В. Е. Головко
П. В. Кауров
И. В. Клюшкин

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
Практические занятия

Учебно-методическое пособие
для самостоятельной работы студентов заочной формы обучения

Санкт-Петербург
2025

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Санкт-Петербургский государственный университет промышленных технологий и дизайна»
Высшая школа технологии и энергетики

В. Е. Головко
П. В. Кауров
И. В. Клюшкин

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
Практические занятия

Учебно-методическое пособие для самостоятельной работы студентов заочной формы обучения

Утверждено Редакционно-издательским советом ВШТЭ СПбГУПТД

Санкт-Петербург
2025

УДК 539.04(075)
ББК 30.121я7
Т 33

Рецензенты:
кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры математических методов в управлении Санкт-Петербургского государственного лесотехнического университета им. С. М. Кирова
Б. М. Шифрин;
кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры машин автоматизированных систем Высшей школы технологии и энергетики Санкт-Петербургского государственного университета промышленных технологий и дизайна
В. А. Марков

Головко, В. Е.
Т 33 Теоретическая механика. Практические занятия: учебно-методическое пособие для самостоятельной работы студентов заочной формы обучения / В. Е. Головко, П. В. Кауров, И. В. Клюшкин. — СПб.: ВШТЭ СПбГУПТД, 2025. — 98 с.

Учебно-методическое пособие соответствует программам и учебным планам дисциплины «Теоретическая механика» для студентов, обучающихся по направлениям подготовки: 13.03.01 «Теплоэнергетика и теплотехника», 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника», 15.03.02 «Технологические машины и оборудование», 15.03.04 «Автоматизация технологических процессов и производств», 18.03.01 «Химическая технология», 18.03.02 «Энерго- и ресурсосберегающие процессы в химической технологии, нефтехимии и биотехнологии».

В учебно-методическое пособие включены задачи для самостоятельной работы студентов по трем основным разделам теоретической механики – Статике, Кинематике и Динамике.

Учебно-методическое пособие предназначено для подготовки бакалавров заочной формы обучения.

УДК 539.04(075)
ББК 30.121я7

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Все, что можно наблюдать во внешнем мире – это различные формы движения и взаимодействия материи. Среди многообразных форм простейшей является механическая форма движения. Механическое движение – это изменение положения материального тела по отношению к другим телам с течением времени.

Необходимо иметь в виду, что для теоретического изучения процессов движения материальных тел, в которых механическое движение является определяющим, для понимания закономерностей этой формы движения следует выделять изучаемые явления из всеобщей мировой связи и рассматривать их изолированно.

Теоретическая механика – это наука об общих законах движения реальных тел, ставящая своей главной задачей познание количественных закономерностей, наблюдаемых в природе, и «конструируемых» человеком механических движений. В курсе теоретической механики студенты изучают три ее раздела: статику, кинематику и динамику. Во всех разделах курса, начиная со статики, широко используется векторная алгебра. Необходимо уметь вычислять проекции векторов на координатные оси, находить геометрически (построением векторного треугольника или многоугольника) сумму векторов, вычислять скалярные и векторные произведения двух векторов и знать свойства этих произведений, а в кинематике и динамике – дифференцировать векторы. Надо также уметь свободно пользоваться системой прямоугольных декартовых координат на плоскости и в пространстве, знать, что такое единичные векторы (орты) этих осей и как выражаются составляющие вектора по координатным осям с помощью ортов. Для изучения кинематики надо совершенно свободно уметь дифференцировать функции одного переменного, строить графики этих функций, быть знакомым с понятиями о естественном трехграннике, кривизне кривой и радиусе кривизны, знать основы теории кривых второго порядка, изучаемой в аналитической геометрии. Для изучения динамики надо уметь находить интегралы (неопределенные и определенные) от простейших функций, вычислять частные производные и полный дифференциал функций нескольких переменных, а также уметь интегрировать дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными и линейные дифференциальные уравнения второго порядка (однородные и неоднородные) с постоянными коэффициентами.

Изучать материал рекомендуется по темам или по главам учебника. Сначала следует прочитать весь материал темы. Особое внимание при повторном чтении обратите на формулировки соответствующих определений, теорем и т.п., – в точных формулировках, как правило, бывает существенно каждое слово, и очень полезно понять, почему данное положение сформулировано именно так.

Необходимо также понять ход всех доказательств и разобраться в их деталях. Доказательства надо уметь производить самостоятельно, что нетрудно сделать, поняв идею доказательства; пытаться просто их заучить не следует, никакой пользы это не принесет. Закончив изучение темы, полезно составить краткий конспект, по возможности, не заглядывая в учебник. Особое внимание следует уделять приобретению навыков решения задач. Для этого, изучив теоретический материал темы, надо сначала обязательно разобраться в решениях соответствующих задач, которые приводятся в учебнике, обратив особое внимание на методические указания по их решению.

Закончив изучение темы, нужно проверить и дать ответ на вопросы рабочей программы курса по этой теме. Дополнительные вопросы для самопроверки составить и записать (в отдельной тетради) самостоятельно, что очень полезно для лучшего усвоения темы. В начале изучения очередной темы желательно выписать последовательно все перечисленные в программе вопросы по этой теме, оставив справа широкую полосу (поле). При этом, если, например, в программе сказано «Условия равновесия плоской и пространственной систем сходящихся сил», то следует записать раздельно вопросы «Условия равновесия плоской системы сходящихся сил» и «Условия равновесия пространственной системы сходящихся сил» и т.п. Затем по мере изучения материала темы (чтения учебника) следует в правой колонке указать страницу учебника, на которой излагается соответствующий вопрос, а также номер формулы или уравнение (уравнения), которые выражают ответ на вопрос математически. В результате в данной тетради будет полный перечень вопросов для самопроверки, который можно использовать и при подготовке к экзамену. Кроме того, ответив на вопрос или написав соответствующую форму (уравнение), вы можете по учебнику быстро проверить, правильно ли это сделано, если в правильности своего ответа сомневаетесь. Наконец, по тетради с такими вопросами вы можете установить, весь ли предусмотренный программой материал вами изучен. Следует иметь в виду, что в разных учебниках материал может излагаться в разной последовательности. Поэтому ответ на какой-нибудь вопрос данной темы может оказаться в другой главе учебника. Например, в статике теорема о приведении системы сил к центру может быть дана сразу для пространственной системы сил, а может быть дана сначала для плоской системы сил, а потом для произвольной и т.п.

У студентов, обучающихся по заочной форме по направлениям подготовки: «Технологические машины и оборудование», «Химическая технология», «Энерго- и ресурсосберегающие процессы в химической технологии, нефтехимии и биотехнологии», «Автоматизация технологических процессов и производств», «Электроэнергетика и электротехника», «Теплоэнергетика и теплотехника» предусмотрена контрольная работа, которая состоит из задач по основным разделам теоретической механики – статике, кинематике и динамике. Студенты решают указанные преподавателями задачи в соответствии с направлением, по которому обучаются.

К каждой задаче (кроме задач Д1 и Д2) дается 30 рисунков и таблица (с тем же номером, что и задача), содержащая дополнительные условия к тексту задачи. Нумерация рисунков двойная, при этом номером рисунка является цифра, стоящая после точки. Номера условий от 0 до 9 проставлены в первом столбце (или первой строке) таблицы.

Студент во всех задачах выбирает номер рисунка по предпоследней цифре шифра в зачетной книжке, а номер условия в таблице – по последней. Например, если шифр оканчивается числом 46, то берутся рисунок 4 и условие 6 из таблицы. Контрольная работа выполняется в отдельной тетради, страницы которой нумеруются. На обложке указывается название дисциплины, фамилия и инициалы студента, учебный шифр и специальность. На первой странице тетради записываются номера решаемых задач. Решение каждой задачи обязательно начинать на развороте тетради.

Чертеж должен быть аккуратным и наглядным, а его размеры должны позволять ясно видеть все силы или векторы скорости и ускорения и др. Показывать все эти векторы и координатные оси на чертеже, а также указывать единицы измерения получаемых величин нужно обязательно. Решение задач необходимо сопровождать краткими пояснениями (какие формулы или теоремы применяются, откуда получаются те или иные результаты и т.п.) и подробно излагать весь ход расчетов. На каждой странице следует оставлять поля для замечаний. Работы, не отвечающие всем перечисленным требованиям, будут возвращаться для переделки.

При чтении текста каждой задачи учесть, что большинство рисунков дано без соблюдения масштаба. На рисунках к задачам все линии, параллельные строкам, считаются горизонтальными, перпендикулярные строкам – вертикальными, и это в тексте задач специально не оговаривается. Также без оговорок принимаем, что все нити (веревки, тросы) являются нерастяжимыми и невесомыми, нити, перекинутые через блок, по блоку не скользят, катки и колеса (в кинематике и динамике) считаются идеальными.

Когда тела на рисунке пронумерованы, то в тексте задач и в таблице P_1, l_1, r_1 и т.п. обозначает параметры тела 1. Аналогично в кинематике и в динамике V_B, a_B обозначают скорость и ускорение точки B, а V_C, a_C – точки C; ω_2, ε_2 – угловую скорость и угловое ускорение тела 2 и т.д. Следует также иметь в виду, что некоторые из заданных в условиях задачи величин (размеров) при решении каких-нибудь вариантов могут не понадобиться, они нужны для решения других вариантов задачи. Из всех пояснений в тексте задачи обращайте внимание только на относящиеся к вашему варианту, т.е. к номеру вашего рисунка или вашего условия в таблице.

1. СТАТИКА

Статикой называется раздел механики, в котором изучаются способы преобразования систем сил в эквивалентные и рассматриваются задачи на равновесие твердых тел. Системой сходящихся сил называется такая система сил, линии действия которой пересекаются в одной точке.

Сходящиеся силы находятся в равновесии, если их равнодействующая равна нулю

$$R = \sum_{i=1}^{n} P_i = 0. \tag{1.1}$$

Если все силы лежат в одной плоскости, то проецируя уравнение (1) на оси координат, расположенные в этой плоскости, получаем условия равновесия для плоской системы сходящихся сил:

$$\sum_{i=1}^{n} P_{ix} = 0; \qquad \sum_{i=1}^{n} P_{iy} = 0. \tag{1.2}$$

Если же имеет место пространственная система сил, то все силы проецируются на три взаимно перпендикулярные оси, и условия равновесия пространственной системы сходящихся сил имеют вид:

$$\sum \mathbf{P_{ix}} = \mathbf{0}; \qquad \sum \mathbf{P_{iy}} = \mathbf{0}; \qquad \sum \mathbf{P_{iz}} = \mathbf{0}. \tag{1.3}$$

При приведении произвольной системы сил к центру получаем главный вектор, равный геометрической сумме сил, входящих в систему:

$$R = \sum_{i=1}^{n} P_i. \tag{1.4}$$

Главный момент для плоской системы, равный алгебраической сумме моментов всех сил относительно произвольного центра:

$$M_O = \sum_{i=1}^{n} M_{iO}. \tag{1.5}$$

Для пространственной системы сил – геометрической сумме моментов:

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_{iO}. \tag{1.6}$$

Условия равновесия произвольной плоской системы сил:

$$R^* = 0 \;;\quad M_0 = 0. \tag{1.7}$$

При проецировании уравнений (7) на две взаимно перпендикулярные оси получаем три уравнения равновесия:

$$\sum_{i=1}^{n} P_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} P_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} M_{iO} = 0. \tag{1.8}$$

Условия равновесия произвольной пространственной системы сил:

$$R^* = 0 \;;\quad M_0 = 0. \tag{1.9}$$

При проектировании уравнения (9) на три взаимно перпендикулярные оси получаем шесть уравнений равновесия:

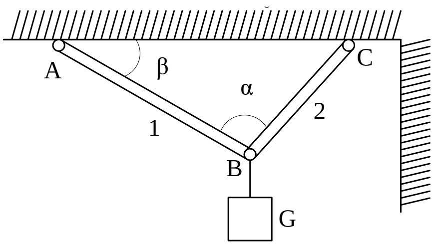
$$\sum_{i=1}^{n} P_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} P_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} P_{iz} = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} M_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} M_{iz} = 0. \tag{1.10}$$

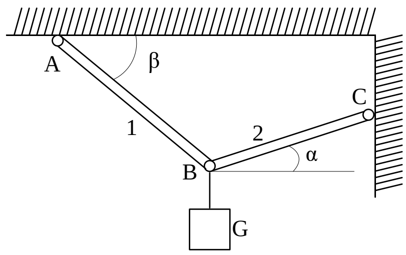
Задача С. 1. Система сходящихся сил

Для механических систем, приведенных на рисунках 1-30, определить усилия в стержнях АВ и ВС при заданных значениях веса груза и угла α, β. Весом стержней и нитей пренебречь. Нити считать гибкими и нерастяжимыми, блок идеальным, соединения стержней шарнирными.

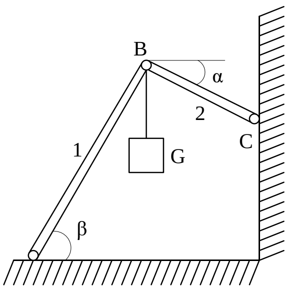
1



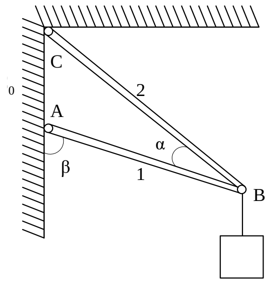
2



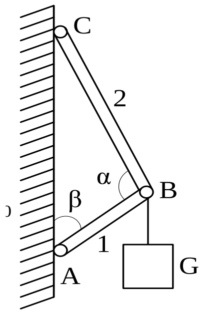
3



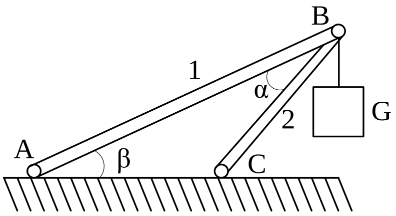
4



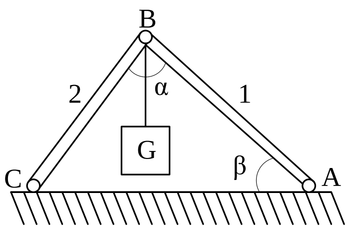
5



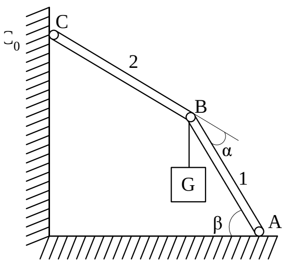
6



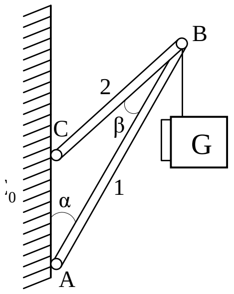
7



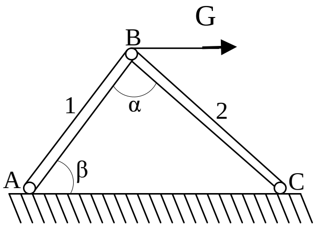
8



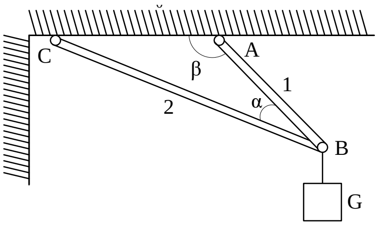
9



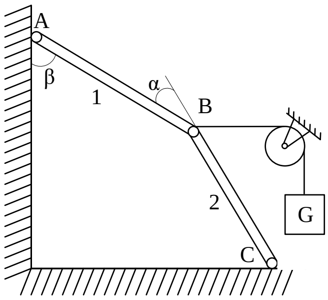
10



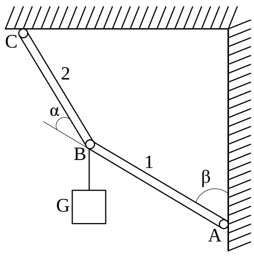
11



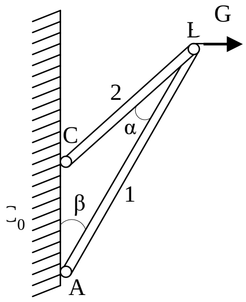
12



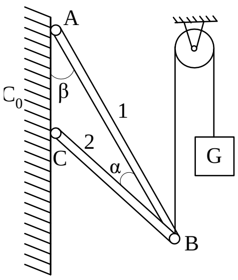
13



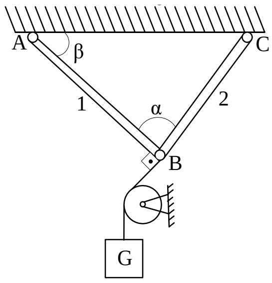
14



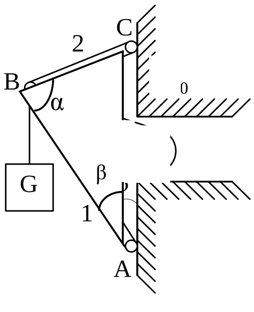
15



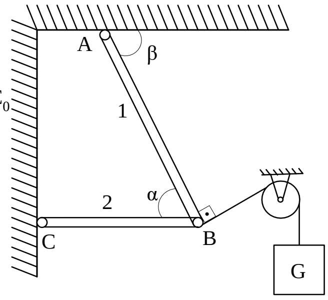
16

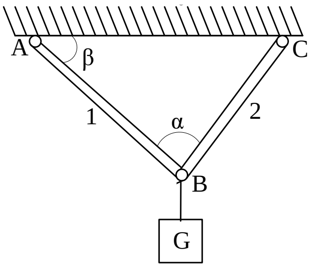
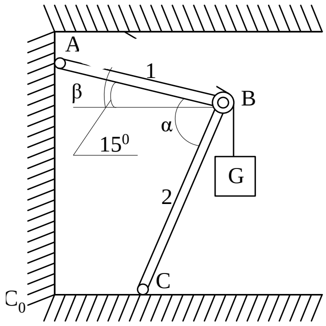
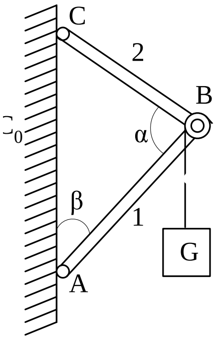
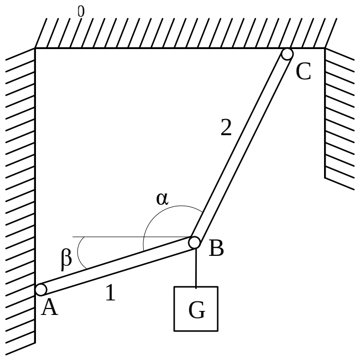
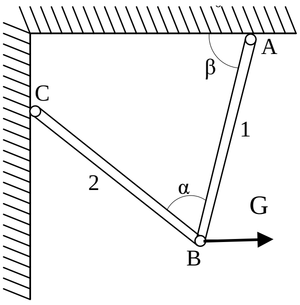
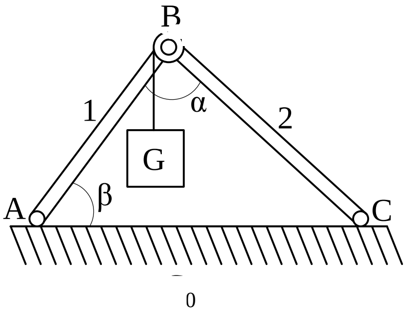
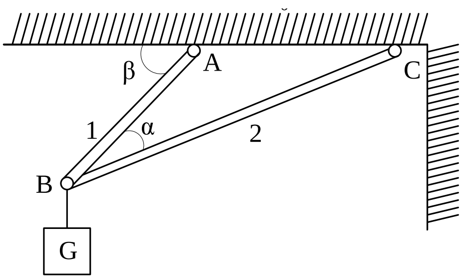
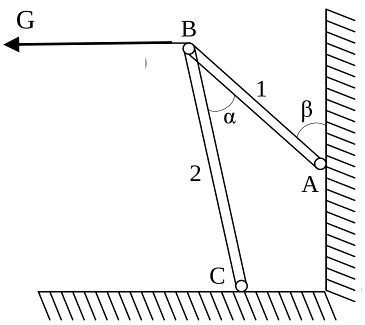


17

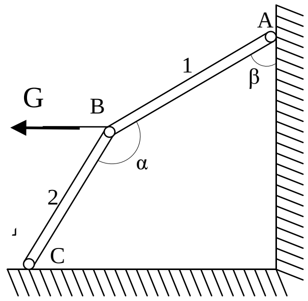


18

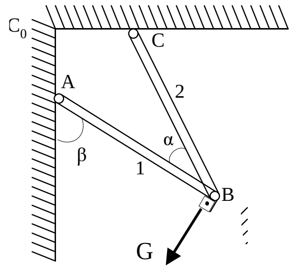


19 	20 
21 	22 
23 	24 
25 	26 

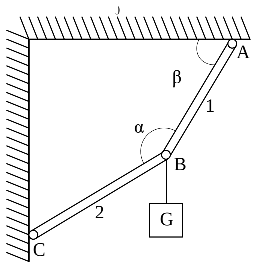
27



28



29



30

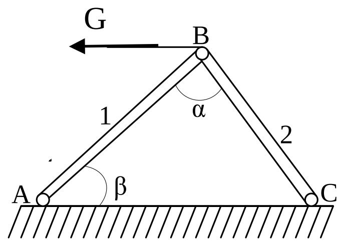


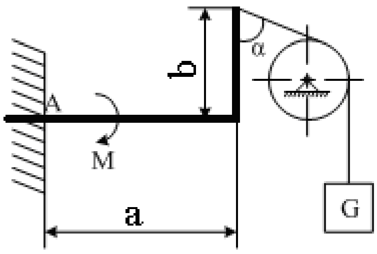
Таблица С. 1

Номер варианта	α	β	G
	град.	град.	кН
0	20	70	10
1	75	25	15
2	40	60	30
3	70	25	25
4	60	50	20
5	35	60	25
6	80	30	15
7	45	55	30
8	30	75	10
9	25	80	20

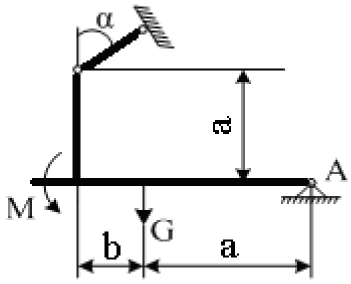
Задача С. 2. Равновесие твердого тела под действием плоской системы сил

Определить опорные реакции тела (рис. 1-30) при действии заданной нагрузки. Размеры приведены в метрах. Весом рамы пренебречь.

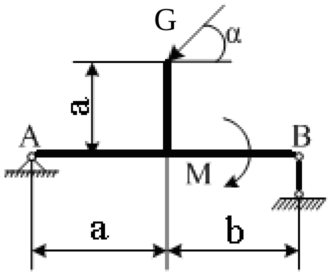
1



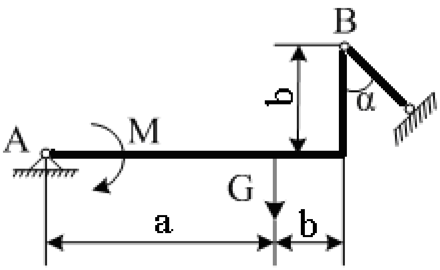
2



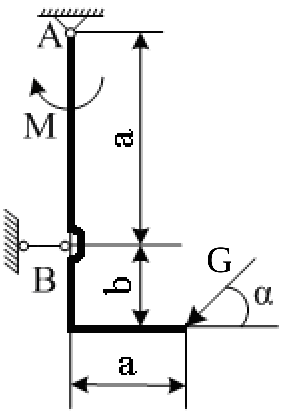
3



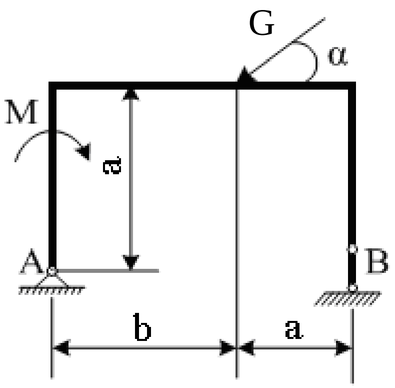
4



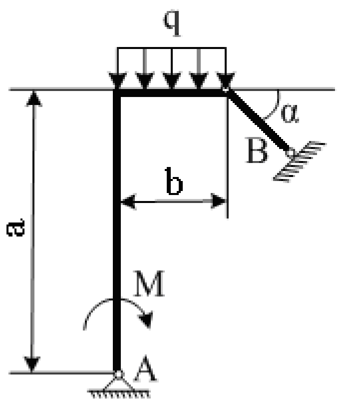
5



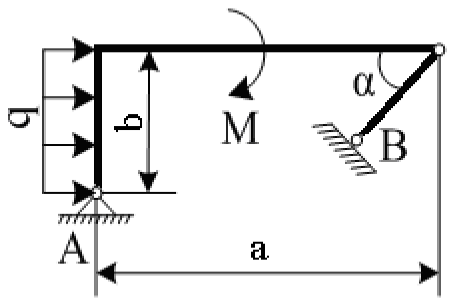
6



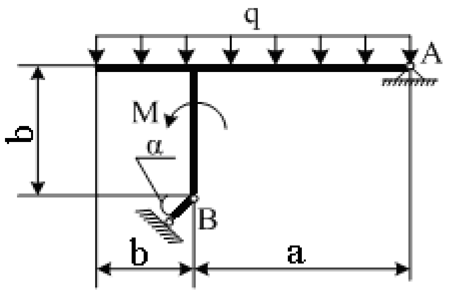
7



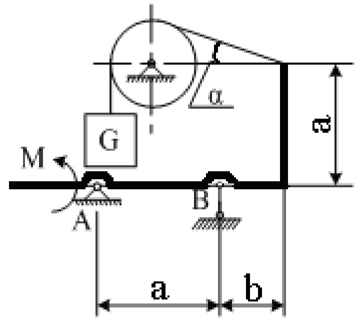
8



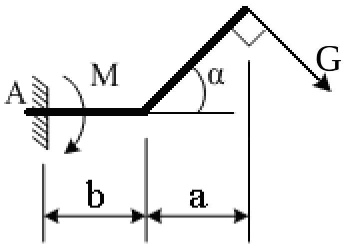
9



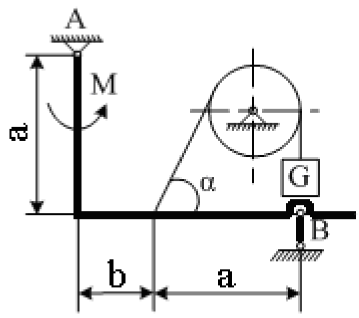
10



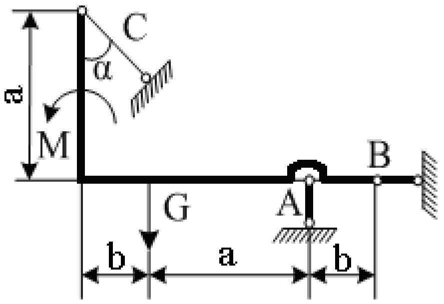
11



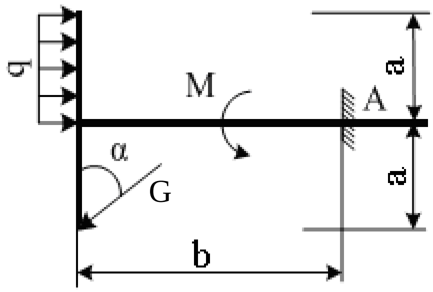
12



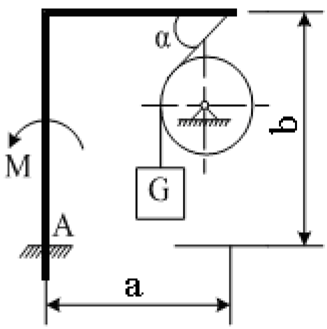
13



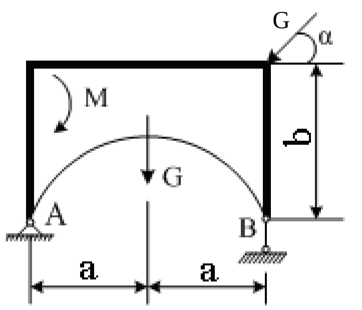
14



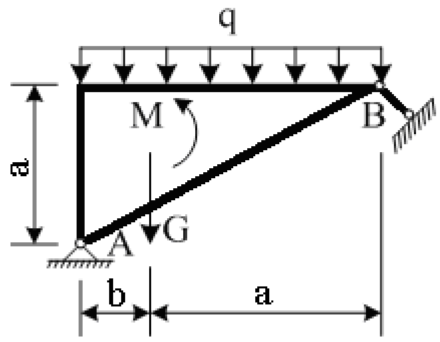
15



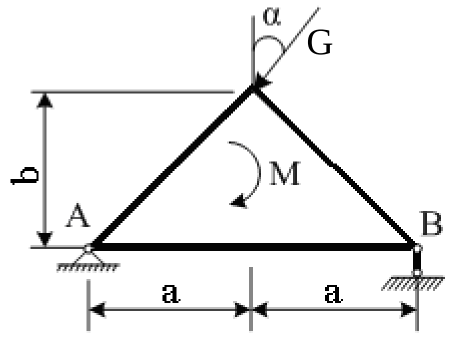
16



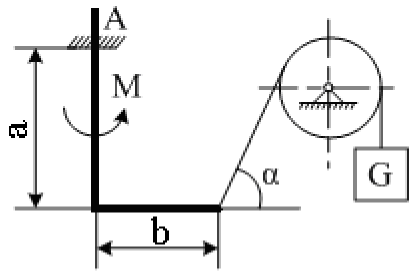
17



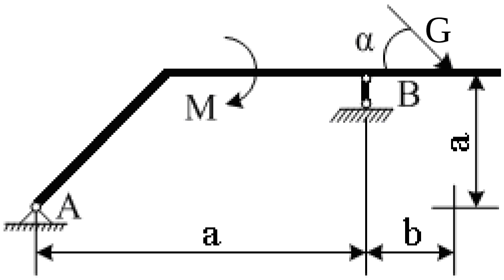
18



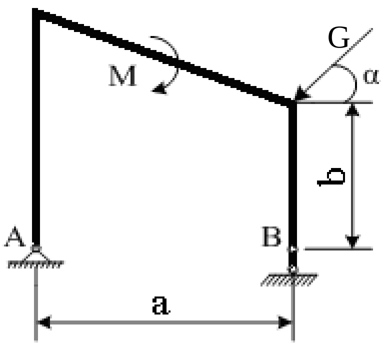
19



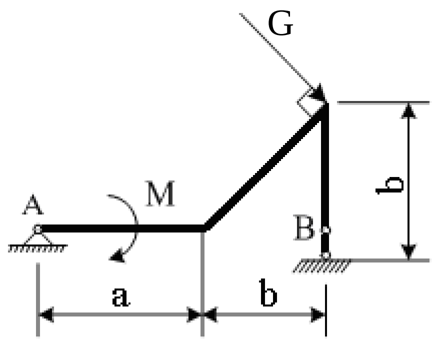
20



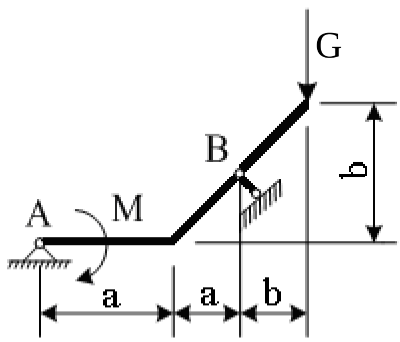
21



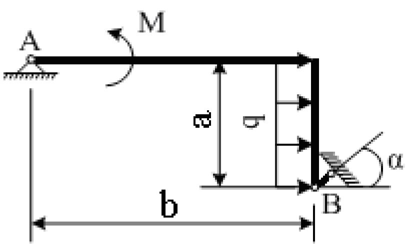
22



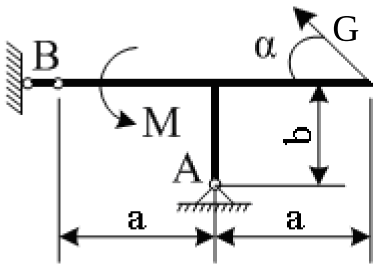
23



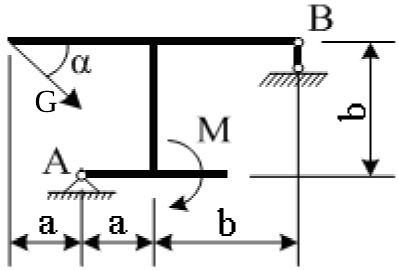
24



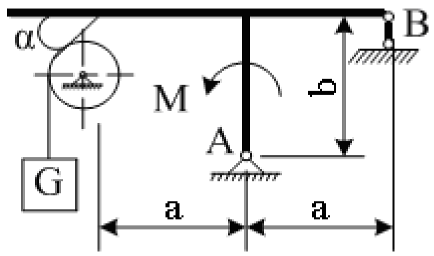
25



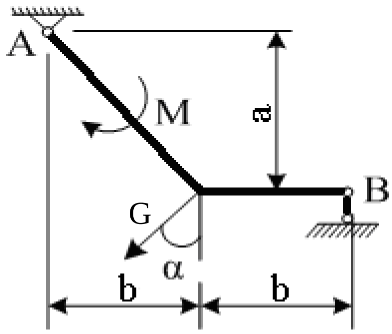
26



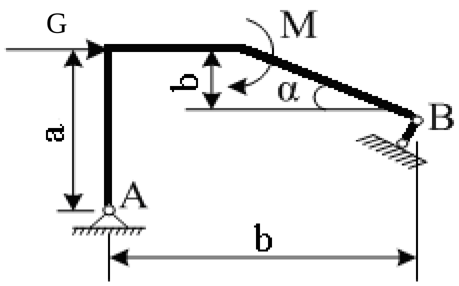
27



28



29



30

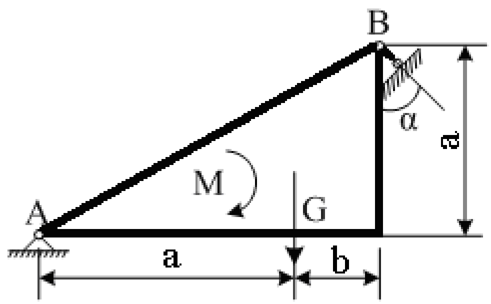


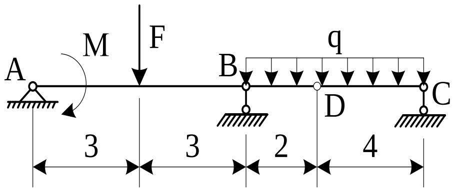
Таблица С. 2

Номер варианта	G кН	q кН/м	M кНм	α град.	a м	b м
0	10	40	40	10	1	3
1	50	20	60	30	2	4
2	20	45	50	20	4	2
3	40	25	10	50	2	4
4	30	10	70	10	3	2
5	50	30	20	40	3	1
6	20	50	70	50	2	3
7	40	15	90	20	4	3
8	10	35	30	40	1	4
9	30	5	80	30	4	1

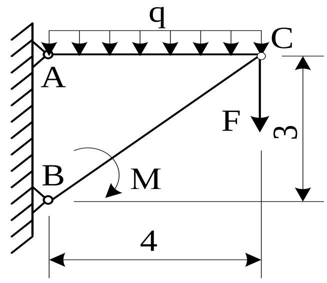
Задача С. 3. Равновесие шарнирной рамы

Найти реакции опор шарнирной рамы (рис. 1-30). Размеры в метрах.

