

**П. В. Кауров  
О. В. Томилова**

**СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ  
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ  
Расчетно-графическая работа**

**Учебно-методическое пособие**

**Санкт-Петербург  
2024**

**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации**  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
**«Санкт-Петербургский государственный университет  
промышленных технологий и дизайна»  
Высшая школа технологии и энергетики**

**П. В. Кауров  
О. В. Томилова**

**СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ**  
**ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ**  
**Расчетно-графическая работа**

**Учебно-методическое пособие**

Утверждено Редакционно-издательским советом ВШТЭ СПбГУПТД

Санкт-Петербург  
2024

**УДК 539.3 (075)**  
**ББК 22.251я7**  
**К 301**

*Рецензенты:*

кандидат химических наук, доцент, заведующий кафедрой материаловедения  
и технологии машиностроения Высшей школы технологии и энергетики  
Санкт-Петербургского государственного университета промышленных технологий и дизайна  
*А. Н. Евдокимов;*

кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой автоматизации, метрологии  
и управления в технических системах ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный  
лесотехнический университет имени С. М. Кирова»  
*А. В. Тенноев*

**Кауров, П. В.**

**К 301** Сопротивление материалов. Геометрические характеристики. Расчетно-  
графическая работа: учебно-методическое пособие / П. В. Кауров,  
О. В. Томилова. — СПб.: ВШТЭ СПбГУПТД, 2024. — 50 с.

Учебно-методическое пособие соответствует программам и учебным планам дисциплины «Сопротивление материалов» для студентов, обучающихся по направлению подготовки 15.03.02 «Технологические машины и оборудование». Целью настоящего учебно-методического пособия является развитие навыков самостоятельного определения геометрических характеристик плоских фигур. Учебно-методическое пособие содержит общие требования к выполнению расчетно-графической работы, краткие сведения по теории, варианты заданий и примеры расчета.

Учебно-методическое пособие предназначено для бакалавров очной формы обучения.

УДК 539.3 (075)  
ББК 22.251я7

© ВШТЭ СПбГУПТД, 2024  
© Кауров П. В., Томилова О. В., 2024

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	4
1. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ПО ТЕОРИИ.....	6
1.1. Статические моменты площади и центр тяжести сечения .....	8
1.2. Осевые, полярный и центробежный моменты инерции сечения.....	11
1.3. Зависимости между моментами инерции сечения относительно параллельных осей .....	15
1.4. Моменты сопротивления и радиусы инерции сечения .....	16
1.5. Изменение моментов инерции при повороте осей координат .....	18
1.6. Главные оси и главные моменты инерции .....	20
1.7. Геометрические характеристики простейших фигур.....	23
1.8. Стандартные прокатные профили .....	26
2. ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ .....	32
3. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА .....	35
3.1. Несимметричное сечение .....	35
3.2. Симметричное сечение .....	42
4. ОБРАЗЕЦ ОФОРМЛЕНИЯ ТИТУЛЬНОГО ЛИСТА.....	48
5. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ .....	49
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	50

## ВВЕДЕНИЕ

Бакалавры очной формы обучения, изучающие дисциплину «Сопротивление материалов», выполняют расчетно-графическую работу «Определение геометрических характеристик плоских фигур». Целью работы является развитие навыков самостоятельного определения геометрических характеристик плоских фигур. Работа выполняется согласно шифру задания в виде трехзначного числа, получаемого студентом от преподавателя, ведущего практические занятия в группе.

Первая цифра шифра указывает схему сечения из табл. 4 или табл. 5 в зависимости от типа сечения (несимметричное сечение – табл. 4, симметричное сечение – табл. 5). Заданная схема состоит из комбинации следующих элементов сечения: двутавра, швеллера, полосы, одного или двух уголков.

Вторая и третья цифры шифра указывают на номера или размеры элементов в заданном сечении, принимаемых по табл. 6. Например, при шифре 074 и I варианте задания необходимо взять нулевой вариант несимметричного сечения из табл. 4. Заданное сечение в этом случае состоит из двутавра, швеллера и уголка. Тогда по табл. 6 выбирается, согласно второй цифре шифра, седьмая строка для номера двутавра и, согласно третьей цифре шифра, четвертая строка – для номеров швеллера и уголка.

В исходных данных к работе следует показать схему сечения и каждый элемент этого сечения с указанием необходимых размеров и центральных осей. Выбранную нумерацию элементов сечения следует сохранять в течение всей работы. Изображение стандартных профилей (уголков, швеллеров, двутавров) допускается выполнять упрощенно без закруглений в углах и наклона внутренних поверхностей полок двутавров и швеллеров. Основные размеры и геометрические характеристики для каждого стандартного элемента заданного сечения приведены в табл. 1 – 3 настоящего пособия.

Для заданного в работе сечения требуется:

1. Выписать исходные данные.
2. Определить положение центра тяжести сечения.
3. Рассчитать моменты инерции сечения относительно центральных осей.
4. Найти положение главных осей и значение главных моментов инерции (для несимметричного сечения).

5. Вычислить моменты сопротивления и радиусы инерции сечения относительно главных центральных осей.

6. Привести чертеж заданного сечения на последнем листе работы (в одном из масштабов 2:1; 1:1; 1:2; 1:2,5; 1:4 в соответствии с ГОСТ 2.302-68) с указанием необходимых размеров и соответствующих осей. Для чертежа на последнем листе работы допускается использование формата А3 вертикального или горизонтального расположения.

Работа выполняется на одной стороне стандартного листа формата А4 (210 × 297 мм) вертикального расположения и брошюруется по левому полю бумаги. Текст и выполняемые расчеты пишутся чернилами, рисунки

выполняются карандашом с обязательным соблюдением масштаба, который выбирается самостоятельно из соображений наилучшей выразительности чертежа.

Расчет следует сопровождать заголовками с указанием их нумерации и краткими пояснениями. В аналитических выкладках сначала записываются формулы, а затем подставляются численные значения символов. В итоговых результатах должна быть указана размерность. В окончательных результатах следует сохранять только оправданное количество значащих цифр.

Образец оформления титульного листа представлен в разделе 4 данного учебного пособия.

После сдачи работы на проверку проводится ее защита, для подготовки к которой студенту целесообразно найти ответы на контрольные вопросы, приведенные в разделе 5.

## 1. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ПО ТЕОРИИ

При изучении вопросов прочности, жесткости и устойчивости стержней возникает необходимость оперировать следующими геометрическими характеристиками поперечных сечений, такими как:

- статические моменты площади;
- моменты инерции сечений;
- моменты сопротивления;
- радиусы инерции.

Эти характеристики в силу своего узкого прикладного значения в общем курсе геометрии не изучаются, так как имеют применение в основном в пределах задач сопротивления стержней различным видам деформации.

Площадь является простейшей геометрической характеристикой и имеет размерность  $m^2$ . Если представить себе, что поперечное сечение состоит из бесчисленного множества элементарных площадок  $dA$  (рис. 1), то площадь всего сечения:

$$A = \int dA. \quad (1)$$

Отметим два важных свойства площади: она всегда положительна и не зависит от выбора системы координат.

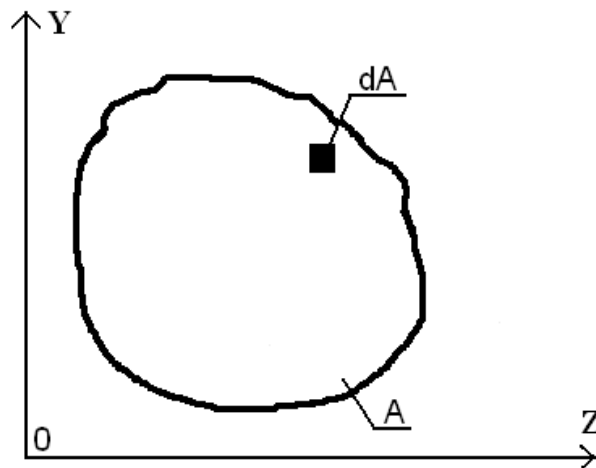


Рисунок 1

Рассмотрим, например, два случая изгиба силой  $P$  консольной балки прямоугольного поперечного сечения (рис. 2).

