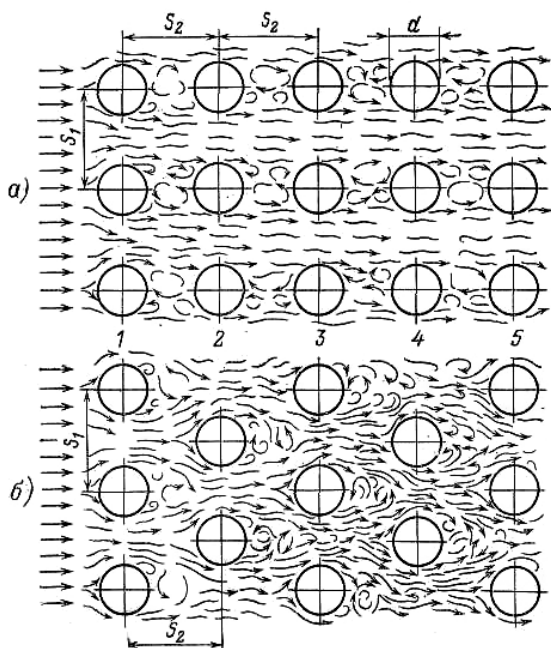


Рисунок 6.4 – Характер движения жидкости в коридорном (а) и шахматном (б) пучках труб

Характер омывания труб шахматного пучка практически аналогичен трубкам первого ряда.

Изменения α по окружности труб первого ряда коридорного и шахматного пучков соответствуют распределению α для одиночной трубы (рис. 6.5). Для остальных труб коридорного пучка максимум α наблюдается при $\varphi \approx 50^\circ$.

Два максимума α приходятся на удар набегающих струй. Лобовая часть труб интенсивному воздействию потока не подвергается. Поэтому α невысокие. В трубах шахматного пучка максимум теплоотдачи приходится на лобовую часть.

Средняя теплоотдача труб первых рядов определяется начальной турбулентностью потока.

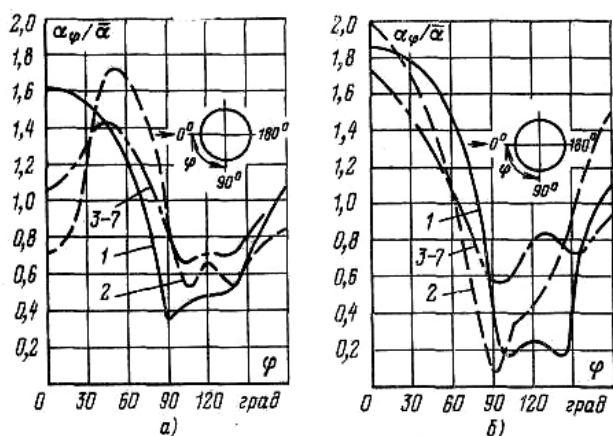


Рисунок 6.5 – Изменение α по периметру труб для различных рядов коридорных (а) и шахматных (б) пучков

Начиная с третьего ряда, теплоотдача стабилизируется, поскольку степень турбулентности потока определяется компоновкой пучка.

Теплоотдача первого ряда шахматного пучка составляет 60 % теплоотдачи третьего ряда, второго – 70 %.

В коридорных пучках на первый ряд приходится 60 % от α третьего, а α второго – 90 % от α третьего. Возрастание теплоотдачи по рядам объясняется дополнительной турбулизацией потока в пучке.

Если же поток дополнительно турбулизирован до пучка, то α первых рядов может быть выше α глубинных.

При смешанном режиме $\alpha_{ср}$ ряда может определяться согласно зависимости:

$$Nu_{ж} = c Re_{ж}^n Pr_{ж}^{0,38} \left(\frac{Pr_{ж}}{Pr_{с}} \right)^{0,25} \varepsilon_s \quad (6.4)$$

Для шахматных пучков $c = 0,4$; $n = 0,6$. Для коридорных пучков $c = 0,26$; $n = 0,65$. ε_s – учитывает влияние относительных шагов: S_1/d – относительный поперечный и S_2/d – относительный продольный шаги. $\varepsilon_s = (S_2/d)^{-0,15}$ – для коридорного; $\varepsilon_s = (S_1/S_2)^{1,6}$ при $S_1/S_2 < 2$ для шахматного и при $S_1/S_2 \geq 2$: $\varepsilon_s = 1,12$.

Определяющий размер – внешний диаметр. Скорость жидкости берется по узкому сечению пучка. Определяющая температура – средняя температура жидкости: $t_{ж} = 0,5(t_{вх} + t_{вых})$.

Средний для пучка труб коэффициент теплоотдачи определяется как:

$$\bar{\alpha} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + (n-2)\alpha_3}{n}$$

6.3. Примеры с решениями

Пример 6.3.1. Труба, диаметром $d = 32$ мм, охлаждается поперечным потоком воды. Скорость движения и средняя температура воды составляют: $w = 2,5$ м/с; $t_{ж} = 20$ °С. Определить необходимую температуру поверхности трубы для поддержания плотности теплового потока, равного $q = 60 \cdot 10^4$ Вт/м²; рассчитать значение коэффициента теплоотдачи.

Решение.

Определяем физические параметры воды по $t_{ж} = 20$ °С: $\nu_{ж} = 1,006 \cdot 10^{-6}$ м²/с;

$$\lambda_{\text{ж}} = 0,599 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{град}}; Pr_{\text{ж}} = 7,02.$$

$$\text{Рассчитываем режим движения воды: } Re_{\text{ж}} = \frac{w \cdot d}{\nu_{\text{ж}}} = \frac{2,5 \cdot 0,032}{1,006 \cdot 10^{-6}} = 79523.$$

Поскольку $1 \cdot 10 \leq Re_{\text{ж}} \leq 2 \cdot 10^5$, то расчет ведем по формуле:

$$Nu_{\text{ж}} = 0,25 \cdot Re_{\text{ж}}^{0,6} \cdot Pr_{\text{ж}}^{0,38} \cdot \left(\frac{Pr_{\text{ж}}}{Pr_{\text{с}}} \right)^{0,25}.$$

Вследствие того, что в формулу входит $Pr_{\text{с}}$, определяемое по $t_{\text{с}}$, которую необходимо найти по условию задачи, то решение необходимо проводить либо графическим методом, либо методом последовательных приближений.