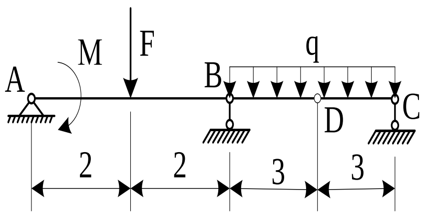
1



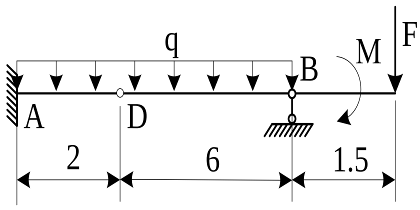
2



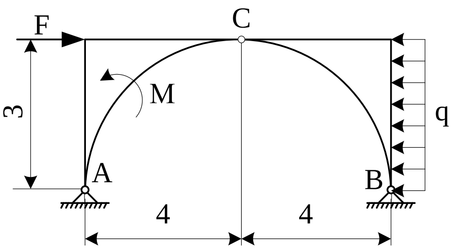
3



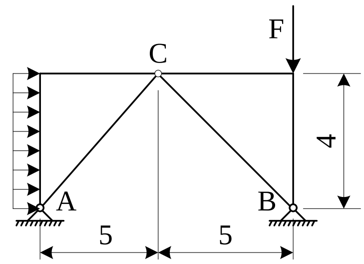
4



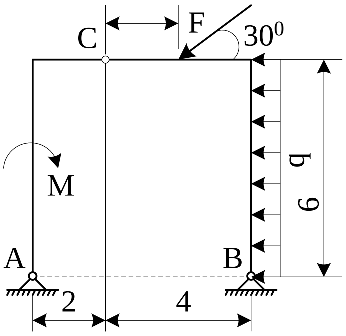
5



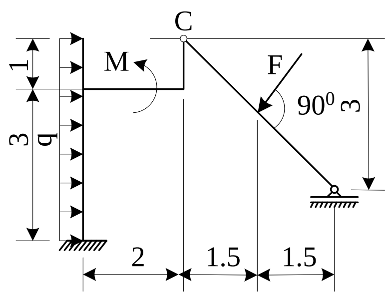
6



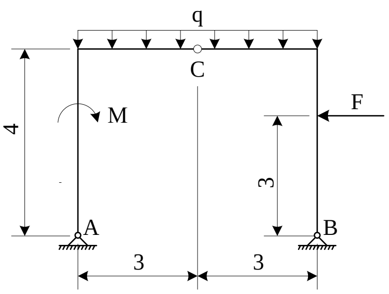
7



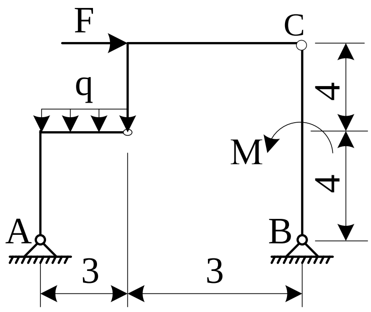
8



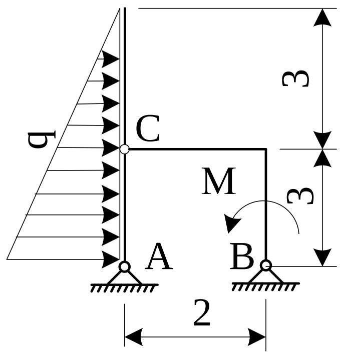
9



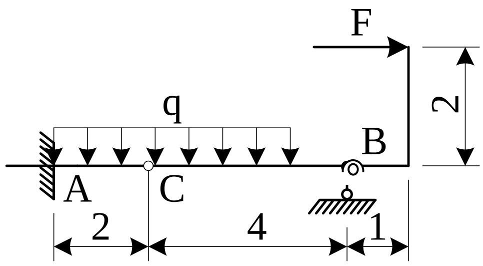
10



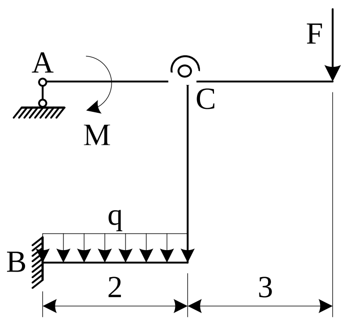
11



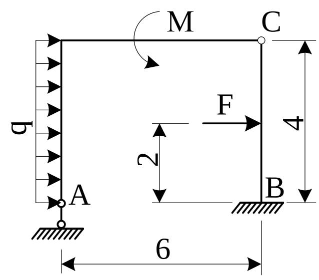
12



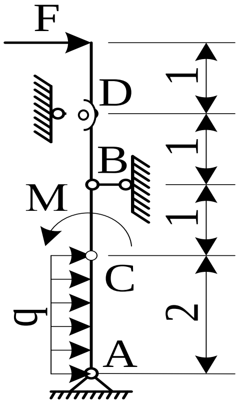
13



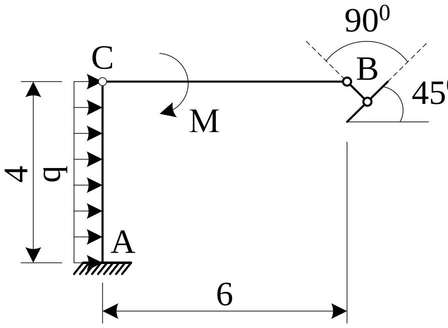
14



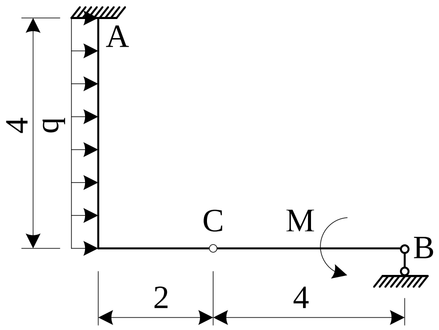
15



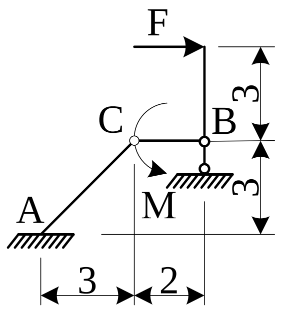
16



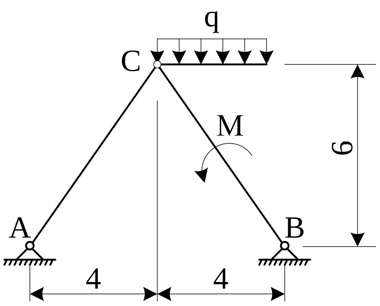
17



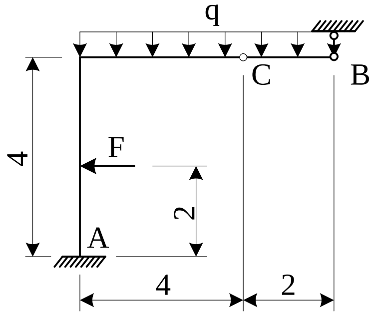
18



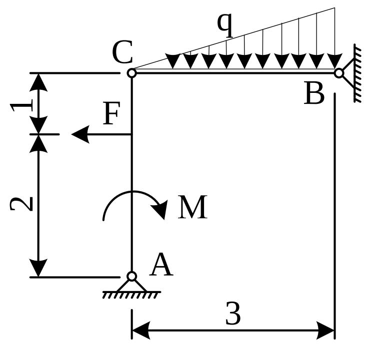
19



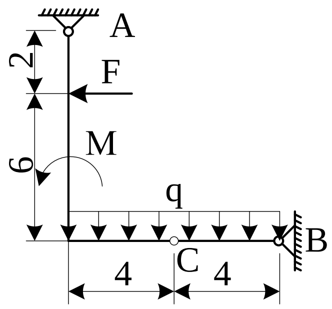
20



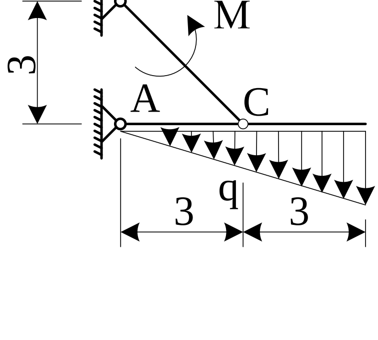
21



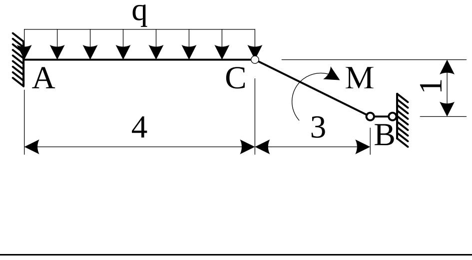
22



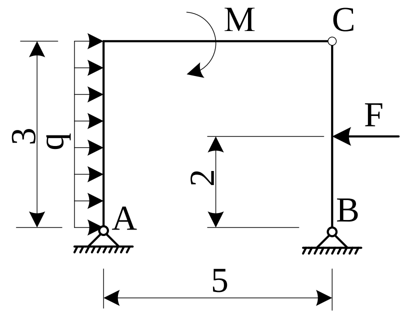
23



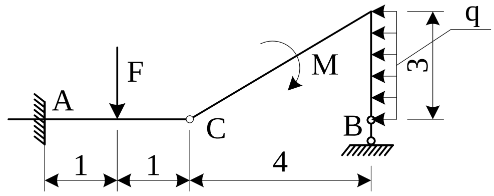
24



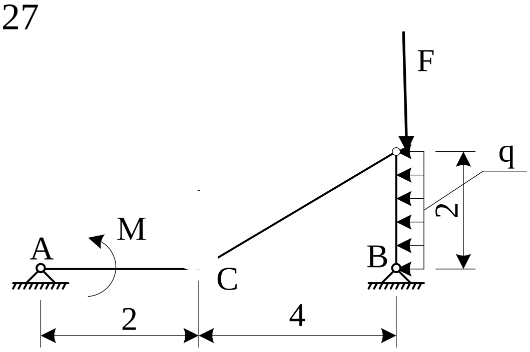
25



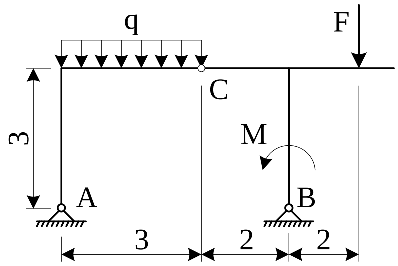
26



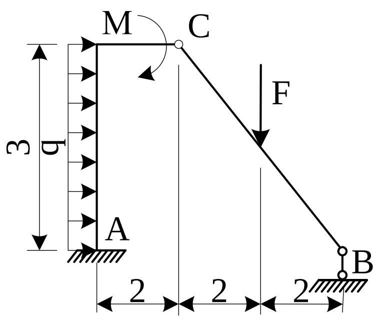
27



28



29



30

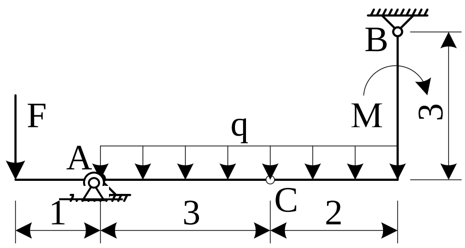


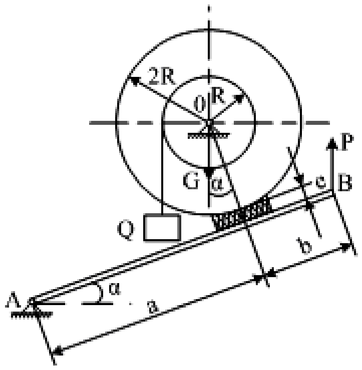
Таблица С. 3

Номер варианта	F	q	M	a	b
	кН	кН/м	кНм	м	М
0	10	15	30	5	32
1	25	20	50	1	3
2	40	30	40	4	1
3	30	25	45	2	5
4	20	10	30	5	1
5	15	30	35	3	2
6	40	25	45	4	3
7	35	20	25	2	4
8	20	10	40	1	5
9	30	15	35	3	4

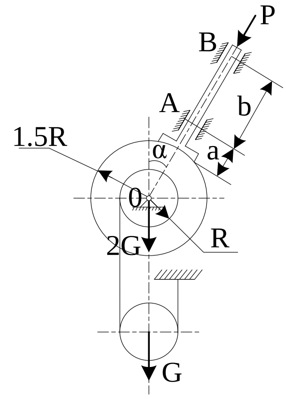
Задача С. 4. Равновесие сил с учетом сцепления (трения, покоя)

Определить минимальное и максимальное значения силы P и реакции опор системы, находящейся в покое.

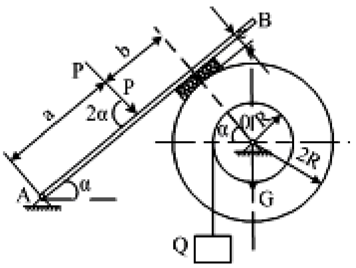
1



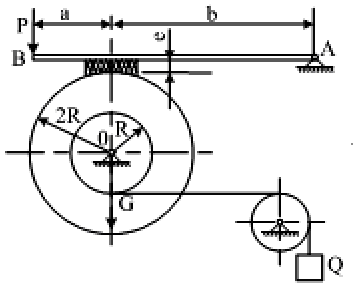
2



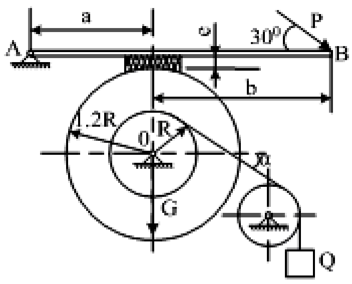
3



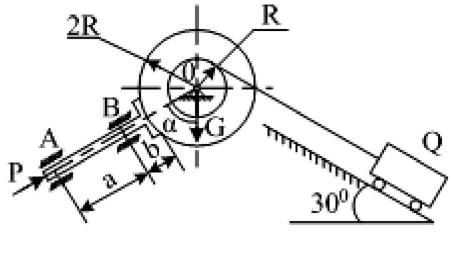
4



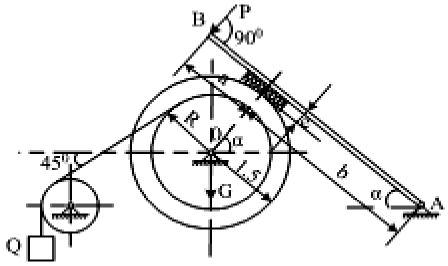
5



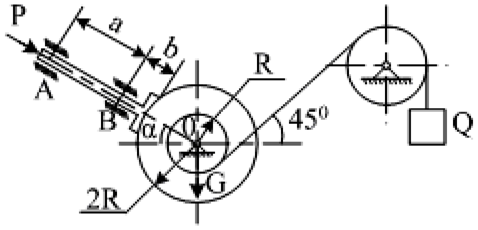
6



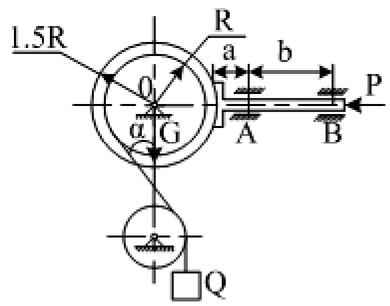
7



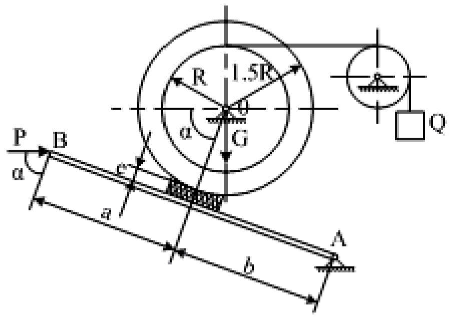
8



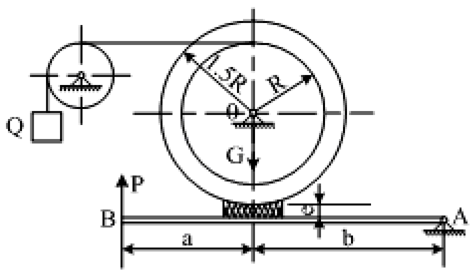
9



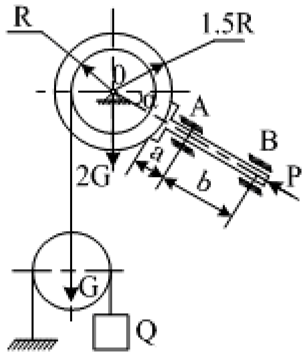
10



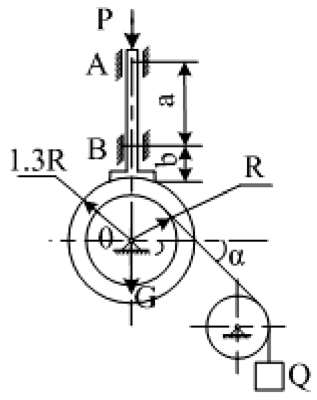
11



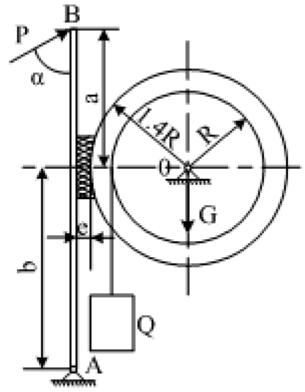
12



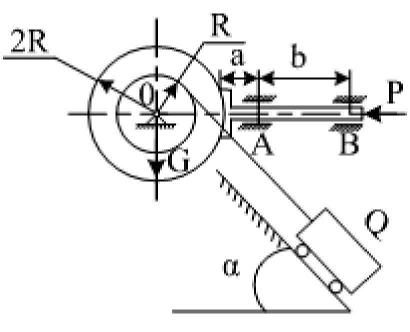
13



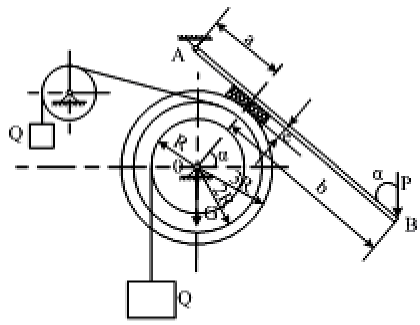
14



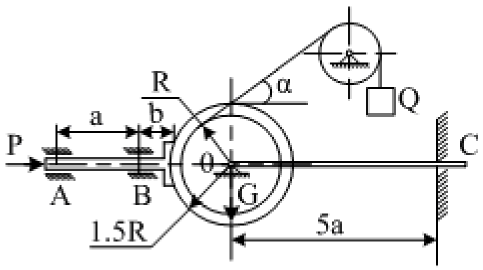
15



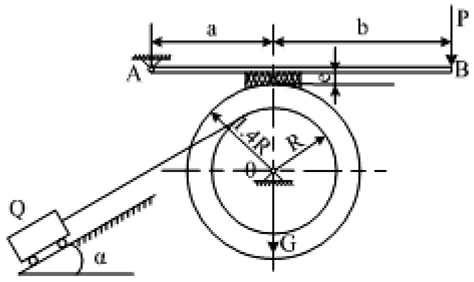
16



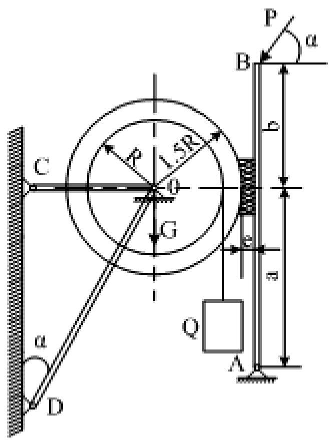
17



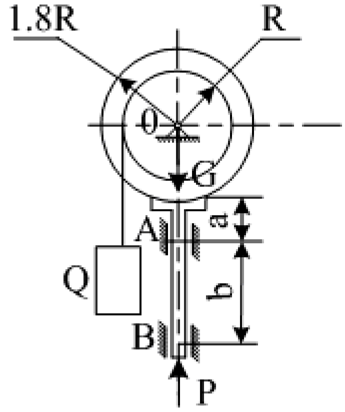
18



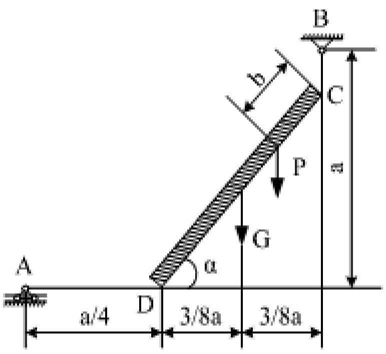
19



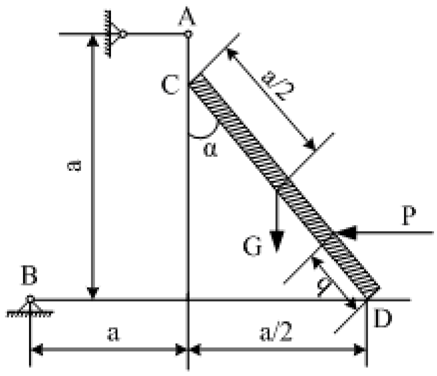
20



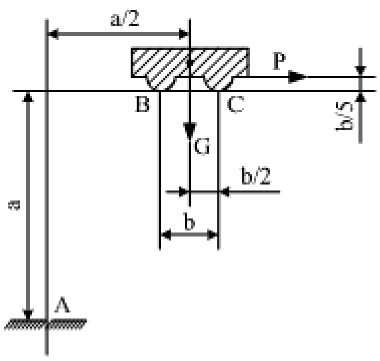
21



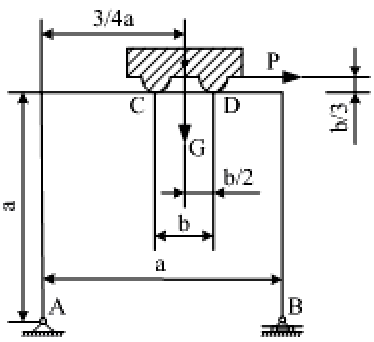
22



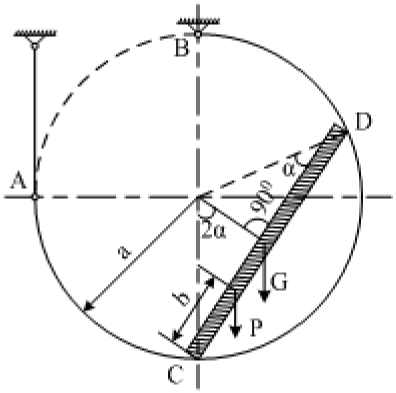
23



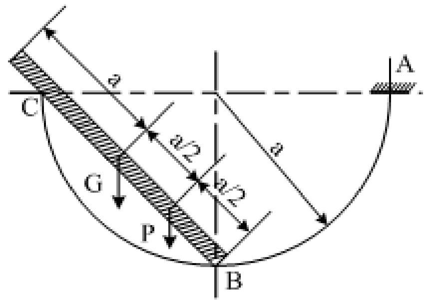
24



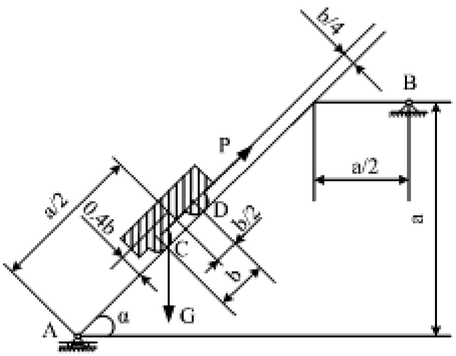
25



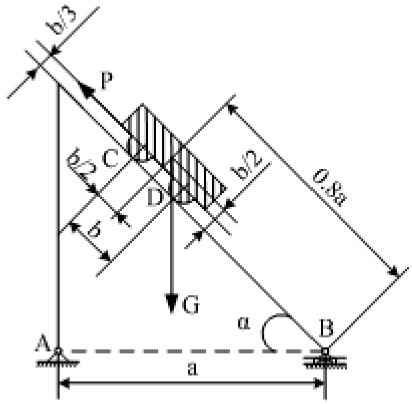
26



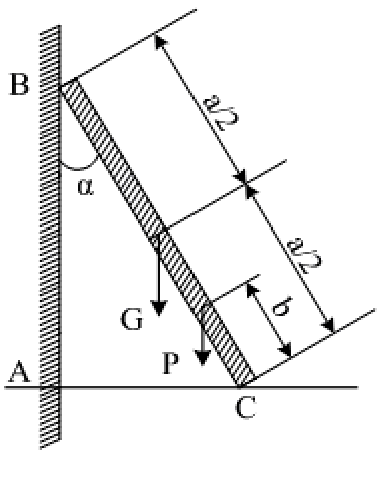
27



28



29



30

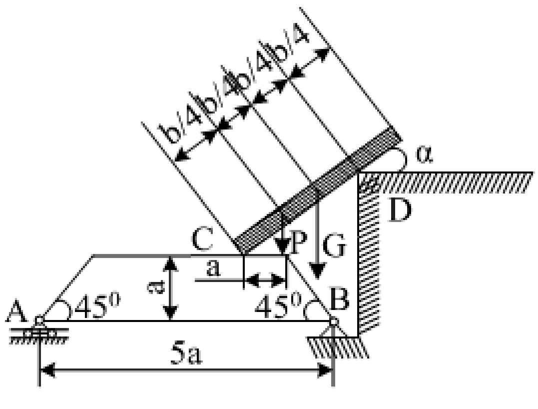


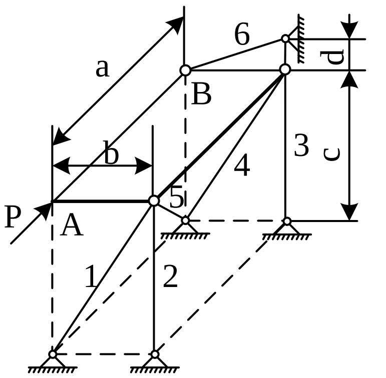
Таблица С. 4

Номер варианта	G	Q	a	b	e	α	fтр
	кН	кН	м	м	м	град.	-
0	2,1	10	0,20	0,10	0,04	30	0,10
1	1,1	14	0,10	0,15	0,05	25	0,25
2	1,7	25	0,45	0,40	0,06	35	0,25
3	2,0	15	0,10	0,40	0,04	30	0,30
4	2,2	18	0,20	0,30	0,06	25	0,20
5	1,0	24	0,15	0,10	0,05	30	0,35
6	1,5	16	0,20	0,50	0,06	20	0,15
7	1,6	23	0,30	0,60	0,05	35	0,40
8	1,8	22	0,40	0,30	0,04	25	0,20
9	1,3	20	0,35	0,70	0,04	20	0,35

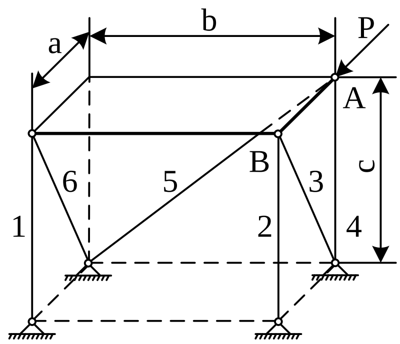
Задача С. 5. Определение реакций стержней, поддерживающих прямоугольную плиту

Найти реакции стержней, поддерживающих тонкую горизонтальную однородную плиту весом G, при действии на нее вдоль стороны AB силы P.

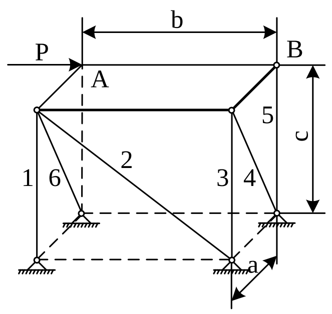
1



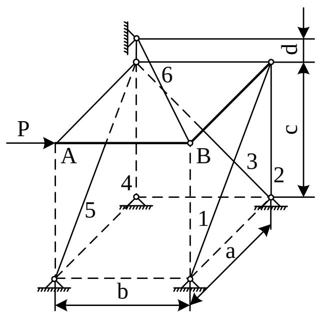
2



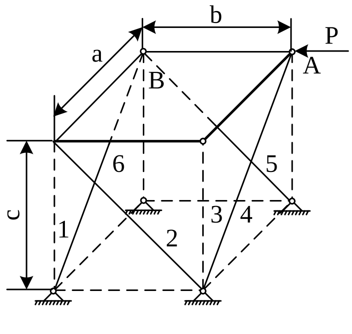
3



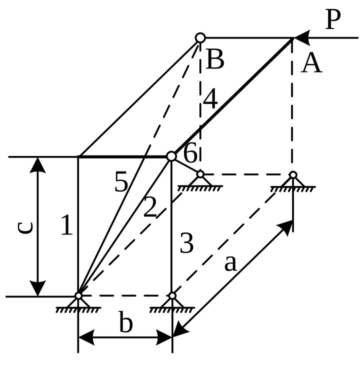
4



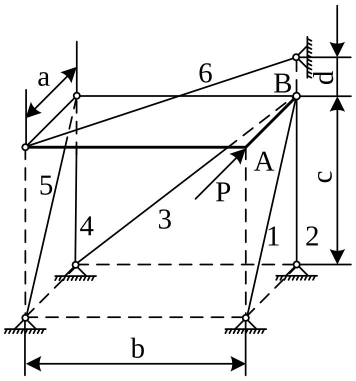
5



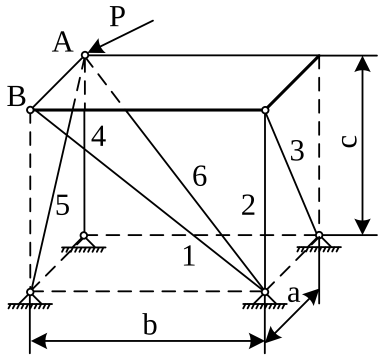
6



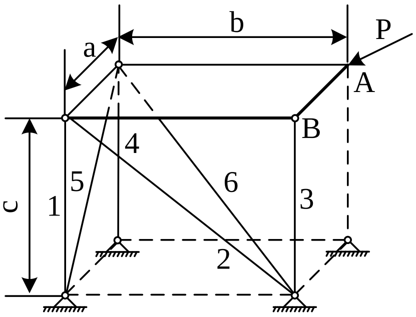
7



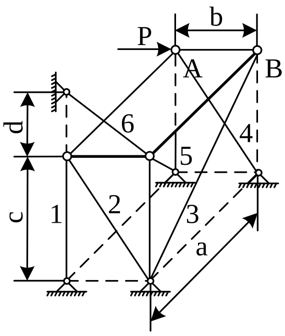
8



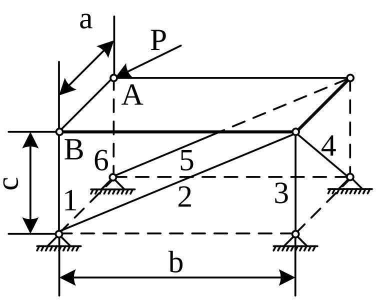
9



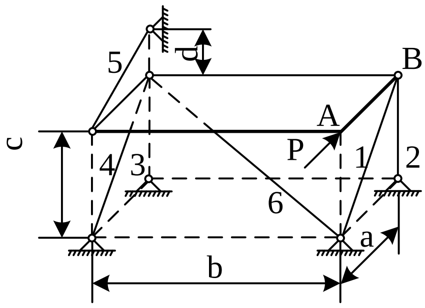
10



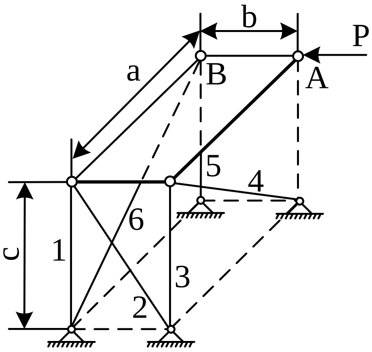
11



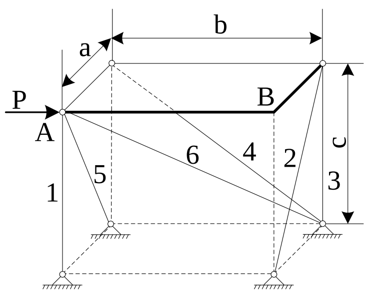
12



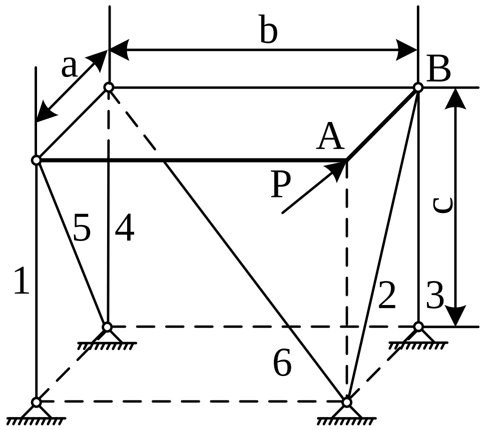
13



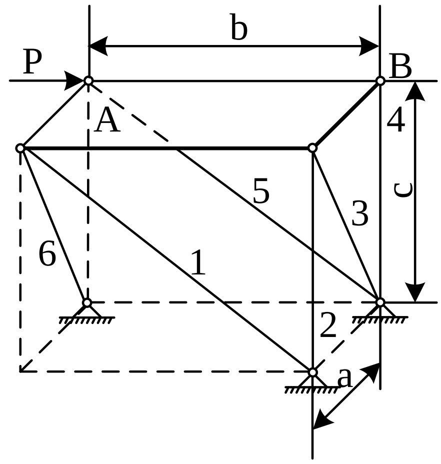
14



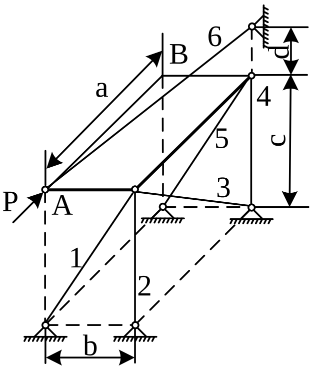
15



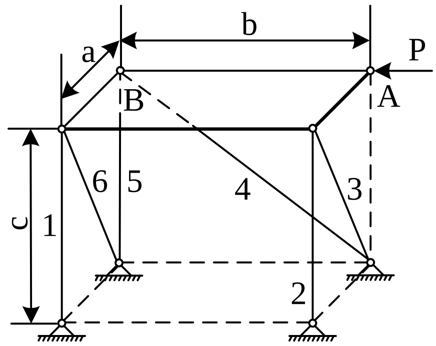
16



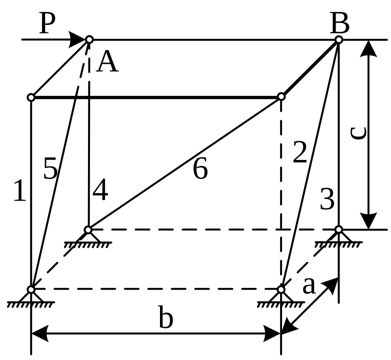
17



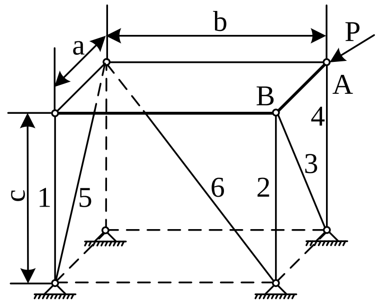
18



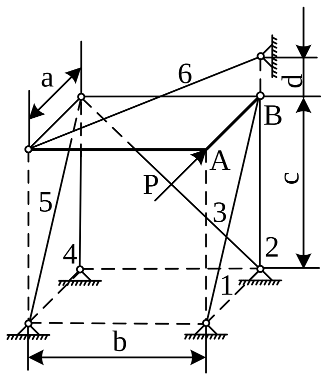
19



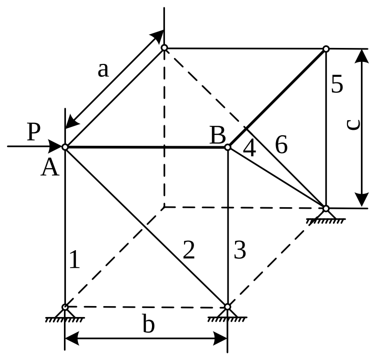
20



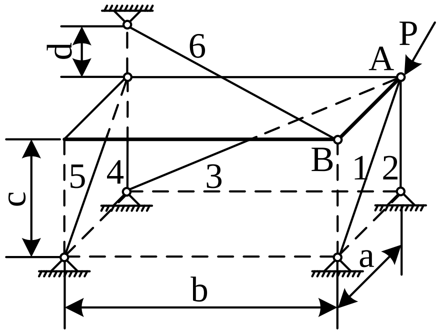
21



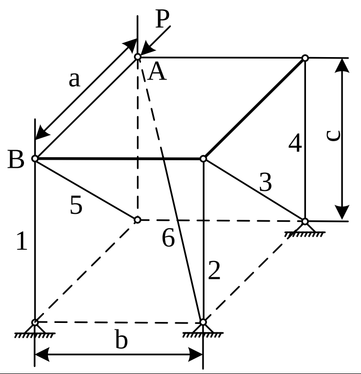
22



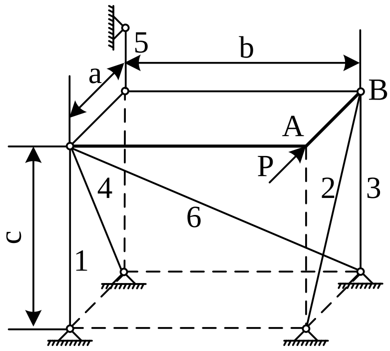
23



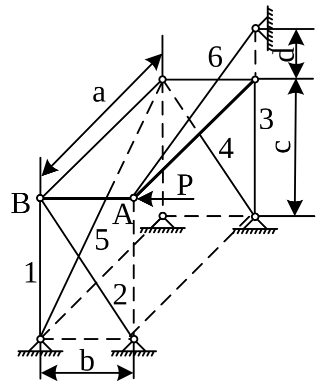
24



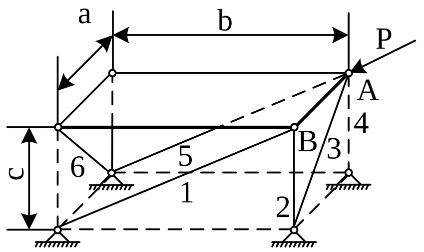
25



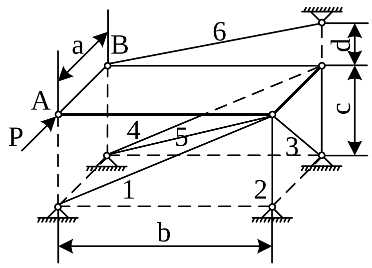
26



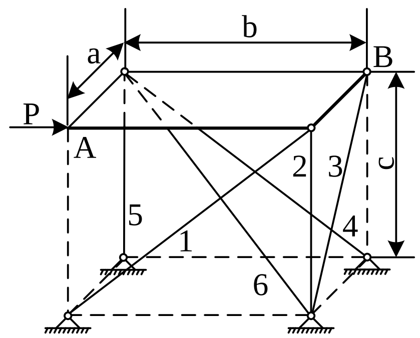
27



28



29



30

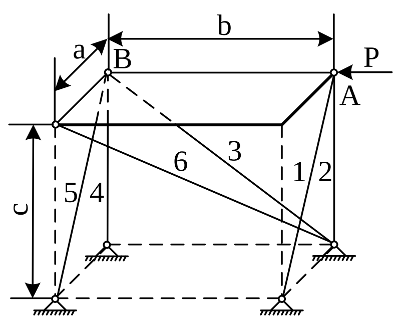


Таблица С. 5

Номер варианта	G	P	a	b	c	d
	кН	кН	м	м	м	м
0	22	20	8,0	2,5	3,5	1,0
1	18	40	6,0	5,0	4,0	1,5
2	26	30	7,5	4,5	4,5	2,0
3	30	25	5,5	4,0	3,0	1,5
4	36	10	7,0	4,0	1,5	1,0
5	32	25	4,5	2,5	2,0	2,0
6	20	35	5,5	5,0	4,0	2,0
7	34	15	9,0	5,5	2,5	1,5
8	28	35	7,5	6,0	3,5	1,0
9	24	30	6,0	2,0	2,0	2,0

2. КИНЕМАТИКА

Кинематикой называется раздел теоретической механики, в котором изучаются геометрические свойства движения тел без учета их массы и действующих на них сил.

Кинематика имеет весьма большое значение для изучения последнего раздела теоретической механики – динамики, где изучается движение тел под действием сил. С другой стороны, методы кинематики имеют самостоятельное практическое значение для исследования графических свойств движения частей различных механизмов и машин.

Развитие кинематики в настоящее время также идет, главным образом, по пути ее приложения к конструированию и исследованию функционирования механизмов и машин.

Слово «кинематика» происходит от греческого слова «кинема», что значит движение.

Пространство в механике рассматривается как трехмерное евклидово пространство, все измерения в котором производятся на основании методов евклидовой геометрии. Время в механике рассматривается как универсальное, т.е. протекающее одинаково в любой точке пространства и во всех системах отсчета. Она рассматривается как непрерывно изменяющаяся монотонно возрастающая скалярная величина. Все кинематические характеристики движения тела и его отдельной точки (расстояния, скорости, ускорения, и т.д.) рассматриваются как функции времени. За единицу времени принимается одна секунда.