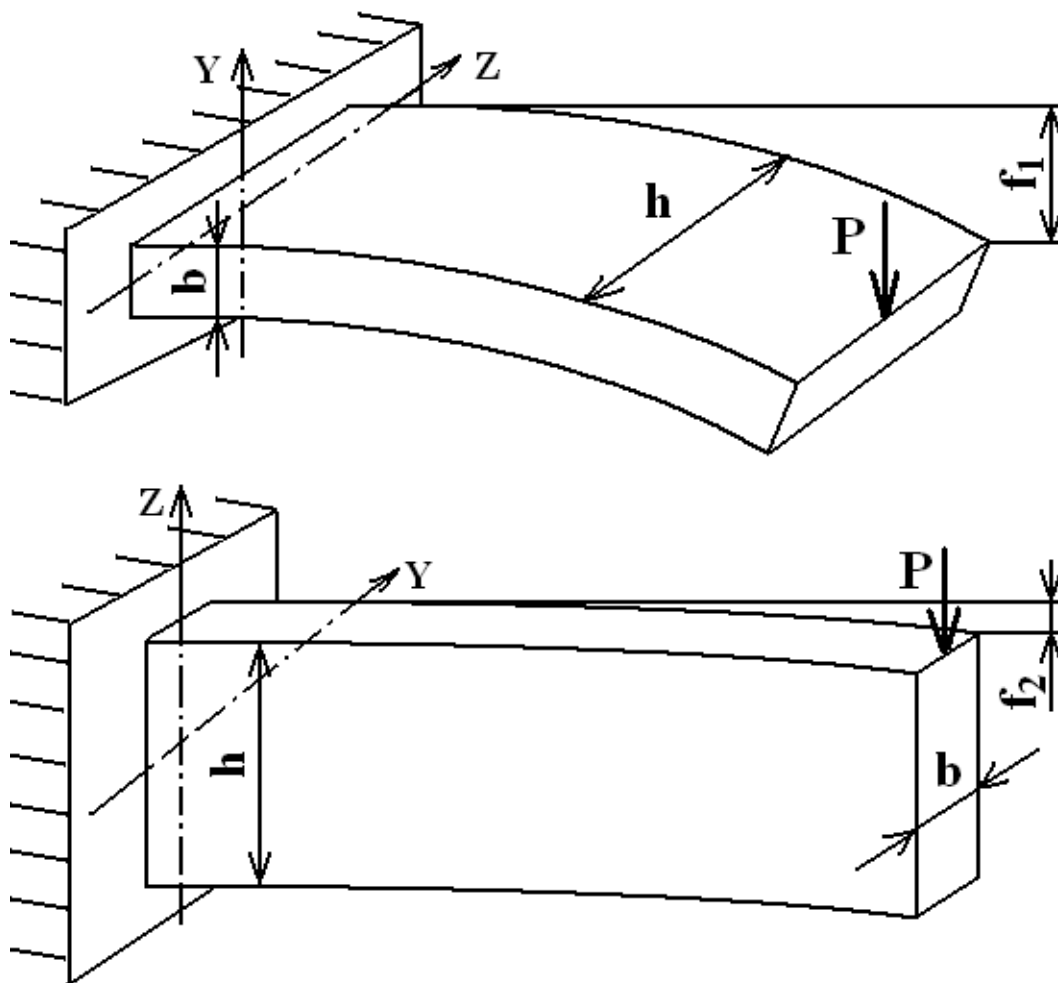


Рисунок 2

Очевидно, что величина прогиба в первом случае будет больше, чем во втором ( $f_1 > f_2$ ). Так как площадь поперечного сечения не изменилась, то она не влияет на прогиб. Малый прогиб во втором случае обусловлен тем, что поперечные сечения балки при изгибе поворачиваются вокруг оси  $Y$ , относительно которой момент инерции прямоугольного поперечного сечения  $I_Y$  значительно больше (как будет показано в разделе 1.2,  $I_Y = b \cdot h^3/12$ ), чем относительно оси  $Z$ , так как  $I_Z = h \cdot b^3/12$  (при  $h > b$ ).

Остальные геометрические характеристики зависят не только от формы и размеров сечений, но также и от положения осей и точек, относительно которых они вычисляются.



## 1.1. Статические моменты площади и центр тяжести сечения

*Статические моменты площади* сечения относительно осей **Z** и **Y** (рис. 3) определяются по следующим формулам:

$$S_Z = \int_A y \cdot dA, \quad (2)$$

$$S_Y = \int_A z \cdot dA, \quad (3)$$

где **A** – площадь сечения;

**dA** – элементарная площадка;

**z** и **y** – координаты элементарной площадки в осях **Z** и **Y** (рис. 3).

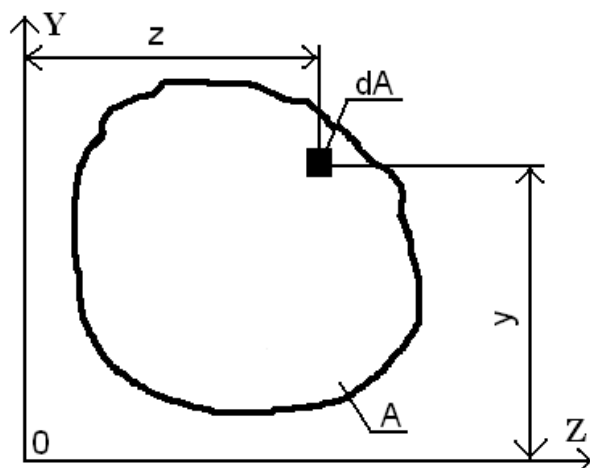


Рисунок 3

Если отождествить каждую элементарную площадку с силой, действующей перпендикулярно плоскости листа, то каждое из выражений (2) и (3) можно рассматривать как сумму моментов сил относительно осей **Z** и **Y**, соответственно. Тогда, следуя известной из теоретической механики теореме Вариньона о моменте равнодействующей, получится:

$$S_Z = \int_A y \cdot dA = A \cdot y_C, \quad (4)$$

$$S_Y = \int_A z \cdot dA = A \cdot z_C. \quad (5)$$

**Координаты центра тяжести  $y_C$  и  $z_C$  сечения площадью  $A$  (рис. 4) определяются из выражений:**

$$y_C = \frac{S_Z}{A}, \quad (6)$$

$$z_C = \frac{S_Y}{A}. \quad (7)$$

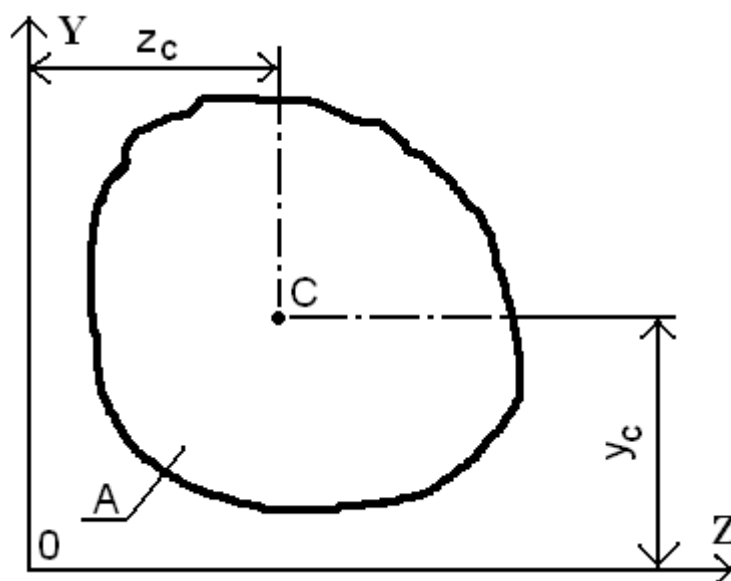


Рисунок 4

Если сечение, например, состоит из простейших фигур с площадями  $A_1$  и  $A_2$  (рис. 5), то статические моменты площади определяются выражениями:

$$S_Z = \sum_{i=1}^n A_i \cdot y_{Ci} = A_1 \cdot y_{C1} + A_2 \cdot y_{C2}, \quad (8)$$

$$S_Y = \sum_{i=1}^n A_i \cdot z_{Ci} = A_1 \cdot z_{C1} + A_2 \cdot z_{C2}, \quad (9)$$

где  $y_{C1}$  и  $z_{C1}$ ,  $y_{C2}$  и  $z_{C2}$  – координаты центров тяжести простейших фигур.

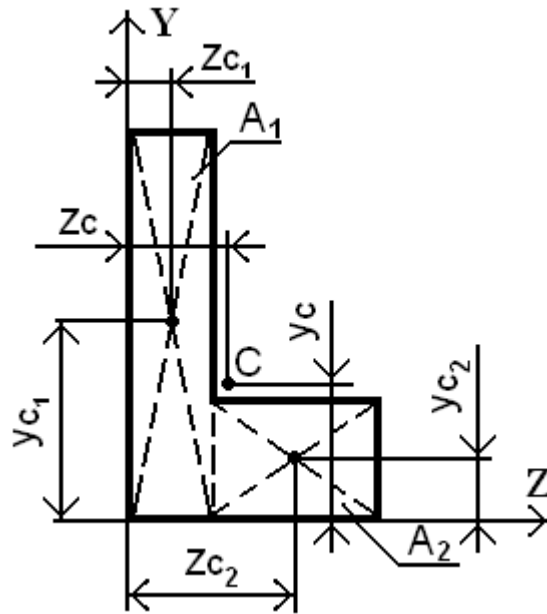


Рисунок 5

Координаты центра тяжести  $y_C$  и  $z_C$  всего сечения, состоящего из простейших фигур (рис. 5), определяются из выражений:

$$z_C = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot z_{Ci}}{\sum_{i=1}^n A_i} = \frac{A_1 \cdot z_{C1} + A_2 \cdot z_{C2}}{A}, \quad (10)$$

$$y_C = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot y_{Ci}}{\sum_{i=1}^n A_i} = \frac{A_1 \cdot y_{C1} + A_2 \cdot y_{C2}}{A}, \quad (11)$$

где  $A = A_1 + A_2$  – площадь всего сечения.

Статические моменты площади сечения относительно **центральных осей** (осей, проходящих через центр тяжести поперечного сечения) равны нулю, так как координаты центра тяжести в этих осях будут также равны нулю.

Статические моменты площади могут быть положительными и отрицательными в зависимости от выбора осей, относительно которых они определяются. Статические моменты площади имеют размерность  $m^3$ .