Используем первый метод – графический.

Зададимся тремя значениями температуры стенки трубы: $t_{\text{с}1} = 40 \text{ } ^\circ\text{C}$; $t_{\text{с}2} = 60 \text{ } ^\circ\text{C}$; $t_{\text{с}3} = 80 \text{ } ^\circ\text{C}$. Вычислим для этих температур плотность теплового потока и построим график $q = f(t_{\text{с}})$. Для $t_{\text{с}1} = 40 \text{ } ^\circ\text{C}$, $Pr_{\text{с}1} = 4,31$ рассчитаем значение коэффициента теплоотдачи и плотность теплового потока

$$Nu_1 = 0,25 \cdot (79523)^{0,6} \cdot (7,02)^{0,38} \cdot \left(\frac{7,02}{4,31} \right)^{0,25} = 0,25 \cdot 871,6 \cdot 2,1 \cdot 1,13 = 517,08;$$

$$\alpha_1 = Nu_1 \frac{\lambda_{\text{ж}}}{d} = 517,08 \frac{0,599}{0,032} = 9679 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{C}};$$

$$q_1 = \alpha_1 \cdot \Delta t_1 = 9679 \cdot (40 - 20) = 193580 \text{ Вт/м}^2.$$

Для $t_{\text{с}2} = 60 \text{ } ^\circ\text{C}$, $Pr_{\text{с}2} = 2,98$ значение коэффициента теплоотдачи будет отличаться от α_1 только из-за изменения $Pr_{\text{с}}$. Следовательно,

$$\alpha_2 = \alpha_1 \left(\frac{Pr_{\text{с}1}}{Pr_{\text{с}2}} \right)^{0,25} \quad \text{и} \quad q_2 = q_1 \left(\frac{Pr_{\text{с}1}}{Pr_{\text{с}2}} \right)^{0,25} \frac{t_{\text{с}2} - t_{\text{ж}}}{t_{\text{с}1} - t_{\text{ж}}}.$$

$$\alpha_2 = 9679 \cdot \left(\frac{4,31}{2,98} \right)^{0,25} = 10614 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{C}} \quad \text{и} \quad q_2 = 193580 \cdot \left(\frac{4,31}{2,98} \right)^{0,25} \frac{60 - 20}{40 - 20} = 425876 \text{ Вт/м}^2.$$

$$\text{При } t_{\text{с}3} = 80 \text{ } ^\circ\text{C}, Pr_{\text{с}3} = 2,21 \quad \alpha_3 = 9679 \cdot \left(\frac{4,31}{2,21} \right)^{0,25} = 11438 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{C}}$$

$$\text{и} \quad q_2 = 193580 \cdot \left(\frac{4,31}{2,21} \right)^{0,25} \frac{80 - 20}{40 - 20} = 686283 \text{ Вт/м}^2.$$

По вычисленным значениям на графике (рис. 6.6) строим функцию $q = f(t_{\text{с}})$.

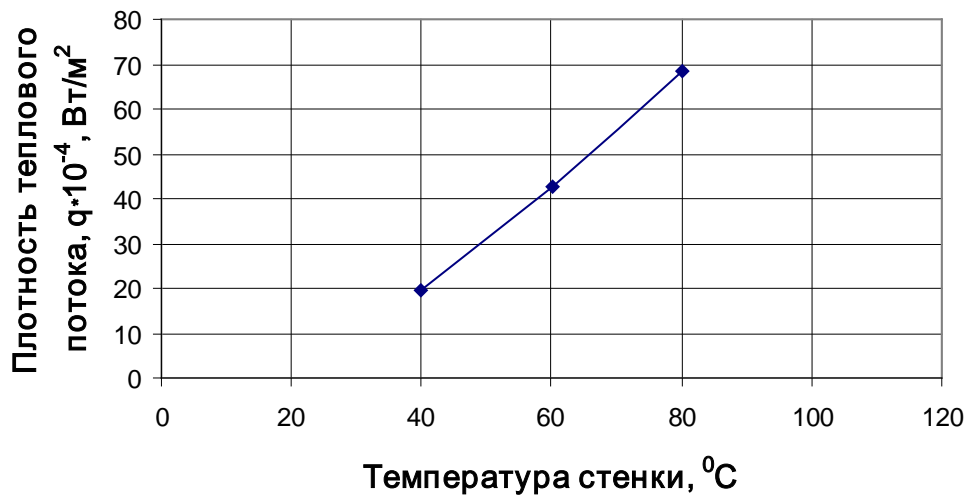


Рисунок 6.6 – Зависимость плотности теплового потока от температуры стенки

Из рисунка 6.6 находим $t_c = 74^{\circ}C$ при $q = 60 \cdot 10^4$ Вт/м². $Pr_c = 2,41$.

По найденной температуре находим коэффициент теплоотдачи:

$$Nu_{ж} = Nu_1 \cdot \left(\frac{Pr_{cl}}{Pr_c} \right)^{0,25} = 517,08 \cdot \left(\frac{4,31}{2,41} \right)^{0,25} = 598;$$

$$\alpha = Nu_{ж} \frac{\lambda_{ж}}{d} = 598 \frac{0,599}{0,032} = 11194 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{С}}.$$

Пример 6.3.2. В воздухоподогревателе шахматный пучок труб обтекается поперечным потоком воздуха. Внешний диаметр труб в пучке $d = 32$ мм. Поперечный шаг $s_1 = 2,5d$; продольный шаг $s_2 = 1,5d$. Средняя скорость в узком сечении пучка и средняя температура воздуха составляют соответственно $w = 9$ м/с и $t_{ж} = 160^{\circ}C$. Найти коэффициент теплоотдачи от поверхности труб к воздуху для третьего ряда пучка труб при условии, что температура поверхности труб $t_c = 500^{\circ}C$, а угол атаки равен $\varphi = 90^{\circ}$ и $\varphi = 60^{\circ}$.

Решение. По средней температуре воздуха находим его физические параметры: $\nu_{ж} = 30,09 \cdot 10^{-6}$ м²/с; $\lambda_{ж} = 0,0364 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{град}}$; $Pr_{ж} = 0,682$.