Хотя евклидово пространство и универсальное время и не отражают реальных свойств пространства и времени, тем не менее в механике при изучении движений со скоростями, далекими от скорости света, это дает достаточную для практики точность. Механическим движением называется происходящее во времени и пространстве изменение положения одного тела относительно другого, с которым связана система координат, называемая системой отсчета. Систему отсчета можно связать с любым телом. Эта система может быть как движущейся, так и условно неподвижной. При изучении движений на Земле за условно неподвижную систему отсчета обычно принимают систему координатных осей, неизменно связанных с Землей.

Основной задачей кинематики является определение всех кинематических величин, характеризующих движение, как отдельной точки, так и тела в целом (траектории, скорости, ускорения и т.п.). Для решения основной задачи кинематики необходимо, чтобы изучаемое движение было задано (описано).

Задать движение точки (кинематически) – это значит указать способ, позволяющий в любой момент времени определить положение этой точки относительно выбранной системы отсчета.

Существует три способа задания движения точки: векторный, координатный и естественный.

Векторный способ задания движения точки

Положение точки M в пространстве однозначно определяется заданием радиус-вектора $\vec{r}$, проведенного из начала координат O в точку M.

При движении точки M радиус-вектор $\vec{r}$ будет изменяться, т.е. $\vec{r}$ есть вектор-функция времени. Значит, чтобы задать движение точки векторным способом необходимо:

1) задать неподвижную точку O в пространстве;

2) задать радиус-вектор точки как векторную функцию времени, т.е.

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \tag{2.1}$$

Уравнение (2.1) представляет собой уравнение движения точки в векторной форме. Векторный способ задания движения точки удобен для получения теоретических выводов, т.е. позволяет описать движение точки одним векторным уравнением (2.1). Геометрическое место концов радиуса-вектора движущейся точки M называется траекторией точки M.

Координатный способ задания движения точки

Положение точки M в неподвижной системе отсчета O_{XYZ} определяется тремя координатами x,y,z. При движении точки M ее координаты изменяются с течением времени. Поэтому, чтобы задать движение точки координатным способом необходимо:

1) задать неподвижную систему отсчета O_{XYZ};

2) задать координаты точки M как функции времени, т.е.

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t). \tag{2.2}$$

Уравнения (2.2) выражают уравнения движения точки в декартовых координатах.

Движение точки M в плоскости описывается двумя уравнениями, а прямолинейное движение – одним.

Координатный способ задания движения точки применяется для решения различных технических задач.

Уравнения (2), определяющие уравнения движения точки, одновременно являются уравнениями траектории точки в параметрической форме, где роль параметра играет время t.

При исключении из этих уравнений параметра t получаются уравнения траектории точки в явной (координатной) форме.

Естественный способ задания движения точки

Если траектория точки известна, то выбрав на ней начало отсчета O, положение точки M на траектории можно определить криволинейной координатой.

При движении точки по траектории криволинейная координата непрерывно изменяется, т.е. координата s является функцией времени.

Значит, чтобы задать движение точки естественным способом, необходимо:

- задать траекторию точки;
- задать начало отсчета на траектории с указанием положительного и отрицательного направлений отсчета криволинейной координаты;
- задать криволинейную координату s как функцию времени.

Линия, образованная концами переменного вектора, начало которого находится в определенной точке пространства, называется годографом этого вектора. Следовательно, траектория точки является годографом ее радиус-вектора. Скоростью точки называется вектор, характеризующий быстроту и направление движения точки в данной системе отсчета. Вектор скорости точки в данный момент времени равен производной от радиус-вектора точки по времени. Поскольку предельным положением секущей является касательная, то вектор скорости точки в данный момент времени направлен по касательной к траектории точки в сторону ее движения. Скорость точки является вектором, условимся в дальнейшем вместо термина «вектор скорости» употреблять термин «скорость». Ускорение точки – это вектор, характеризующий быстроту изменения вектора скорости, как по величине, так и по направлению в пространстве. Ускорение точки в данный момент времени определяется первой производной от вектора скорости по времени или второй производной от радиус-вектора точки по времени дважды. Вектор ускорения направлен по касательной к годографу вектора скорости.

Задача К. 1. Определение скорости и ускорения точки по заданным уравнениям её движения

В соответствии с заданными уравнениями движения определить траекторию движения точки, а для момента времени t – положение точки на траектории, найти ее скорость, полное, касательное и нормальное ускорение, а также радиус кривизны траектории. Данные, необходимые для вычисления, приведены ниже. Координаты даны в метрах, время в секундах.

	$x = f(t)$	$y = f(t)$
1	$x = at^2 + 12$	$y = et$
2	$x = bt$	$y = dt^2 + ft + e$
3	$x = c\cos(\pi \mathrm{t})$	$y = e\sin(\pi t)$
4	$x = a\,t + b$	$y = -\dfrac{e}{t + f}$
5	$x = a\cos\left(\dfrac{\pi\, \mathrm{t}^{-}}{b}\right)$	$y = d\sin\left(\dfrac{\pi\, \mathrm{t}^{-}}{b}\right)$
6	$x = a\,t^2 + b$	$y = e\,t^{-} + d$
7	$x = t^2 - 4\,t + 1$	$y = t + e$
8	$x = a\cos\left(\dfrac{\pi\, \mathrm{t}^{-}}{c}\right)$	$y = f\sin\left(\dfrac{\pi\, \mathrm{t}^{-}}{d}\right)$
9	$x = -ct - b$	$y = -\dfrac{f}{t + e}$
10	$x = a\cos\left(\dfrac{\pi\, t}{c}\right) + b$	$y = f\sin\left(\dfrac{\pi\, t}{\mathrm{c}}\right)$
11	$x = at^3 + bt + c$	$y = f\ t$
12	$x = a\ t + b$	$y = d\ t^2 + e$
13	$x = \cos\left(\dfrac{\pi t}{f}\right)$	$y = \sin\left(\dfrac{\pi\, t^{-}}{f}\right)$
14	$x = bt + c$	$y = -\dfrac{e}{ft + d}$
15	$x = b\cos\left(\dfrac{\pi\ t}{c}\right)$	$y = d\sin\left(\dfrac{\pi\ t}{\mathrm{c}}\right)$
16	$x = a\ t^3 + c$	$y = f\ t^{\smile} + e$
17	$x = a\ t + b$	$y = d\ t^2 + f$

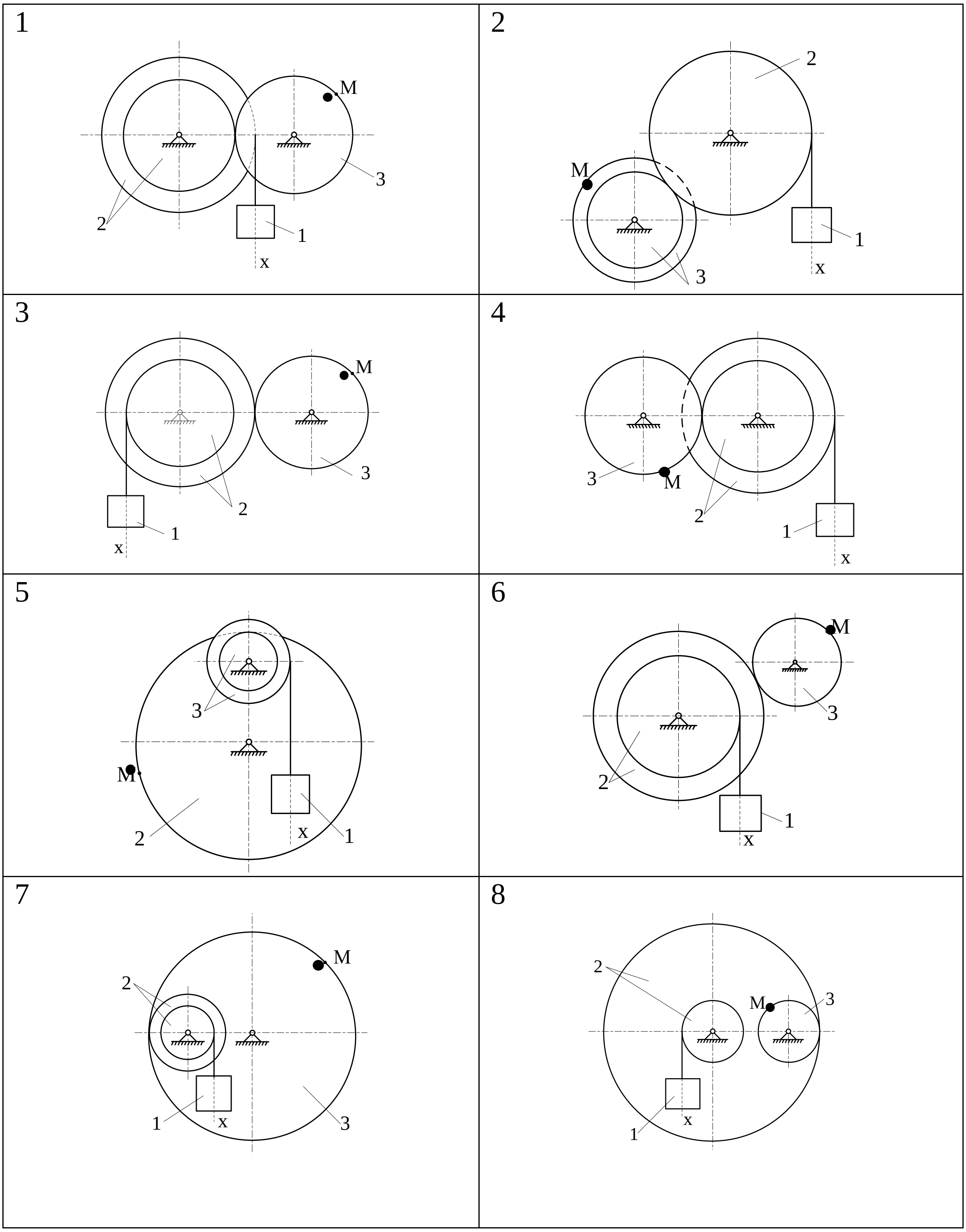
18	$x = b\cos(\pi t)$	$y = e\sin(\pi t)$
19	$x = -t - c$	$y = -\dfrac{d}{t + f}$
20	$x = \cos\left(\dfrac{\pi t}{f}\right) + a$	$y = e\sin\left(\dfrac{\pi t}{f}\right)$
21	$x = at$	$y = d t^4 + et + f$
22	$x = t^2$	$y = \dfrac{f}{e} t - d$
23	$x = b\cos\left(\dfrac{\pi t}{d}\right)$	$y = e\sin\left(\dfrac{\pi t}{d}\right)$
24	$x = -ct$	$y = -\dfrac{f}{t + d}$
25	$x = b\cos\left(\dfrac{\pi t}{a}\right) - c$	$y = d\sin\left(\dfrac{\pi t}{a}\right)$
26	$x = t^3 + b$	$y = t - e$
27	$x = t^2 + a$	$y = t + d;$
28	$x = a\cos(b\pi t)$	$y = d\sin(b\pi t)$
29	$x = bt$	$y = -\dfrac{d}{ft + e}$
30	$x = -\cos\left(\dfrac{\pi t}{c}\right)$	$y = d\sin\left(\dfrac{\pi t}{c}\right) + f$

Таблица К.1

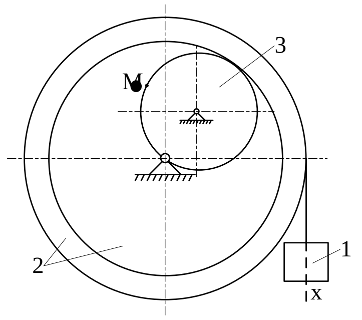
Номер варианта	a	b	c	d	e	f	t_1
0	4	1	5	9	6	2	0,3
1	9	5	7	1	3	4	0,6
2	8	9	4	3	5	1	0,8
3	5	7	1	6	9	8	0,1
4	7	4	8	2	1	3	0,7
5	9	6	3	5	4	7	0,9
6	3	8	2	4	6	5	0,2
7	1	2	6	7	8	9	0,4
8	2	3	9	8	7	4	0,5
9	6	9	4	3	2	8	0,8

Задача К. 2. Определение скоростей и ускорений точек твердого тела при поступательном и вращательном движениях

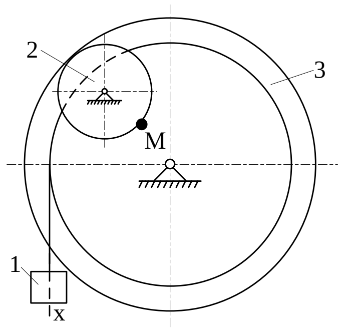
Для представленных на схемах (1-30) грузоподъемных механизмов определить угловую скорость и угловое ускорение тела 3, необходимые для того, чтобы перемещать груз со скоростью V, и ускорение a. Определить и показать на рисунке скорость и ускорение точки M барабана.



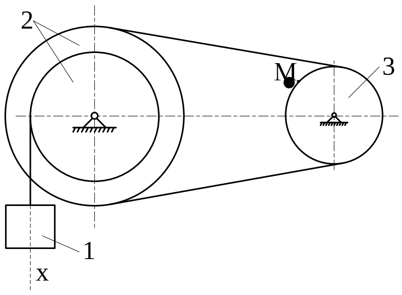
9



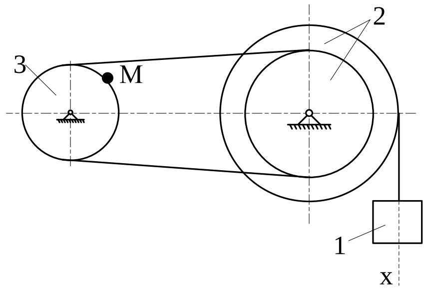
10



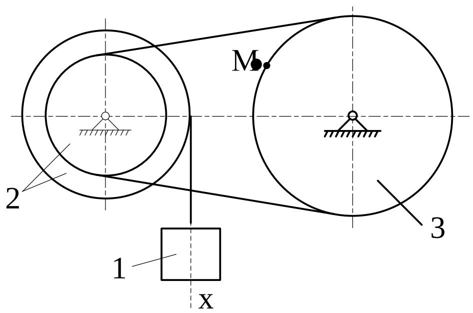
11



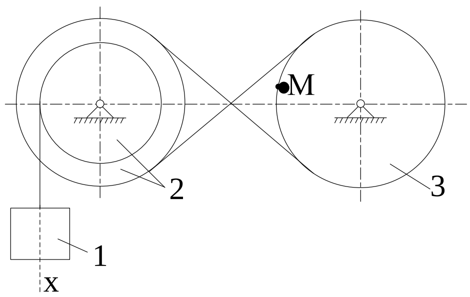
12



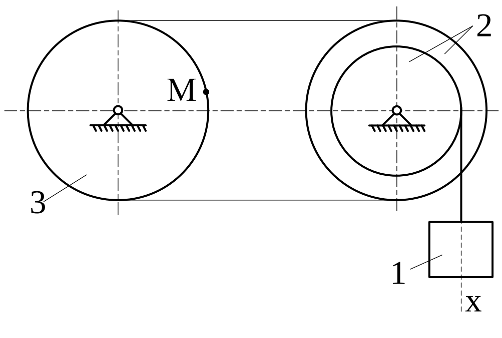
13



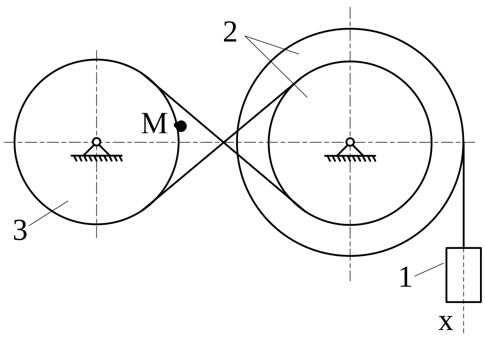
14



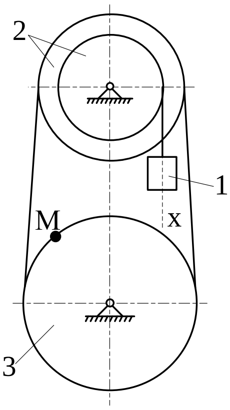
15



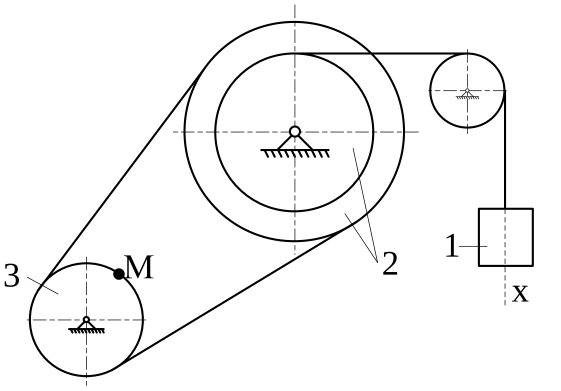
16



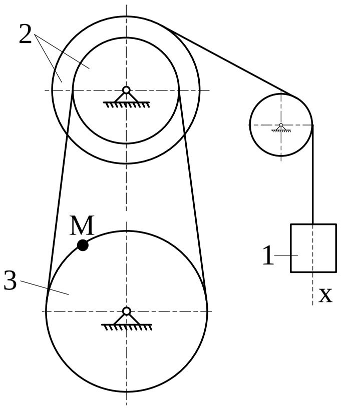
17



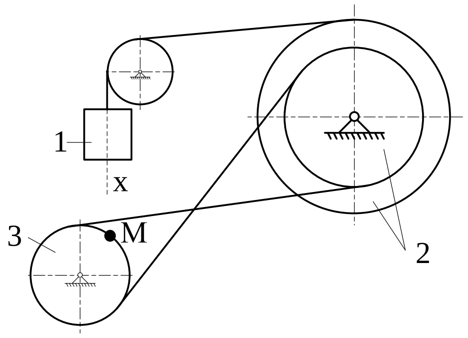
18



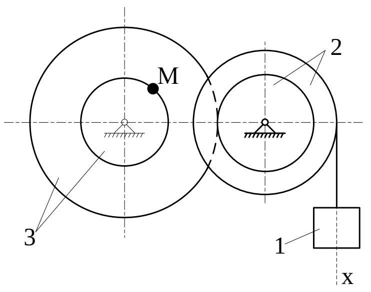
19



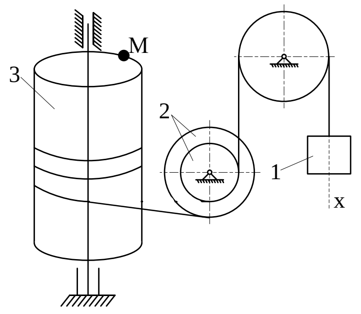
20



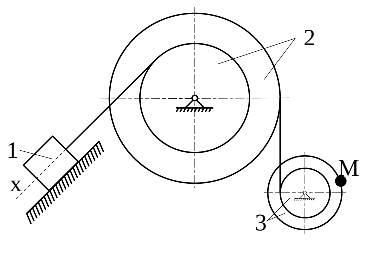
21



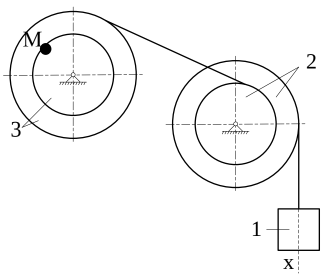
22



23



24



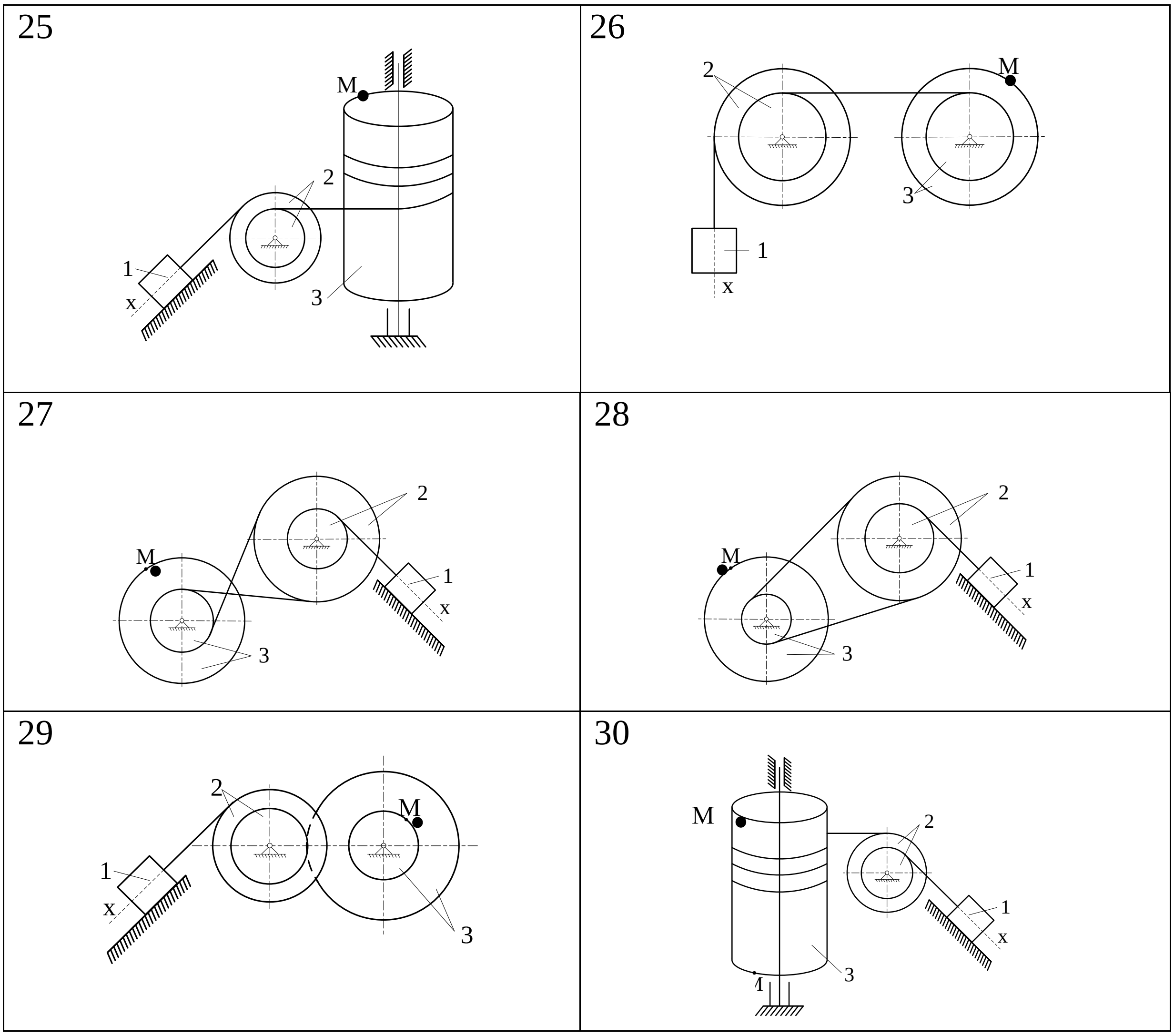
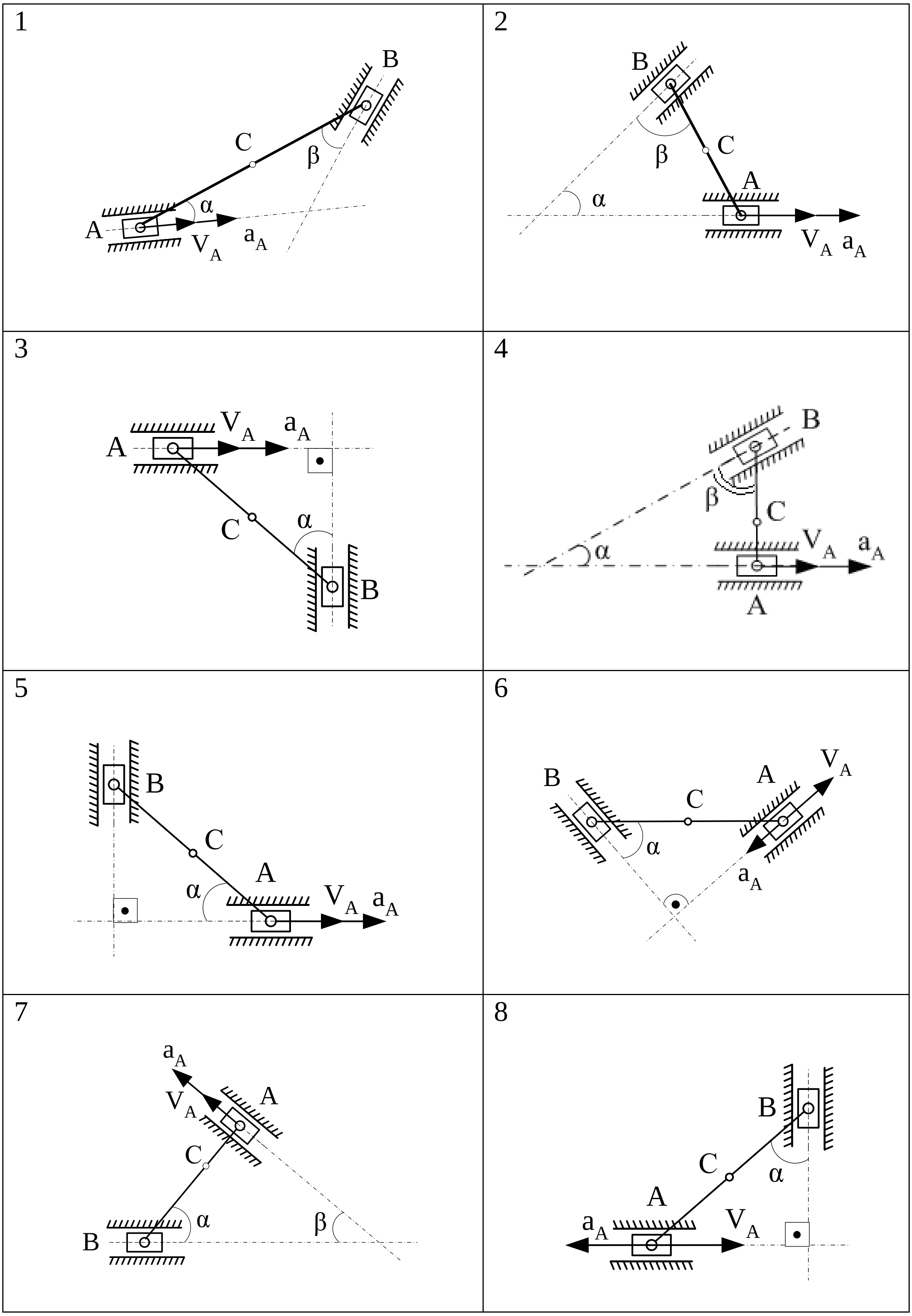


Таблица К. 2

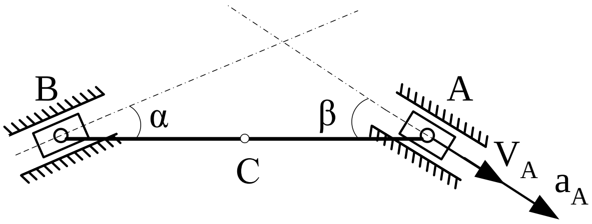
Номер варианта	V_1 м/с	a_1 м/с^2	R_2 м	r_2 м	R_3 м	r_3 м
0	0,10	0,75	0,40	0,15	0,60	0,35
1	0,25	0,70	0,80	0,20	0,70	0,25
2	0,35	0,90	0,60	0,50	0,50	0,30
3	0,50	0,55	0,55	0,35	0,45	0,20
4	0,40	0,75	0,75	0,20	0,75	0,55
5	0,15	0,80	0,65	0,50	0,80	0,45
6	0,30	0,45	0,45	0,35	0,65	0,30
7	0,55	0,60	0,55	0,40	0,40	0,15
8	0,45	0,75	0,70	0,20	0,50	0,20
9	0,20	0,50	0,50	0,25	0,75	0,60

Задача К. 3. Кинематический анализ плоского механизма

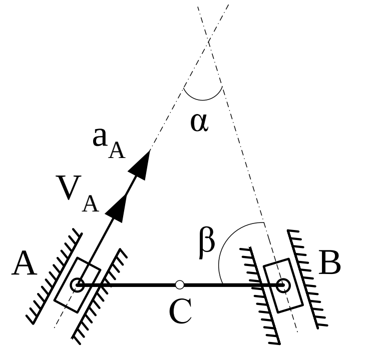
Для представленных на схемах (рис. 1-30) механизмов определить скорость и ускорение точек B и C шатуна AB.



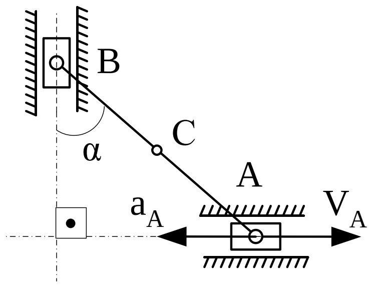
9



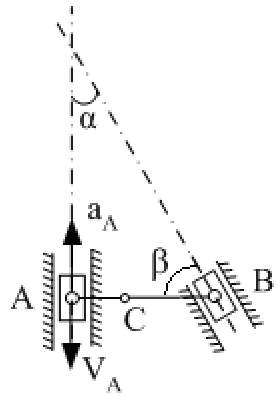
10



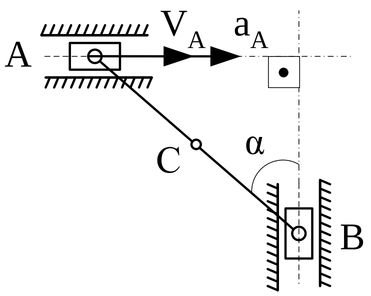
11



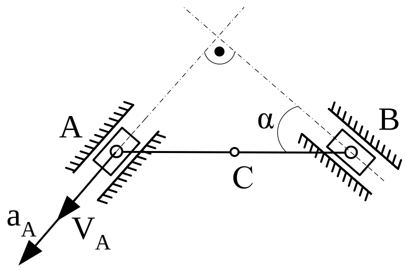
12



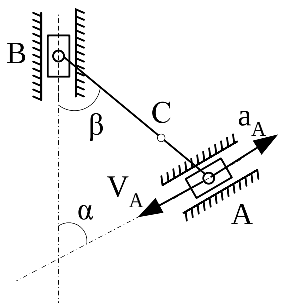
13



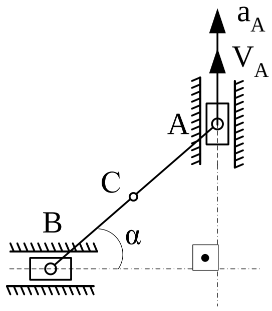
14



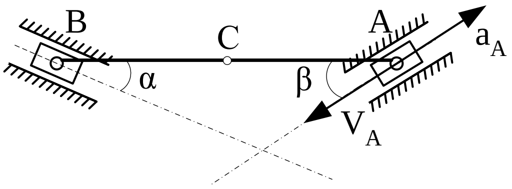
15



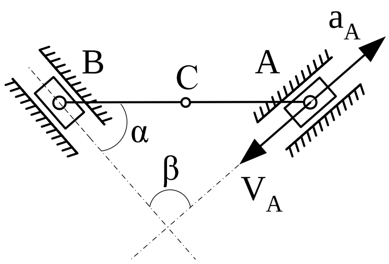
16



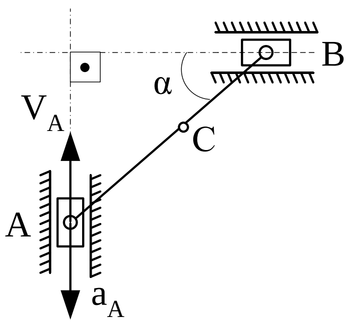
17



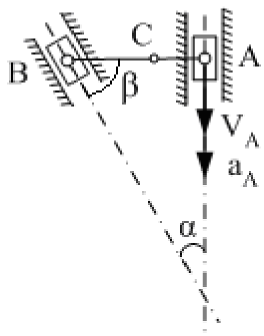
18



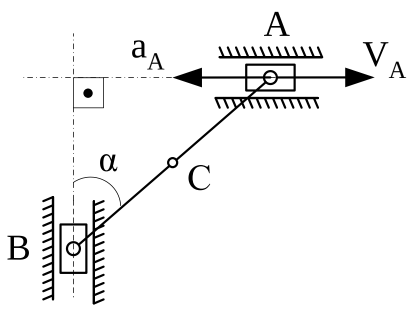
19



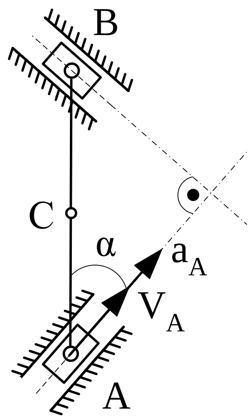
20



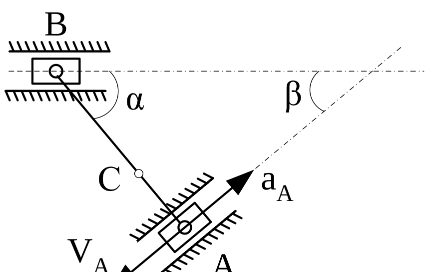
21



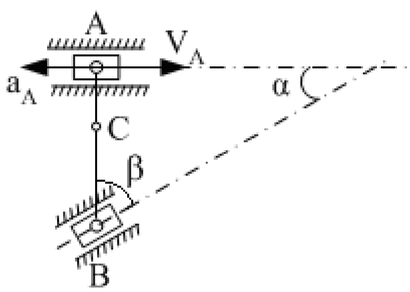
22



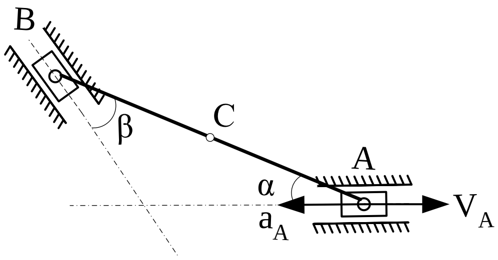
23



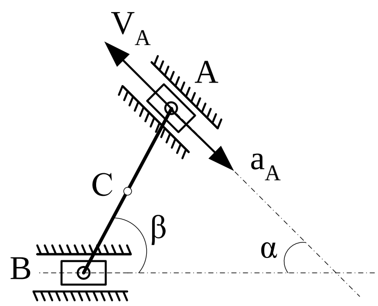
24



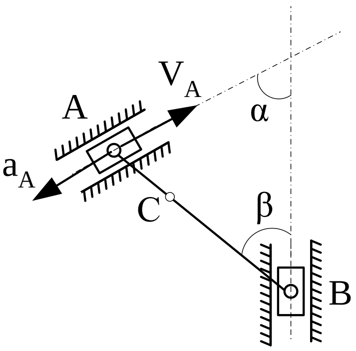
25



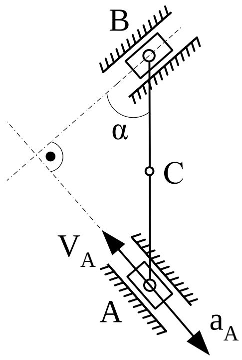
26



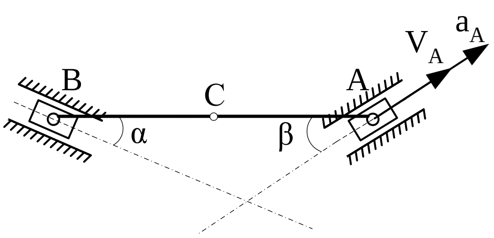
27



28



29



30

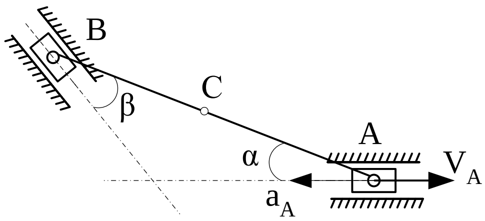
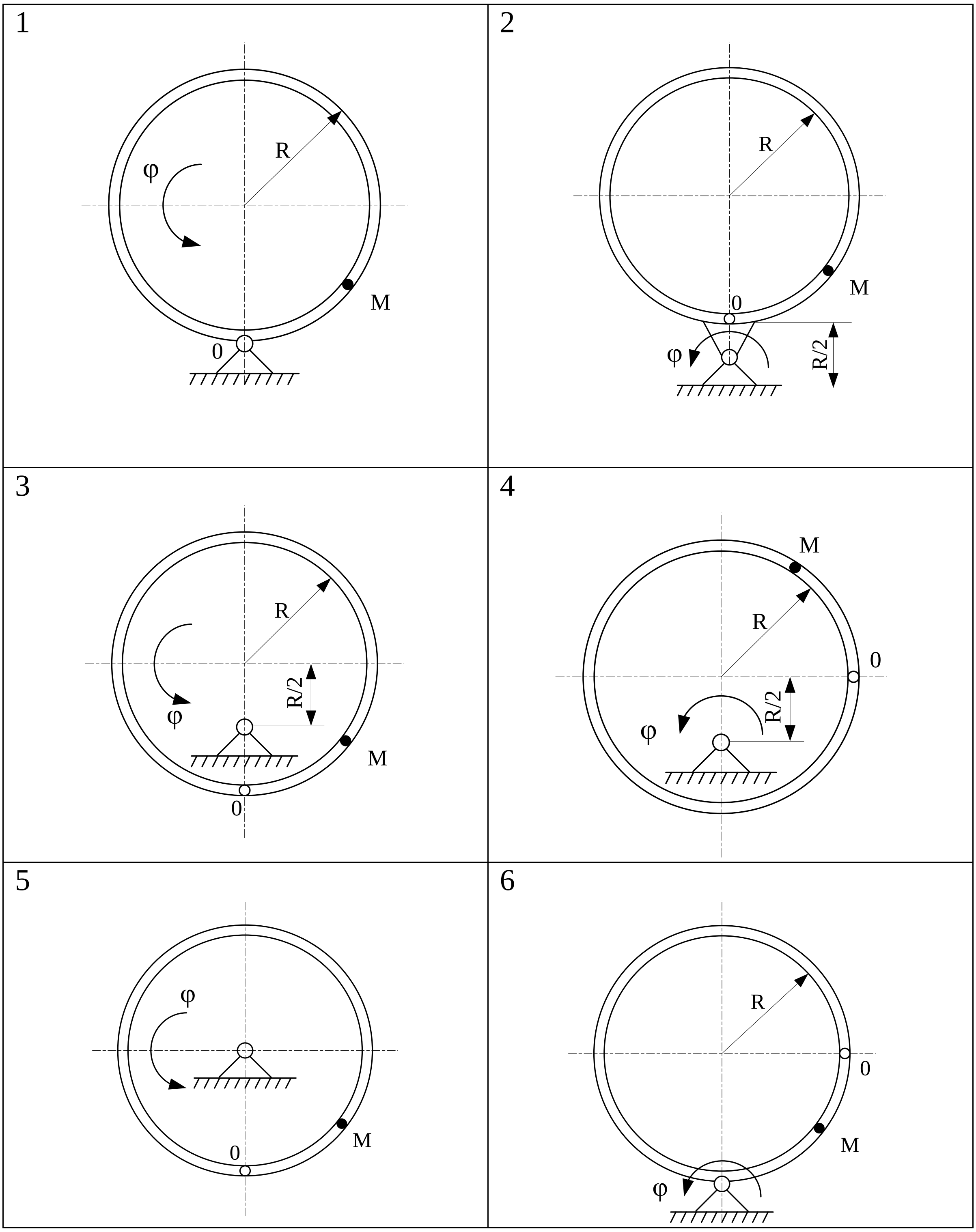