## 1.2. Осевые, полярный и центробежный моменты инерции сечения

*Осевые моменты инерции* сечения относительно осей **Z** и **Y** определяются по следующим формулам:

$$I_Z = \int_A y^2 \cdot dA, \quad (12)$$

$$I_Y = \int_A z^2 \cdot dA, \quad (13)$$

где **A** – площадь сечения;

**dA** – элементарная площадка;

**z** и **y** – координаты элементарной площадки в осях **Z** и **Y** (рис. 6).

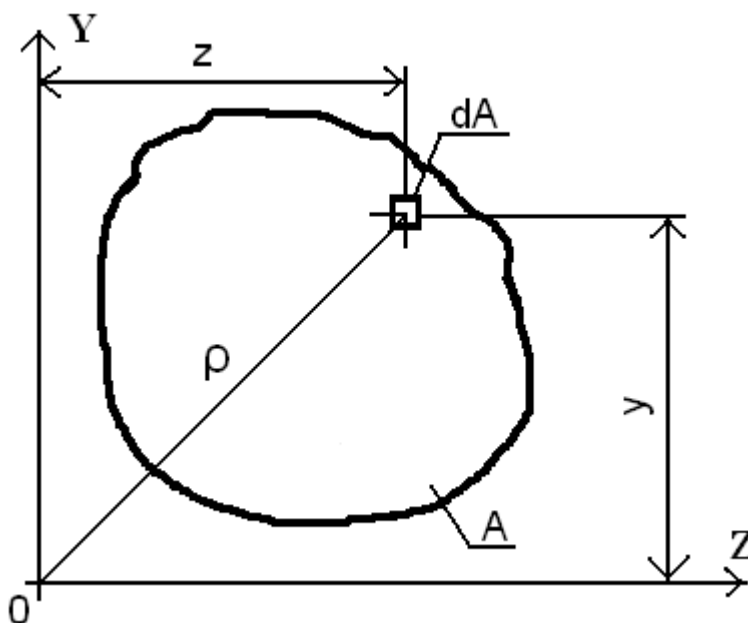


Рисунок 6

В некоторых простых случаях осевые моменты инерции можно вычислить аналитически. Определим, например, осевой момент инерции прямоугольника относительно его центральной горизонтальной оси **Z** (рис. 7).

Выделим на расстоянии **y** от оси **Z** элементарную полоску высотой **dy** и шириной **b**. Площадь элементарной площадки будет равна **dA = b · dy** и

$$I_Z = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 \cdot b \cdot dy = \frac{b \cdot h^3}{12}. \quad (14)$$

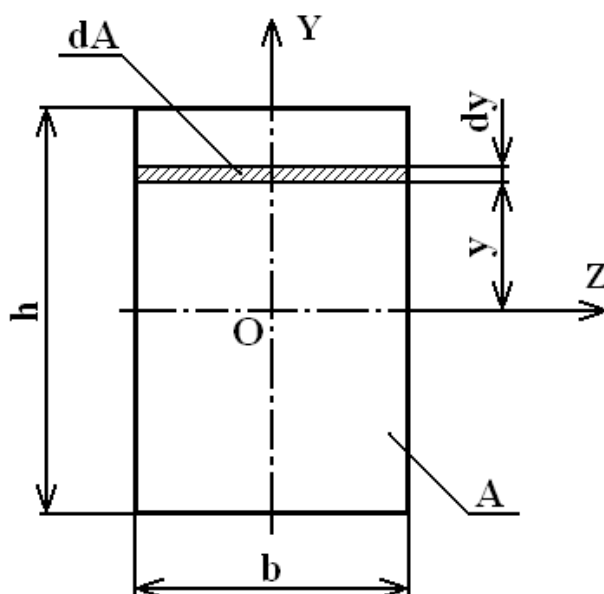


Рисунок 7

Размышляя аналогичным образом, находим, что осевой момент инерции прямоугольника относительно его вертикальной оси  $Y$  равен:

$$I_Y = \frac{h \cdot b^3}{12}. \quad (15)$$

**Полярный момент инерции** сечения относительно данной точки (полюса) определяется по формуле:

$$I_P = \int_A \rho^2 \cdot dA, \quad (16)$$

где  $\rho$  – расстояние от элементарной площадки  $dA$  до полюса (рис. 6).

Определим полярный момент инерции круга относительно его центра

(рис. 8). Выделим на расстоянии  $\rho$  от центра круга элементарное кольцо шириной  $d\rho$ . Тогда  $dA = 2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot d\rho$  и

$$I_P = \int_0^R 2 \cdot \pi \cdot \rho^3 \cdot d\rho = \frac{\pi \cdot R^4}{2} = \frac{\pi \cdot D^4}{32}. \quad (17)$$

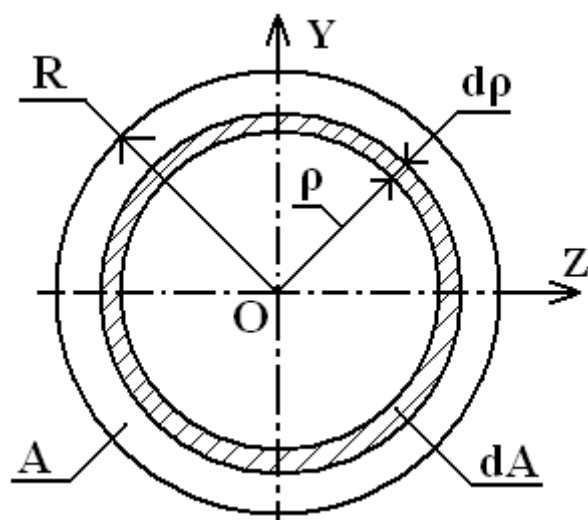


Рисунок 8

В случае, когда полярный момент инерции вычисляется относительно начала системы координат,  $\rho^2 = y^2 + z^2$  и

$$I_P = I_Z + I_Y. \quad (18)$$

Величины полярного и осевых моментов инерции всегда больше нуля.

**Центробежный момент инерции** сечения относительно осей  $Z$  и  $Y$  определяется по формуле:

$$I_{ZY} = \int_A z \cdot y \cdot dA, \quad (19)$$

где  $A$  – площадь сечения;

$dA$  – элементарная площадка;

$z$  и  $y$  – координаты элементарной площадки в осях  $Z$  и  $Y$  (рис. 6).

Моменты инерции имеют размерность  $m^4$ .

Центробежный момент может быть положительным, отрицательным и равным нулю. Центробежный момент инерции всегда равен нулю при его

вычислении относительно двух перпендикулярных осей, если хотя бы одна из них является осью симметрии. Например, для симметричной фигуры в виде равнобедренного треугольника всегда можно выделить пару элементарных площадок  $dA$ , каждая из которых будет иметь одинаковую по знаку координату  $y_1 = y_2 = y$  и равные по величине, но противоположные по знаку координаты  $z_1 = -z$  и  $z_2 = z$  (рис. 9). Тогда центробежный момент инерции сечения относительно центральных осей  $Z$  и  $Y$  будет равен  $0$ .

$$\begin{aligned}
 I_{ZY} &= \int_A z \cdot y \cdot dA = \int_{\frac{A}{2}} z_1 \cdot y_1 \cdot dA + \int_{\frac{A}{2}} z_2 \cdot y_2 \cdot dA = \\
 &= \int_{\frac{A}{2}} (-z) \cdot y \cdot dA + \int_{\frac{A}{2}} z \cdot y \cdot dA = 0.
 \end{aligned}
 \tag{20}$$

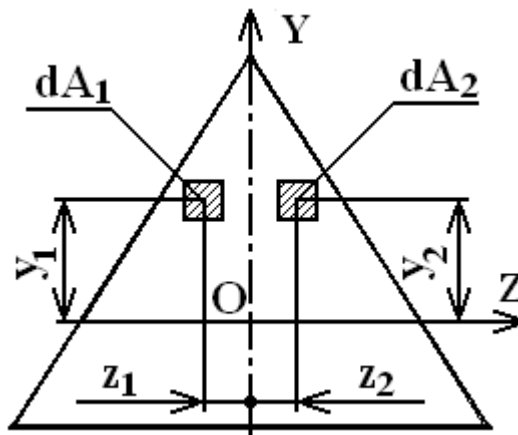


Рисунок 9

В случае, когда сечение не имеет осей симметрии, то можно провести такие две взаимно перпендикулярные оси, относительно которых центробежный момент инерции будет равен нулю. Оси координат, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, называются *главными осями инерции*. Если главные оси проходят через центр тяжести сечения, то они называются *главными центральными осями инерции* сечения.

Моменты инерции *сечения, состоящего из простых фигур*, можно определить как сумму соответствующих моментов инерции его составных фигур относительно той же оси.

### 1.3. Зависимости между моментами инерции сечения относительно параллельных осей

Если известны моменты инерции относительно собственных центральных осей  $Z_1$  и  $Y_1$ , то можно определить *моменты инерции сечения относительно параллельных им осей  $Z$  и  $Y$* , смещенных от центральных осей  $Z_1$  и  $Y_1$  на расстояния  $b$  и  $c$  соответственно (рис. 10).