При $t_c = 500^{\circ}C$ $Pr_c = 0,687$. Рассчитываем число Рейнольдса

$$Re_{ж} = \frac{w \cdot d}{\nu} = \frac{9 \cdot 0,032}{30,09 \cdot 10^{-6}} = 9571.$$

Поскольку $1000 < Re_{ж} < 10^5$, применяем формулу:

$$Nu_{ж} = C \cdot Re_{ж}^n \cdot Pr_{ж}^{0,33} \cdot \left(\frac{Pr_{ж}}{Pr_c} \right)^{0,25} \cdot \varepsilon_s.$$

Так как $\frac{s_1}{s_2} = \frac{2,5}{1,5} = 1,66 < 2$, то $\varepsilon_s = \left(\frac{s_1}{s_2} \right)^{1/6} = (1,66)^{1/6} = 1,08$.

Для третьего ряда шахматного пучка

$$Nu_{ж} = 0,41 \cdot Re_{ж}^{0,6} \cdot Pr_{ж}^{0,33} \cdot \left(\frac{Pr_{ж}}{Pr_{с}} \right)^{0,25} \cdot \varepsilon_s = 0,41 \cdot (9571)^{0,6} \cdot (0,682)^{0,33} \cdot \left(\frac{0,682}{0,687} \right)^{0,25} \cdot 1,08 =$$

$$= 0,41 \cdot 245 \cdot 0,881 \cdot 0,998 \cdot 1,08 = 95,4.$$

Коэффициент теплоотдачи при $\varphi = 90^\circ$

$$\alpha = Nu_{ж} \frac{\lambda_{ж}}{d} = 95,4 \frac{0,0364}{0,032} = 108 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{град}}$$

При обтекании пучков труб под углом атаки φ , не равным 90° , $\alpha_\varphi = \varepsilon_\varphi \cdot \alpha$, где ε_φ – поправка на угол атаки, значения которой в зависимости от φ приведены в таблице 6.1.

Таблица 6.1

φ	90	80	70	60	50	40	30	20	10
ε_φ	1	1	0,98	0,94	0,88	0,78	0,67	0,52	0,42

При $\varphi = 60^\circ$, $\varepsilon_\varphi = 0,94$ коэффициент теплоотдачи составит:

$$\alpha_{\varphi=60^\circ} = 0,94 \cdot 108 = 101,51 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{град}}.$$

Пример 6.3.3. Трубчатый теплоуловитель бумагоделательной машины проектируется с коридорным расположением труб, $d = 38$ мм, поперечными и продольными шагами $s_1 = s_2 = 2,5d$. Число труб в одном ряду по ходу потока $m = 16$, число рядов труб $n = 30$. Температура воздуха из зала БДМ, поступающего в теплоуловитель, $t_{вх} = 20^\circ\text{C}$, на выходе из аппарата $t_{вых} = 40^\circ\text{C}$. Температура стенки трубы составляет $t_c = 60^\circ\text{C}$. Найти длину трубок теплоуловителя, чтобы при скорости воздуха в узком сечении пучка $w = 7$ м/с трубки обеспечивали теплосъем $Q = 125$ кВт.

Решение. Находим физические параметры воздуха по его средней температуре $t_{ж} = 0,5 \cdot (t_{вх} + t_{вых}) = 0,5 \cdot (20 + 40) = 30^\circ\text{C}$; $\nu_{ж} = 16 \cdot 10^{-6}$ м²/с; $Pr_{ж} = 0,701$; $\lambda_{ж} = 0,0267 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{град}}$. Определяем число Рейнольдса

$$Re_{ж} = \frac{w \cdot d}{\nu_{ж}} = \frac{7 \cdot 0,038}{16 \cdot 10^{-6}} = 16625.$$

Так как $10^3 \leq Re_{ж} \leq 10^5$, то используем для расчета следующую зависимость для труб третьего ряда коридорного пучка $Nu_{ж} = 0,26 \cdot Re_{ж}^{0,65} \cdot Pr_{ж}^{0,33} \cdot \varepsilon_s$.

Поскольку для воздуха величина числа Pr меняется незначительно, то для данного диапазона изменения температур уравнение принимает следующий вид:

$$Nu_{ж} = 0,23 \cdot Re_{ж}^{0,65} \cdot \varepsilon_s,$$

где $\varepsilon_s = \left(\frac{s_2}{d}\right)^{-0,15} = (2,5)^{-0,15} = 0,872$

$$Nu_{ж} = 0,23 \cdot (16635)^{0,65} \cdot 0,872 = 111.$$

Коэффициент теплоотдачи для третьего ряда

$$\alpha_3 = Nu_{ж} \frac{\lambda_{жс}}{d} = 111 \frac{0,0267}{0,038} = 78 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{град}}.$$

Средний коэффициент теплоотдачи коридорного пучка при $n = 30$

$$\bar{\alpha} = \alpha_3 \left(1 - \frac{0,5}{n}\right) = 78 \cdot \left(1 - \frac{0,5}{30}\right) = 76,7 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{град}}.$$

Определяем плотность теплового потока и необходимую поверхность теплообмена:

$$q = \bar{\alpha} \cdot (t_c - t_{ж}) = 76,7 \cdot (60 - 30) = 2301 \text{ Вт/м}^2,$$

$$F = \frac{Q}{q} = \frac{125 \cdot 10^3}{2301} = 54,3 \text{ м}^2.$$

Находим требуемую длину труб $\ell = \frac{F}{\pi \cdot d \cdot m \cdot n} = \frac{54,3}{3,14 \cdot 0,038 \cdot 16 \cdot 30} = 0,95 \text{ м}.$

7. ТЕПЛОТДАЧА ПРИ СВОБОДНОМ ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ

7.1. Теплоотдача при свободном движении жидкости в большом объеме

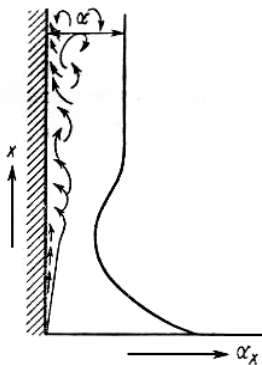


Рисунок 7.1 – Изменение α при свободном движении жидкости вдоль вертикального листа

Причина возникновения свободного движения – теплообмен. Свободное движение возникает под действием разности плотностей нагретых и холодных частиц неравномерно нагретой жидкости.