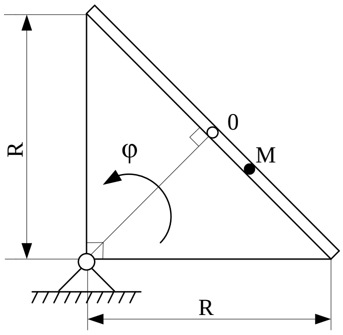
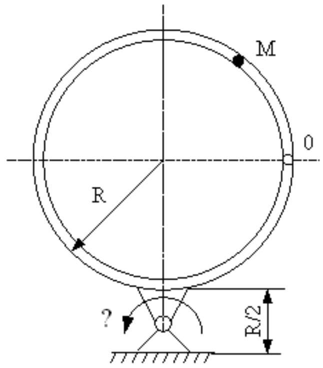
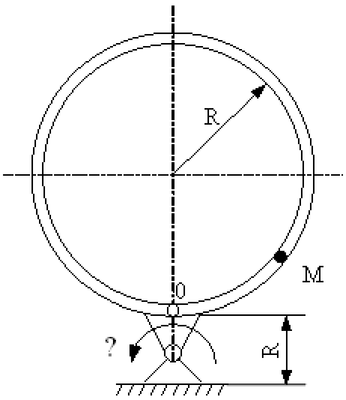
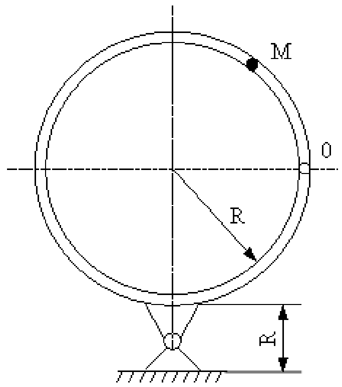
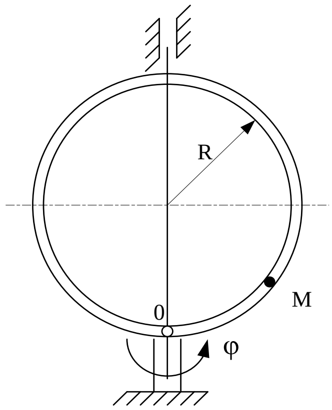
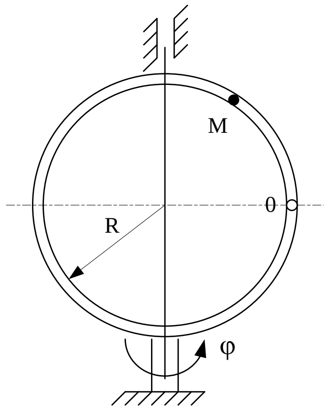
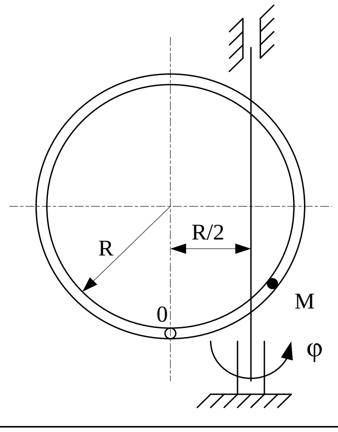
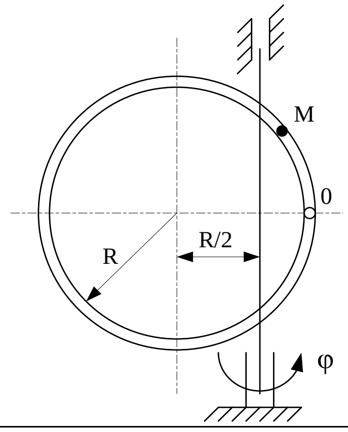
Таблица К. 3

Номер варианта	V_A	a_A	AB	$AC = \frac{BC}{AB}$	α	β
	м/с	м/с^2	м	-	град.	град.
0	1,0	3,0	2,0	0,3	20	40
1	3,0	3,5	3,0	0,7	30	40
2	2,0	2,5	2,5	0,4	40	20
3	2,5	4,0	2,5	0,6	50	20
4	1,5	3,5	2,0	0,7	70	10
5	3,5	2,0	4,0	0,4	20	60
6	3,0	2,0	3,0	0,5	60	10
7	4,0	2,5	3,5	0,6	30	20
8	2,5	4,0	2,0	0,5	50	20
9	3,5	3,0	2,5	0,3	40	30

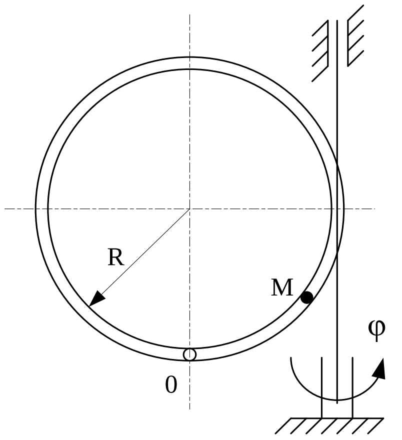
Задача К. 4. Определение абсолютной скорости и ускорения точки

В приведенных ниже схемах (рис. 1-30) рассматривается движение точки М в желобе вращающегося тела. По заданным уравнениям переносного движения $\varphi = \varphi(t)$ и относительного движения OM = OM(t) определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки в заданный момент времени.

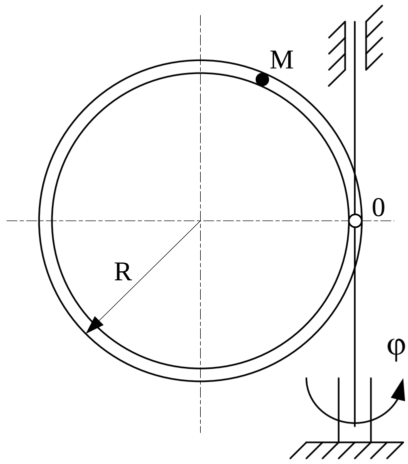


7 	8 
9 	10 
11 	12 
13 	14 

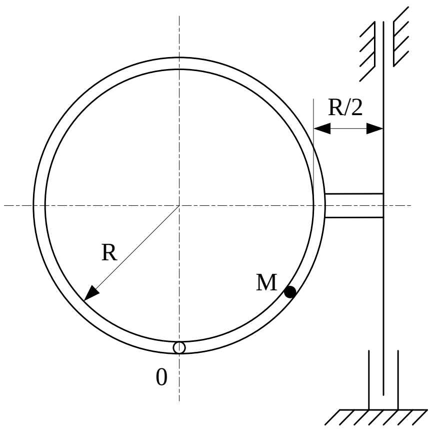
15



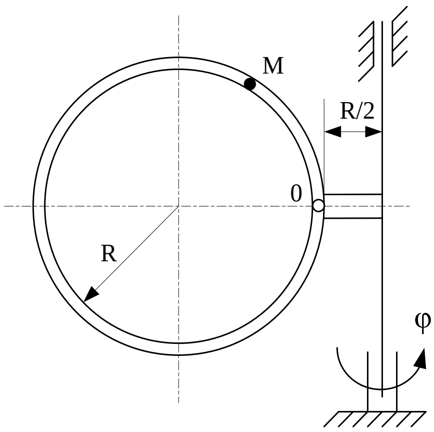
16



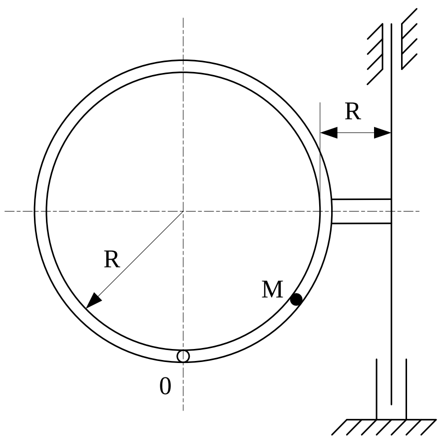
17



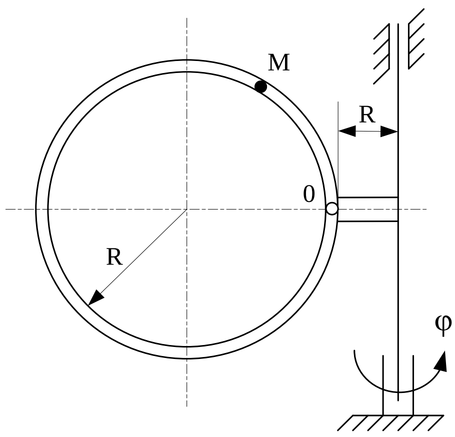
18



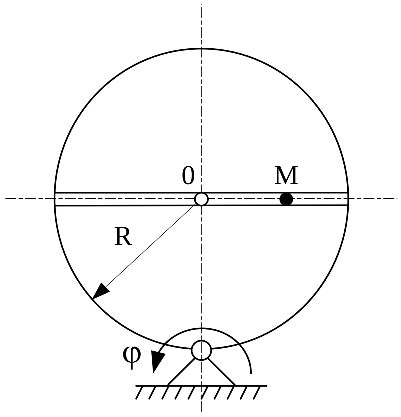
19



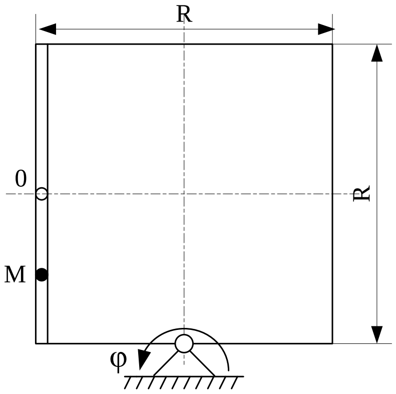
20



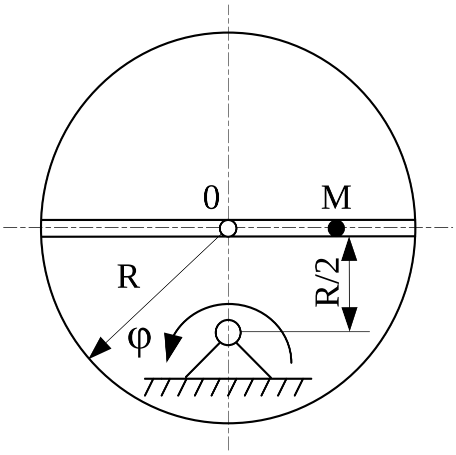
21



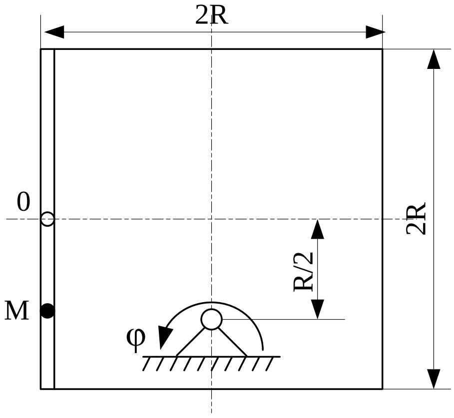
22



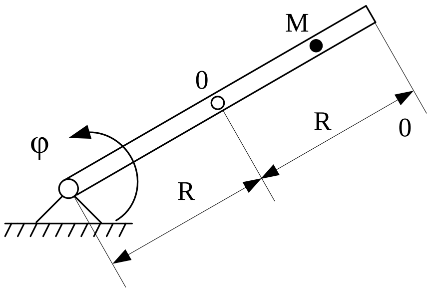
23



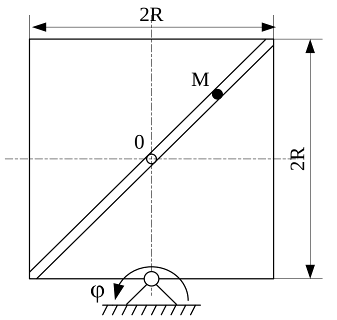
24



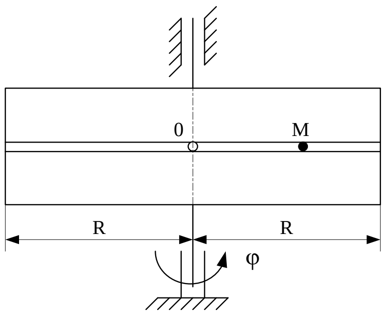
25



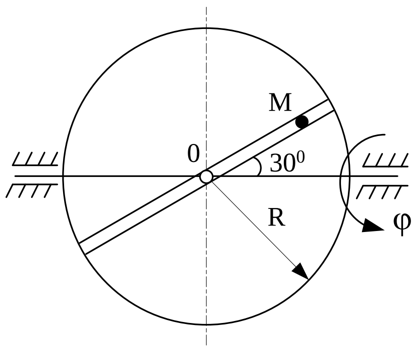
26



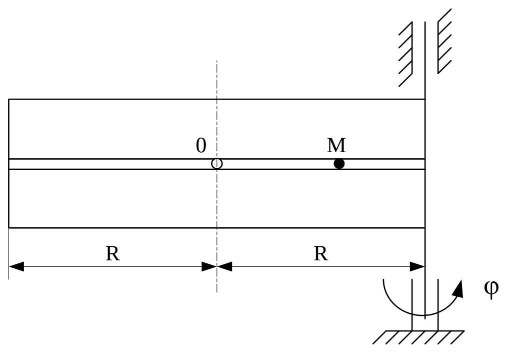
27



28



29



30

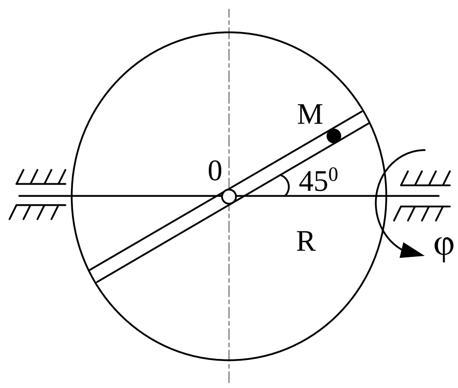


Таблица К.4

Номер варианта	$0M=S_{отн}$ (м)	$\varphi=\varphi_{пер}$ (раз)	R (м)	t_1 (с)
1	$R\sin\frac{\pi t}{3}$	$0,5t^2+t$	0,2	0,1
2	$-R\sin\frac{\pi t^2}{4}$	$6t+4t^2$	0,5	0,25
3	$-R\sin 3\pi t$	$2t^2+1$	0,3	0,55
4	$-R\sin\frac{\pi t}{2}$	$2t^2-3t$	0,45	0,4
5	$-R\sin 2\pi t$	$0,5t^2+t$	0,1	0,2
6	$R\sin\frac{\pi t}{2}$	$0,5t^2$	0,4	0,5
7	$-R\sin\frac{\pi t^2}{6}$	$3t^2-8t$	0,55	0,35
8	$R\sin\frac{\pi t}{4}$	$4t-t^2$	0,25	0,15
9	$R\sin\frac{\pi t^2}{3}$	$3t^2-1$	0,15	0,45
10	$R\sin\frac{\pi t}{6}$	$4t-t^2$	0,35	0,3

3. ДИНАМИКА

Пусть материальная точка $M\,(x, y, z)$ массой m движется по криволинейной траектории с ускорением a под действием некоторой переменной силы F. Проекции этой силы на оси инерциальной системы отсчета обозначим через X, Y, Z. Тогда на основании второго закона Ньютона:

$$\vec{F} = m\vec{a}. \tag{3.1}$$

Спроецируем векторное равенство (1) на координатные оси, получим:

$$X = ma_x,\ Y = ma_y,\ Z = ma_z. \tag{3.2}$$

Как известно из кинематики, проекции ускорения на координатные оси выражаются так:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2}, \qquad a_y = \frac{d^2y}{dt^2}, \qquad a_z = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Подставляя последние выражения в уравнение (3.2), получим:

$$X = m\frac{d^2x}{dt^2},\ Y = m\frac{d^2y}{dt^2},\ Z = m\frac{d^2z}{dt^2}. \tag{3.3}$$

Таким образом, получили систему трех дифференциальных уравнений второго порядка, выражающих в координатной форме основную аксиому динамики. Уравнения (3.3) в динамике точки являются основными и называются дифференциальными уравнениями движения материальной точки.

Замечание: в случае, когда на материальную точку действует не одна сила, а система сил, то под X, Y, Z следует понимать проекции главного вектора этой системы сил

В динамике точки рассматривается движение материальной точки в связи с силами, приложенными к ней, и ставится целью решение двух основных задач динамики точки:

1) по заданным силам найти движение точки;

2) по заданному движению найти силы, приложенные к точке.

Используя дифференциальные уравнения (3.3), которые были получены в предыдущем пункте, можно решить обе основные задачи динамики точки.

Первая (прямая) задача динамики точки:

Дано: движение точки, масса точки m.

Найти: силу, действующую на точку в каждый момент.

Решение: пусть движение точки задано тремя кинематическими уравнениями:

$$x(t),\ y(t),\ z(t), \tag{3.4}$$

которые представляют собой координаты точки как известные функции времени. Тогда для того, чтобы найти неизвестную силу F, действующую на точку, необходимо подставить заданную массу точки m и уравнения движения (3.4) в уравнения (3.3). Получим:

$$X = m\frac{d^2x(t)}{dt^2},\ Y = m\frac{d^2y(t)}{dt^2},\ Z = m\frac{d^2z(t)}{dt^2}. \qquad (3.5)$$

Определив три проекции X, Y, Z искомой силы F, будем знать ее модуль и направление в каждый момент времени.

Таким образом, первая (прямая) задача динамики точки решается путем дифференцирования дважды уравнений движения точки (3.4) и подстановки этих производных и массы точки m в уравнения (3.3), из которых находится неизвестная сила, действующая на точку в каждый момент.

Задача Д. 1. Интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки, находящейся под действием переменных сил

1. Материальная точка массы m кг движется вдоль горизонтальной оси Ox под действием силы $F = at$ (Н). Найти скорость V и положение точки x при t_1 равном t при нулевых начальных условиях.

2. На тело массой m, движущееся по горизонтальной гладкой поверхности, действует сила отталкивания, проекция которой на горизонтальную ось Ox равна $F_x = k^2mx$ (Н). В начальный момент времени тело находится в покое на расстоянии x_0 (м) от начала отсчета. Определить скорость тела в момент, когда расстояние от начала отсчета увеличится в n раз.

3. Сила тяги винтов вертолёта массой m при вертикальном подъёме из состояния покоя в n раз превышает его вес. Сопротивление воздуха пропорционально первой степени скорости $R = – mk\,V$ (Н). Определить скорость подъёма в момент t, а также V_{max}.

4. Лодке массой m (кг) сообщается начальная скорость V_0 (м/с). При движении лодка встречает сопротивление, пропорциональное квадрату скорости $R = aV^2$ (Н). Через сколько времени скорость лодки уменьшится в n раз?

5. Материальная точка массы m (кг) движется из начала координат вдоль горизонтальной оси Ox, имея начальную скорость $V_0 = V_0$ (м/с) и испытывая силу сопротивления движению $R = -kx$ (Н). Найти скорость V и положение точки x при t (с).

6. Тело массой m , движущееся по гладкой горизонтальной поверхности, притягивается к неподвижному центру с силой, проекция которой на горизонтальную ось Ox равна $Fx = -k^2mx$ (Н). В момент времени $t = 0x = 0$ и V_0 (м/с). Определить максимальное удаление тела от начала отсчета.

7. Груз массой m (кг) опускается при помощи парашюта без начальной скорости. Сила сопротивления воздуха пропорциональна первой степени скорости $R = – bV$ (Н). Определить скорость V груза через t (с) после начала спуска.

8. В момент выключения мотора катер массой m (кг) имел скорость V_0. Какой путь пройдёт катер с выключенным мотором до момента времени, когда его скорость уменьшится в n раз. Силу сопротивления считать пропорциональной квадрату скорости $R = aV^2$ (Н).

9. Материальная точка массы m (кг) движется вдоль горизонтальной оси Ox под действием силы $F = (a+bV)$ (Н). Полагая начальные условия движения точки нулевыми, найти координату x точки в момент времени t (с).

10. Материальная точка массой m (кг) движется из состоянии покоя вдоль горизонтальной оси Ox под действием силы $F_x = a(b–kt)$ (Н). Найти скорость V и координату x в момент, когда сила обратится в нуль.

11. Лодке массой m (кг) сообщается начальная скорость V_0 (м/с). При движении лодка встречает сопротивление, пропорциональное первой степени скорости $R = – aV$ (Н). Определить скорость лодки в момент t (с).

12. Лыжник массой m = 70 кг спускается без начальной скорости по склону в α градусов, не отталкиваясь палками. Длина спуска L = b (м), коэффициент трения скольжения лыж о снег $f_{тр} = 0{,}1$. Сопротивление воздуха равно $R = k V^2$ (Н). Какова скорость лыжника V в конце спуска?

13. Материальная точка массой m (кг) движется из начала координат вдоль горизонтальной оси Ox, имея начальную скорость $V_0 = a$ (м/с) и испытывая действие позиционной силы $F = – 0.25\ mk^2x$ (Н). Найти скорость V и положение x точки в момент времени t (с).

14. Материальная точка массы m (кг) движется из состояния покоя вдоль горизонтальной оси Ox под действием силы $Fx = b(a–kt)$ (Н). Найти максимальное удаление точки от начала отсчета x (м) и путь V (м/с), пройденный точкой за время t (с), если $x_0 = 0$.

15. Тело массой m (кг) движется из состояния покоя вдоль горизонтальной оси Ox под действием силы $F = at/V$ (Н). Какой путь x (м) пройдет тело за время t (с)?

16. Самолет массой m (кг) летит горизонтально. Его скорость в данный момент V_0 (м/с). Сила тяги двигателя постоянна $F_{тяг} = 4000$ Н и направлена под углом α к горизонту; сила лобового сопротивления $R = kV^2$ (Н). Какое расстояние пройдёт самолет к моменту времени, когда его скорость увеличится в n раз?

17. Материальная точка массы m (кг) под действием силы $F = at^2–bt+2$ движется вдоль оси Ox (F – в Н, t – в секундах). Определить максимальную скорость V_{max}, которой достигнет точка при своем движении, если в начальный момент времени она имела нулевую скорость и находилась в начале координат.

18. Тело массой m (кг) совершает прямолинейное движение вдоль горизонтальной оси Ox под действием силы $F_x = a\pi\cos kt$ (Н). Определить положение тела на оси Ox в момент времени t (с), если начальная скорость тела V_0, $x_0 = 0$.

19. На материальную точку массы m (кг) действует периодическая сила $F = b\sin at$ (Н), направленная вдоль горизонтальной оси Ox. Определить скорость V (м/с) и положение точки x (м) при t (с), если она вышла из начала координат без начальной скорости.

20. Вертикальный спуск парашютиста массой m происходит без начальной скорости с высоты h = L (м) при наличии силы сопротивления, пропорциональной квадрату скорости $R = amV^2$ (Н). Определить скорость парашютиста в момент приземления.

21. Автомобиль массой m (кг) движется по горизонтальной прямолинейной дороге. Принимая силу тяги мотора постоянной и равной Q = 1000 (Н), а суммарное сопротивление движению $R = – kV^2$ (Н), определить

скорость автомобиля по прошествии им пути S (м), если в начале этого пути он имел скорость, равную V_0 (м/с).

22. Тело массой m (кг) начинает двигаться из состояния покоя по гладкой горизонтальной плоскости вдоль оси Ox под действием силы $F_x = a\ \sin kt$ (Н). Определить положение тела на оси Ox в момент времени t (с).

23. Тело массой m (кг), брошенное вертикально вверх со скоростью V_0 (м/с), испытывает сопротивление среды $R = -kV$ (Н). Определить, через какое время t (с) тело достигнет наивысшего положения.

24. Для взлёта самолетов с корабля применяют специальные катапульты, уменьшающие длину свободного пробега самолета. Считая, что действие катапульты эквивалентно дополнительной тяге, равной F = 4,9 кН, определить, на сколько сократится длина взлетной дорожки, если масса самолёта m (кг), тяга винта Q = 14,71 кН, взлётная скорость $V_0 = 500V_0$ (м/с), а сопротивление воздуха равно $R = -aV^2$ (Н).

25. Материальная точка массой m (кг) движется вдоль горизонтальной оси Ox из состояния покоя под действием силы $F = 10a–bt$ (Н). В начальный момент времени точка находилась на расстоянии x_0 м от начала отсчёта. Определить момент времени t (с), когда точка вернется в начальное положение.

26. Для измерения глубины котлована на его дно бросают без начальной скорости груз массой m, который через t (с) достигает дна. Какова глубина котлована? Сопротивление среды считать пропорциональным первой степени скорости $R = -m\ k\ V$ (Н).

27. Материальная точка массой m (кг) движется вдоль горизонтальной оси Ox из состояния покоя под действием силы $F = -kx$ (Н). В начальный момент времени точка находилась на расстоянии x_0 (м) от начала отсчёта. Определить скорость точки V м/с в момент времени t (с).

28. Материальная точка массой m (кг) движется вдоль горизонтальной оси Ox из состояния покоя под действием силы $F_x = b–at^3$ (Н). Найти скорость точки V (м/с) и величину x (м) в момент времени t (с). В начальный момент точка имела нулевую скорость и находилась в начале координат.

29. Тело массой m (кг) поднимается по гладкой плоскости, наклоненной к горизонту под углом $\alpha = \alpha$ градусов, получив начальную скорость V_0 (м/с). Сопротивление среды пропорционально первой скорости $R = -aV$ (Н). Через сколько времени t (с) тело остановится?

30. Тело массой m (кг), находящееся в покое, начинает движение вдоль горизонтальной оси Ox под действием силы $F_x = b - e^{kt}$ (Н). Определить скорость тела V (м/с) и его координату x м в момент времени t (с).

Таблица Д. 1

Номер варианта	k	a	b	m	M	x_0	V_0	n	t	L	α
0	0.3	6	35	9	500	2	4	9	4	100	30
1	0.8	5	60	1	50	4	9	4	8	150	10
2	0.3	5	20	8	800	1	3	5	1	120	30
3	0.7	3	55	2	300	5	8	3	7	90	40
4	0.5	6	25	6	500	3	2	6	5	180	15
5	0.4	7	40	7	75	2	5	8	2	70	35
6	0.7	4	50	5	60	4	6	7	6	160	20
7	0.6	7	30	3	400	3	4	8	5	60	45
8	0.6	5	65	5	100	1	7	2	4	200	25
9	0.5	8	45	4	700	5	1	7	4	140	40

Задача Д. 2. Исследование вращательного движения твёрдого тела

1. После выключения двигателя вентилятор, вращающийся с угловой скоростью ω_0 (c^{-1}), тормозится силами аэродинамического сопротивления, момент которых $M_1 = -\alpha\omega^2$ (Нм). Определить время t (с), за которое угловая скорость вентилятора уменьшится в n раз. Момент инерции вентилятора относительно оси вращения равен I (кгм^2).

2. После выключения двигателя вентилятор, вращающийся с угловой скоростью ω_0 (c^{-1}), тормозится силами аэродинамического сопротивления, момент которых $M_2 = -\alpha\omega$ (Нм), и силами трения в подшипниках, момент которых $M_1 = к$ (Нм). Определить, через какой промежуток времени вентилятор остановится. Момент инерции вентилятора относительно оси вращения I (кгм^2).

3. После выключения двигателя вентилятор, вращающийся с угловой скоростью ω_0 (c^{-1}), тормозится силами аэродинамического сопротивления, момент которых $M_2 = \alpha\omega^2$ (Нм), и силами трения в подшипниках. Момент $M_1 = к$ (Нм) от трения в подшипниках можно считать постоянным. Момент инерции вентилятора относительно оси вращения I (кгм^2). Определить, через какой промежуток времени t (с) вентилятор остановится.

4. К валу, находившемуся в покое, прикладывается постоянный момент $M_1 = к$ (Нм). Одновременно возникают силы, момент которых $M_2 = a\cos(0{,}1\pi t)$ (Нм). Момент инерции вала относительно оси вращения I (кгм^2). Определить угловую скорость вала ω_1 (c^{-1}) через t (с) после начала вращения.

5. Твёрдое тело, вращающееся с угловой скоростью ω_0 (c^{-1}), тормозится силами сопротивления, моменты которых M_1 и M_2. Причём момент $M_1 = -к$ (Нм) от трения в подшипниках можно считать постоянным. Тормозящий момент пропорционален угловой скорости вращения $M_2 = -\alpha\omega$ (Нм). Момент инерции тела относительно оси вращения I (кгм^2). Определить, через какой промежуток времени t (с) тело остановится.

6. Маховик массой m (кг) и радиусом r (см) приводится во вращении из состояния покоя постоянным моментом $M_1 = к$ (Нм). Маховик испытывает силы сопротивления, момент которых $M_2 = -\alpha\omega^2$ (Нм). Маховик считать однородным диском. Определить время t (с), по истечении которого угловая скорость маховика станет равной $\omega_1 = \omega$ (c^{-1}).

7. После выключения двигателя вентилятор, вращающийся с угловой скоростью $\omega_0 = \omega$ c^{-1}, тормозится силами аэродинамического сопротивления, момент которых $M_2 = -\alpha\omega^2$ (Нм). Определить угол, на который повернётся вентилятор, когда его угловая скорость $\omega_0 = \omega$ c^{-1} уменьшится в N (раз). Момент инерции вентилятора относительно оси вращения I (кгм^2).

8. Маховик, находившийся в покое, приводится во вращение вокруг неподвижной оси моментом $M_1 = к$ (Нм), при этом возникает момент сил

сопротивления $M_2 = -\alpha\omega$ (Нм). Радиус инерции маховика $\rho = r$ (м). Определить угловую скорость маховика ω (c^{-1}) через t (с) после начала вращения.

9. Маховик начинает вращаться вокруг неподвижной оси из состоянии покоя, причём вращающий момент $M = к\varphi - а\varphi^3$ (Нм). Момент инерции маховика I (кгм^2). Установить закон изменения угловой скорости маховика $\omega(\varphi)$ как функцию угла поворота φ рад. Определить значение угловой скорости ω (c^{-1}) в тот момент, когда маховик сделает N оборотов.

10. К валу, находившемуся в покое, прикладывается постоянный момент $M_1 = к$ (Нм). Одновременно возникают силы, момент которых $M_2 = a\cos(0{,}2\,\pi\, t)$ (Нм). Момент инерции вала относительно оси вращения I (кгм^2). Определить, сколько оборотов N сделает вал через $t_1 = t$ (с) после начала вращения.

11. На тормозящийся вал действует постоянный момент сил трения в подшипниках $M_1 = к$ (Нм) и момент сил сопротивления, вызываемый электромагнитной муфтой и изменяющийся по закону $M_2 = a(1-\exp(-\alpha t))$ (Нм). Установить закон изменения угловой скорости вала как функцию времени ω (t), если начальная угловая скорость $\omega_0 = \omega$ (c^{-1}), а момент инерции I (кгм^2). Определить величину угловой скорости вала ω (c^{-1}), соответствующую моменту времени t (с).

12. Маховик, вращающийся с угловой скоростью ω, тормозится силами сопротивления, моменты которых M_1 и M_2. Тормозящий момент M_2 пропорционален угловой скорости $M_2 = -\alpha\omega$ (Нм). Момент M_1 от трения в подшипниках постоянен: $M_1 = -к$ (Нм). Маховик считать однородным диском радиуса r (см) и массой m (кг). Определить угловую скорость маховика ω (c^{-1}) через t (с) после начала торможения.

13. Движущийся момент электродвигателя в некоторых условиях обратно пропорционален квадрату угловой скорости $M = \alpha/\omega^2$ (Нм). Момент инерции ротора электродвигателя I (кгм^2). Определить, через какое время угловая скорость ω (c^{-1}) электродвигателя увеличится в N раз, если начальная угловая скорость $\omega_0 = \omega\, c^{-1}$.

14. Маховик, находившийся в покое, приводится во вращение вокруг неподвижной оси постоянным моментом $M_1 = к$ (Нм), при этом возникает момент сил сопротивления $M_2 = \alpha / \omega$ (Нм). Момент инерции маховика относительно оси вращения I = I (кгм^2). Сколько оборотов N сделает маховик за $t_1 = t$ (с) после начала вращения?

15. Маховик радиуса r (см) и массой m (кг), находившийся в покое, приводится во вращение постоянной по величине силой P = к (Н), приложенной на его ободе. При этом возникает сила сопротивления, пропорциональная угловой скорости $F = -\alpha\omega$ (Н). Сила сопротивления приложена на расстоянии r = r (см) от оси вращения. Определить угловую скорость ω (c^{-1}) маховика через $t_1 = t$ (с) после начала вращения.

16. К ведущему валу редуктора при пуске прикладывается момент $M = к(1-\alpha\omega)$ (Нм). Момент инерции вала I (кгм^2). Определить угол φ в радианах, на который повернётся вал через $t_1 = t$ (с) после пуска.

17. На тормозящийся вал действует момент сил сопротивления, вызываемый электромагнитной муфтой и изменяющийся по закону $M = к\,(1 - \exp(-\alpha\, t))$ (Нм). Установить закон изменения угла поворота вала φ (t) как функцию времени, если начальная угловая скорость равна $\omega_0 = \omega$ (с$^{-1}$), момент инерции вала I (кгм^2). Определить значение угла поворота вала, соответствующее моменту времени t (с).

18. Маховик массой m (кг) и радиусом r (см) приводится во вращение из состояния покоя постоянным моментом $M_1 = к$ (Нм). Маховик испытывает силы сопротивления, момент которых $M_2 = -\alpha\omega^2$ (Нм). Определить угловую скорость маховика ω (с$^{-1}$), когда он повернется на угол $\varphi = N$ радиан.

19. Вал, вращающийся с угловой скоростью ω (с$^{-1}$), начинает испытывать воздействие сил, момент которых $M = к\sin\alpha t$ (Нм). Установить закон изменения угловой скорости как функцию времени ω (t). Определить величину угловой скорости ω (с$^{-1}$) через $t_1 = t$ (с) после начала воздействия сил. Момент инерции вала относительно оси вращения I (кгм^2).

20. Маховик, находившийся в покое, приводится во вращение вокруг неподвижной оси постоянным моментом $M_1 = const$. При этом возникает тормозящий момент $M_2 = -\alpha\omega$ (Нм). Маховик считать однородным диском массой m (кг) и радиусом r (см). Определить, каким должен быть момент M_1 (Нм), чтобы через $t_1 = t$ (с) угловая скорость маховика равнялось ω (с$^{-1}$).

21. Маховик радиусом r (см) и массой m (кг), вращающийся с угловой скоростью ω (с$^{-1}$), испытывает силы сопротивления, момент которых $M = -\alpha\omega$ (Нм). Установить закон изменения угла поворота как функцию угловой скорости $\varphi = \varphi$ (ω). Определить, сколько оборотов N сделает маховик до остановки. Маховик считать однородным диском.

22. После выключения двигателя вентилятор, вращающийся с угловой скоростью, равной $\omega_0 = \omega$ (с$^{-1}$), тормозится силами аэродинамического сопротивления, момент, который $M_2 = -\alpha\omega^2$ (Нм), и силами трения в подшипниках. Момент от трения в подшипниках можно считать постоянным $M_1 = к$ (Нм). Момент инерции вентилятора относительно оси вращения I (кгм^2). Определить, сколько оборотов N сделает вентилятор до остановки.

23. К шкиву в момент пуска прикладывается момент $M = к(1-\alpha\omega)$ (Нм). Шкив считать однородным кольцом радиуса r (см) и массой m (кг). Установить закон изменения угловой скорости шкива как функцию времени $\omega = \omega(t)$. Определить значение угловой скорости шкива ω (с$^{-1}$) через $t_1 = t$ (с).

24. К однородному цилиндру массой m (кг) и радиусом r (см), вращающемуся с угловой скоростью $\omega_0 = \omega$ (с$^{-1}$), прикладывается момент $M = \alpha t/\omega$ (Нм). Определить угловую скорость цилиндра ω (с$^{-1}$) через $t_1 = t$ (с) после приложения момента.

25. На тело, вращающееся с угловой скоростью ω (c^{-1}), начинает действовать тормозящий момент, модуль которого $M = -\alpha\varphi^2$ (Нм). Определить, на сколько оборотов N повернется тело до его остановки, если $\varphi_0 = 0$, а момент инерции тела I (кгм^2).

26. Для торможения ротора электродвигателя к нему прикладывают момент, модуль которого $M = \alpha\omega^3$ (Нм). Определить, на какой угол φ = a в радианах сделает ротор за время, пока угловая скорость ω_0 уменьшится в N раз, если $\omega_0 = \omega$ (c^{-1}), а момент инерции его I (кгм^2).

27. Для ускорения вращения маховика к нему прикладывается момент $M = \alpha t/\omega$ (Нм). Определить угловую скорость маховика ω (c^{-1}) через $t_1 = t$ (с) после приложения момента, если скорость ω (c^{-1}), а его момент инерции I (кгм^2).

28. При работе дизеля движущий момент определяется выражением $M = (-к+\alpha\omega)$ (Нм). Установить закон изменения угловой скорости дизеля с течением времени $\omega = \omega(t)$. Определить величину угловой скорости ω (c^{-1}), соответствующую моменту времени $t_1 = t$ (с), если начальная скорость дизеля $\omega_0 = \omega$ (c^{-1}). Момент инерции подвижных частей дизеля I (кгм^2).