Определим осевой момент инерции относительно оси  $Z$ . Координаты элементарной площадки  $dA$  в новой системе координат будут равны  $y = y_1 + b$  и  $z = z_1 + c$ , тогда

$$I_Z = \int_A y^2 dA = \int_A (y_1 + b)^2 dA = \int_A y_1^2 dA + 2b \int_A y_1 dA + b^2 \int_A dA. \quad (21)$$

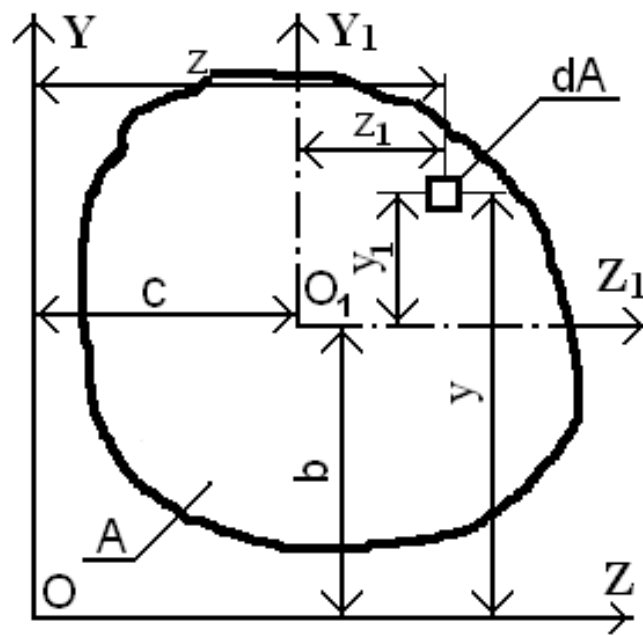


Рисунок 10

В выражении (21) первый интеграл равен осевому моменту инерции относительно центральной оси  $Z_1$ , второй интеграл будет равен статическому моменту площади сечения относительно центральной оси  $Z_1$  и поэтому равному нулю, третий интеграл дает площадь сечения  $A$ . Таким образом,

$$I_Z = I_{Z_1} + A \cdot b^2, \quad (22)$$



$$I_Y = I_{Y1} + A \cdot c^2, \quad (23)$$

$$I_{ZY} = I_{Z1Y1} + A \cdot b \cdot c. \quad (24)$$

Если известны значения моментов инерции относительно центральных осей составных фигур, то **моменты инерции для сложной фигуры** относительно параллельных им осей **Z** и **Y** определяются по формулам:

$$I_Z = \sum_{i=1}^n (I_{Zi} + A_i \cdot b_i^2), \quad (25)$$

$$I_Y = \sum_{i=1}^n (I_{Yi} + A_i \cdot c_i^2), \quad (26)$$

$$I_{ZY} = \sum_{i=1}^n (I_{ZiYi} + A_i \cdot b_i \cdot c_i). \quad (27)$$

#### 1.4. Моменты сопротивления и радиусы инерции сечения

**Осевыми моментами сопротивления** сечения относительно осей **Z** и **Y** называются величины **W<sub>Z</sub>** и **W<sub>Y</sub>**, определяемые соотношениями:

$$W_Z = \frac{I_Z}{|y_{MAX}|}, \quad (28)$$

$$W_Y = \frac{I_Y}{|z_{MAX}|}. \quad (29)$$

где **|y<sub>MAX</sub>|** и **|z<sub>MAX</sub>|** – соответственно наибольшие расстояния от осей **Z** и **Y** до наиболее удаленных точек сечения (рис. 11).

**Полярным моментом сопротивления** называется величина, определяемая выражением:

$$W_P = \frac{I_P}{\rho_{\text{MAX}}}, \quad (30)$$

где  $\rho_{\text{MAX}}$  – наибольшее расстояние от полюса до наиболее удаленной точки сечения.

Моменты сопротивления имеют размерность  $\text{м}^3$ .

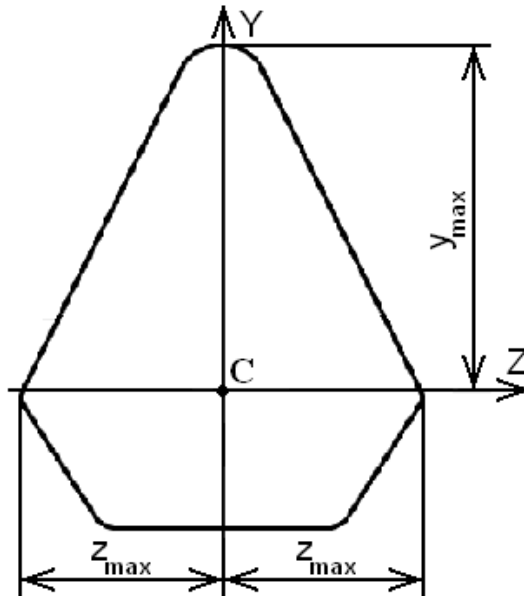


Рисунок 11

**Радиусами инерции** поперечного сечения относительно осей  $Z$  и  $Y$  называются величины, определяемые соответственно из выражений:

$$i_Z = \sqrt{\frac{I_Z}{A}}, \quad (31)$$

$$i_Y = \sqrt{\frac{I_Y}{A}}. \quad (32)$$

Радиусы инерции имеют размерность длины ( $\text{м}$ ).

Моменты сопротивления и радиусы инерции имеют всегда положительные величины.

**Эллипсом инерции** называется эллипс, полуосями которого являются главные радиусы инерции. Эллипс инерции показывает изменение моментов инерции сечения при повороте осей координат.

Радиус инерции относительно любой центральной оси  $V$  равен расстоянию от этой оси до касательной к эллипсу инерции, параллельной оси  $V$  (рис. 12), т. е.:

$$I_V = i_V^2 \cdot A. \quad (33)$$

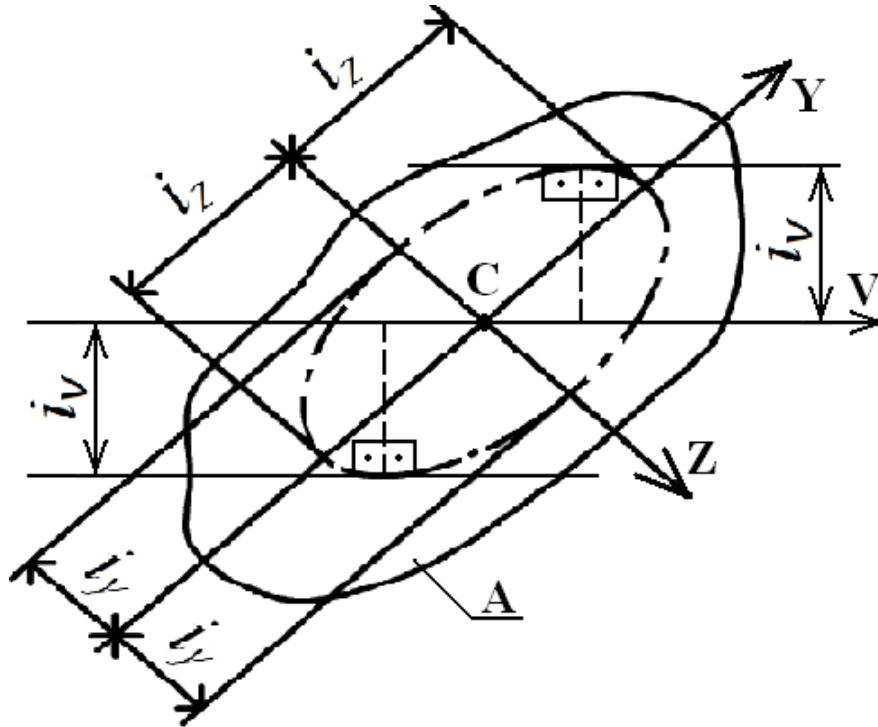


Рисунок 12

### 1.5. Изменение моментов инерции при повороте осей координат

Если известны осевые и центробежный моменты инерции относительно исходных осей  $Z$  и  $Y$ , то можно определить моменты инерции относительно осей  $U$  и  $V$ , повернутых на угол  $\alpha$  (рис. 13).