Если жидкость находится в поле силы тяжести, то наличие неоднородного поля плотностей вызывает появление результирующих подъемных сил, приводящих жидкость в движение, которое называют гравитационной свободной конвекцией.

Вдоль нагретой пластины снизу вверх движется ламинарный слой, толщина которого растет по мере того, как в процесс нагрева вовлекаются все новые частицы жидкости (рис. 7.1). На некоторой высоте ламинарный слой

начинает разрушаться и переходит в турбулентный с ламинарным подслоем. α уменьшается по мере увеличения толщины ламинарного пограничного слоя и стабилизируется в области турбулентного движения.

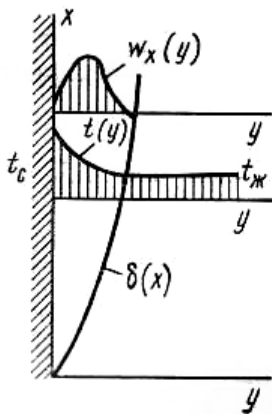


Рисунок 7.2 – Распределение температуры и скорости в пограничном слое у нагретой вертикальной поверхности

Распределение скорости по толщине слоя напоминает параболическую эпюру (рис. 7.2). На поверхности теплообмена и на внешней границе слоя скорость равна нулю. В отличие от вынужденного движения скорость является функцией определяющих параметров процесса и не входит в условия однозначности. Температура в пограничном слое изменяется от температуры на поверхности теплообмена t_c до температуры окружающей среды $t_ж$.

Для аналитического исследования теплоотдачи в условиях свободного движения могут быть использованы методы теории пограничного слоя, применяемые в задачах теплообмена при вынужденном движении. Однако аналитические решения не всегда совпадают с результатами эксперимента практики. Поскольку свободное движение существует при наличии неоднородного поля плотностей, то в уравнение движения вводится подъемная сила: $\rho g \beta \vartheta$, которое, в связи с этим, запишется как:

$$\rho \frac{D\bar{w}}{dt} = -\rho \cdot g \cdot \beta \cdot \vartheta - \nabla P + \mu \cdot \nabla^2 w.$$

Определяющим критерием при свободном гравитационном движении является критерий Грасгофа:

$$Gr = \beta \frac{g \cdot \ell^3}{\nu^2} \vartheta,$$

где β [1/°к] – температурный коэффициент объемного расширения, представляющий собой относительное изменение объема при изменении температуры на один градус.

Критериальное уравнение теплообмена при свободной конвекции имеет вид:

$$Nu = C (Gr \cdot Pr)_m^n. \quad (7.1)$$

Экспериментально установлено существование трех режимов движения, каждому из которых соответствуют пределы изменения $(Gr \cdot Pr)_m$.

Для охлаждаемых на воздухе проволок малого диаметра (1 мм) при достаточно малых значениях $(Gr \cdot Pr)_m$ число Nu принимает постоянное значение

$$Nu = \frac{\alpha \cdot d}{\lambda} = 0,45 \div 0,5.$$

Теплота в этом случае переносится за счет теплопроводности через пленку

нагретого воздуха, обволакивающего проволоку. Поэтому тонкие электропровода выдерживают большие плотности тока без пережога, поскольку α обратно пропорционален диаметру.

Значению $(Gr \cdot Pr) > 5 \cdot 10^2$ соответствует ламинарное движение, при $(Gr \cdot Pr) > 2 \cdot 10^7$ устанавливается турбулентный режим. Коэффициент C и показатель n находятся по таблице 7.1:

Таблица 7.1

$Gr \cdot Pr$	$1 \cdot 10^{-3} \div 5 \cdot 10^2$	$5 \cdot 10^2 \div 2 \cdot 10^7$	$2 \cdot 10^7 \div 1 \cdot 10^{13}$
C	1,18	0,54	0,135
n	1/8	1/4	1/3

При турбулентном режиме в области $n = 1/3$, α не зависит от определяющего размера. Такой процесс теплообмена называют автомодельным. Уравнение (7.1) применимо для любых капельных и упругих жидкостей при $Pr \geq 0,7$ для тел любых форм и размеров. За определяющую температуру взята средняя температура пограничного слоя: $t_T = 0,5(t_{ж} + t_c)$. За определяющий размер для труб и шаров – диаметр, для вертикальных плит – их высота, для горизонтальных плит – их меньшая сторона. Для горизонтальных плит α увеличивается на 30 %, если нагретая сторона обращена вверх.

7.2. Теплоотдача при движении жидкости в ограниченном пространстве

Теплоотдача при свободном движении жидкости в ограниченном пространстве (рис. 7.3) зависит от формы и размеров пространства, рода жидкости и температурных характеристик поверхностей, ограничивающих пространство (воздушные изоляционные прослойки). Из-за сложности процессов определить α обычным путем с учетом особенностей движения не удастся. Для практических расчетов тепловой поток через прослойки толщиной δ рассчитывается по уравнению теплопроводности (рис. 7.3):

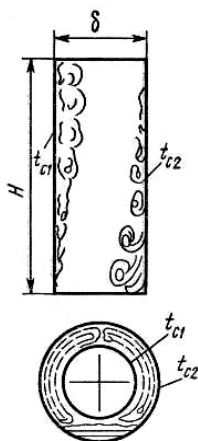


Рисунок 7.3 – Циркуляция жидкости в замкнутом пространстве

где $\lambda_{эkv}$ – эквивалентная теплопроводность, учитывающая конвективный перенос теплоты; t_{c1} и t_{c2} – температуры горячей и холодной поверхностей, разделенных прослойкой;

$$\lambda_{эkv} = \varepsilon_k \cdot \lambda_{ж},$$

где ε_k – коэффициент, учитывающий влияние конвекции: $\varepsilon_k = f(Gr \cdot Pr)$, может быть взят из рисунка 7.4.