29. Движущий момент электродвигателя в некоторых условиях обратно пропорционален квадрату угловой скорости $M = \alpha/\omega^2$ (Н*м). Момент инерции ротора электродвигателя I (кг*м^2). Определить угловую скорость ω (c^{-1}) через t (с) после приложения момента, если начальная угловая скорость равна ω (c^{-1}).

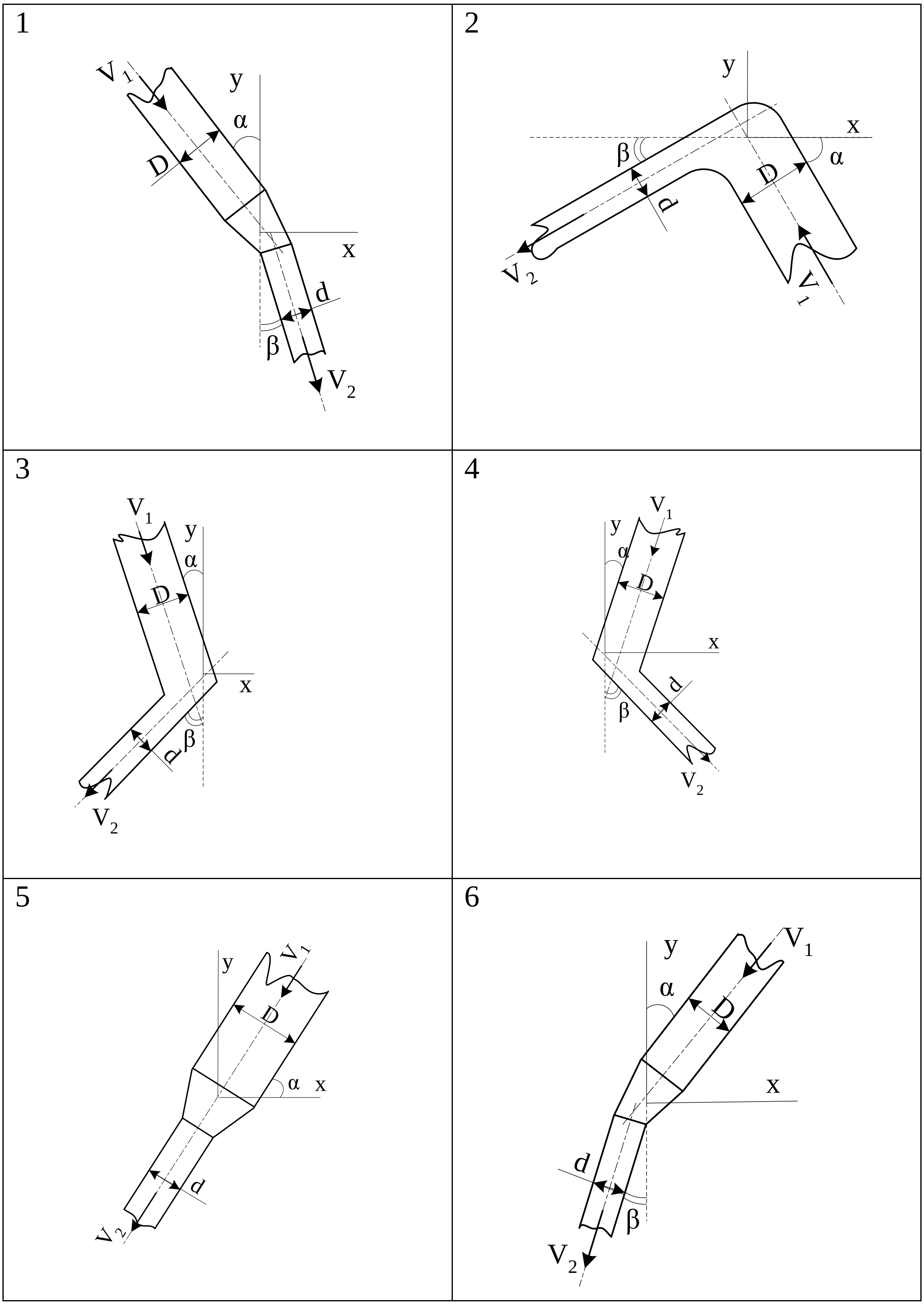
30. Шкив массы m (кг) и радиуса r (см) приводится во вращение из состояния покоя постоянным моментом $M_1 = к$ (Н*м). Шкив испытывает силы, момент которых $M_2 = -\alpha\omega^2$ (Н*м). Определить угол φ в радианах, на который повернётся шкив, когда его угловая скорость станет равной $\omega_1 = \omega$ (c^{-1}).

Таблица Д. 2

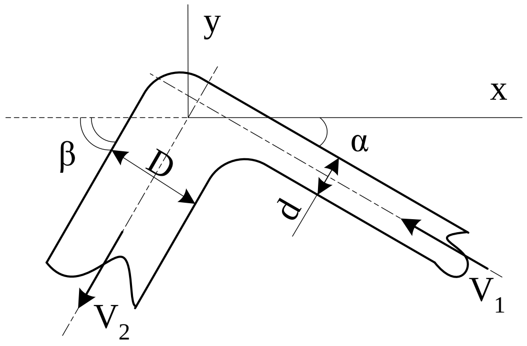
Номер варианта	**ω**	**α**	**I**	**m**	**r**	**k**	**t**	**N**	**a**
0	5,5	20	70	250	75	250	3,0	6	7,0
1	7,5	30	65	350	30	400	1,0	5	2,5
2	6,5	45	40	400	45	550	1,5	4	3,0
3	4,0	55	85	150	60	500	2,0	3	6,5
4	5,0	15	75	550	70	350	2,5	2	6,0
5	8,5	60	80	100	35	350	3,0	5	3,5
6	7,0	35	55	200	55	150	1,0	3	4,0
7	8,0	25	60	700	50	300	1,5	4	5,5
8	6,0	40	45	300	65	200	2,0	6	5,0
9	4,5	50	50	450	40	100	2,5	2	4,5

Задача Д. 3. Теорема об изменении количества движения механической системы в ее применении к сплошной среде

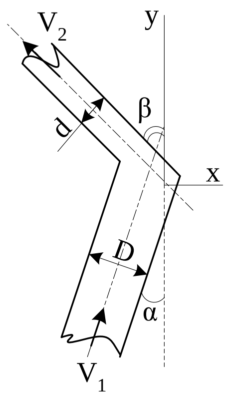
Вода входит в неподвижный канал переменного сечения симметрично относительно горизонтальной плоскости со скоростью V_1 под углом α. Скорость воды у выхода из канала V_2 направлена под углом β. Определить модуль составляющей силы R, с которой вода действует на стенку канала.



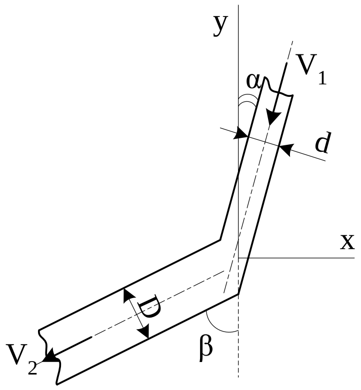
7


y
x
β
D
α
d
V_2
V_1

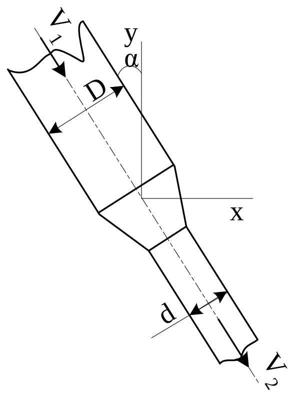
8


V_2
y
β
d
x
D
α
V_1

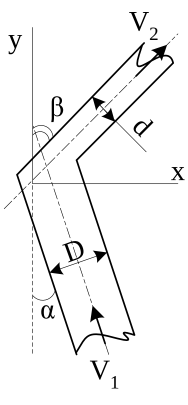
9


y
α
V_1
d
x
D
V_2
β

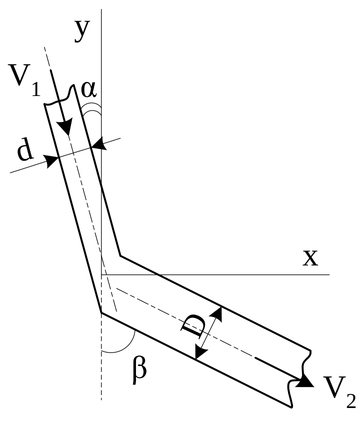
10


V_1
y
α
D
x
d
V_2

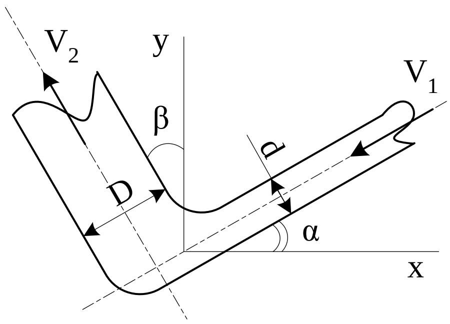
11


y
V_2
β
d
x
D
α
V_1

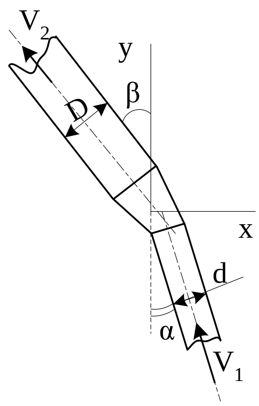
12


y
V_1
α
d
x
D
β
V_2

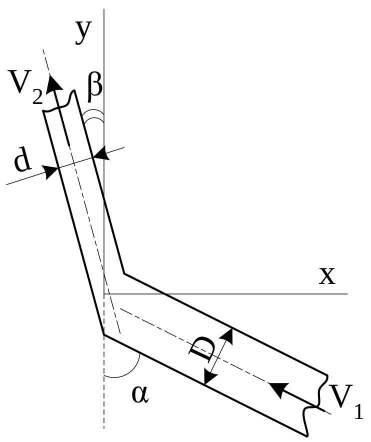
13



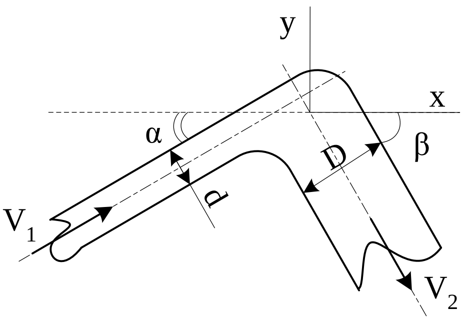
14



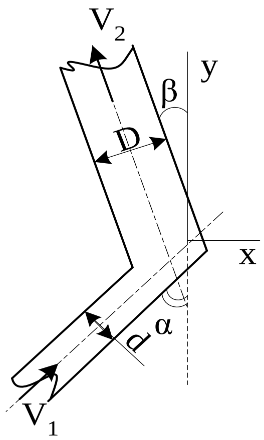
15



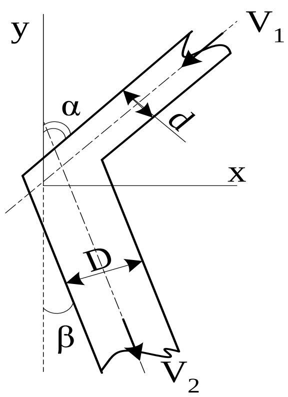
16



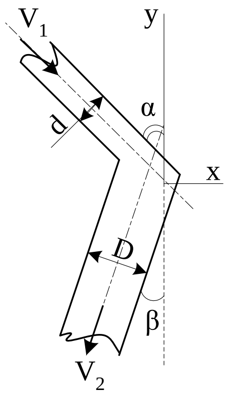
17



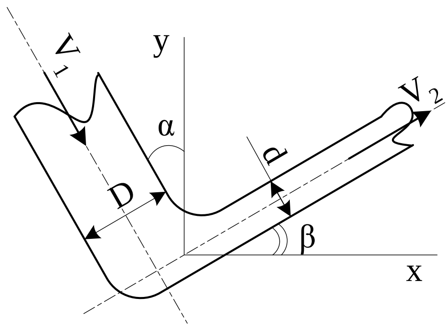
18



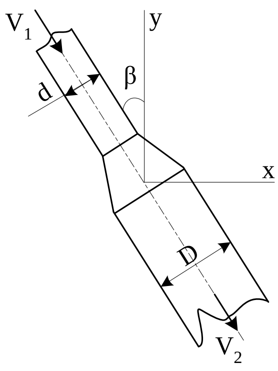
19



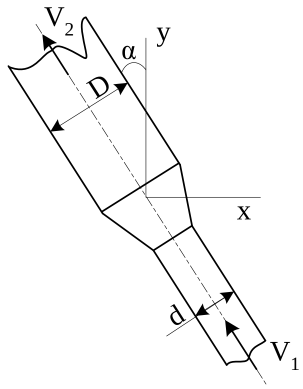
20



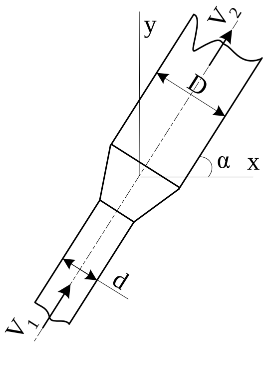
21



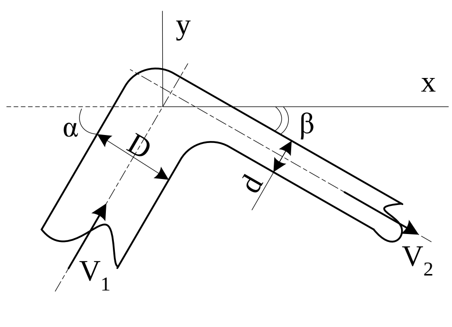
22



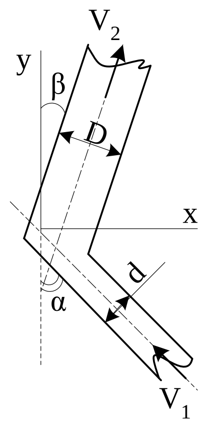
23



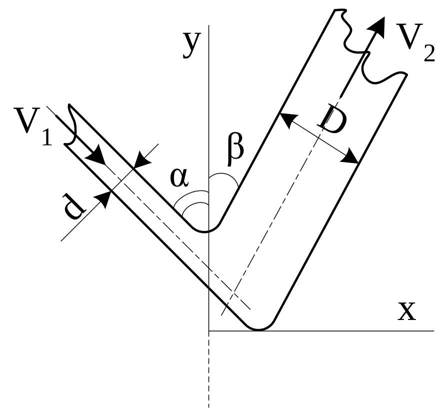
24



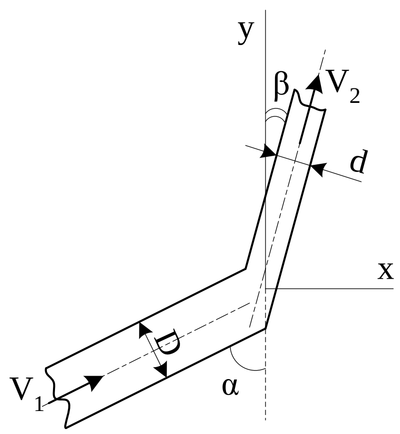
25



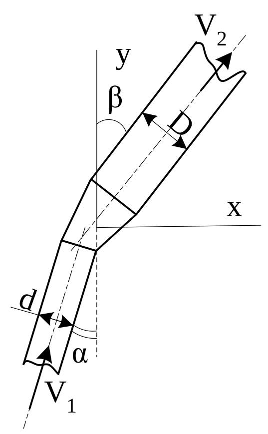
26



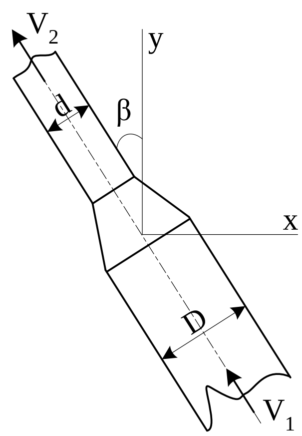
27



28



29



30

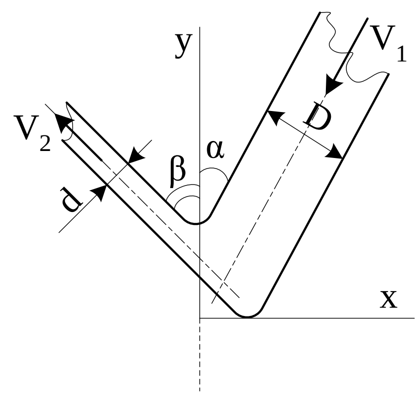
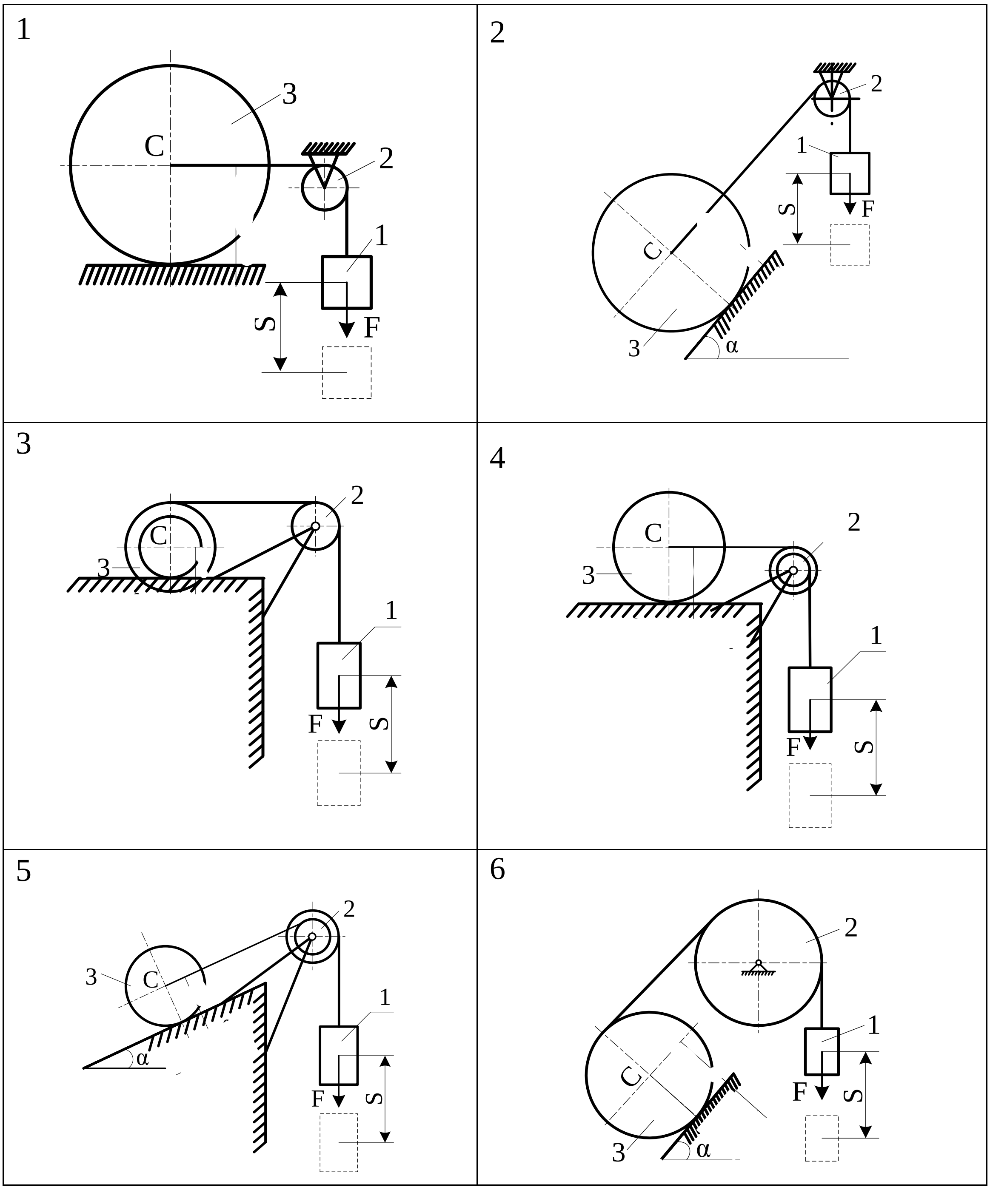


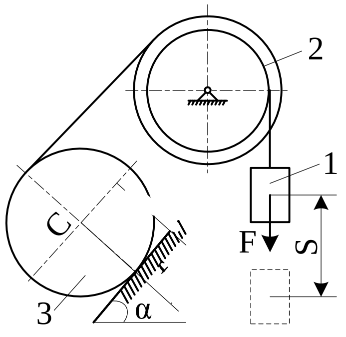
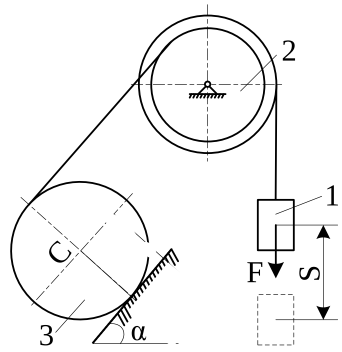
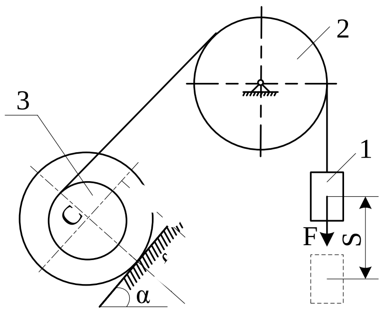
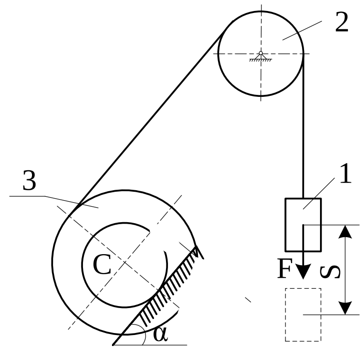
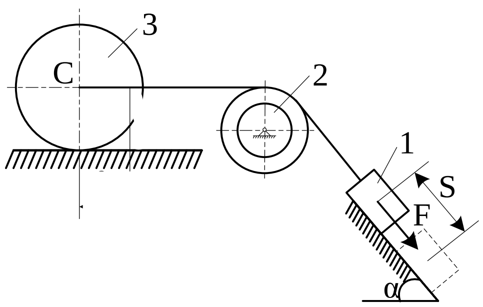
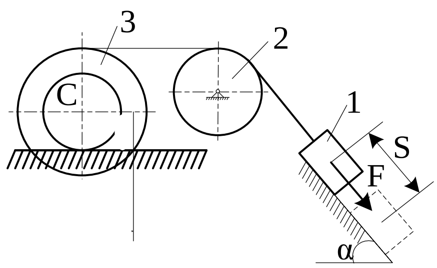
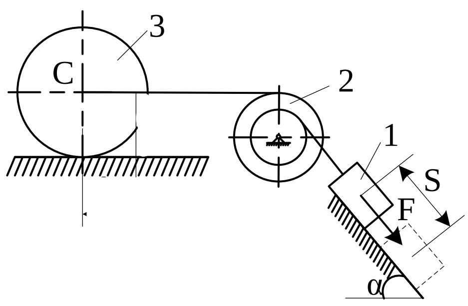
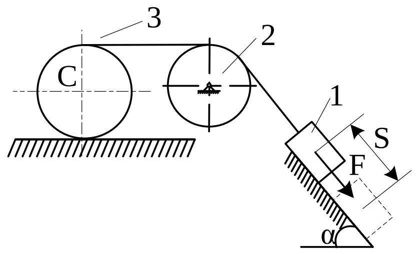
Таблица Д. 3

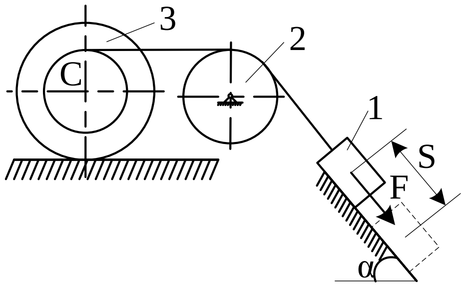
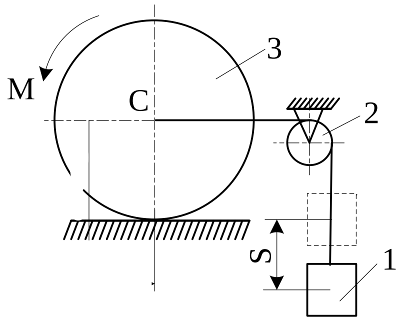
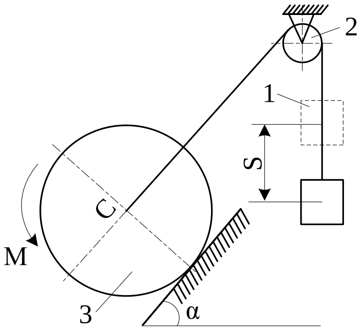
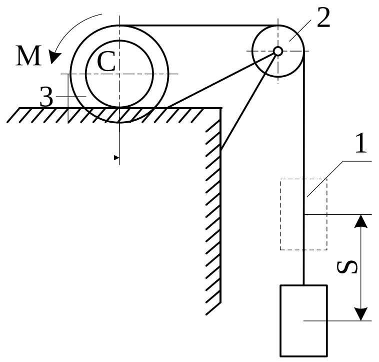
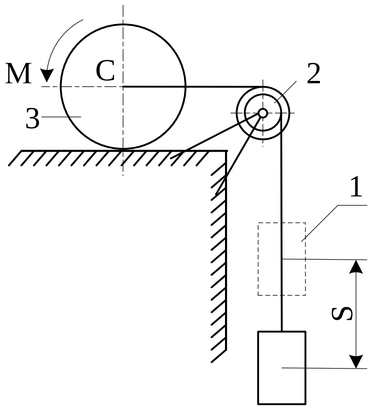
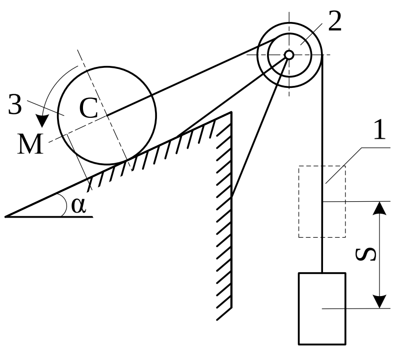
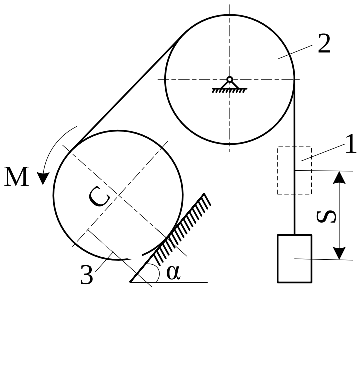
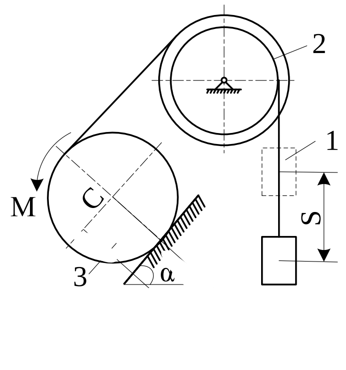
Номер варианта	V_1	D	d	α	β	R
	м/с	м	м	град	град	-
0	1,0	0,52	0,22	5	50	R_x
1	1,2	0,42	0,12	25	45	R_y
2	1,5	0,50	0,17	10	35	R_x
3	1,8	0,40	0,15	15	40	R_y
4	2,5	0,56	0,22	15	30	R_x
5	2,0	0,40	0,10	20	45	R_y
6	3,4	0,60	0,12	10	35	R_x
7	3,0	0,54	0,20	15	40	R_y
8	3,2	0,50	0,10	25	30	R_x
9	3,8	0,43	0,15	20	50	R_y

Задача Д. 4. Применение теоремы об изменении кинетической энергии к изучению движения механической системы

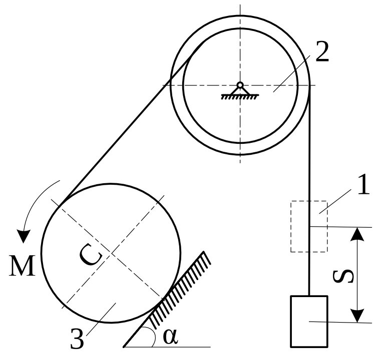
Для заданной механической системы определить $V_1 = f(S_1)$. Считать, что у блоков и катков массы распределены по наружному радиусу. Массами нитей пренебречь, предполагая их нерастяжимыми. Принять, что движение начинается из состояния покоя. В задании принять следующие обозначения: m_1, m_2, m_3 – масса тел; R и r – радиусы больших и малых окружностей; $f_{тр} = 0,2$ – коэффициент трения скольжения. Проскальзывания отсутствуют.



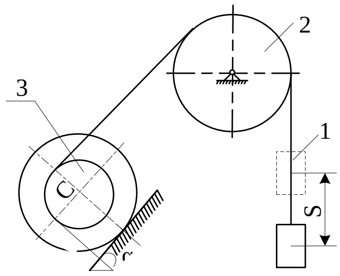
7 	8 
9 	10 
11 	12 
13 	14 

15 	16 
17 	18 
19 	20 
21 	22 

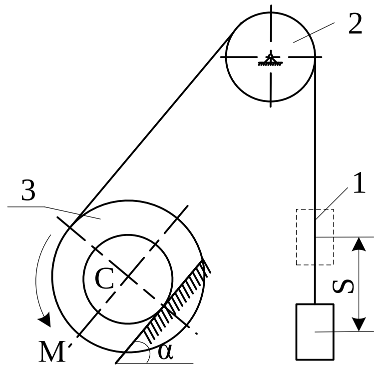
23



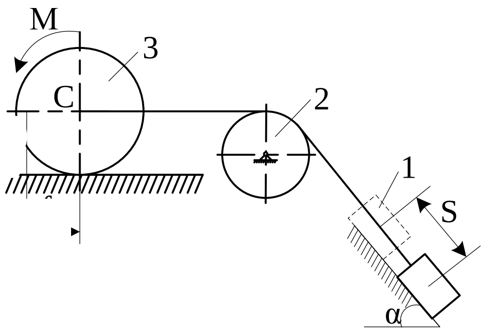
24



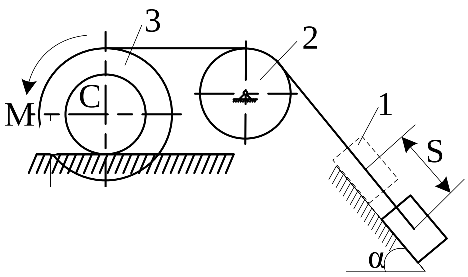
25



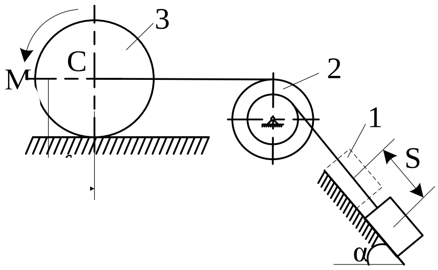
26



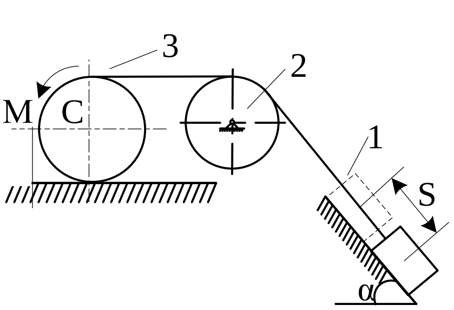
27



28



29



30

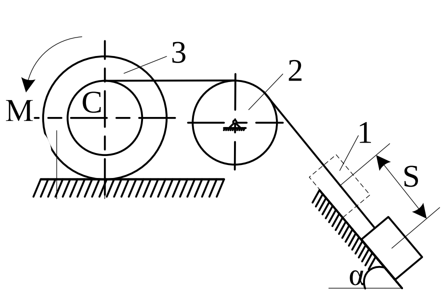


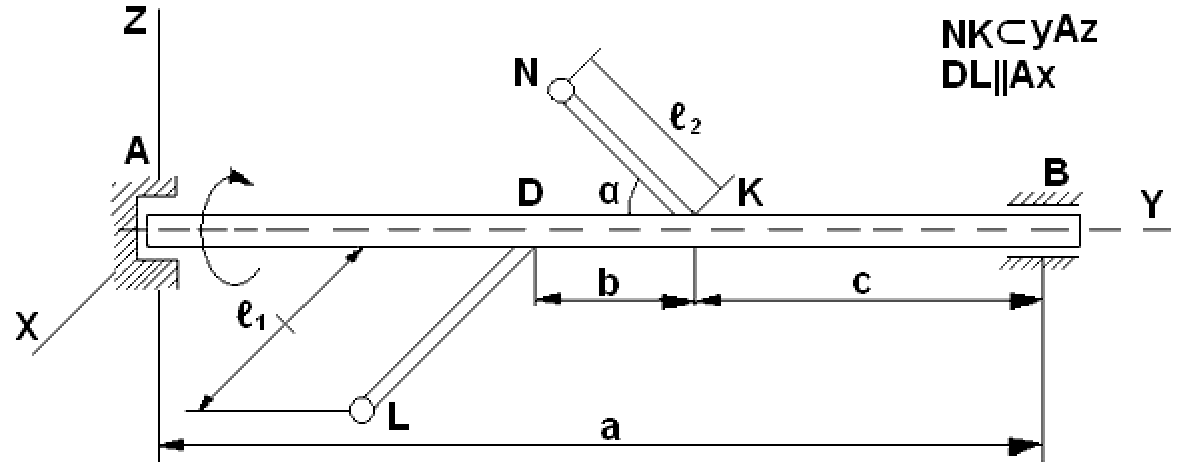
Таблица Д. 4

Номер варианта	m_1	m_2	m_3	R_2	R_3	α	F	M	S
	кг	кг	кг	см	см	град	Н	Нм	м
0	100	200	500	20	30	30	5000	5000φ	2
1	400	500	100	40	50	40	4500	2000φ	4
2	300	100	400	20	40	50	6000	2500φ	5
3	500	200	300	40	50	60	3000	7000φ	1
4	100	300	200	30	20	60	4000	3000φ	3
5	200	500	400	40	50	30	5500	2000φ	4
6	200	400	400	30	40	60	2500	5500φ	2
7	400	300	100	50	20	50	7000	3500φ	3
8	200	200	300	50	30	40	3500	6000φ	1
9	300	100	200	40	30	50	2000	5500φ	5
$r_2 = 0{,}2R_2$, $r_3 = 0{,}4R_3$									

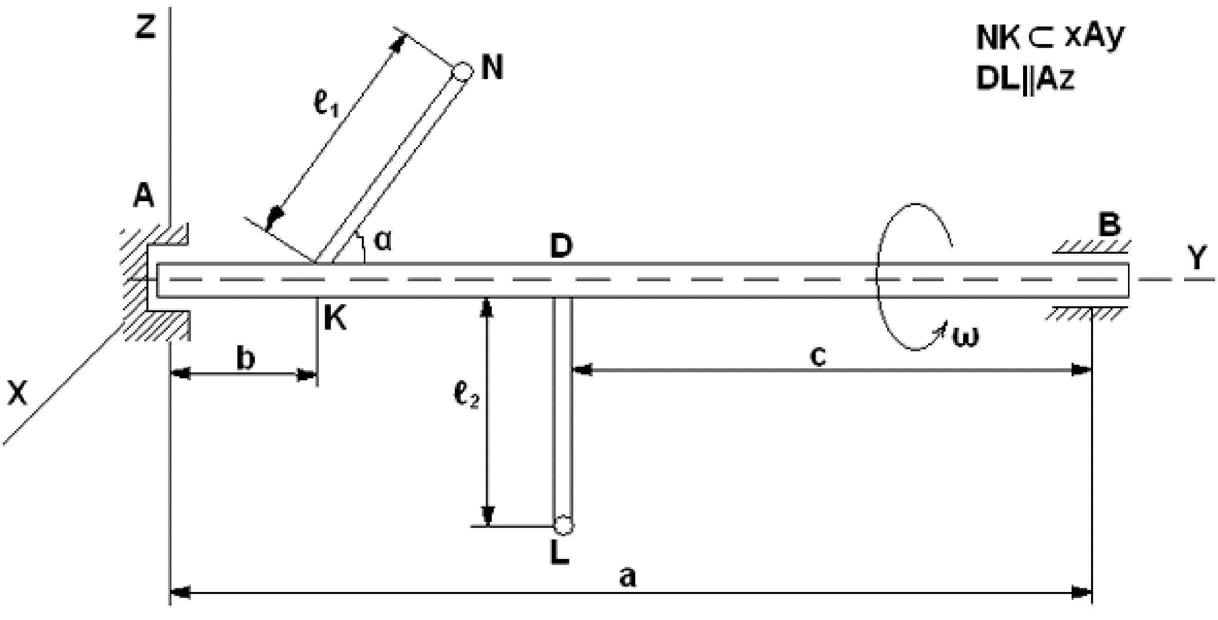
Задача Д. 5. Применение принципа Даламбера к определению реакций опор вращающегося тела

Определить реакции опор твердого тела, вращающегося равномерно вокруг неподвижной оси AB с угловой скоростью ω. Стержни AB, NK и DL сосредоточены точечные массы соответственно m_1 и m_2. Схемы конструкций, а также расстояния a, b, c и l и другие исходные данные приведены в таблице Д5.