Зависимости между координатами элементарной площадки  $dA$  в исходных и повернутых осях будут определяться выражениями:

$$u = y \cdot \sin(\alpha) + z \cdot \cos(\alpha), \quad (34)$$

$$v = y \cdot \cos(\alpha) - z \cdot \sin(\alpha). \quad (35)$$

Моменты инерции относительно повернутых осей  $U$  и  $V$ :

$$I_U = \int_A v^2 \cdot dA, \quad (36)$$

$$I_V = \int_A u^2 \cdot dA, \quad (37)$$

$$I_{UV} = \int_A u \cdot v \cdot dA. \quad (38)$$

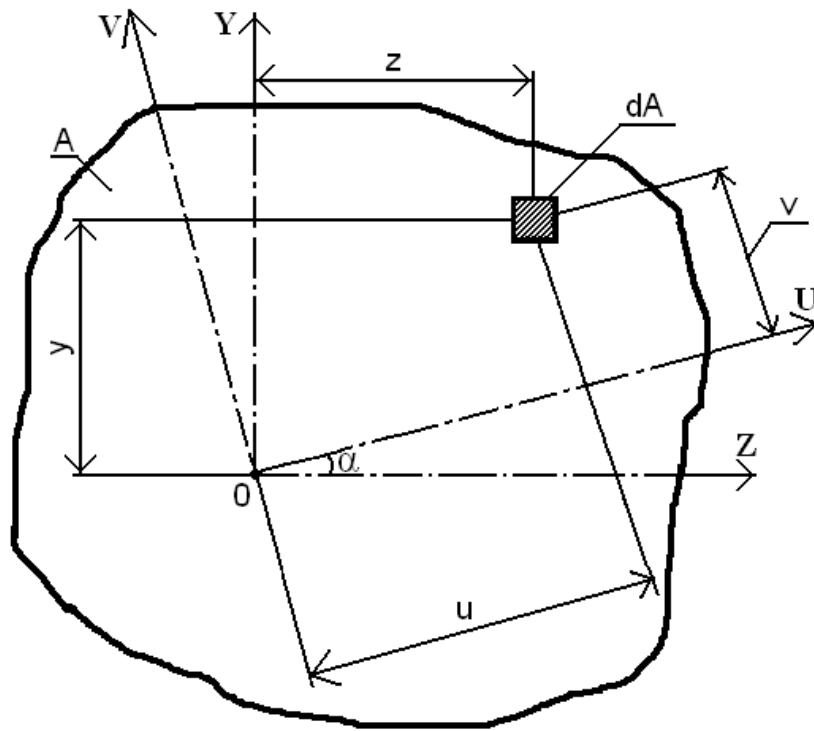


Рисунок 13

Выразим моменты инерции относительно повернутых осей **U** и **V** через координаты элементарной площадки **dA** в исходных осях **Z** и **Y**:

$$I_U = \int_A [y \cdot \cos(\alpha) - z \cdot \sin(\alpha)]^2 \cdot dA, \quad (39)$$

$$I_V = \int_A [y \cdot \sin(\alpha) + z \cdot \cos(\alpha)]^2 \cdot dA, \quad (40)$$

$$I_{UV} = \int_A [y \cdot \cos(\alpha) - z \cdot \sin(\alpha)] \cdot [y \cdot \sin(\alpha) + z \cdot \cos(\alpha)] dA. \quad (41)$$

После вычисления интегралов выражения можно привести к следующему виду:

$$I_U = I_Z \cdot \cos^2(\alpha) - I_{ZY} \cdot \sin(2\alpha) + I_Y \cdot \sin^2(2\alpha), \quad (42)$$

$$I_V = I_Z \cdot \sin^2(\alpha) + I_{ZY} \cdot \sin(2\alpha) + I_Y \cdot \cos^2(2\alpha), \quad (43)$$

$$I_{UV} = I_{ZY} \cdot \cos(2\alpha) + \frac{I_Z - I_Y}{2} \cdot \sin(2\alpha). \quad (44)$$

Складывая выражения (42) и (43), после преобразований получим:

$$I_U + I_V = I_Z + I_Y = \int_A (y^2 + z^2) \cdot dA = I_P. \quad (45)$$

Таким образом, сумма осевых моментов инерции не зависит от угла  $\alpha$  и при повороте осей остается постоянной и равной полярному моменту инерции сечения, взятого относительно начала координат.

## 1.6. Главные оси и главные моменты инерции

С изменением угла поворота осей  $\alpha$  каждый из осевых моментов инерции меняется, а их сумма остается неизменной. Значит, есть такой угол  $\alpha = \alpha_0$ , при котором у моментов инерции будут экстремальные значения. Для нахождения значения  $\alpha_0$  возьмем первую производную от  $I_U$  и приравняем ее к нулю:

$$\begin{aligned} \frac{dI_U}{d\alpha} = -2 \cdot I_Z \cdot \cos(\alpha_0) \cdot \sin(\alpha_0) - 2 \cdot I_{ZY} \cdot \cos(\alpha_0) - \\ - 2 \cdot I_Y \cdot \sin(\alpha_0) \cdot \cos(\alpha_0) = 0, \end{aligned} \quad (46)$$

откуда после преобразований получаем:

$$\operatorname{tg}(2\alpha_0) = -\frac{2 \cdot I_{ZY}}{I_Z - I_Y}. \quad (47)$$

Положительное значение угла  $\alpha$  откладывается от оси  $Z$  против часовой стрелки (рис. 14), а отрицательное – наоборот, по ходу стрелки часов.

С целью проверки, являются ли повернутые на угол  $\alpha_0$  оси главными, приравняем центробежный момент инерции относительно их к нулю:

$$I_{UV} = I_{ZY} \cdot \cos(2\alpha) + \frac{I_Z - I_Y}{2} \cdot \sin(2\alpha) = 0, \quad (48)$$

откуда после преобразований имеем такое же выражение, как и формула (47).

Оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, а осевые моменты инерции принимают экстремальные значения, называются *главными осями инерции*. Если эти оси являются также и центральными, то они называются *главными центральными осями*. Осевые моменты инерции относительно главных осей называются *главными моментами инерции*.

*Главные моменты инерции* сечения, вычисленные относительно главных центральных осей, занимающих положение, определяемое формулой (47), имеют следующие экстремальные значения:

$$I_{\text{MIN}} = \frac{I_Z + I_Y}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(I_Z - I_Y)^2 + 4 \cdot I_{ZY}^2}, \quad (49)$$

$$I_{\text{MAX}} = \frac{I_Z + I_Y}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(I_Z - I_Y)^2 + 4 \cdot I_{ZY}^2}. \quad (50)$$

Для того чтобы определить, относительно какой главной оси получается максимальный осевой момент инерции сечения, а относительно какой минимальный, необходимо определить знак второй производной:

$$\frac{d^2 I_U}{d\alpha^2} = -2 \cdot (I_Z - I_Y) \cdot \sin(2\alpha) + 4 \cdot I_{ZY} \cdot \cos(2\alpha). \quad (51)$$

Если знак второй производной при  $\alpha = \alpha_0$  отрицателен, то относительно главной оси, наклоненной к оси  $Z$  на угол  $\alpha_0$ , осевой момент инерции максимален. Если знак второй производной при  $\alpha = \alpha_0$  положителен, то относительно главной оси, наклоненной к оси  $Z$  на угол  $\alpha_0$ , осевой момент

инерции минимален.

В качестве проверки проведенных вычислений можно использовать следующее правило: если  $I_{ZY} < 0$ , то главная ось, относительно которой момент инерции максимален, проходит через первый и третий квадранты (**I и III**). Если  $I_{ZY} > 0$ , то главная ось, относительно которой момент инерции максимален, проходит через второй и четвертый квадранты (**II и IV**) (рис. 14).

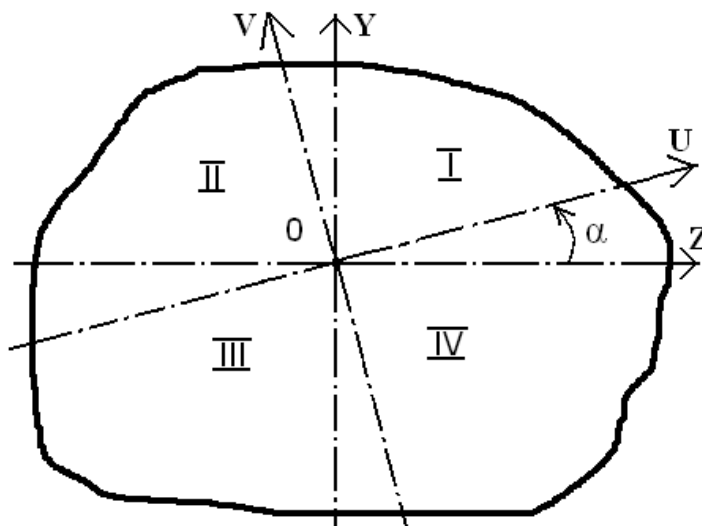


Рисунок 14

В случае  $I_Z \neq I_Y$  из выражения (51) после упрощения получается следующая формула:

$$\frac{d^2 I_U}{d\alpha^2} = -\frac{2 \cdot (I_Z - I_Y)}{\cos(2\alpha)}. \quad (52)$$

## 1.7. Геометрические характеристики простейших фигур

### 1.7.1. Геометрические характеристики прямоугольника

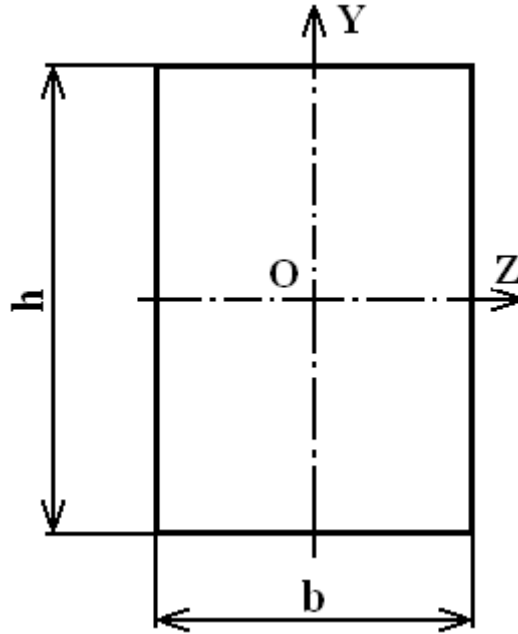


Рисунок 15

Осевые моменты инерции относительно главных центральных осей  $Z$  и  $Y$ :

$$I_Z = \frac{b \cdot h^3}{12}, \quad (53)$$

$$I_Y = \frac{h \cdot b^3}{12}, \quad (54)$$

Моменты сопротивления (при  $|y_{\text{MAX}}| = h/2$  и  $|z_{\text{MAX}}| = b/2$ ):

$$W_Z = \frac{I_Z}{|y_{\text{MAX}}|} = \frac{b \cdot h^3 \cdot 2}{12 \cdot h} = \frac{b \cdot h^2}{6}, \quad (55)$$



$$W_Y = \frac{I_Y}{|z_{MAX}|} = \frac{h \cdot b^3 \cdot 2}{12 \cdot b} = \frac{h \cdot b^2}{6}. \quad (56)$$