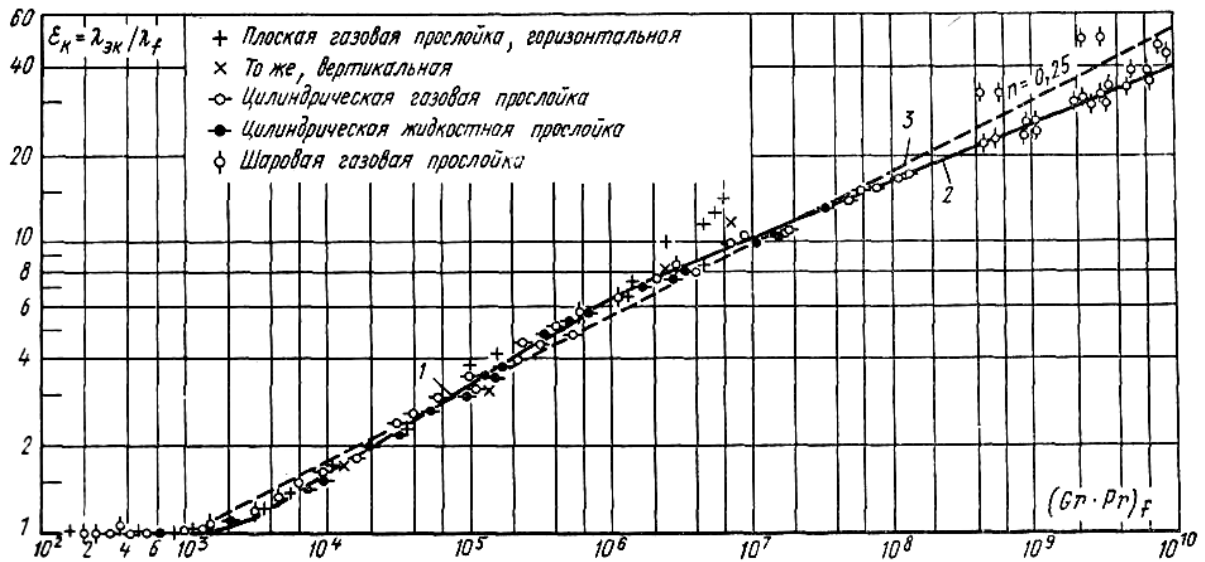


Рисунок 7.4 – Коэффициент ε_k – при естественной циркуляции в замкнутом объеме

7.3. Примеры с решениями

Пример 7.3.1. Определить потери теплоты в единицу времени с 1 м^2 поверхности цилиндрической горизонтальной трубы, диаметром $d = 600 \text{ мм}$, охлаждаемой воздухом. Температура поверхности трубы $t_c = 220 \text{ }^\circ\text{C}$ и температура воздуха $t_{ж} = 20 \text{ }^\circ\text{C}$.

Решение. По температуре $t_{ж}$ определяем физические параметры для воздуха: $\nu_{ж} = 15,06 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $\lambda_{ж} = 2,59 \cdot 10^{-2} \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{град}}$; $\beta_{ж} = \frac{1}{t_{жс} + 273} = \frac{1}{293} \text{ 1/град}$;

$Pr_{ж} = 0,703$; $Pr_c = 0,679$.

Потери теплоты в единицу времени с 1 м^2 поверхности цилиндрической горизонтальной трубы определяем по уравнению $q = \alpha(t_c - t_{ж})$, где α [Вт/м²] – коэффициент теплоотдачи от стенки трубы к воздуху. Критериальная зависимость для вычисления среднего коэффициента теплоотдачи при свободном движении жидкости имеет вид

$$Nu_{ж} = C \cdot (Gr \cdot Pr)_{ж}^n \left(\frac{Pr_{ж}}{Pr_c} \right)^{0,25},$$

где постоянная C и показатель n определяются режимом свободного движения и условиями обтекания поверхности. Они определяются по таблице 7.2 в зависимости от произведения $Gr \cdot Pr$.

Таблица 7.2

$(Gr \cdot Pr)_{ж}$	C	n	Условия движения
$1 \cdot 10^3 - 1 \cdot 10^9$	0,75	0,25	Вдоль вертикальной стенки
$\geq 6 \cdot 10^{10}$	0,15	0,333	
$1 \cdot 10^3 - 1 \cdot 10^9$	0,50	0,25	На горизонтальной трубе

$$\text{Находим } (Gr \cdot Pr)_{ж} = \frac{g \cdot \beta_{ж} \cdot \Delta t \cdot d^3}{\nu_{ж}^2} Pr_{ж} = \frac{9,81 \cdot (220 - 20) \cdot 0,6^3}{293 \cdot (15,06 \cdot 10^{-6})^2} \cdot 0,703 = 4,48 \cdot 10^9.$$

Из таблицы 7.2 находим $C = 0,5$ и $n = 0,25$.

$$\text{Тогда } Nu_{ж} = 0,5 \left(4,48 \cdot 10^9 \right)^{0,25} = 0,5 \cdot 258,7 = 129,4.$$

Определяем коэффициент теплоотдачи:

$$\alpha = Nu_{ж} \frac{\lambda_{ж}}{d} = 129,4 \frac{0,0259}{0,6} = 2,0 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{град}}.$$

Потери теплоты в единицу времени с единицы поверхности трубы составляют $q = 2 \cdot (200 - 20) = 400 \text{ Вт/м}^2$.

Пример 7.3.2. Вычислить количество теплоты, отдаваемое свободной конвекцией верхней частью колпака бумагоделательной машины с размерами $a \times b = 12 \times 60 \text{ м}^2$ воздуху. Температуры поверхности колпака и окружающего воздуха соответственно равны: $t_c = 30 \text{ }^\circ\text{C}$ и $t_{ж} = 20 \text{ }^\circ\text{C}$.

Решение. По температуре воздуха определяем его параметры:

$$\nu_{ж} = 15,06 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}; \lambda_{ж} = 2,59 \cdot 10^{-2} \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{град}}; \beta_{ж} = \frac{1}{t_{ж} + 273} = \frac{1}{293} \text{ 1/град};$$

$$Pr_{ж} = 0,703.$$

Теплоотдачу от горизонтальных плит можно рассчитывать по критериальной зависимости для вычисления среднего коэффициента теплоотдачи при свободном движении жидкости

$$Nu_{ж} = C \cdot (Gr \cdot Pr)_{ж}^n \left(\frac{Pr_{ж}}{Pr_c} \right)^{0,25}.$$

За определяющий размер берется меньшая сторона плиты. При этом, если теплоотдающая поверхность обращена кверху, то полученное по формуле значение α увеличивается на 30 %, если книзу – α уменьшается на 30 %.