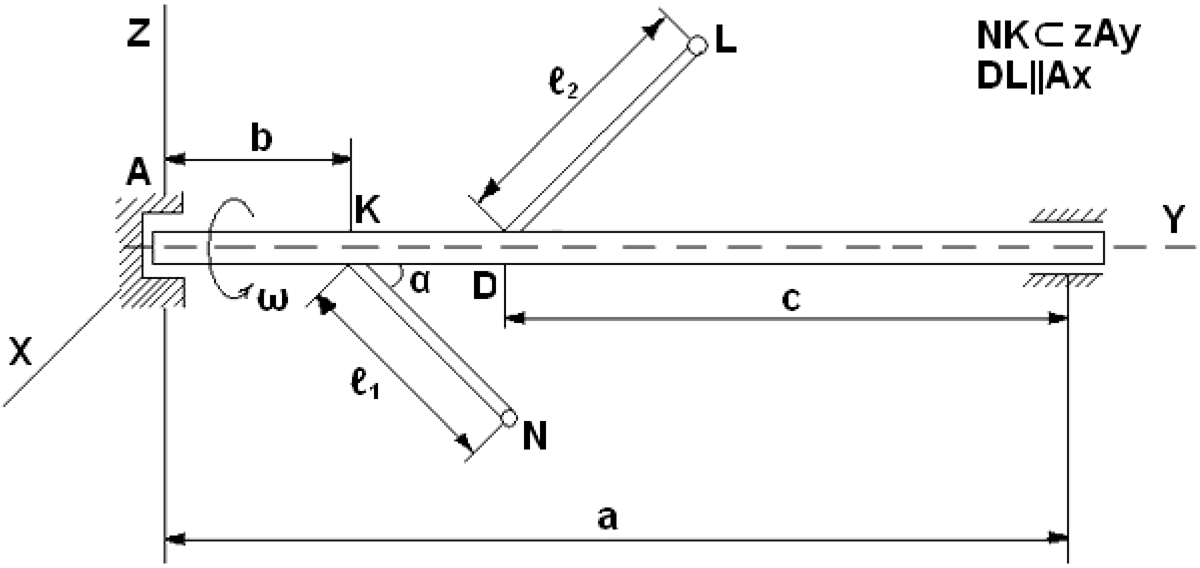
1



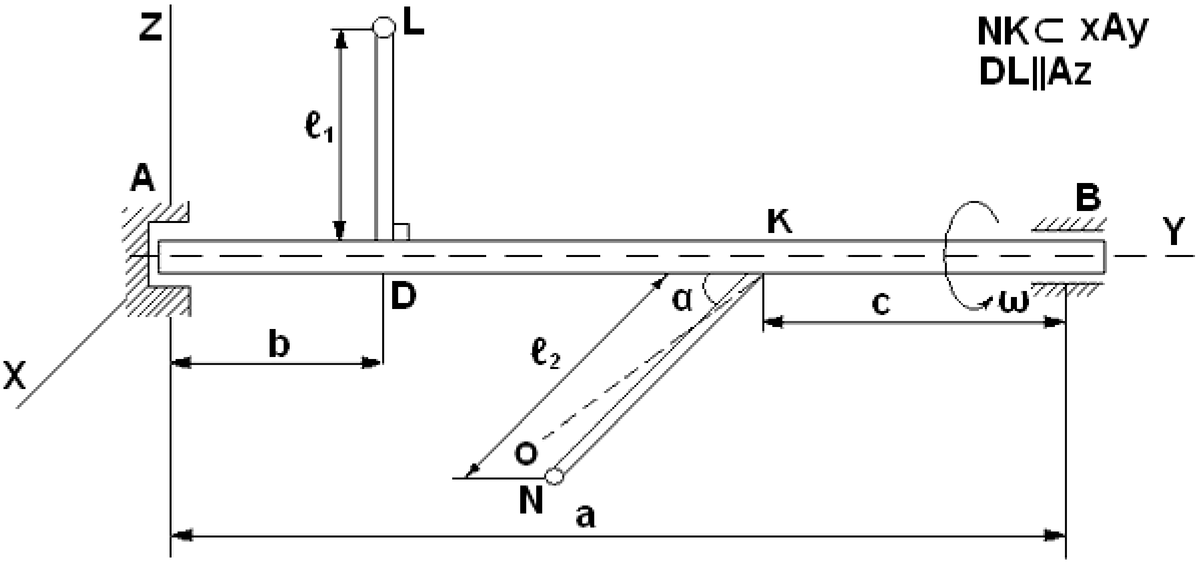
2



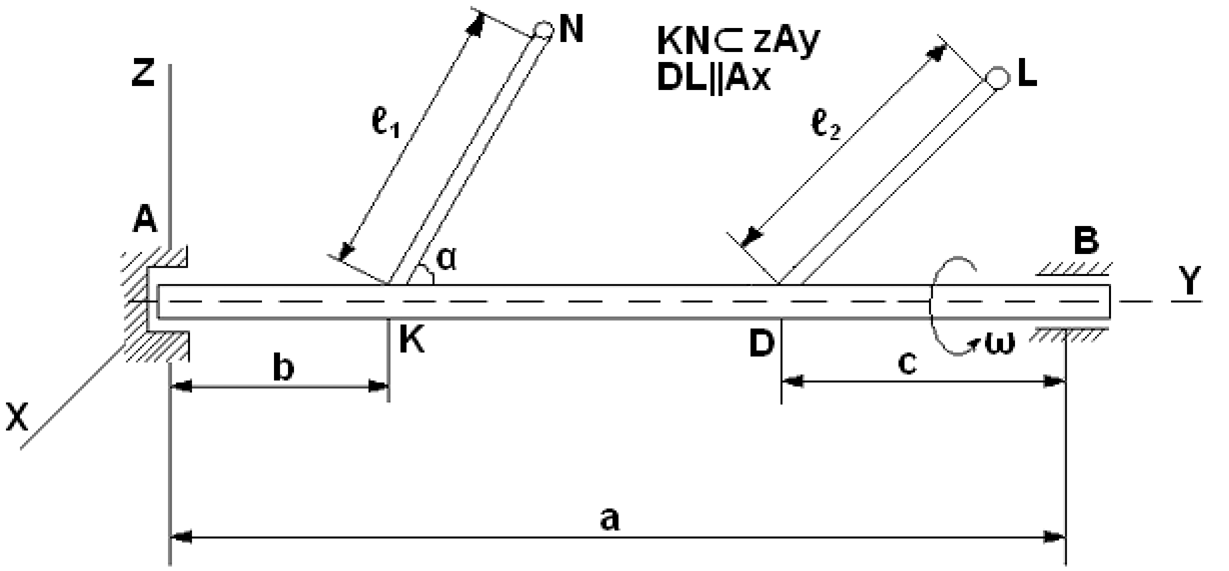
3


NK⊂ zAy
DL||Ax
Z
A
b
K
Y
X
ω
α
D
c
ℓ2
L
ℓ1
N
a

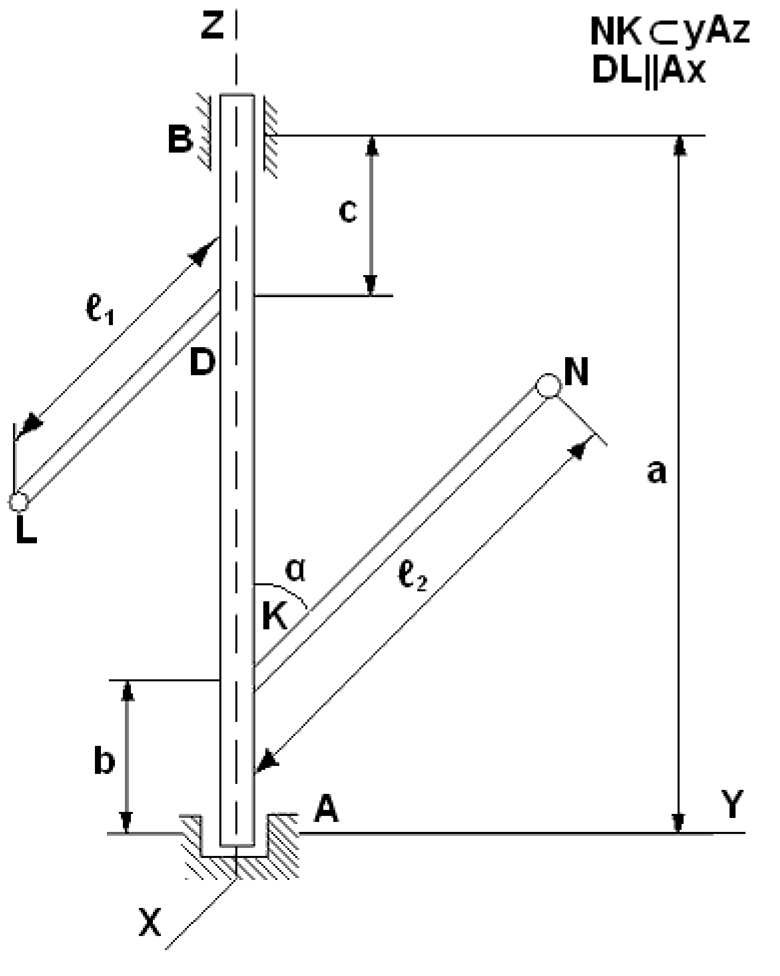
4


NK⊂ xAy
DL||Az
Z
L
ℓ1
A
B
K
Y
D
α
c
ω
X
b
ℓ2
O
N
a

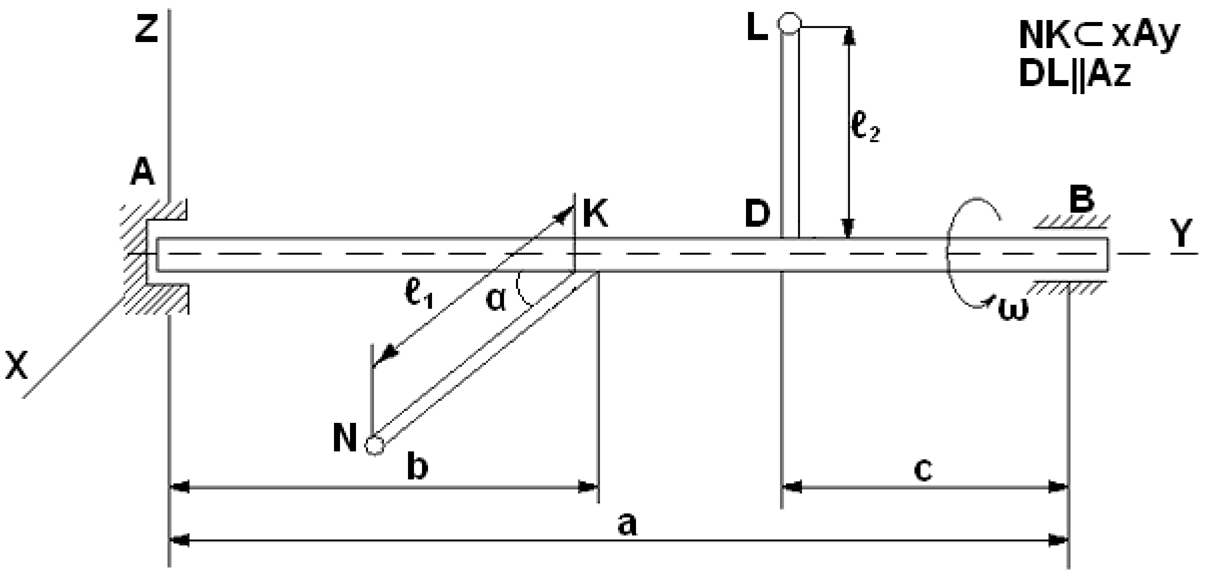
5


KN⊂ zAy
DL||Ax
Z
A
X
N
L
ℓ1
ℓ2
α
B
Y
K
D
ω
b
c
a

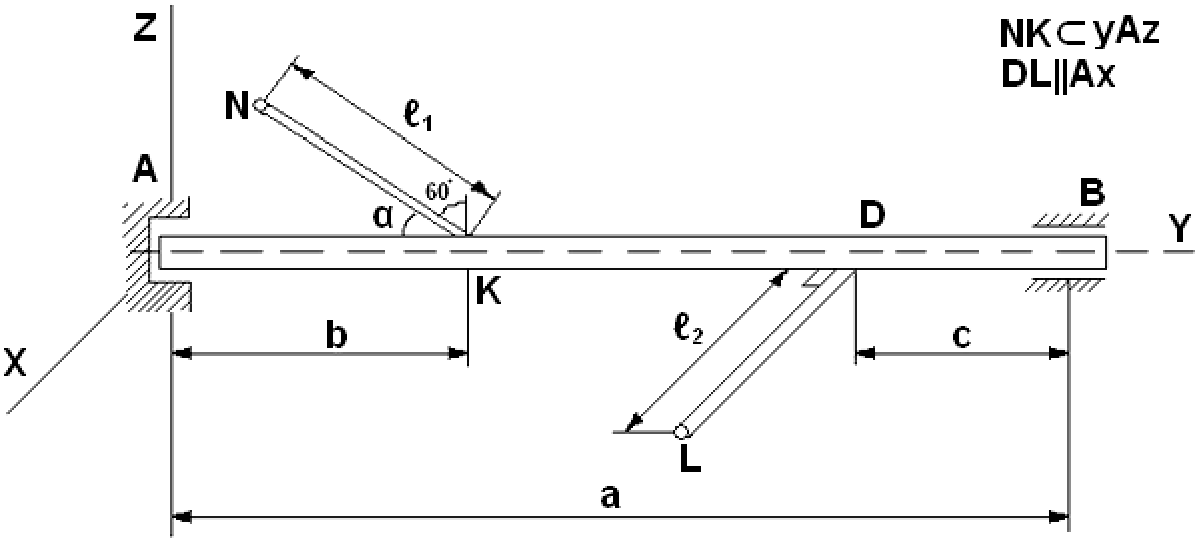
6


NK⊂yAz
DL||Ax
Z
B
c
ℓ1
D
L
N
a
α
K
ℓ2
b
A
Y
X

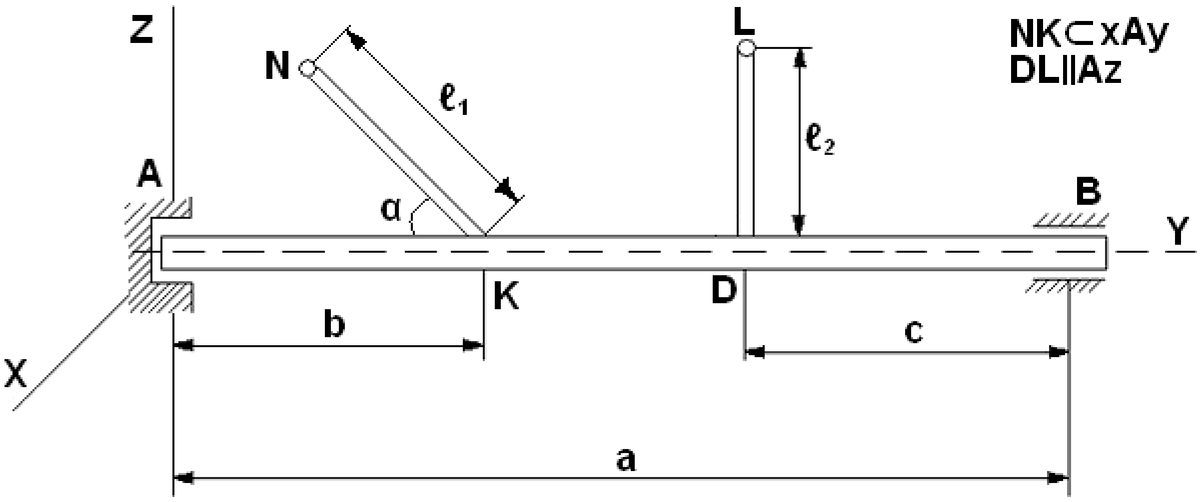
7


Z
L
NK⊂xAy
DL||Az
ℓ2
A
K
D
B
Y
ℓ1
α
ω
X
N
b
c
a

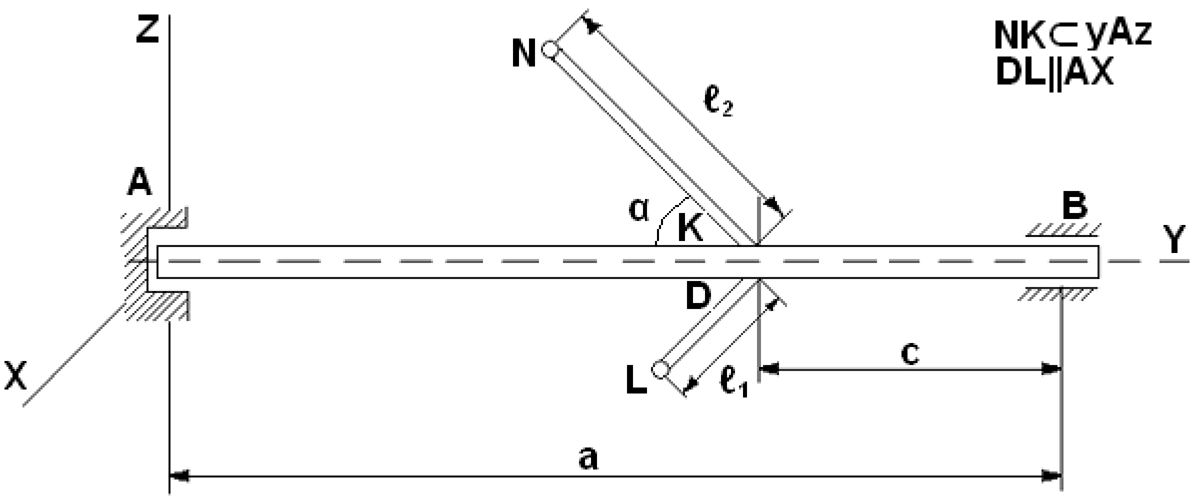
8


Z
NK⊂yAz
DL||Ax
N
ℓ1
A
60°
α
D
B
Y
K
ℓ2
b
c
X
L
a

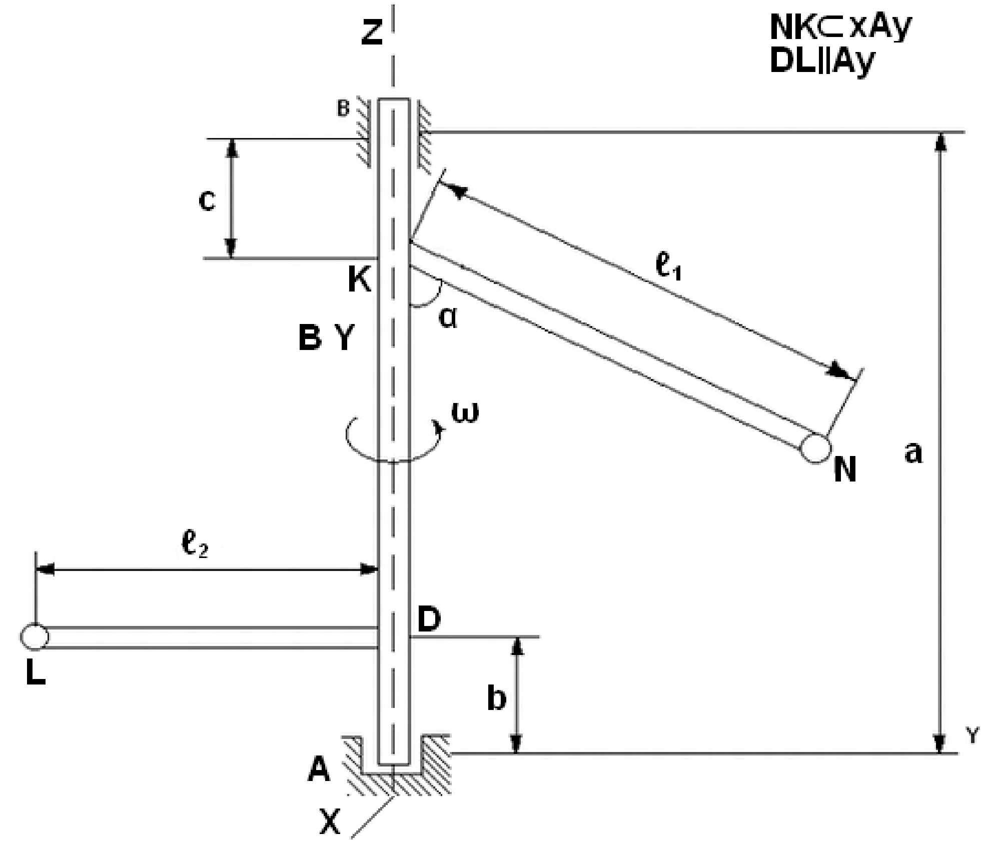
9


Z
N
ℓ_1
L
ℓ_2
NK⊂xAy
DL||Az
A
α
B
Y
K
D
b
c
X
a

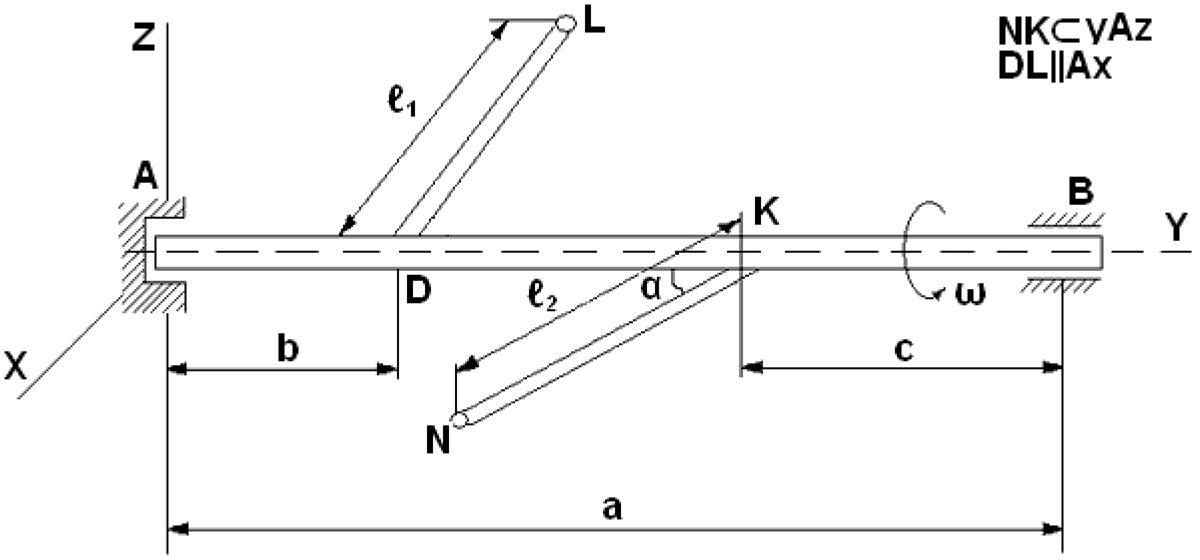
10


Z
N
ℓ_2
NK⊂yAz
DL||AX
A
α
K
B
Y
D
c
X
L
ℓ_1
a

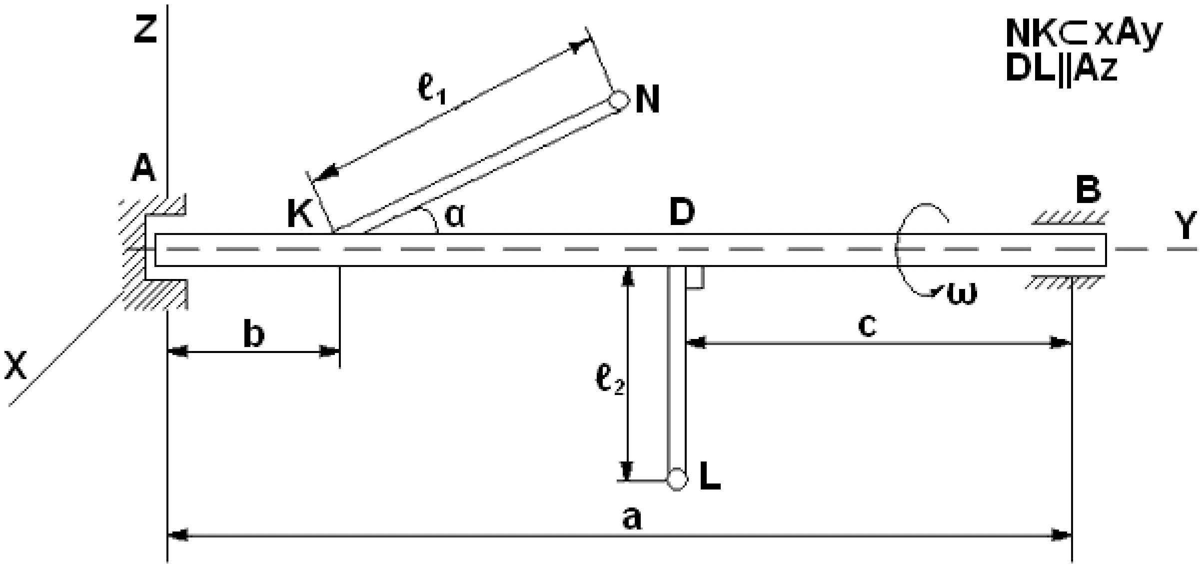
11


NK⊂xAy
DL||Ay
Z
B
c
K
B Y
α
ℓ_1
ω
N
a
ℓ_2
D
L
b
A
Y
X

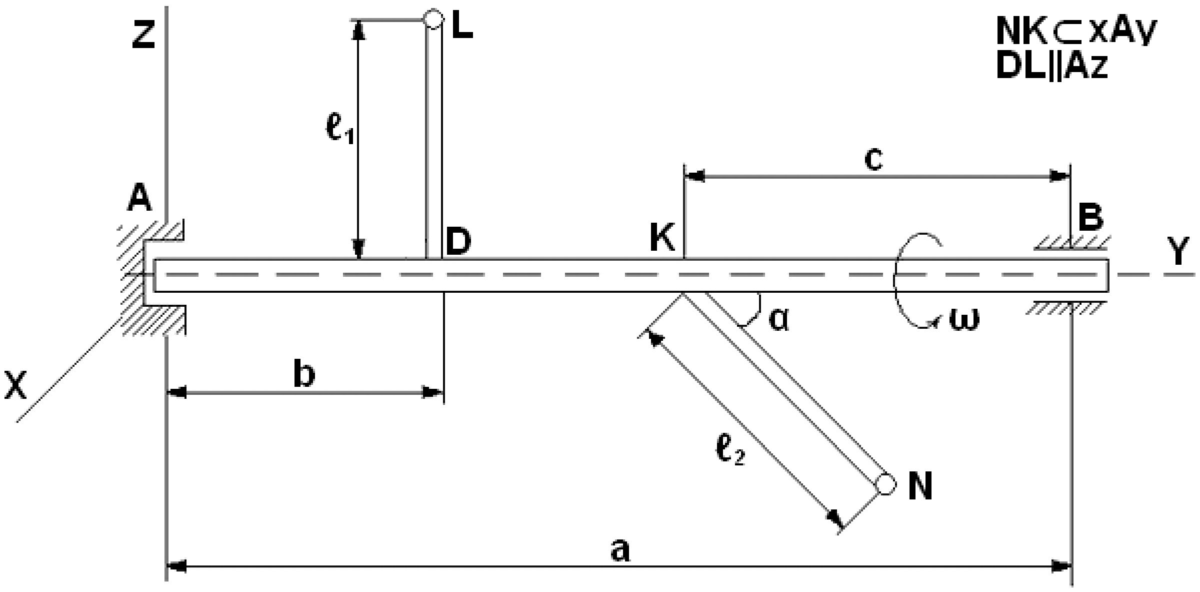
12


NK⊂yAz
DL||Ax
Z
L
ℓ_1
A
K
B
Y
D
ℓ_2
α
ω
X
b
c
N
a

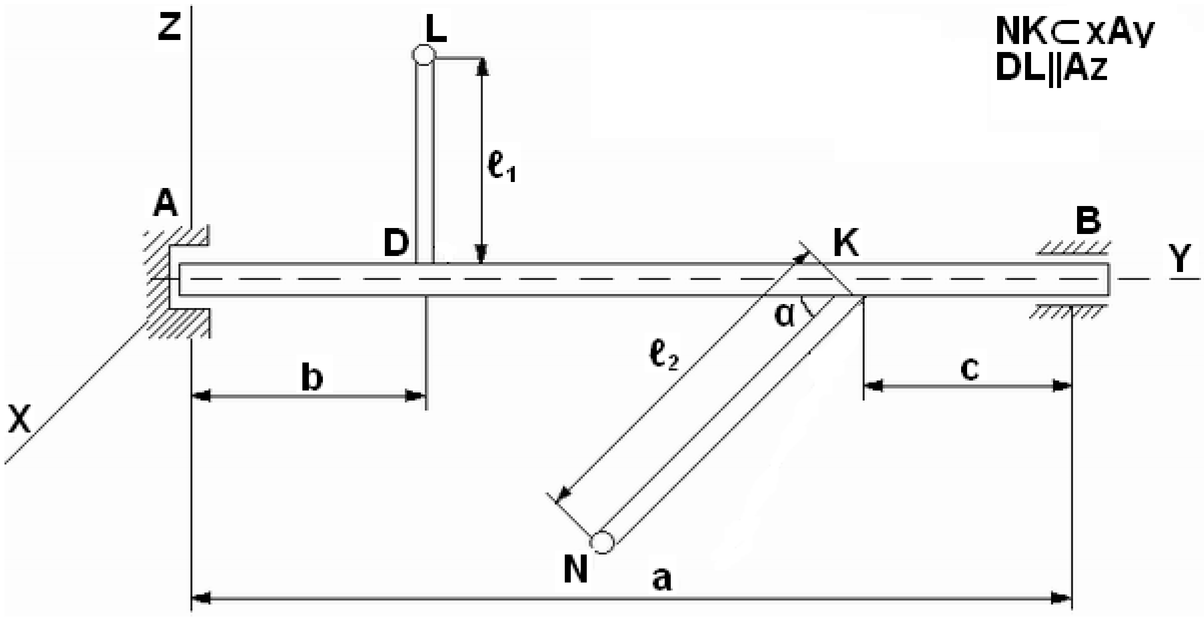
13


NK⊂xAy
DL||Az
Z
A
X
K
D
B
Y
N
L
α
ω
b
c
a
ℓ1
ℓ2

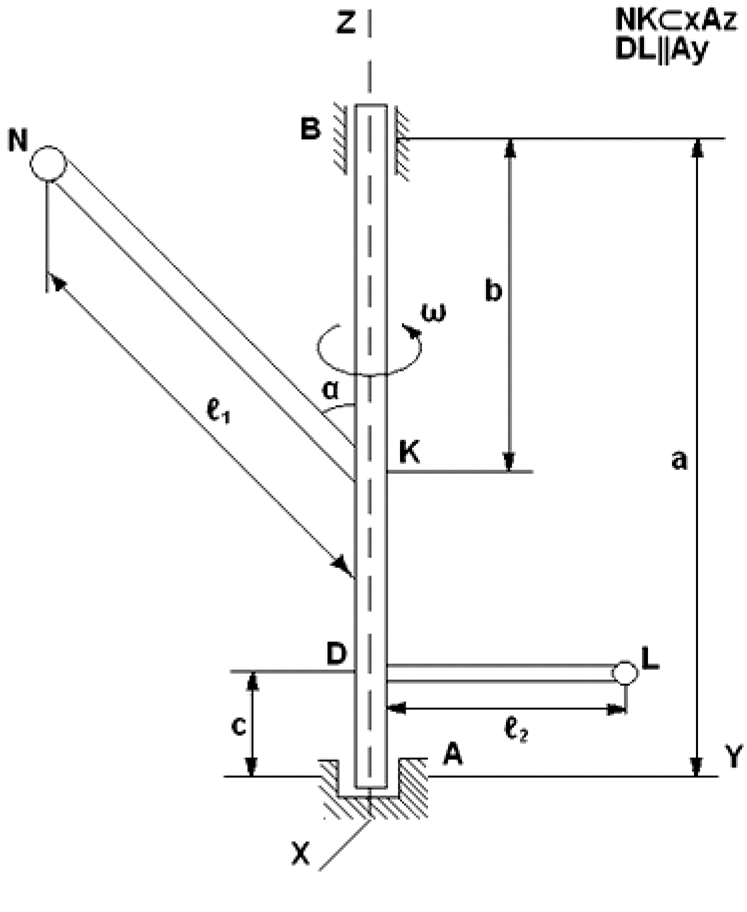
14


NK⊂xAy
DL||Az
Z
A
X
L
D
K
B
Y
N
α
ω
b
c
a
ℓ1
ℓ2

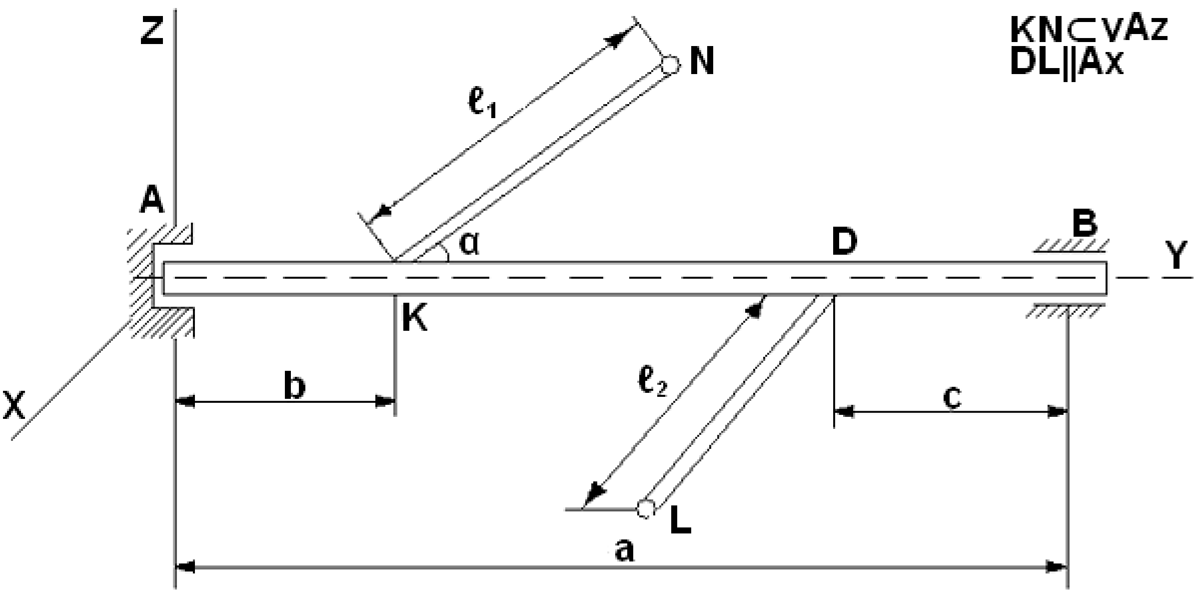
15


Z
L
NK⊂xAy
DL||Az
ℓ1
A
D
K
B
Y
α
ℓ2
b
c
X
N
a

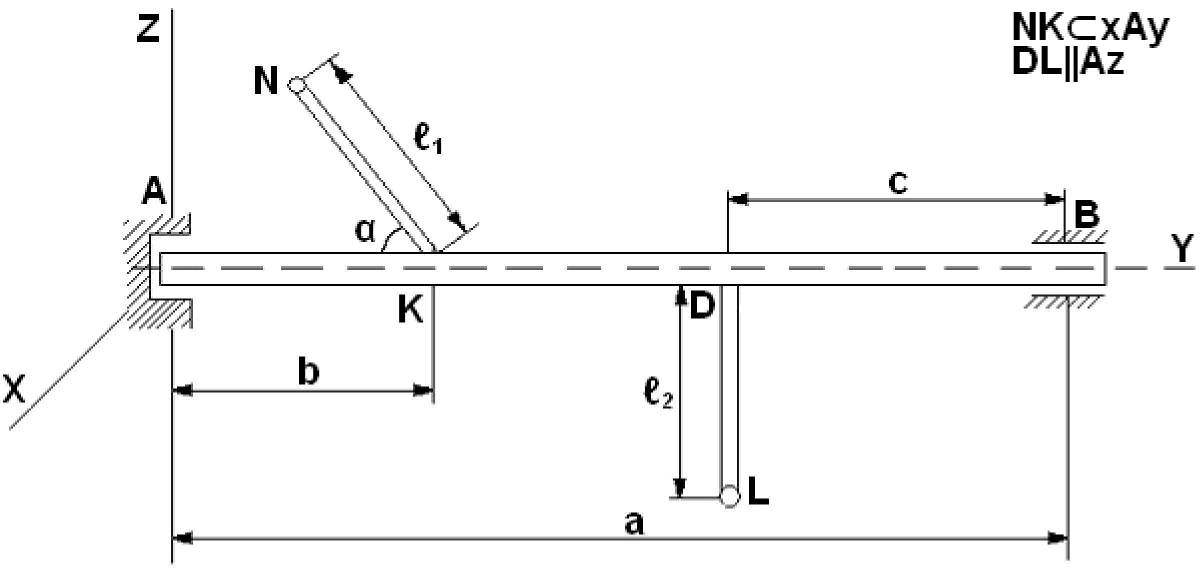
16


Z
NK⊂xAz
DL||Ay
N
B
b
ω
α
ℓ1
K
a
D
L
c
ℓ2
A
Y
X

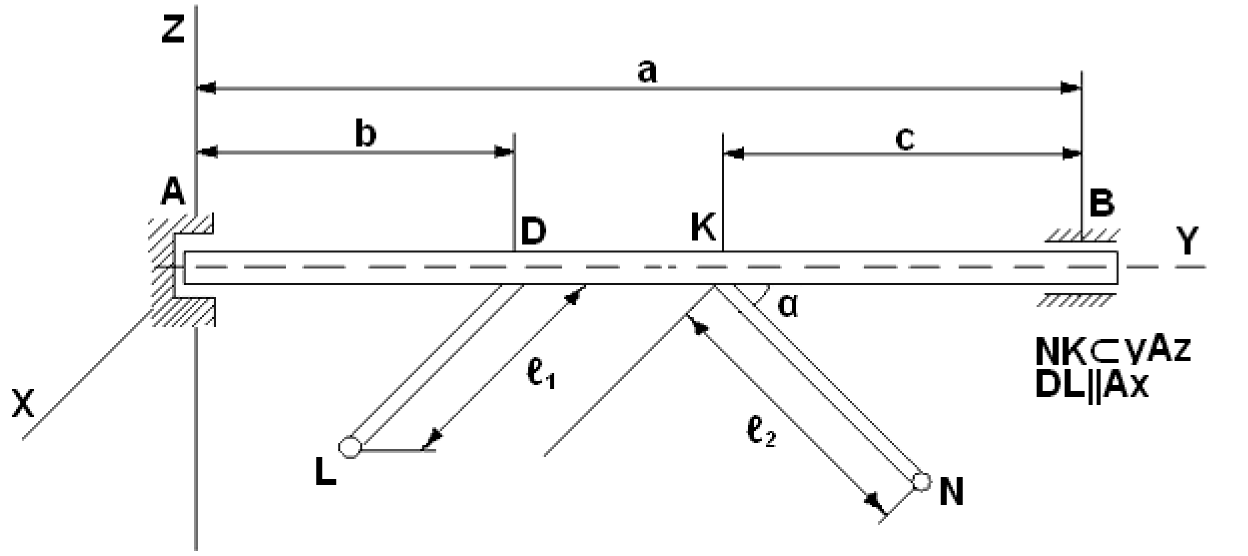
17


KN⊂vAz
DL||Ax
Z
N
ℓ1
A
α
D
B
Y
K
ℓ2
b
c
X
L
a

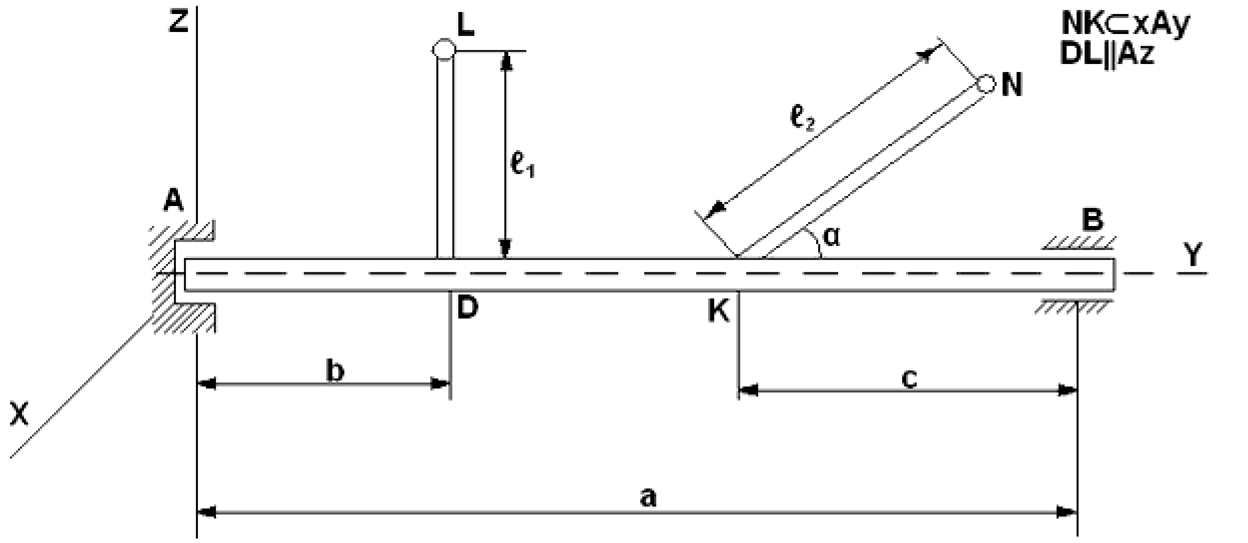
18


NK⊂xAy
DL||Az
Z
N
ℓ1
A
α
c
B
Y
K
D
ℓ2
b
X
L
a

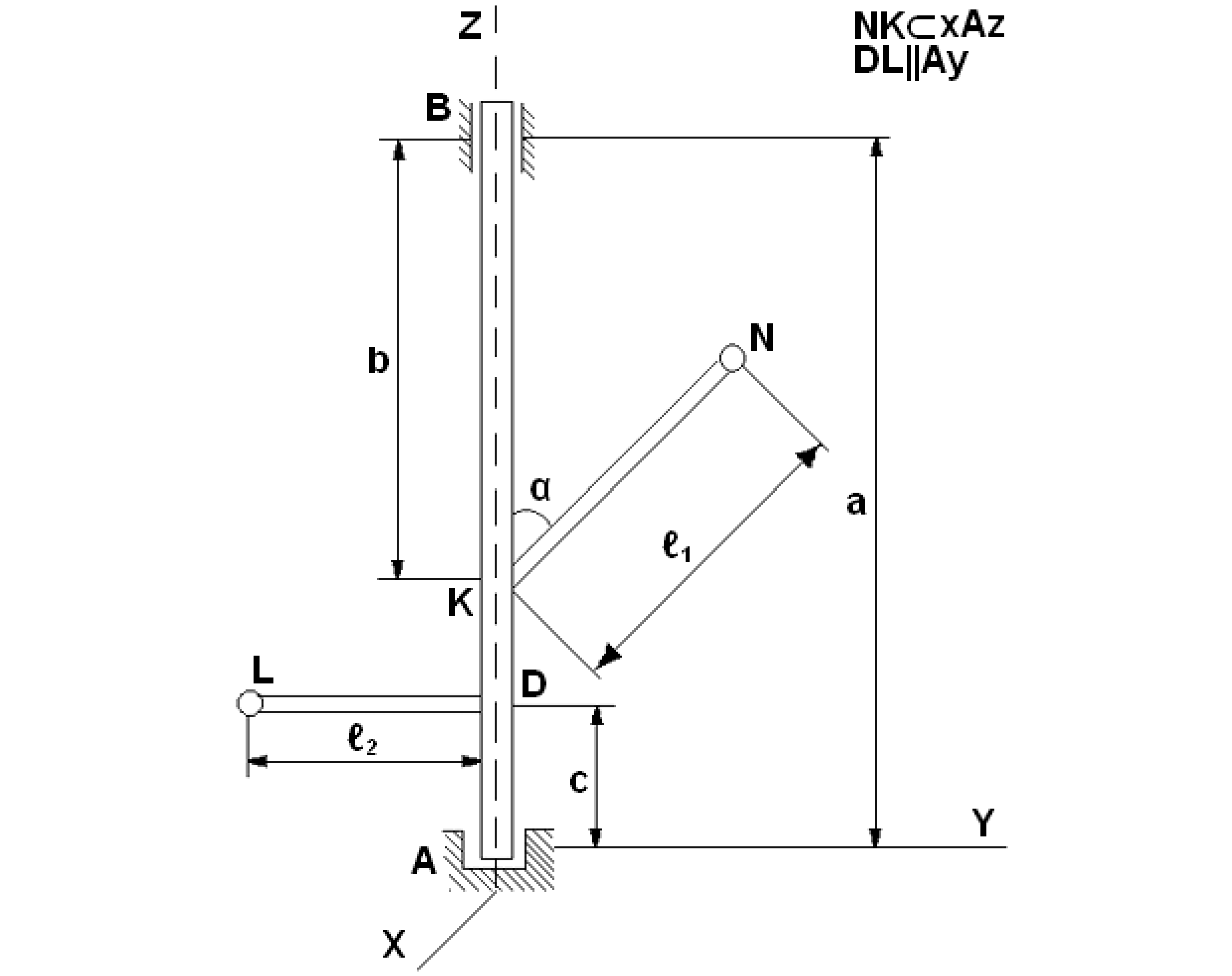
19


Z
a
b
c
A
D
K
B
Y
α
NK⊂yAz
DL||Ax