### 1.7.2. Геометрические характеристики круга

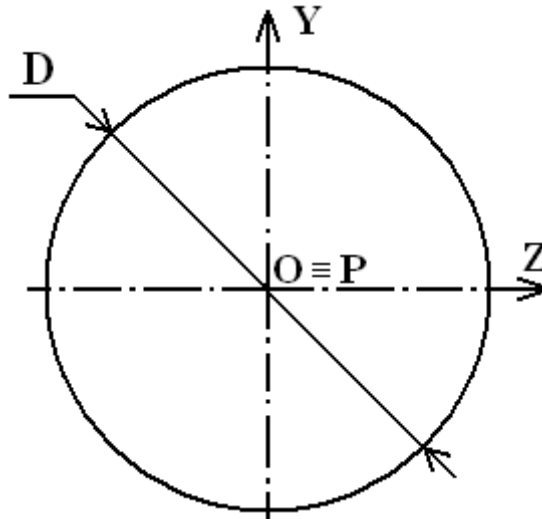


Рисунок 16

Полярный момент инерции относительно центра **O** (полюса **P**):

$$I_P = \frac{\pi \cdot D^4}{32}. \quad (57)$$

Осевые моменты инерции относительно главных центральных осей **Z** и **Y**:

$$I_Z = I_Y = \frac{I_P}{2} = \frac{\pi \cdot D^4}{64}. \quad (58)$$

Моменты сопротивления (в силу симметрии  $|y_{MAX}| = |z_{MAX}| = D/2$ ):

$$W_Z = W_Y = \frac{I_Y}{|z_{MAX}|} = \frac{\pi \cdot D^4 \cdot 2}{64 \cdot D} = \frac{\pi \cdot D^3}{32}. \quad (59)$$

Полярный момент сопротивления ( $\rho_{MAX} = D/2$ ):

$$W_P = \frac{I_P}{\rho_{\text{MAX}}} = \frac{\pi \cdot D^4 \cdot 2}{32 \cdot D} = \frac{\pi \cdot D^3}{16}. \quad (60)$$

Радиусы инерции относительно осей **Z** и **Y**:

$$i_Z = i_Y = \sqrt{\frac{I_Y}{A}} = \sqrt{\frac{\pi \cdot D^4 \cdot 4}{64 \cdot \pi \cdot D^2}} = \frac{D}{4}. \quad (61)$$

### 1.7.3. Геометрические характеристики кольца

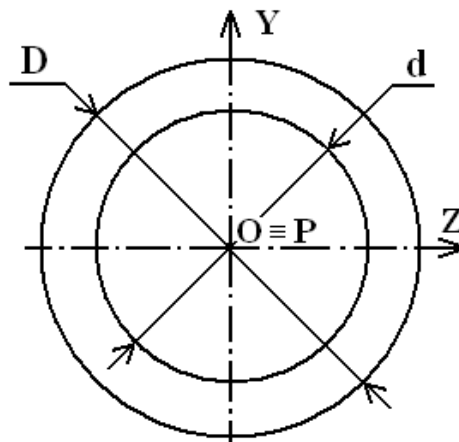


Рисунок 17

Осевые моменты инерции относительно главных центральных осей **Z** и **Y** (при  $\beta = d / D$ ):

$$I_Z = I_Y = \frac{\pi \cdot D^4}{64} \cdot (1 - \beta^4). \quad (62)$$

Полярный момент инерции относительно центра **O** (полюса **P**):

$$I_P = I_Z + I_Y = \frac{\pi \cdot D^4}{32} \cdot (1 - \beta^4). \quad (63)$$

Моменты сопротивления (в силу симметрии  $|y_{\text{MAX}}| = |z_{\text{MAX}}| = D/2$ ):

$$W_Z = W_Y = \frac{I_Y}{|z_{\text{MAX}}|} = \frac{\pi \cdot D^3}{32} \cdot (1 - \beta^4). \quad (64)$$

Полярный момент сопротивления ( $\rho_{\text{MAX}} = D/2$ ):

$$W_P = \frac{I_P}{\rho_{\text{MAX}}} = \frac{\pi \cdot D^3}{16} \cdot (1 - \beta^4). \quad (65)$$

Радиусы инерции относительно осей **Z** и **Y**:

$$i_Z = \sqrt{\frac{I_Z}{A}} = i_Y = \sqrt{\frac{I_Y}{A}} = \frac{D}{4} \cdot \sqrt{1 + \beta^2}. \quad (66)$$

### 1.8. Стандартные прокатные профили

Промышленностью выпускаются стандартные прокатные профили (двутавры, швеллеры, уголки (рис. 18), которые могут быть использованы как готовые элементы конструкций (балки, стойки, элементы ферм и др.)).

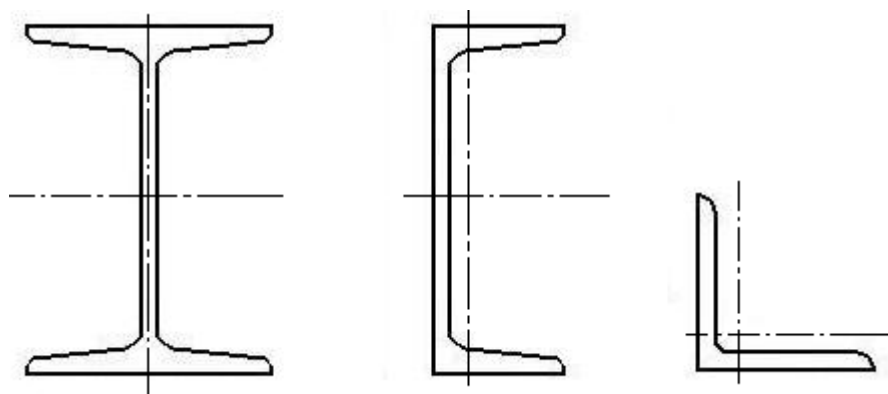


Рисунок 18

Размеры прокатных профилей стандартизованы и даны в таблицах сортаментов прокатной стали, которые приводятся в приложениях почти всех учебников и сборников задач по сопротивлению материалов. В этих таблицах приводятся все размеры сечений и основные геометрические характеристики прокатных профилей в соответствии с их номером.

В таблицах 1, 2, 3 приведены выписки из сортаментов прокатной стали, содержащие необходимые для выполнения расчетной работы основные размеры и геометрические характеристики профилей заданного по условию сечения.

Для определения геометрических характеристик полосы следует использовать расчетные формулы для прямоугольника. Центробежные

моменты инерции двутавра, швеллера и полосы относительно их главных центральных осей равны нулю. Центробежный момент инерции равнобокого уголка относительно его центральных осей  $\mathbf{z}$  и  $\mathbf{y}$  (рис. 19) определяется по формуле:

$$I_{zy} = \frac{I_{\text{MAX}} - I_{\text{MIN}}}{2} \cdot \sin(2\alpha), \quad (67)$$

где  $I_{\text{MAX}} = I_{z_0}$  – максимальный момент инерции уголка;

$I_{\text{MIN}} = I_{y_0}$  – минимальный момент инерции уголка; эти величины известны из таблиц сортамента согласно номеру уголка.

Центробежный момент инерции равнобокого уголка относительно его центральных осей  $\mathbf{z}$  и  $\mathbf{y}$  (рис. 19) будет иметь положительную или отрицательную величину в зависимости от значения угла  $\alpha$ , определяемого расположением уголка относительно координатных осей  $\mathbf{z}$  и  $\mathbf{y}$ .

Если для совмещения оси  $\mathbf{z}_0$  с осью  $\mathbf{z}$  надо повернуть ось  $\mathbf{z}_0$  по часовой стрелке, то  $\alpha = -45^\circ$  и  $I_{zy} < 0$ , а если для совмещения оси  $\mathbf{z}_0$  с осью  $\mathbf{z}$  надо повернуть ось  $\mathbf{z}_0$  против часовой стрелки, то  $\alpha = 45^\circ$  и  $I_{zy} > 0$ .