Определяющим размером считается меньшая сторона поверхности колпака $a = 12 \text{ м}$.

Рассчитываем произведение $(Gr \cdot Pr)$:

$$(Gr \cdot Pr)_{ж} = g \cdot \beta_{ж} \frac{\Delta t \cdot a^3}{\nu_{ж}^2} Pr_{ж} = 9,81 \cdot \frac{10 \cdot (12)^3}{293 \cdot (15,06 \cdot 10^{-6})^2} \cdot 0,703 = 1,8 \cdot 10^{12}.$$

По полученному значению $(Gr \cdot Pr)_{ж}$ по таблице 7.2 находим $C = 0,15$ и $n = 0,333$ к критериальной зависимости:

$$Nu_{ж} = 0,15 \cdot (1,8 \cdot 10^{12})^{0,333} = 0,15 \cdot 12050 = 1807.$$

$$\text{Тогда } \alpha = Nu_{\text{ж}} \frac{\lambda_{\text{ж}}}{a} = 1807 \frac{0,0259}{12} = 3,9 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{град}},$$

$$\alpha_{\text{пл}} = 1,3 \cdot 3,9 = 5,07 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{град}}.$$

Количество теплоты, отдаваемое верхней частью колпака бумагоделательной машины, составит $Q = \alpha_{\text{пл}} (t_{\text{с}} - t_{\text{ж}}) \cdot a \cdot b = 5,07 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 60 = 36504 \text{ Вт}$.

Пример 7.3.3. Определить плотность теплового потока через вертикальную воздушную прослойку в окнах, толщиной $\delta = 25 \text{ мм}$, с температурами внутренней и наружной поверхностей: $t_{\text{в}} = 25 \text{ }^{\circ}\text{C}$ и $t_{\text{н}} = -15 \text{ }^{\circ}\text{C}$.

Решение. Плотность теплового потока через воздушную прослойку находится по уравнению:

$$q = \frac{\lambda_{\text{э}}}{\delta} (t_{\text{в}} - t_{\text{н}}).$$

Эквивалентный коэффициент теплопроводности находится по формуле:

$$\lambda_{\text{э}} = \lambda \cdot \varepsilon_{\text{к}},$$

где λ – действительный коэффициент теплопроводности воздуха; $\varepsilon_{\text{к}}$ – коэффициент конвекции, определяющийся по уравнению

$$\varepsilon_{\text{к}} = 0,18 \cdot (Gr \cdot Pr)_{\text{пр}}^{0,25}.$$

Находим определяющую температуру жидкости в прослойке $t_{\text{пр}} = 0,5 \cdot (t_{\text{в}} + t_{\text{н}}) = 0,5 \cdot (25 - 15) = 5 \text{ }^{\circ}\text{C}$. По этой температуре выбираем физические параметры воздуха в прослойке: $\nu_{\text{пр}} = 13,72 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $\lambda_{\text{пр}} = 0,0247$

$$\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{град}}; Pr_{\text{пр}} = 0,706; \beta_{\text{пр}} = \frac{1}{5 + 273} = \frac{1}{278} \text{ 1/град}.$$

Вычислим произведение

$$Gr \cdot Pr = 0,18 \frac{9,81 \cdot (25 + 15) \cdot (0,025)^3}{278 \cdot (13,72 \cdot 10^{-6})^2} \cdot 0,706 = 1,49 \cdot 10^4,$$

определим коэффициент конвекции

$$\varepsilon_{\text{к}} = 0,18 \cdot (1,49 \cdot 10^4)^{0,25} = 1,99.$$

Эквивалентный коэффициент теплопроводности

$$\lambda_{\text{э}} = 0,0247 \cdot 1,99 = 0,0491 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{град}}.$$

Плотность теплового потока через прослойку

$$q = \frac{0,0491 \cdot 40}{0,025} = 79 \text{ Вт/м}^2.$$

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Исаченко, В. П., Осипова, В. А., Сукомел, А. С. Теплопередача / В. П. Исаченко, В. А. Осипова, А. С. Сукомел. – Москва: Энергия, 1981. – 416 с. – Текст: непосредственный.
2. Теория тепломассообмена: учебник для технических университетов и вузов / С. И. Исаев, И. А. Кожинов, В. И. Кофанов и др.; Под ред. А. И. Леонтьева. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1997. – 683 с. – Текст: непосредственный.
3. Вейник, А. И. Приближенный расчет процессов теплопроводности / А. И. Вейник. – Москва; Ленинград: Гос. Энергоиздат, 1959. – 184 с. – Текст: непосредственный.
4. Краснощеков, Е. А., Сукомел, А. С. Задачник по теплопередаче: учебное пособие для вузов / Е. А., Краснощеков, А. С. Сукомел. – 4-е изд., перераб. – Москва: Энергия, 1980. – 288 с. – Текст: непосредственный.
5. Суслов, В. А. Тепломассообмен: учеб. пособие / В. А. Суслов. – 2-е изд., испр. и доп./ ВШТЭ СПбГУПТД. – Санкт-петербург, 2017. Часть 2. – 82 с.: ил. 45. – Текст: непосредственный.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Таблица 1 – Перевод величин системы МКГСС в международную систему единиц (СИ)

Энергия	1 кал = 4,187 кДж
Сила	1 кгс = 9,81 Н
Удельный вес	1 кгс/м ³ = 9,81 Н/м ³
Плотность	1 кгс · с ² /м ⁴ = 9,81 кг/м ³
Давление	1 кгс/см ² = 9,81 Н/см ²
Коэффициент динамической вязкости	1 кгс · с/м ² = 9,81 (Н · с)/м ²
Теплоемкость	1 ккал/(кг · град) = 4,187 кДж/(кг · К)
Энтальпия, теплота фазового превращения	1 ккал/кг = 4,187 кДж/кг
Тепловой поток	1 ккал/ч = 1,163 Вт
Плотность теплового потока	1 ккал/(м ² · ч) = 1,163 Вт/м ²
Объемная плотность теплового потока	1 ккал/(м ³ · ч) = 1,163 Вт/м ³
Коэффициент теплопроводности	1 ккал/(м · ч · град) = = 1,163 Вт/(м · К)
Коэффициент теплоотдачи	1 ккал/(м ³ · ч · град) = = 1,163 Вт/(м ² · К)
Коэффициент излучения	1 ккал / (м ² · ч · К ⁴) = = 1,163 Вт/(м ² · К ⁴)