X
ℓ_1
ℓ_2
L
N

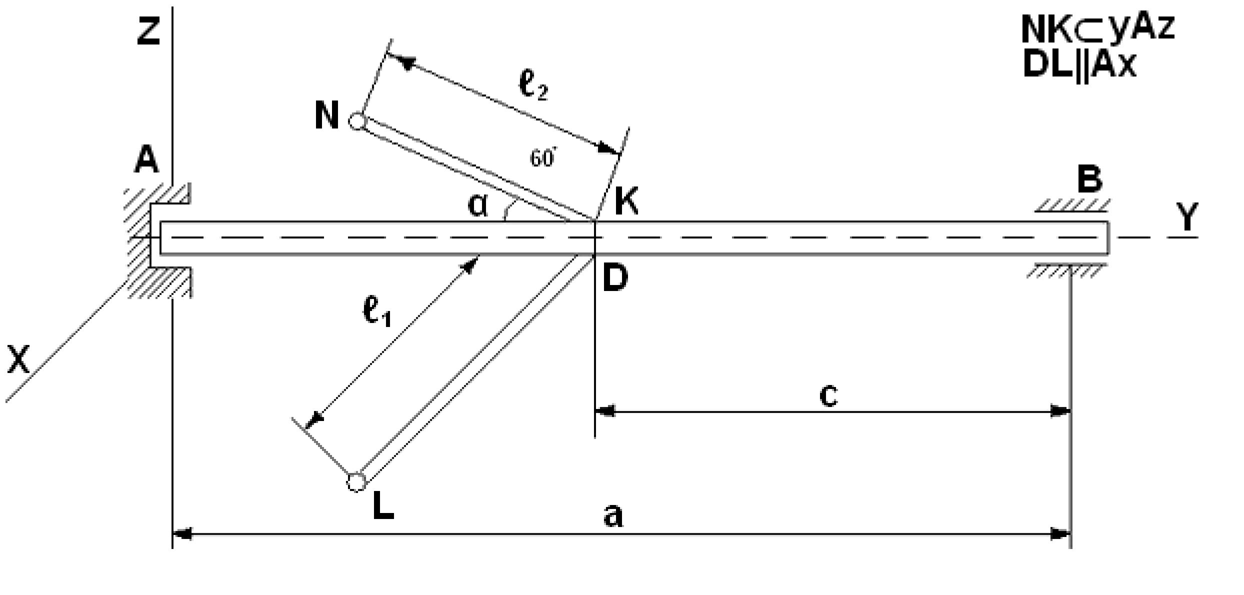
20


Z
L
NK⊂xAy
DL||Az
N
ℓ_2
ℓ_1
A
α
B
Y
D
K
b
c
X
a

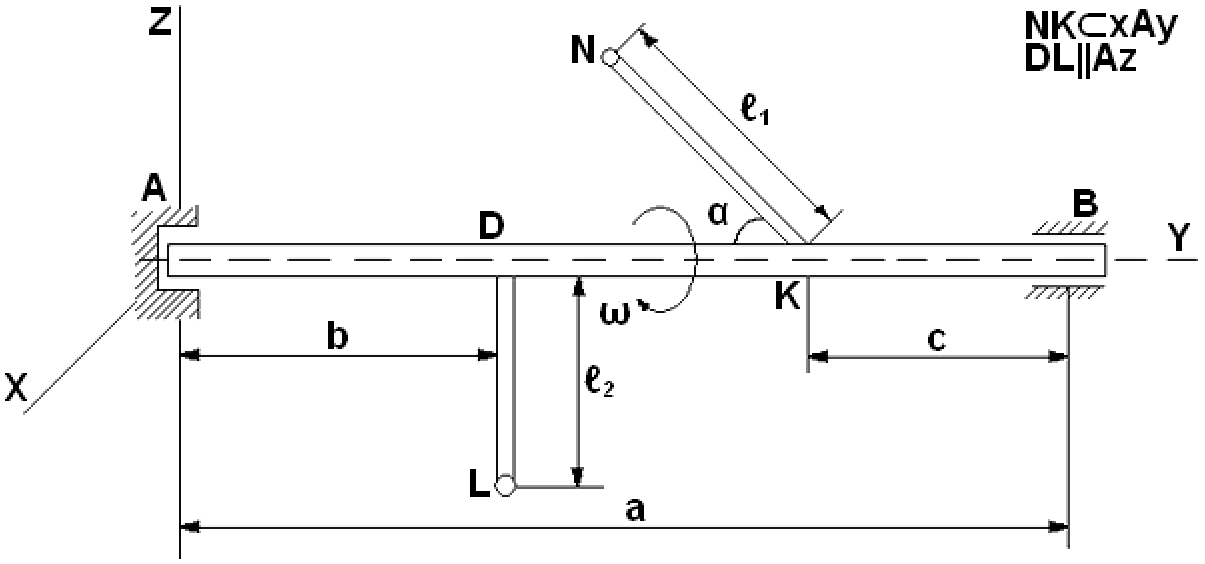
21


NK⊂xAz
DL||Ay
Z
B
b
N
a
α
ℓ_1
K
L
D
ℓ_2
c
Y
A
X

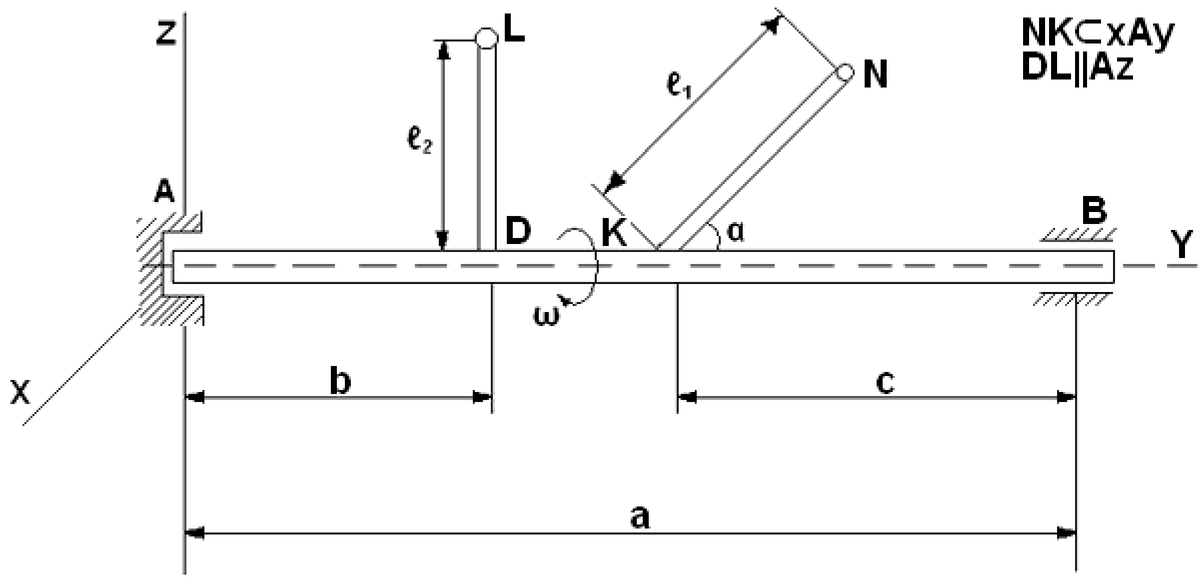
22


NK⊂yAz
DL||Ax
Z
N
ℓ_2
60°
A
α
K
B
Y
D
ℓ_1
X
c
L
a

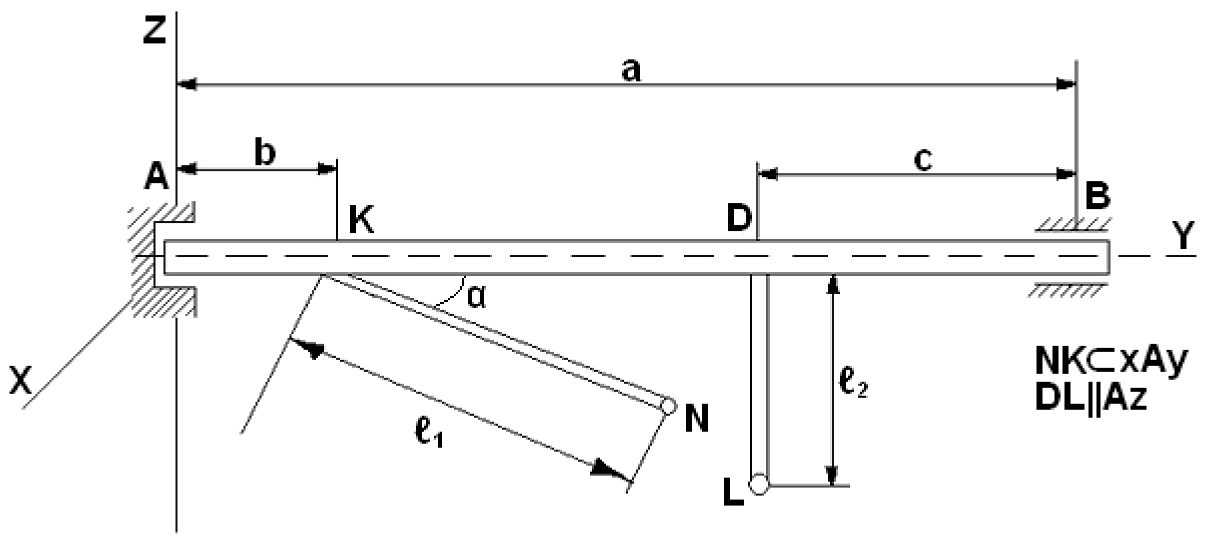
23


NK⊂xAy
DL||Az
Z
N
ℓ1
A
α
B
D
Y
K
ω
b
c
X
ℓ2
L
a

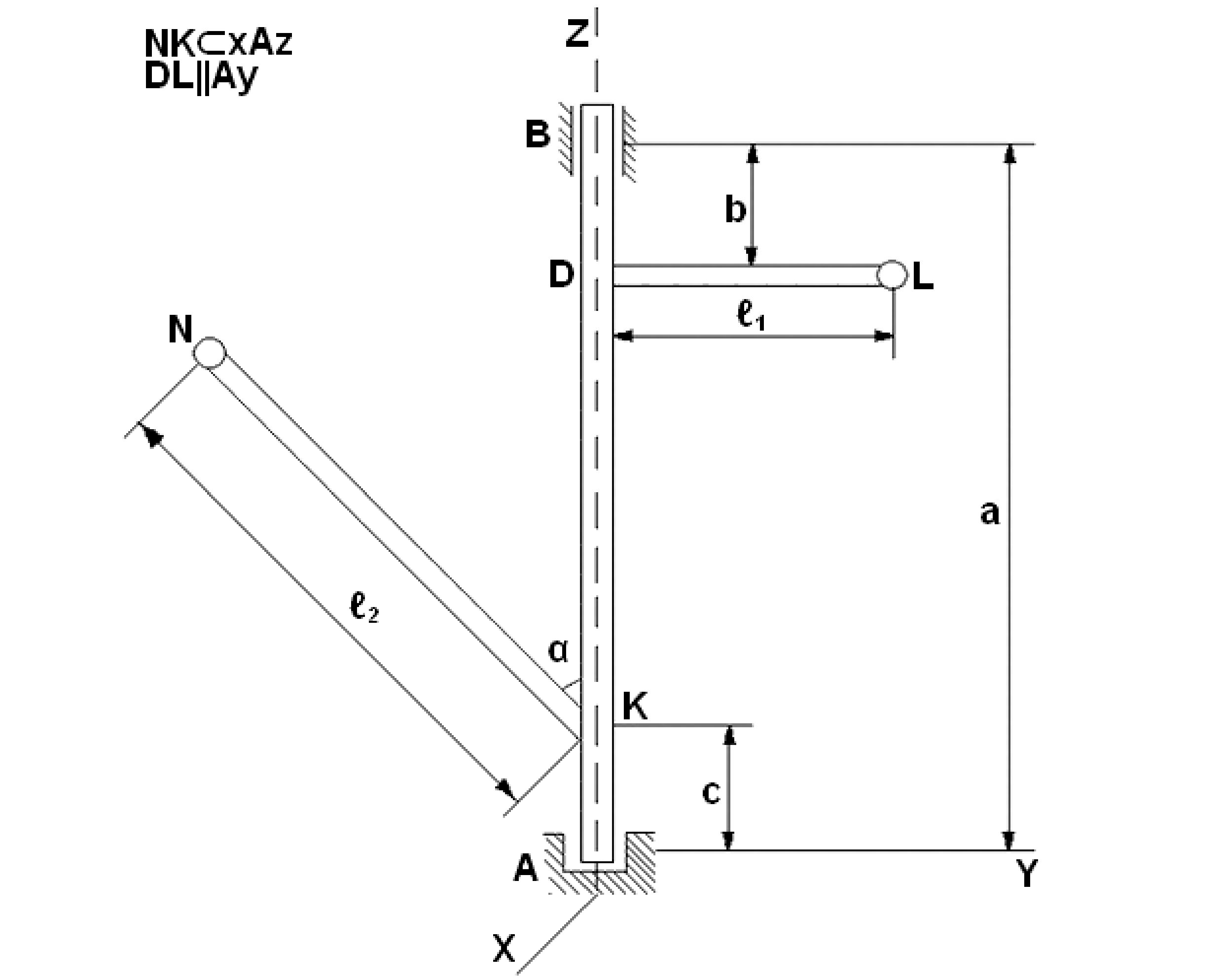
24


NK⊂xAy
DL||Az
Z
L
N
ℓ1
ℓ2
A
B
D
K
α
Y
ω
X
b
c
a

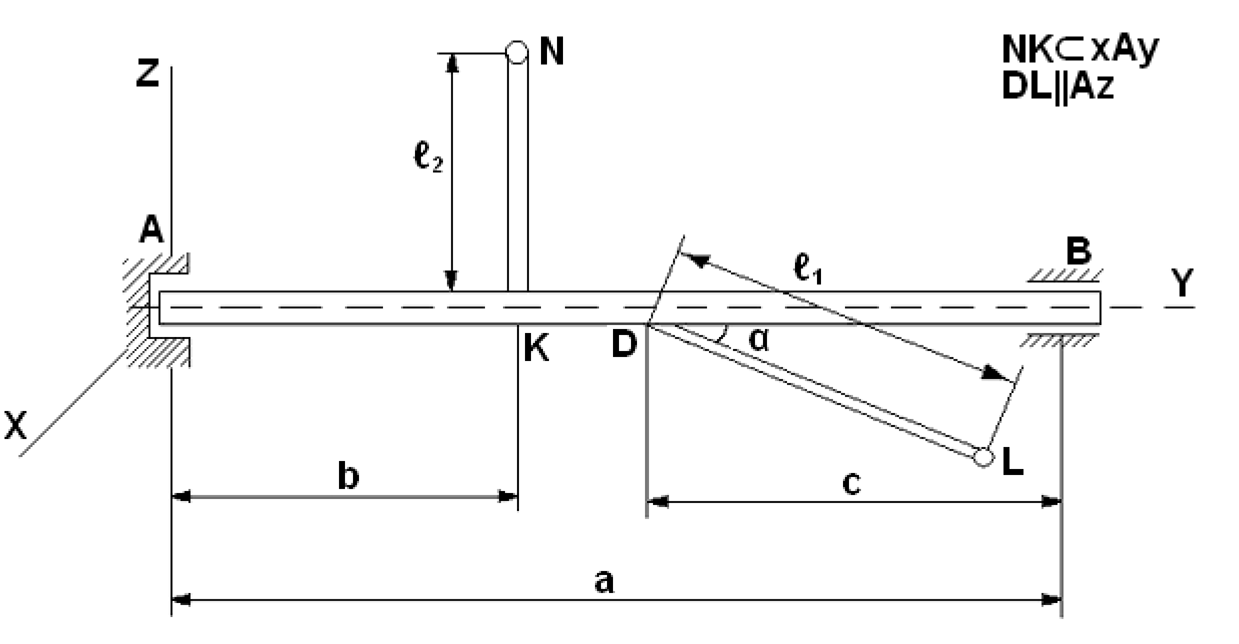
25


Z
a
b
c
A
K
D
B
Y
α
X
ℓ1
N
ℓ2
L
NK⊂xAy
DL||Az

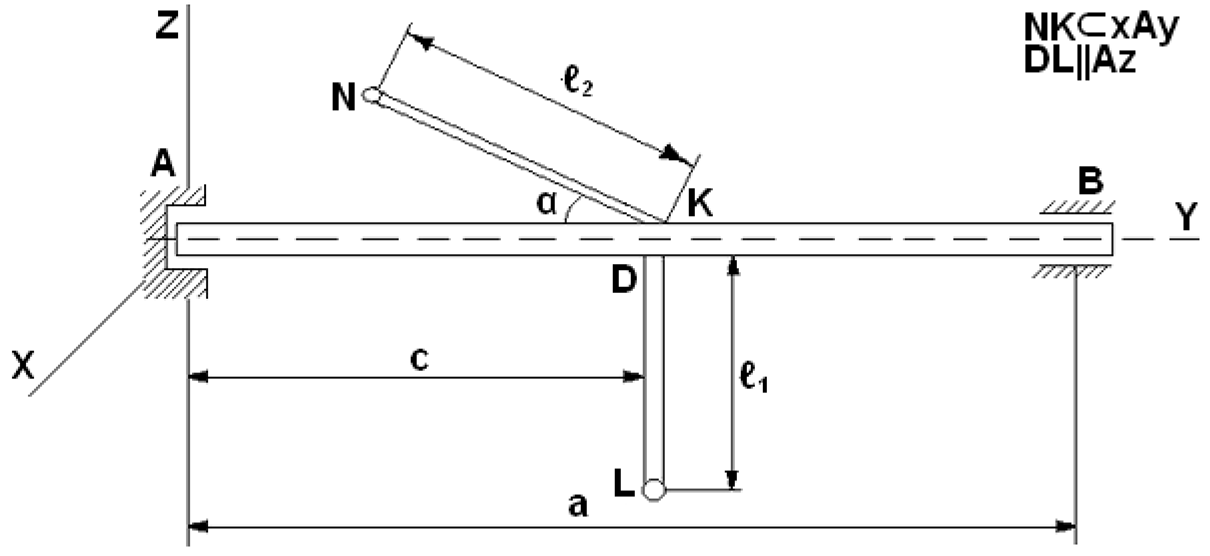
26


NK⊂xAz
DL||Ay
Z
B
b
D
L
ℓ_1
N
ℓ_2
a
α
K
c
A
Y
X

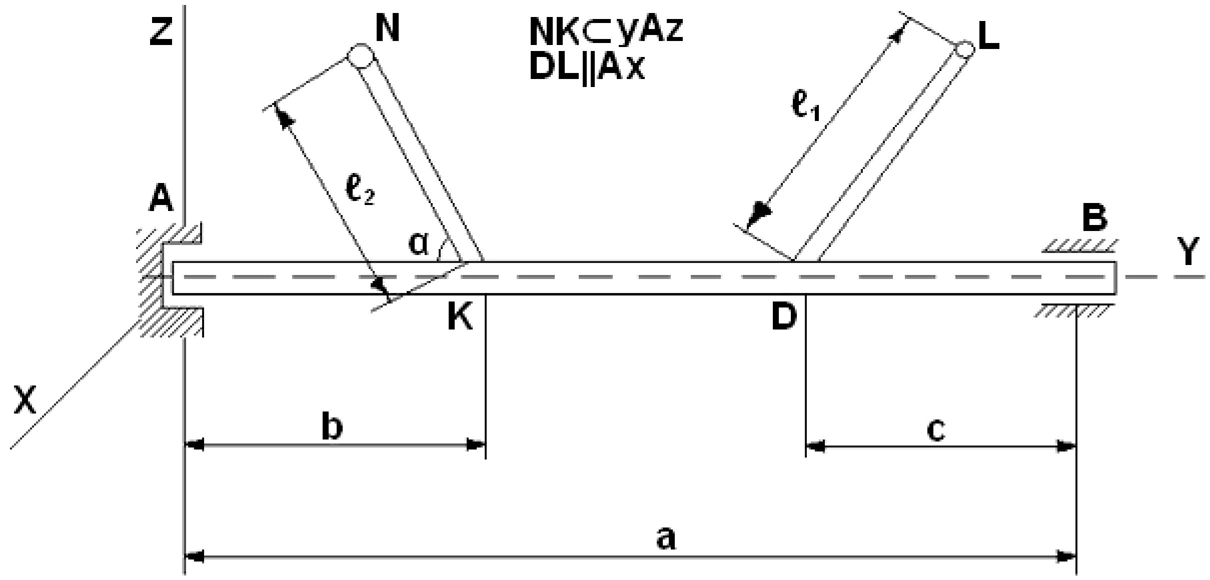
27


N
NK⊂xAy
DL||Az
Z
ℓ_2
A
ℓ_1
B
Y
K
D
α
X
L
b
c
a

28


NK⊂xAy
DL||Az
Z
N
ℓ_2
A
α
K
B
Y
D
X
c
ℓ_1
L
a

29


Z
N
NK⊂yAz
DL||Ax
L
ℓ_1
A
ℓ_2
α
B
Y
K
D
X
b
c
a

30

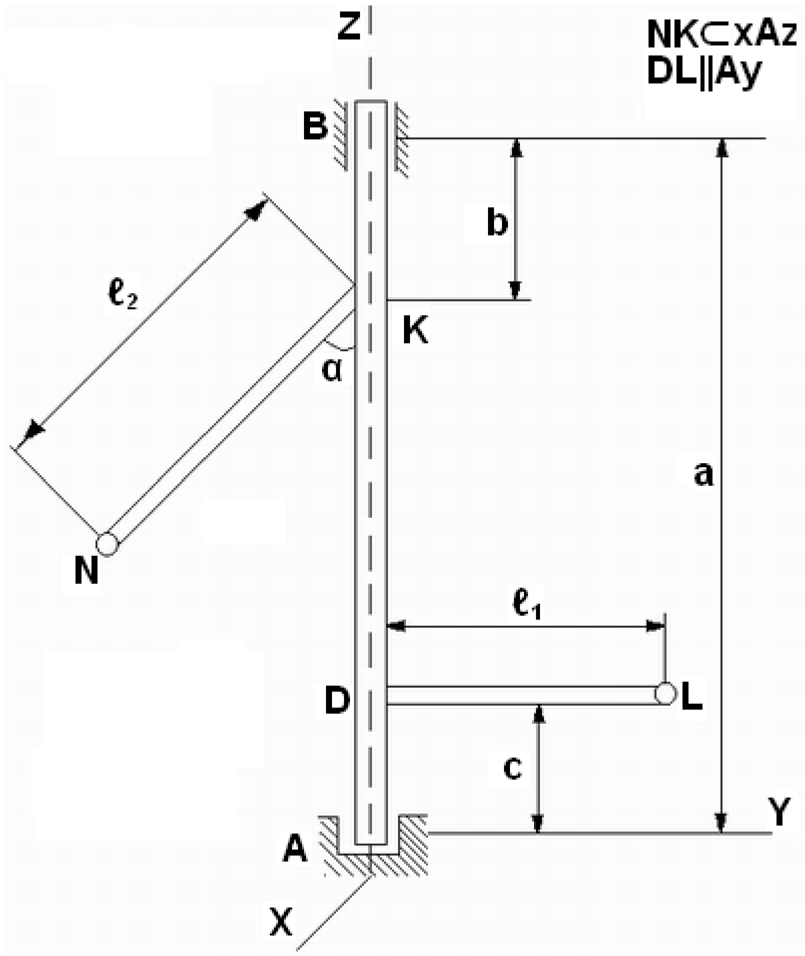


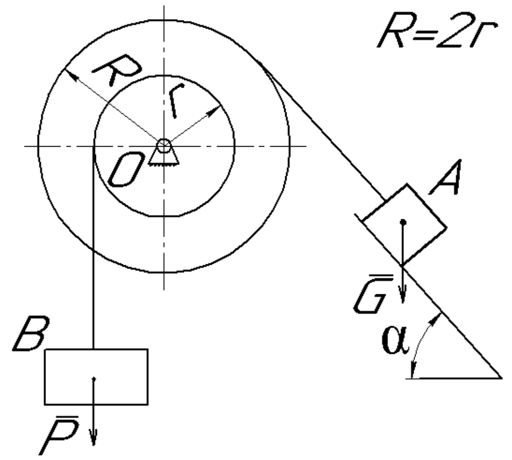
Таблица Д.5

Номер варианта	Масса шаров (кг)		Расстояния (м)					Угол (град)	ω (рад/с)
	m_1	m_2	a	b	c	l_1	l_2	α	
0	30	20	2	1	0,6	1,2	1,4	30	3
1	28	14	2	0,8	0,4	1	0,8	45	3,2
2	26	12	1,5	0,7	0,3	0,8	1,2	60	3,4
3	25	15	1,6	1	0,2	0,9	0,7	45	3,6
4	24	14	1,8	0,7	0,6	0,7	1,1	60	3,8
5	22	12	1,9	1	0,3	0,6	1	30	4
6	20	16	1,9	0,6	0,4	0,7	0,9	45	4,2
7	18	14	1,5	0,8	0,2	0,5	0,4	30	4,4
8	16	18	1,6	0,5	0,5	0,6	0,8	60	4,6
9	15	12	1,8	0,8	0,4	0,4	0,6	45	4,8

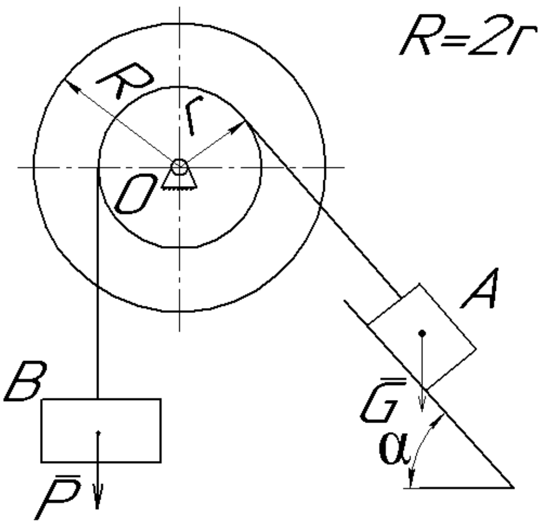
Задача Д. 6. Применение принципа возможных перемещений к исследованию равновесия механической системы

Определить область значений вращающего момента M или силы P, при которых заданная механическая система находится в равновесии.