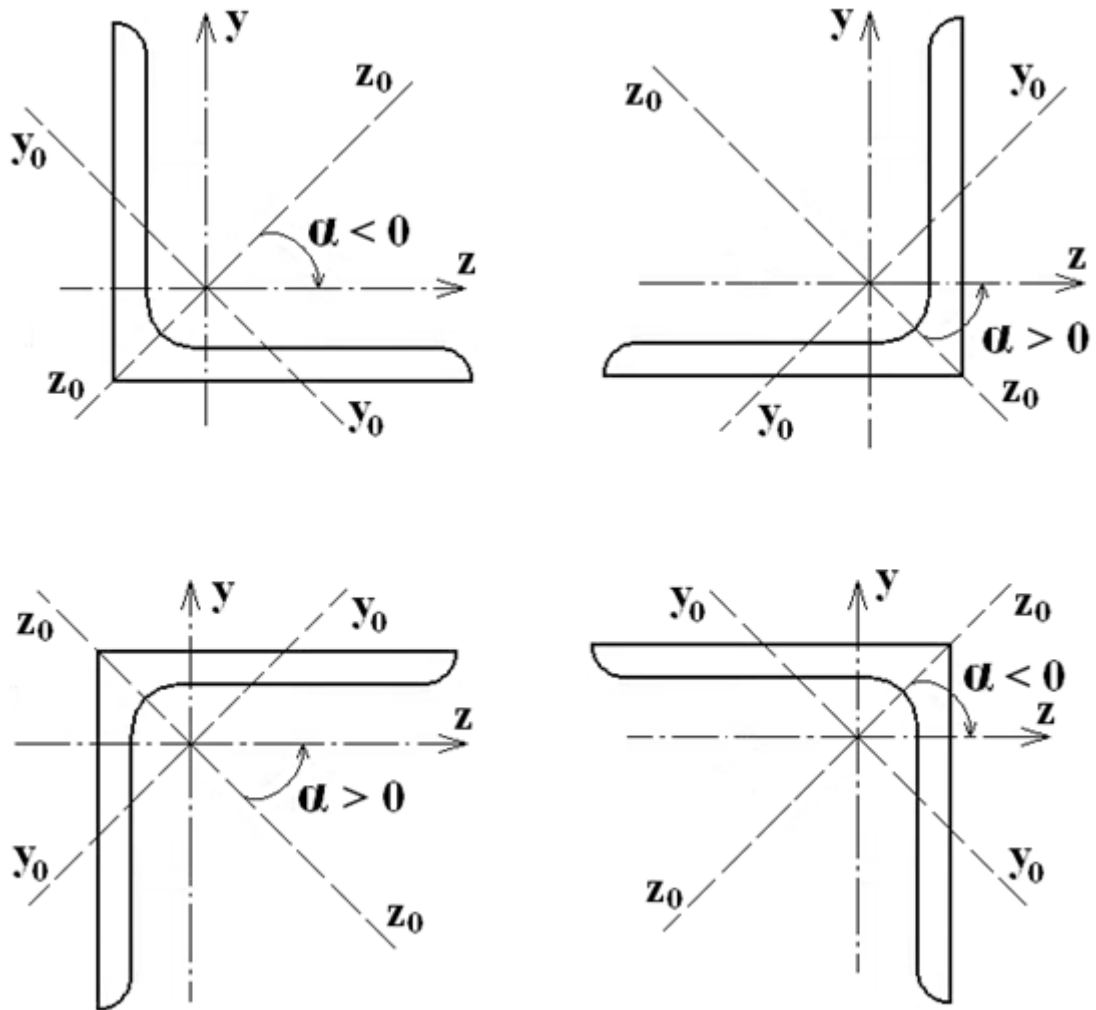


Рисунок 19

Также знак центробежного момента инерции наиболее просто можно определить следующим образом: если при выбранном направлении осей координат (рис. 20) заштрихованная область поперечного сечения уголка попадает в положительный или отрицательный квадрат, то  $I_{ZY} < 0$ , в противном случае  $I_{ZY} > 0$ .

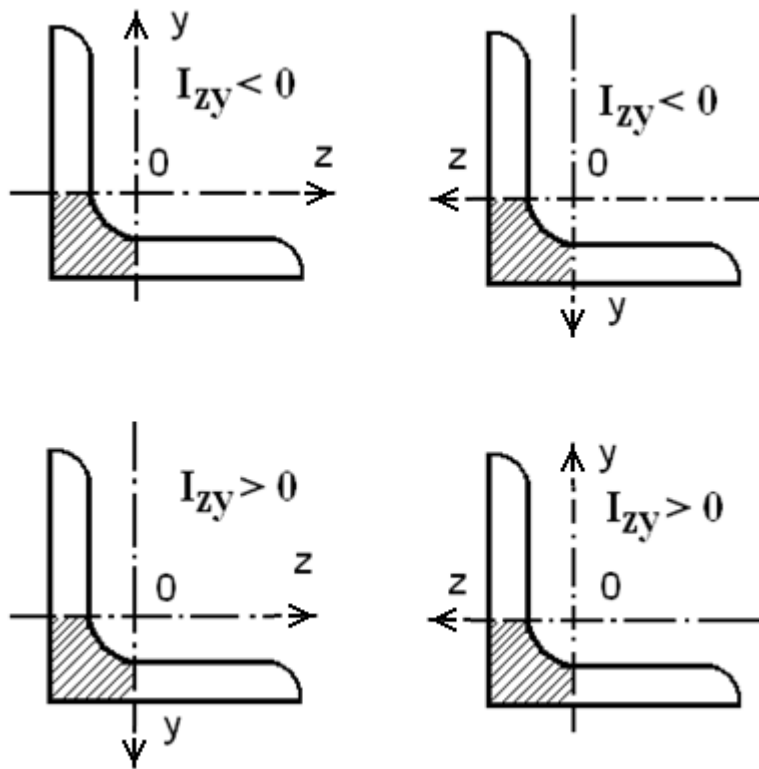


Рисунок 20

В табл. 1 и 2 значения осевых моментов инерции для двутавра и швеллера приведены относительно осей  $z$  и  $y$ , показанных на рис. 21 и 22, соответственно. Если двутавр или швеллер повернуть относительно этих осей на  $90^\circ$ , то значения осевых моментов инерции  $I_z$  и  $I_y$  поменяются местами.

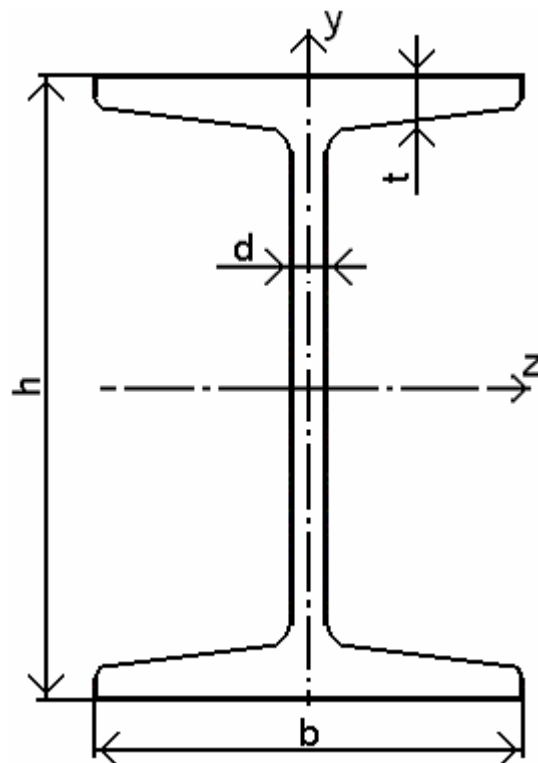


Рисунок 21

Таблица 1 – Двутавры (в соответствии с ГОСТ 8239-93)

№ двутавра	h, см	b, см	t, см	d, см	A, см <sup>2</sup>	I <sub>z</sub> , см <sup>4</sup>	I <sub>y</sub> , см <sup>4</sup>
16	16	8,1	0,78	0,5	20,2	873	58,6
18	18	9	0,81	0,51	23,4	1290	82,6
20	20	10	0,84	0,52	26,8	1840	115
22	22	11	0,87	0,54	30,6	2550	157
24	24	11,5	0,95	0,56	34,8	3460	198
27	27	12,5	0,98	0,6	40,2	5010	260
30	30	13,5	1,02	0,65	46,5	7080	337
33	33	14	1,12	0,7	53,8	9840	419
36	36	14,5	1,23	0,75	61,9	13380	516
40	40	15,5	1,3	0,83	72,6	19062	667

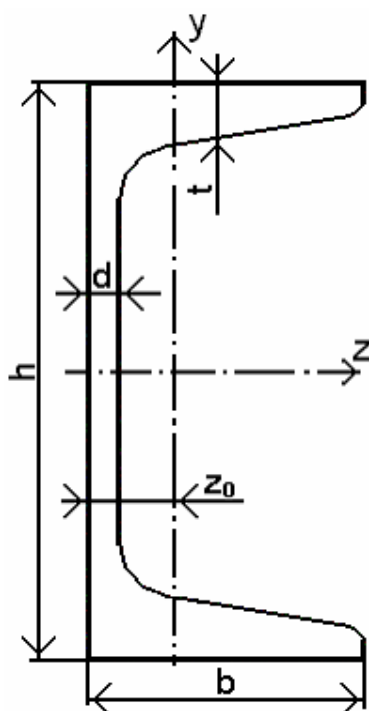


Рисунок 22

Таблица 2 – Швеллеры (в соответствии с ГОСТ 8240-93)