Таблица 2 – Физические свойства воды на линии насыщения

$t, ^\circ\text{C}$	$p \cdot 10^{-5}$ Па	ρ кг/м ³	h кДж/кг	C_p кДж/ (кг · К)	$\lambda \cdot 10^2$ Вт/ (м · К)	$\nu \cdot 10^6$ м ² /с	$\sigma \cdot 10^4$ Н/м	Pr
0	1,013	999,9	0	4,212	55,1	1,789	756,4	13,67
10	1,013	999,7	42,04	4,191	57,4	1,306	741,6	9,52
20	1,013	998,2	83,9	4,183	59,9	1,006	726,9	7,02
30	1,013	995,7	125,7	4,174	61,8	0,805	712,2	5,42
40	1,013	992,2	167,5	4,174	63,5	0,659	696,5	4,31
50	1,013	988,1	209,3	4,174	64,8	0,556	676,9	3,54
60	1,013	983,1	251,1	4,179	65,9	0,478	663,2	2,98
70	1,013	977,8	293,0	4,187	66,8	0,415	643,5	2,55
80	1,013	971,8	355,0	4,195	67,4	0,365	625,9	2,21
90	1,013	965,3	377,0	4,208	68,0	0,326	607,2	1,95
100	1,013	958,4	419,1	4,220	68,3	0,295	586,6	1,75
110	1,43	951,0	461,4	4,233	68,5	0,272	569,0	1,60
120	1,98	943,1	503,7	4,350	68,6	0,252	548,4	1,47
130	2,70	934,8	546,4	4,266	68,6	0,233	528,8	1,36
140	3,61	926,1	589,1	4,287	68,5	0,217	507,2	1,26
$t, ^\circ\text{C}$	$p \cdot 10^{-5}$ Па	ρ кг/м ³	h кДж/кг	C_p кДж/ (кг · К)	$\lambda \cdot 10^2$ Вт/ (м · К)	$\nu \cdot 10^6$ м ² /с	$\sigma \cdot 10^4$ Н/м	Pr
150	4,76	917,0	632,2	4,313	68,4	0,203	484,6	1,17
160	6,18	907,0	675,4	4,316	68,3	0,191	466,0	1,10
170	7,92	897,3	719,3	4,380	67,9	0,181	443,4	1,05
180	10,03	886,9	763,3	4,417	67,4	0,173	422,8	1,00
190	12,55	876,0	807,8	4,459	67,0	0,165	400,2	0,96
200	15,55	863,0	852,5	4,505	66,3	0,158	376,7	0,93
210	19,08	852,8	897,7	4,555	65,5	0,153	354,1	0,91
220	23,20	840,3	943,7	4,614	64,5	0,148	331,6	0,89
230	27,98	827,3	990,2	4,681	63,7	0,145	310,0	0,88
240	33,48	813,6	1037,5	4,756	62,8	0,141	285,5	0,87
250	39,78	799,0	1085,7	4,814	61,8	0,137	261,9	0,86
260	46,94	784,0	1135,7	4,919	60,5	0,135	237,4	0,87
270	55,05	767,9	1185,7	5,070	59,0	0,133	214,8	0,88
280	64,19	750,7	1236,8	5,230	57,4	0,131	191,3	0,90
290	74,45	732,3	1290,0	5,485	55,8	0,129	168,7	0,93
300	85,92	712,5	1344,9	5,736	54,0	0,128	144,2	0,97
310	98,70	691,1	1402,2	6,071	52,3	0,128	120,7	1,03
320	112,9	667,1	1462,1	6,574	50,6	0,128	98,10	1,11
330	128,6	640,2	1526,2	7,244	48,4	0,127	76,71	1,22
340	146,1	610,1	1594,8	8,165	45,7	0,127	56,70	1,30
350	165,4	574,4	1671,4	9,504	43,0	0,126	38,16	1,60
360	186,7	528,0	1761,5	13,98	39,5	0,126	20,21	2,35
370	210,5	450,5	1892,5	40,32	33,7	0,126	4,709	6,79

Таблица 3 – Значения комплексов A и B в формулах (1.12; 1.13) для воды

$t_n, ^\circ C$	$A = \left(\frac{g}{v^2}\right)^{1/3} \cdot \frac{4}{r \cdot \rho \cdot v},$ 1/(м·град)	$B \cdot 10^3 = \frac{4}{r \cdot \rho \cdot v},$ м/Вт	$t_n, ^\circ C$	$A = \left(\frac{g}{v^2}\right)^{1/3} \cdot \frac{4}{r \cdot \rho \cdot v},$ 1/(м·град)	$B \cdot 10^3 = \frac{4}{r \cdot \rho \cdot v},$ м/Вт
20	5,16	1,62	170	136	12,04
30	7,88	2,06	180	150	12,90
40	11,4	2,54	190	167	14,02
50	15,6	3,06	200	182	15,05
60	20,9	3,62	210	197	16,08
70	27,1	4,22	220	218	17,63
80	34,5	4,88	230	227	18,40
90	42,7	5,57	240	246	19,78
100	51,5	6,28	250	264	21,32
110	60,7	6,95	260	278	22,70
120	70,3	7,65	270	296	24,42
130	82,0	8,47	280	312	26,31
140	94,0	9,29	290	336	28,72
150	107	10,15	300	354	31,21
160	122	11,09			