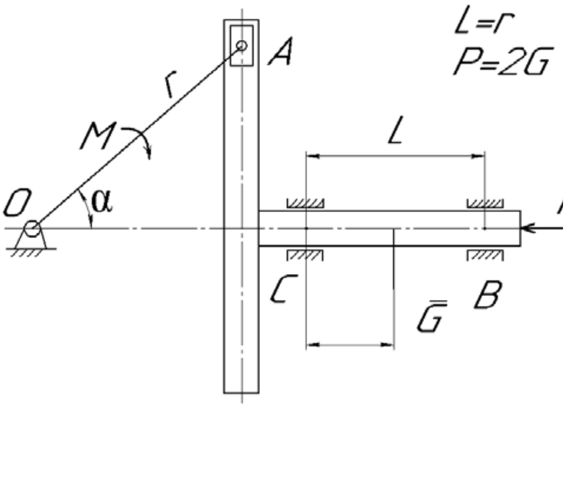
1



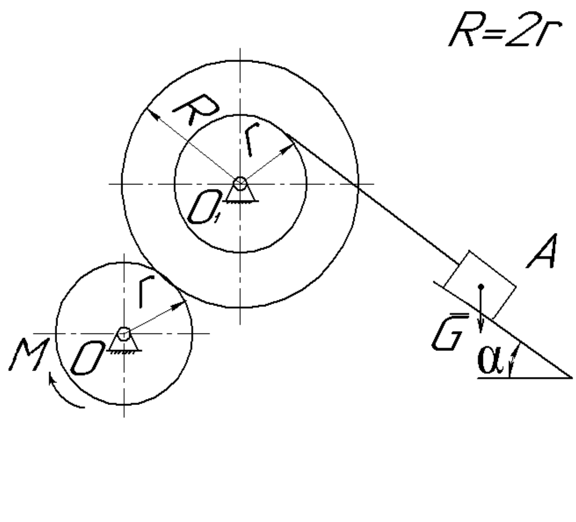
2



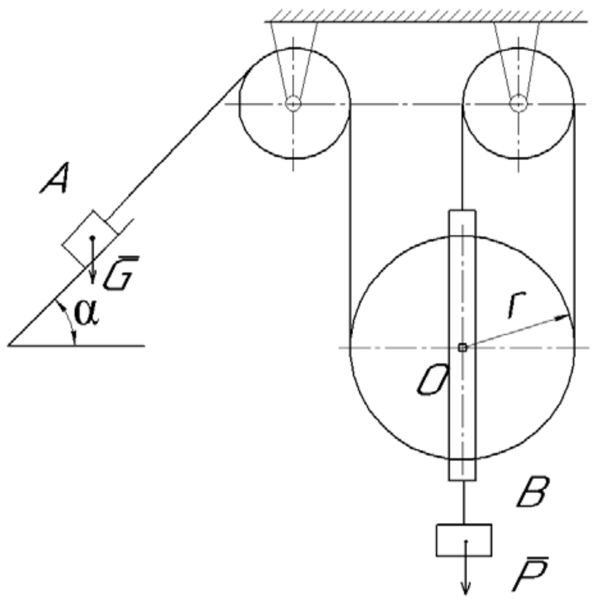
3



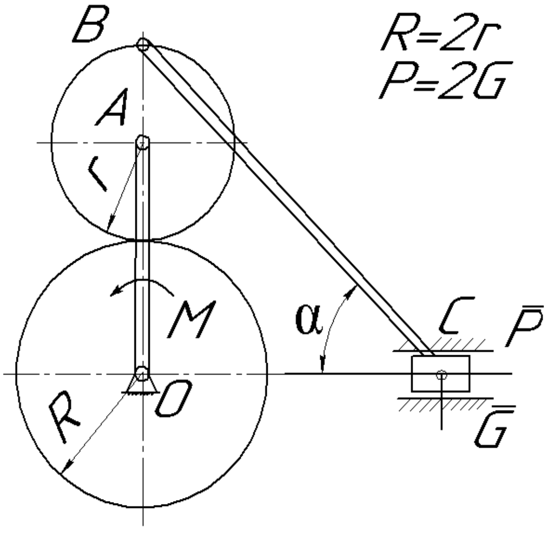
4



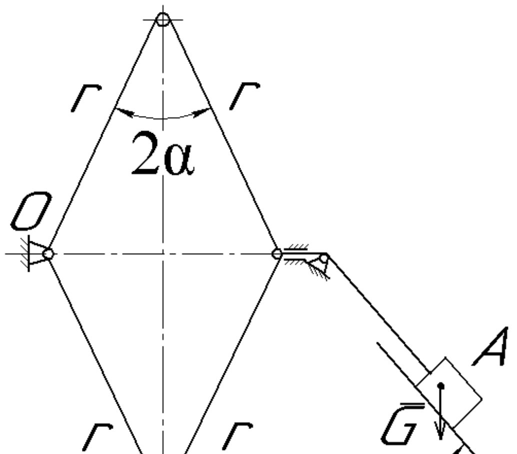
5



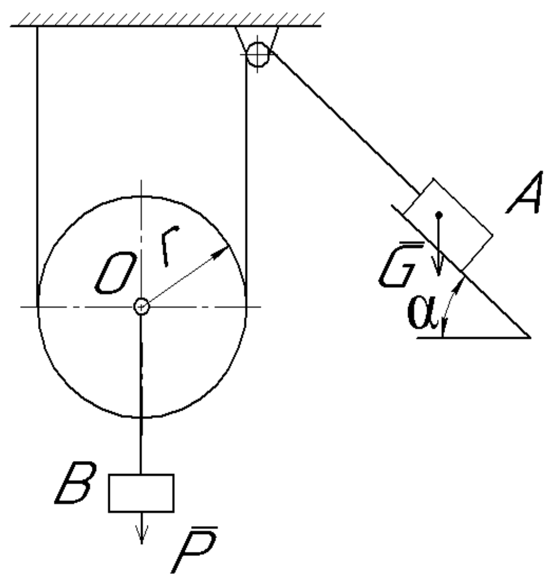
6



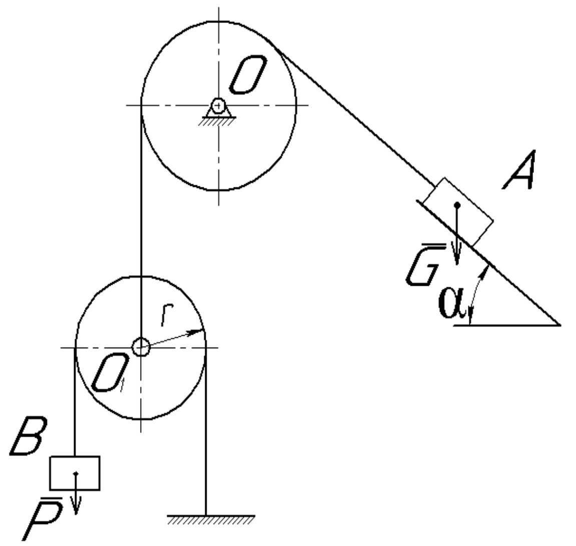
7



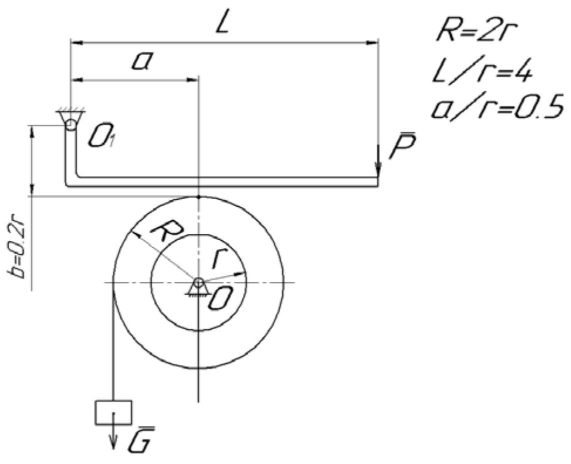
8



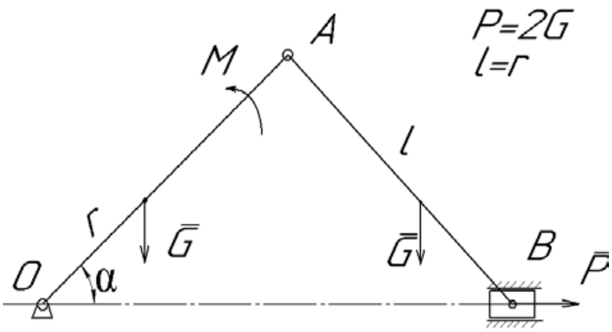
9


O
A
G
α
r
O1
B
P

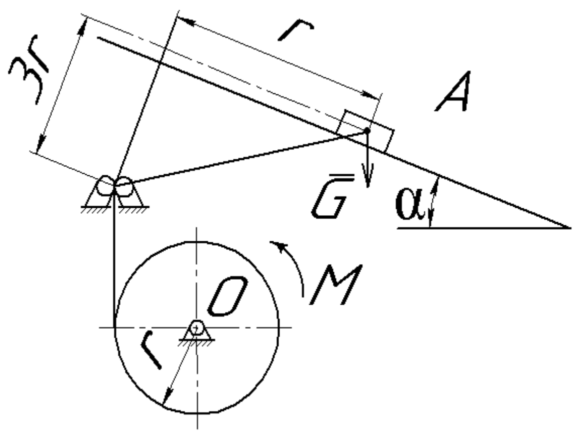
10


L
a
R=2r
L/r=4
a/r=0.5
O1
P
b=0.2r
R
r
O
G

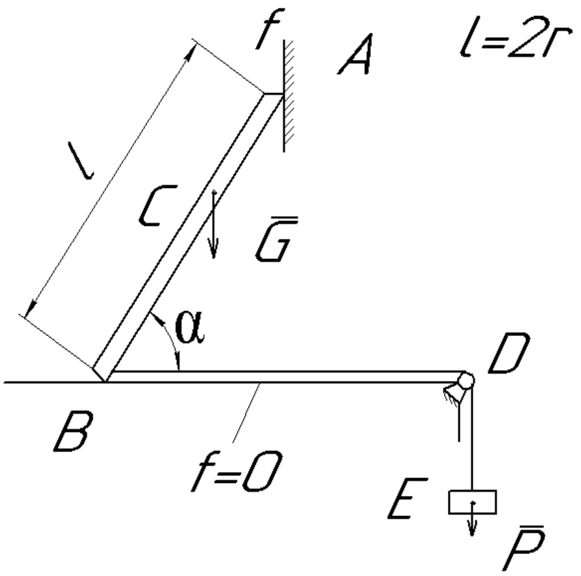
11


P=2G
l=r
A
M
l
r
G
G
B
P
O
α

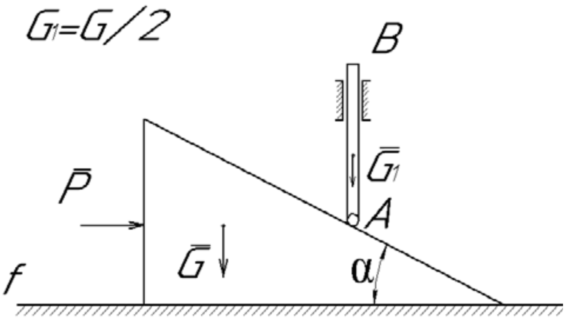
12


3r
r
A
G
α
M
O
r

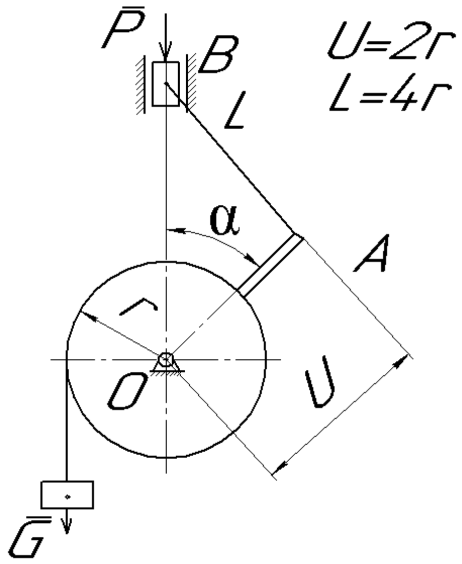
13


f
A
$l=2r$
l
C
$\bar{G}$
α
D
B
$f=0$
E
$\bar{P}$

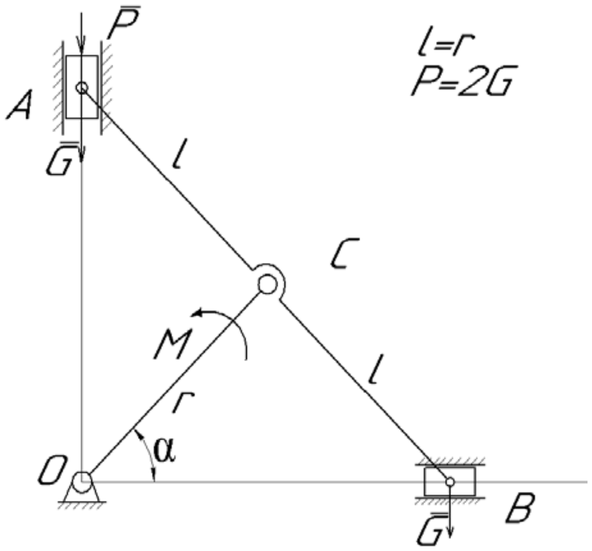
14

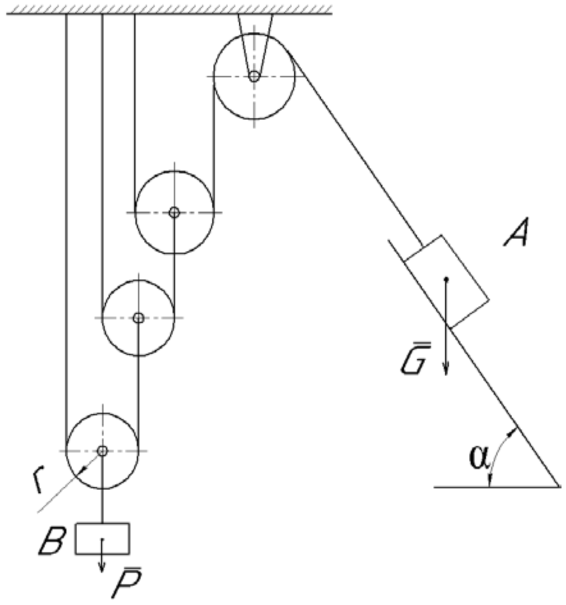
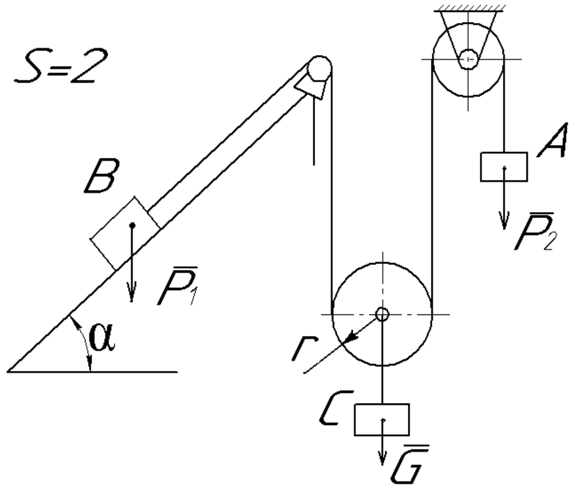
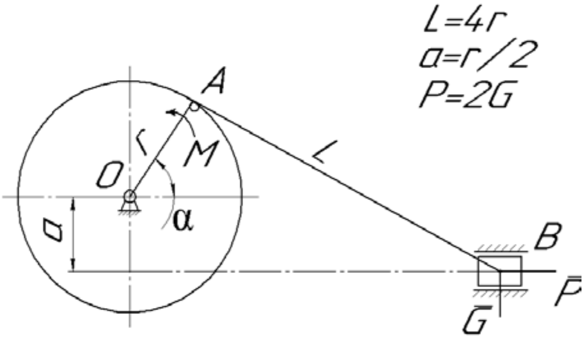
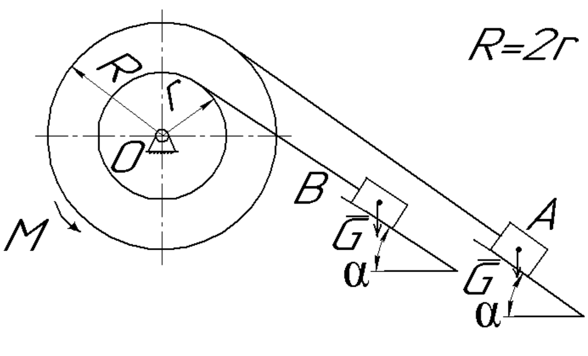

$G_1=G/2$
B
$\bar{G}_1$
$\bar{P}$
A
$\bar{G}$
α
f

15


$\bar{P}$
B
$U=2r$
$L=4r$
L
α
A
r
O
U
$\bar{G}$

16


$\bar{P}$
$l=r$
$P=2G$
A
$\bar{G}$
l
C
M
l
r
α
O
B
$\bar{G}$

17 	18 
19 	20 

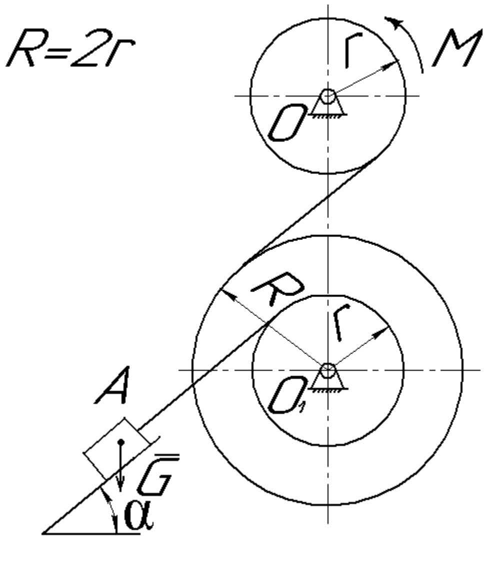
A
G
α
r
B
P

S=2
B
P1
α
r
C
G
A
P2

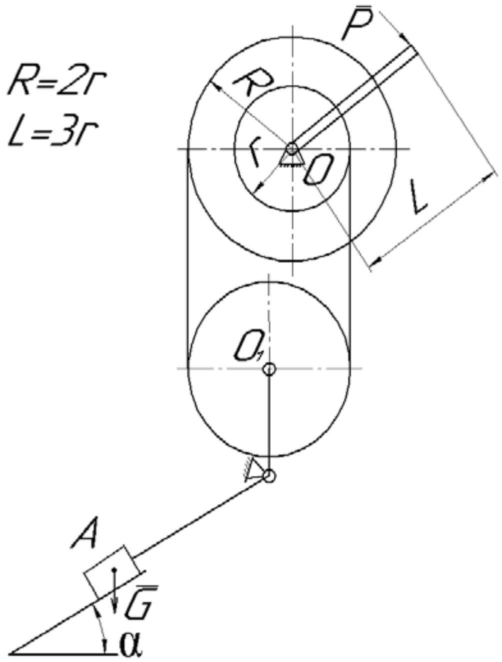
L=4r
a=r/2
P=2G
A
M
r
O
α
a
L
B
P
G

R=2r
R
r
O
M
B
G
α
A
G
α

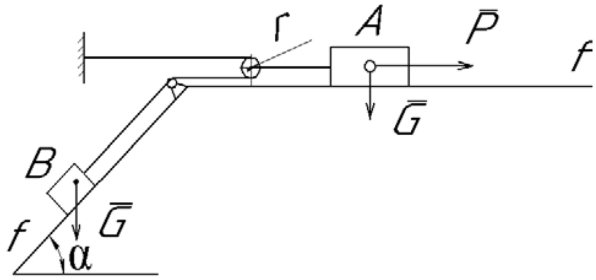
21


R=2r
r
M
O
R
r
O1
A
G
α

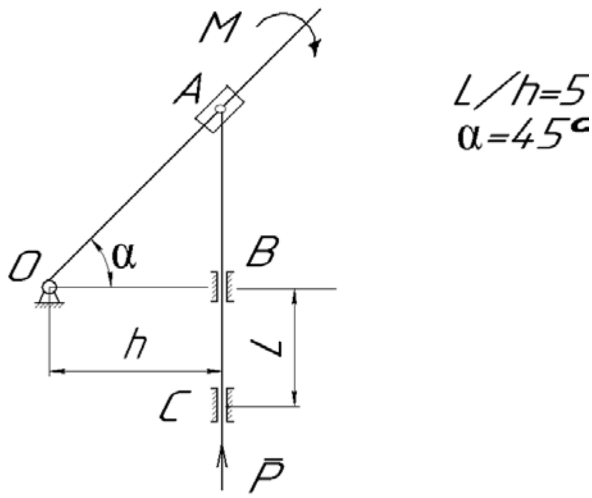
22


P
R=2r
L=3r
R
r
O
L
O1
A
G
α

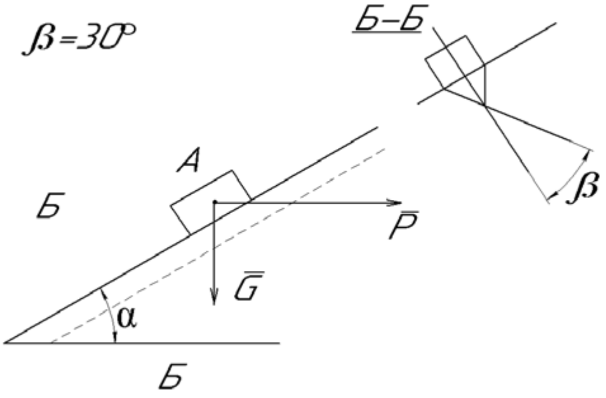
23


r
A
P
f
G
B
G
f
α

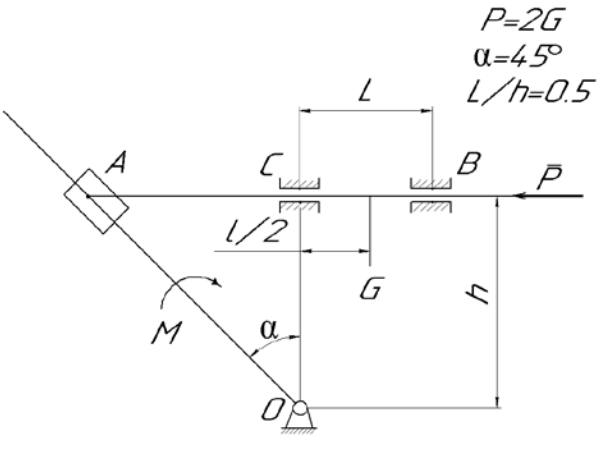
24


M
A
L/h=5
α=45°
O
α
B
h
L
C
P

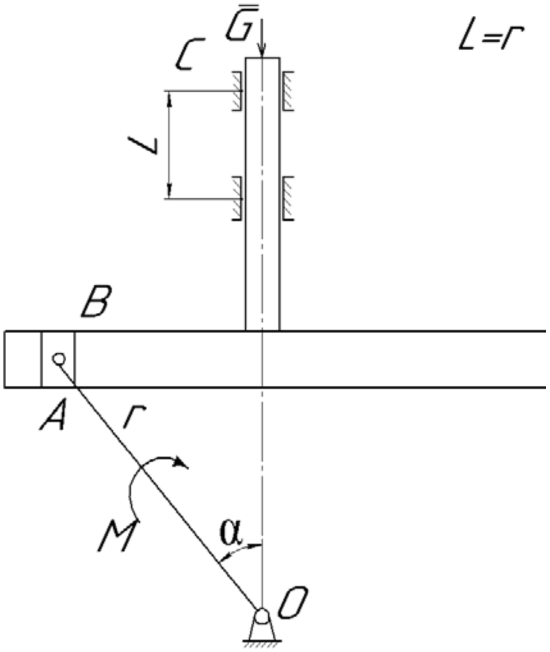
25


β=30°
Б–Б
A
Б
P
G
α
Б
β

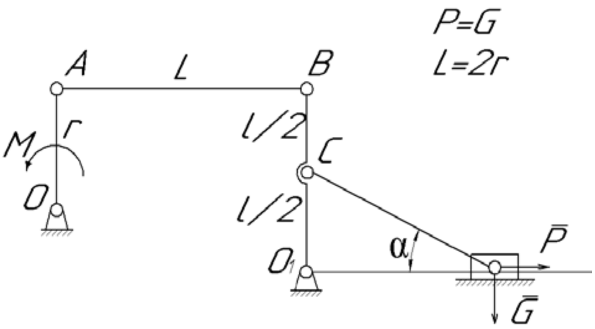
26


P=2G
α=45°
L/h=0.5
L
A
C
B
P
l/2
G
h
M
α
O

27


G
C
L=r
L
B
A
r
M
α
O

28


P=G
L=2r
A
L
B
l/2
M
r
C
O
l/2
α
P
O1
G

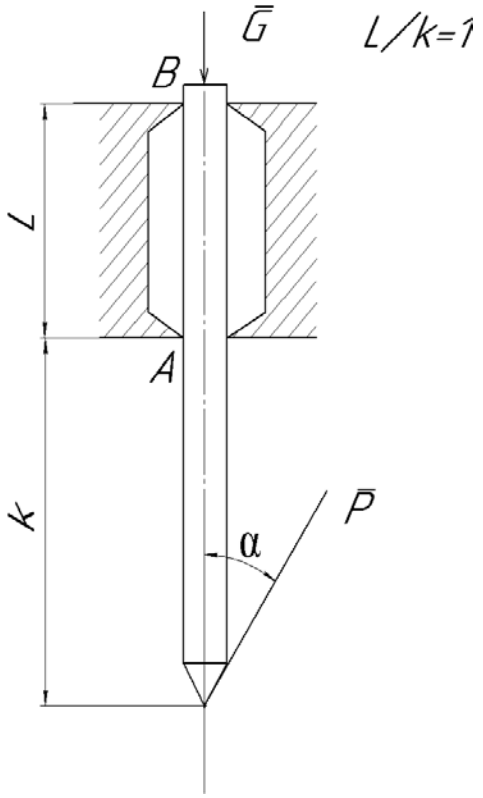
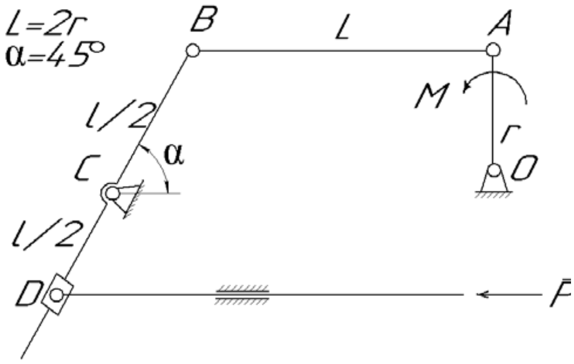
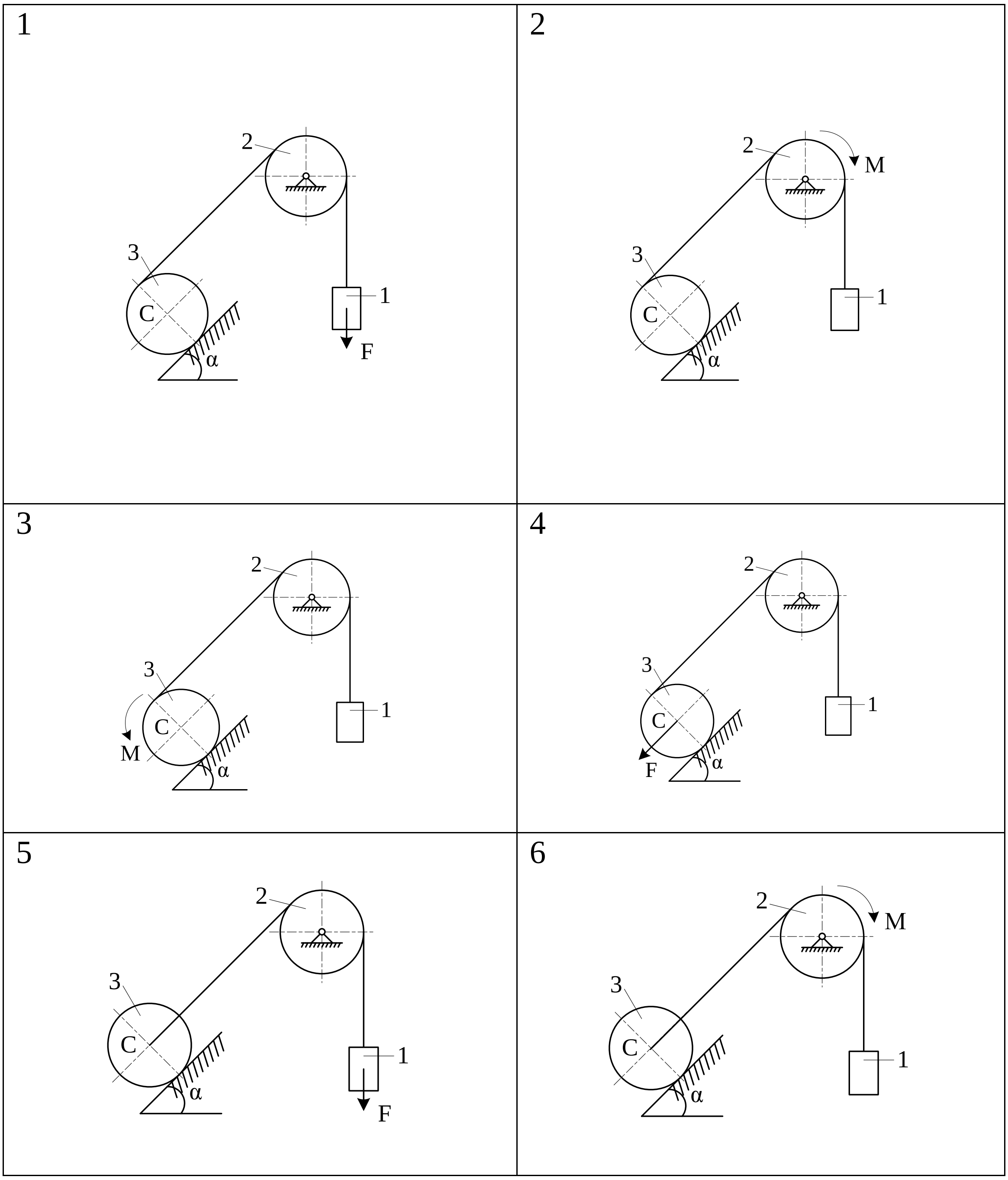
29	30
	

Таблица Д.6

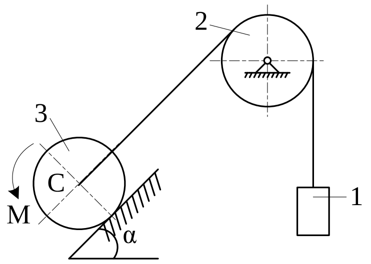
Номер варианта	G, кн	R, м	α, град.	f, сц.	Найти
0	0,5	0,2	15	0,10	Р – для схем 1, 2, 5, 7-10, 13-15, 17, 18, 22, 23, 25, 29, 30; М – для схем 4, 6, 11, 12, 16, 19-21, 24, 26-28
1	1,0	0,25	20	0,40	
2	2,0	0,3	30	0,12	
3	3,0	0,35	45	0,13	
4	4,0	0,4	60	0,14	
5	3,0	0,4	45	0,15	
6	2,0	0,35	30	0,14	
7	1,0	0,3	20	0,13	
8	0,5	0,25	15	0,12	
9	2,0	0,2	30	0,11	

Задача Д. 7. Применение общего уравнения динамики к исследованию движения механической системы

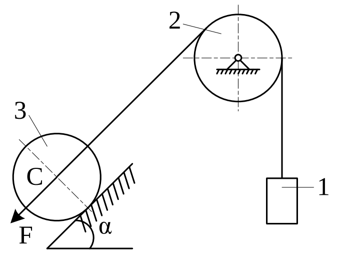
Для механических систем определить линейное ускорение a_1 или угловое ускорение E_2. Считать, что у блоков и катков массы распределены по наружному радиусу. Тросы и ремни считать невесомыми и нерастяжимыми; проскальзывание отсутствует. Трением качения и трением скольжения пренебречь. Дано m_1, m_2, m_3 – масса тел; R и r – радиусы больших и малых окружностей.



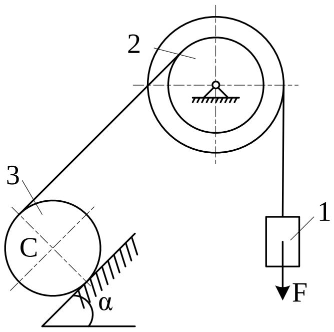
7



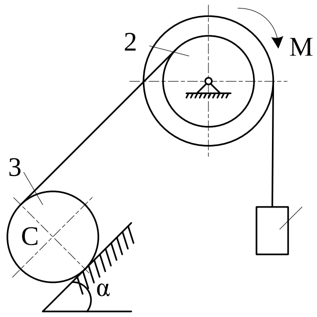
8



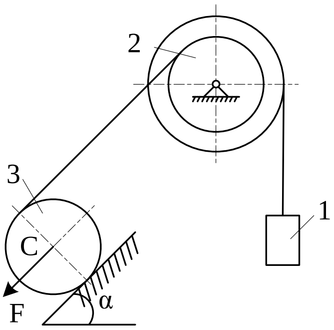
9



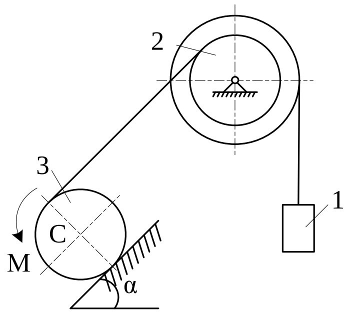
10



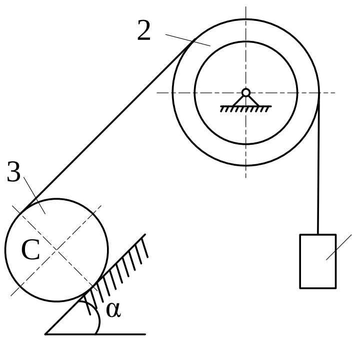
11



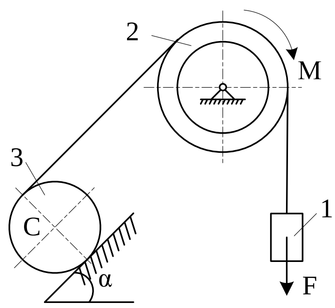
12



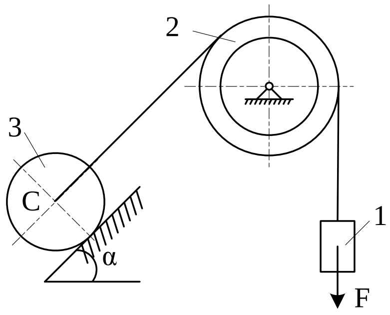
13



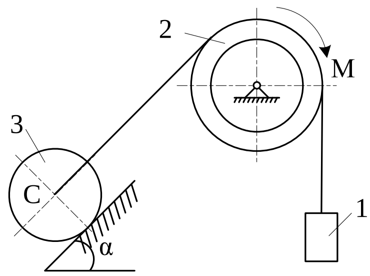
14



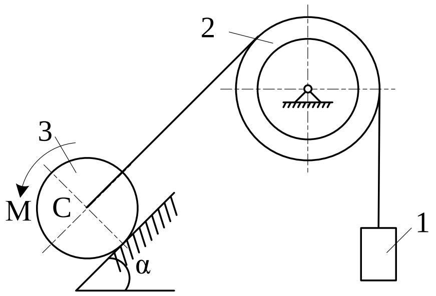
15



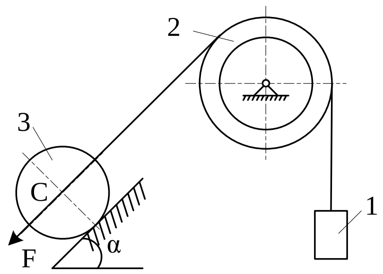
16



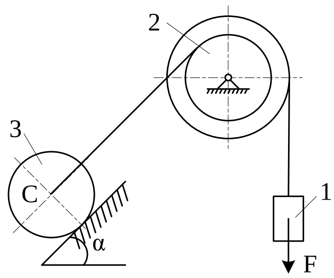
17



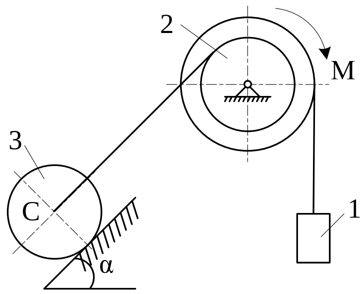
18



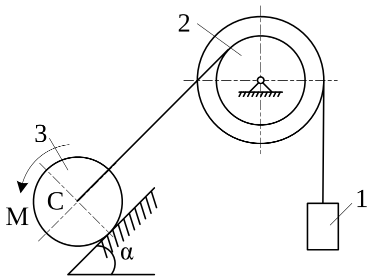
19



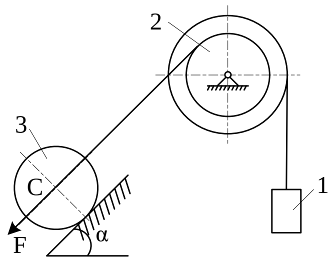
20



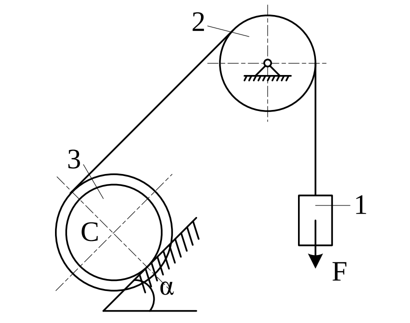
21



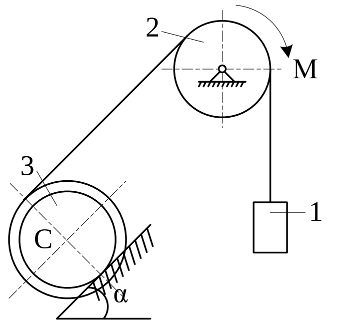
22



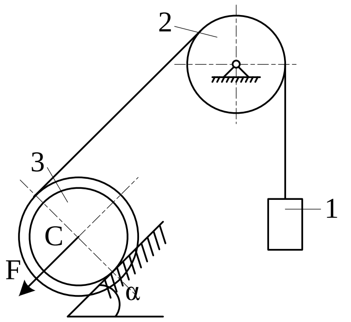
23



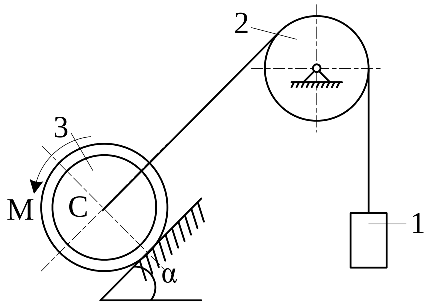
24



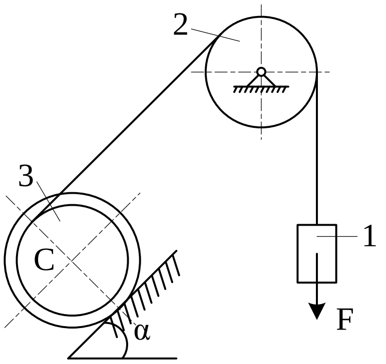
25



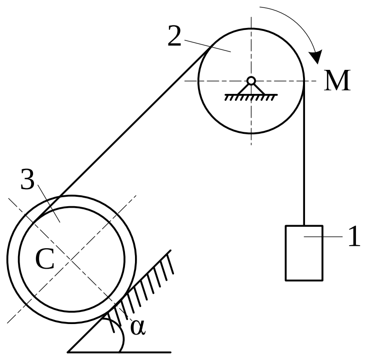
26



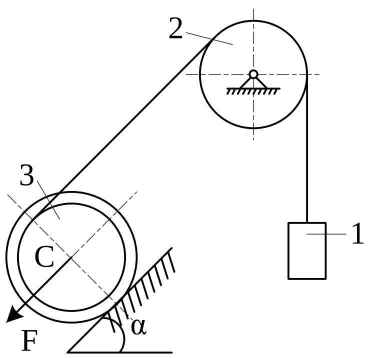
27



28



29



30

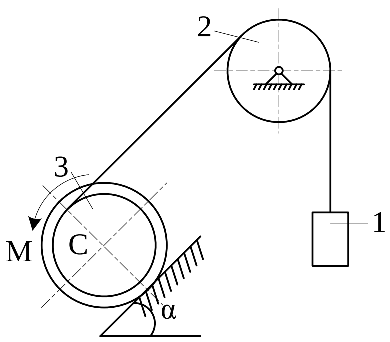


Таблица Д. 7

Номер варианта	m_1	m_2	m_3	R_1	R_2	k	F	M	α	Определить
	кг	кг	кг	см	см	-	Н	Нм	град	м/с^2 или с$^{-2}$
0	100	400	500	20	60	0,3	4000	100	10	a_1
1	400	500	400	40	20	0,5	2000	200	70	E_2
2	200	100	400	30	30	0,6	5000	500	60	a_1
3	300	200	500	50	20	0,4	3000	100	25	E_2
4	500	200	100	30	40	0,4	2000	200	20	a_1
5	200	300	100	40	30	0,5	3000	400	50	E_2
6	300	300	200	60	60	0,4	4000	400	30	a_1
7	100	500	200	20	40	0,4	1000	500	35	E_2
8	400	400	300	60	50	0,7	1000	300	45	a_1
9	500	100	300	50	50	0,3	5000	300	40	E_2

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Корнилов, А. Я. Теоретическая механика: учебник / А. Я. Корнилов, А. В. Воробьева, С. К. Иванов, А. В. Лановая. – Москва: Юриспруденция, 2024. – 248 с. – ISBN 978-5-9516-0952-6. – URL: https://www.iprbookshop.ru/147352.html (дата обращения: 13.01.2025). – Режим доступа: для авторизированных пользователей. – Текст: электронный.

2. Тарг, С. М. Краткий курс теоретической механики: учебник / С. М. Тарг. – М: URSS, 2018. – 415 с. – Текст: непосредственный.

3. Никитин, Н. Н. Курс теоретической механики: учебник / Н. Н. Никитин. – М: Высшая школа, 1990. – 606 с. – Текст: непосредственный.

4. Бутенин, Н. В. Курс теоретической механики: учебное пособие / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. – СПб: Лань, 2009. – 736 с. – Текст: непосредственный.

5. Яблонский, А. А. Курс теоретической механики: учебное пособие / А. А. Яблонский, В. М. Никифорова. – СПб: Лань, 1998. – 763 с. – Текст: непосредственный.

6. Бать, М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах: учебное пособие / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. – СПб: Лань, 2010. – 443 с. – Текст: непосредственный.

7. Мещерский, И. В. Задачи по теоретической механике: учебное пособие / И. В. Мещерский. – СПб: Лань, 2012. – 448 с. – Текст: непосредственный.

Учебное издание

Головко Виктор Евгеньевич
Кауров Павел Викторович
Клюшкин Иван Владимирович

Теоретическая механика
Практические занятия

Учебно-методическое пособие

Редактор и корректор Д. А. Романова
Техн. редактор М. Д. Баранова

Учебное электронное издание сетевого распространения

Системные требования:
электронное устройство с программным обеспечением
для воспроизведения файлов формата PDF

Режим доступа: http://publish.sutd.ru/tp_get_file.php?id=202016, по паролю.
- Загл. с экрана.

Дата подписания к использованию 10.11.2025 г. Рег. № 5204/25

Высшая школа технологии и энергетики СПбГУПТД
198095, СПб., ул. Ивана Черных, 4.