Таблица 4 – Физические свойства водяного пара на линии насыщения

$t, ^\circ C$	$p,$ бар	$\rho'',$ кг/м ³	$i,$ кДж/кг	$r,$ кДж/кг	$c_p,$ кДж/(кг·К)	$\lambda \cdot 10^2,$ Вт/(м·К)	Pr
100	1,01	0,598	2675,9	2256,8	2,135	2,372	1,08
110	1,43	0,826	2691,4	2230,0	2,177	2,489	1,09
120	1,98	1,121	2706,5	2202,8	2,206	2,593	1,09
130	2,70	1,496	2720,7	2174,3	2,257	2,686	1,11
140	3,61	1,966	2734,1	2145,0	2,315	2,791	1,12
150	4,76	2,547	2746,7	2114,3	2,395	2,884	1,16
160	6,18	3,258	2758,0	2082,6	2,479	3,012	1,18
170	7,92	4,122	2768,9	2049,5	2,583	3,128	1,21
180	10,03	5,157	2778,5	2015,2	2,709	3,268	1,25

Таблица 5 – Физические свойства ряда расплавленных металлов

Наименование металлов	$t, ^\circ\text{C}$	$\rho, \text{кг/м}^3$	$\lambda, \text{Вт / (м} \cdot \text{К)}$	$C_p, \text{кДж / (кг} \cdot \text{К)}$	$a \cdot 10^6, \text{м}^2/\text{с}$	$\nu \cdot 10^6, \text{м}^2/\text{с}$	$Pr \cdot 10^2$
Ртуть <i>Hg</i> $t_{\text{пл}} = -38,9^\circ\text{C}$; $t_{\text{кип}} = 357^\circ\text{C}$; $r_{\text{пл}} = 11,72 \text{ кДж/кг}$; $r_{\text{ис}} = 291,8 \text{ кДж/кг}$	20	13 550	7,90	0,1390	4,36	11,4	2,72
	100	13 350	8,95	0,1373	4,89	9,4	1,92
	150	13 230	9,65	0,1373	5,30	8,6	1,62
	200	13 120	10,3	0,1373	5,72	8,0	1,40
	300	12 880	11,7	0,1373	6,64	7,1	1,07
Олово <i>Sn</i> $t_{\text{пл}} = 231,9^\circ\text{C}$; $t_{\text{кип}} = 2270^\circ\text{C}$; $r_{\text{пл}} = 58,2 \text{ кДж/кг}$; $r_{\text{ис}} = 3015 \text{ кДж/кг}$	250	6980	34,1	0,255	19,2	27,0	1,41
	300	6940	33,7	0,255	19,0	24,0	1,26
	400	6865	33,1	0,255	18,9	20,0	1,06
	500	6790	32,6	0,255	18,8	17,3	0,92
Висмут <i>Bi</i> $t_{\text{пл}} = 271^\circ\text{C}$; $t_{\text{кип}} = 1477^\circ\text{C}$; $r_{\text{пл}} = 50,2 \text{ кДж/кг}$; $r_{\text{ис}} = 855,4 \text{ кДж/кг}$	300	10 030	13,0	0,151	8,61	17,1	1,98
	400	9910	14,4	0,151	9,72	14,2	1,46
	500	9 785	15,8	0,151	10,8	12,2	1,13
	600	9 660	17,2	0,151	11,9	10,8	0,91
Литий <i>Li</i> $t_{\text{пл}} = 179^\circ\text{C}$; $t_{\text{кип}} = 1317^\circ\text{C}$; $r_{\text{пл}} = 661,5 \text{ кДж/кг}$;	200	515	37,2	4,187	17,2	111,0	6,43
	300	505	39,0	4,187	18,3	92,7	5,03
	400	495	41,9	4,187	20,3	81,7	4,04
	500	484	45,3	4,187	22,3	73,4	3,28
Сплав 56,5% <i>Bi</i> + 43,5% <i>Pb</i> $t_{\text{пл}} = 123,5^\circ\text{C}$; $t_{\text{кип}} = 1670^\circ\text{C}$	150	10 550	9,8	0,146	6,39	28,9	4,50
	200	10 490	10,3	0,146	6,67	24,3	3,64
	300	10 360	11,4	0,146	7,50	18,7	2,50
	400	10 240	12,6	0,146	8,33	15,7	1,87
	500	10 120	14,0	0,146	9,44	13,6	1,44
Наименование металлов	$t, ^\circ\text{C}$	$\rho, \text{кг/м}^3$	$\lambda, \text{Вт / (м} \cdot \text{К)}$	$C_p, \text{кДж / (кг} \cdot \text{К)}$	$a \cdot 10^6, \text{м}^2/\text{с}$	$\nu \cdot 10^6, \text{м}^2/\text{с}$	$Pr \cdot 10^2$
Сплав 25% <i>Na</i> + 75% <i>K</i> $t_{\text{пл}} = -11^\circ\text{C}$; $t_{\text{кип}} = 784^\circ\text{C}$	100	852	23,2	1,143	23,9	60,7	2,51
	200	828	24,5	1,072	27,6	45,2	1,64
	300	808	25,8	1,038	31,0	36,6	1,18
	400	778	27,1	1,005	34,7	30,8	0,89
	500	753	28,4	0,967	39,0	26,7	0,69
	600	729	29,6	0,934	43,6	23,7	0,54
	700	704	30,9	0,900	48,8	21,7	0,44
Натрий <i>Na</i> $t_{\text{пл}} = 97,8^\circ\text{C}$; $t_{\text{кип}} = 883^\circ\text{C}$; $r_{\text{пл}} = 113,26 \text{ кДж/кг}$; $r_{\text{ис}} = 4208 \text{ кДж/кг}$	150	916	84,9	1,356	68,3	59,4	0,87
	200	903	81,4	1,327	67,8	50,6	0,75
	300	878	70,9	1,281	63,0	39,4	0,63
	400	854	63,9	1,273	58,9	33,0	0,56
	500	829	57,0	1,273	54,2	28,9	0,53

Учебное издание

Сулов Вячеслав Александрович

**Тепломассоперенос в элементах
теплотехнического оборудования**

Часть 1

Учебное пособие

Редактор и корректор М. Д. Баранова
Техн. редактор Д. А. Романова

Темплан 2024 г., поз. 5102

Подписано к печати 24.09.2024.

Формат 60x84/16.

Бумага тип № 1.

Печать офсетная.

Печ.л. 6,5.

Уч.-изд. л. 6,5.

Тираж 30 экз. (1 завод).

Изд. № 5102.

Цена «С».

Заказ №

Ризограф Высшей школы технологии и энергетики СПбГУПТД,
198095, Санкт-Петербург, ул. Ивана Черных, 4.