№ швеллера	h, см	b, см	d, см	t, см	A, см <sup>2</sup>	I <sub>z</sub> , см <sup>4</sup>	I <sub>y</sub> , см <sup>4</sup>	z <sub>0</sub> , см
16	16	6,4	0,5	0,84	18,1	747	63,3	1,8
18	18	7	0,51	0,87	20,7	1090	86	1,94
20	20	7,6	0,52	0,9	23,4	1520	113	2,07
24	24	9	0,56	1	30,6	2900	208	2,42
27	27	9,5	0,6	1,05	35,2	4160	262	2,47
30	30	10	0,65	1,1	40,5	5810	327	2,52
33	33	10,5	0,7	1,17	46,5	7980	410	2,59
36	36	11	0,75	1,26	53,4	10820	513	2,68

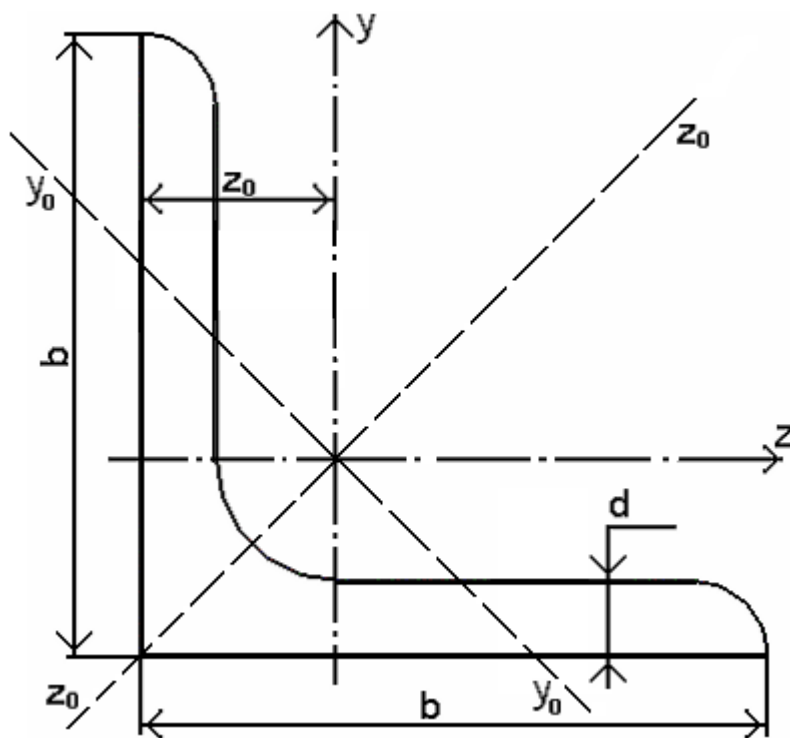


Рисунок 23

Таблица 3 – Уголки равнобокие (в соответствии с ГОСТ 8509-93)

№ уголка	<b>b</b> , см	<b>d</b> , см	<b>A</b> , см <sup>2</sup>	<b>I<sub>z</sub> = I<sub>y</sub></b> , см <sup>4</sup>	<b>I<sub>MAX</sub></b> , см <sup>4</sup>	<b>I<sub>MIN</sub></b> , см <sup>4</sup>	<b>z<sub>0</sub></b> , см
63 × 6	6,3	0,6	7,28	27,1	42,9	11,2	1,78
75 × 6	7,5	0,6	8,78	46,6	73,9	19,3	2,06
75 × 8	7,5	0,8	11,5	59,8	94,6	24,8	2,15
80 × 6	8	0,6	9,38	57	90,4	23,5	2,19
90 × 6	9	0,6	10,6	82,1	130	34	2,43
90 × 8	9	0,8	13,9	106	168	43,8	2,51
100 × 8	10	0,8	15,6	147	233	60,9	2,75
100 × 10	10	1	19,2	179	284	74,1	2,83
110 × 8	11	0,8	17,2	198	315	81,8	3
125 × 10	12,5	1	24,3	360	571	149	3,45



## 2. ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

Таблица 4 – Несимметричное сечение

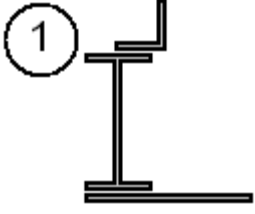
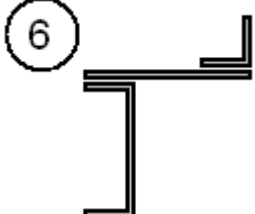
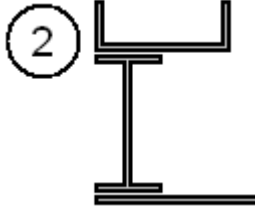
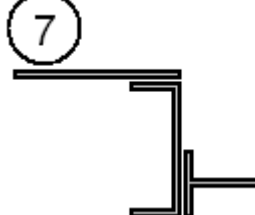
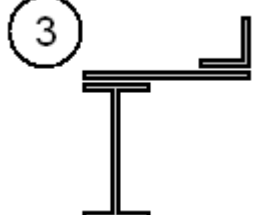
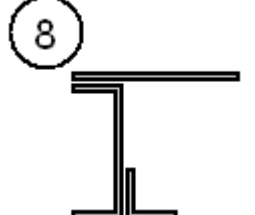
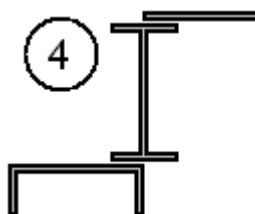
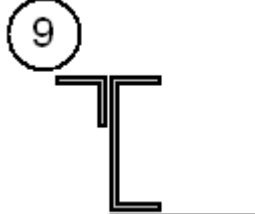
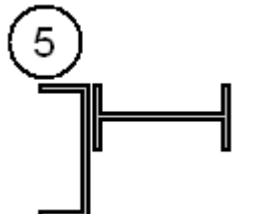
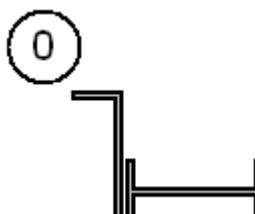
<p>1</p> 	<p>6</p> 
<p>2</p> 	<p>7</p> 
<p>3</p> 	<p>8</p> 
<p>4</p> 	<p>9</p> 
<p>5</p> 	<p>0</p> 

Таблица 5 – Симметричное сечение

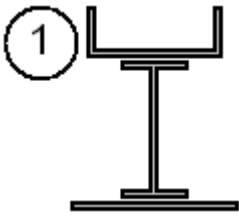
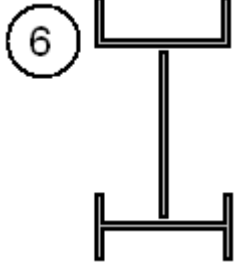

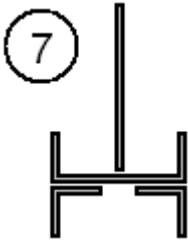
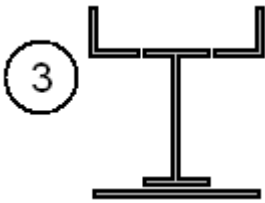
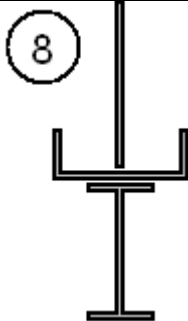

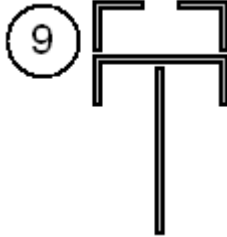
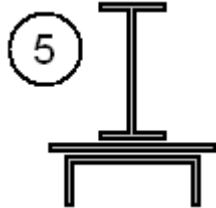
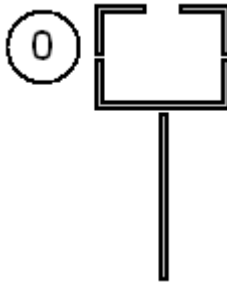
 <p>1</p>	 <p>6</p>
 <p>2</p>	 <p>7</p>
 <p>3</p>	 <p>8</p>
 <p>4</p>	 <p>9</p>
 <p>5</p>	 <p>0</p>

Таблица 6 – Номера элементов сечения

№	Вторая цифра шифра		Третья цифра шифра	
	двутавр (рис. 21)	полоса	швеллер (рис. 22)	уголок (рис. 23)
<b>1</b>	<b>18</b>	<b>220 × 10</b>	<b>16</b>	<b>63 × 6</b>
<b>2</b>	<b>20</b>	<b>240 × 12</b>	<b>18</b>	<b>75 × 8</b>
<b>3</b>	<b>22</b>	<b>260 × 10</b>	<b>20</b>	<b>80 × 6</b>
<b>4</b>	<b>24</b>	<b>280 × 12</b>	<b>24</b>	<b>90 × 8</b>
<b>5</b>	<b>27</b>	<b>300 × 14</b>	<b>27</b>	<b>100 × 8</b>
<b>6</b>	<b>30</b>	<b>320 × 12</b>	<b>30</b>	<b>110 × 8</b>
<b>7</b>	<b>33</b>	<b>360 × 16</b>	<b>33</b>	<b>100 × 10</b>
<b>8</b>	<b>36</b>	<b>400 × 18</b>	<b>36</b>	<b>125 × 10</b>
<b>9</b>	<b>40</b>	<b>400 × 20</b>	<b>30</b>	<b>90 × 6</b>
<b>0</b>	<b>16</b>	<b>180 × 10</b>	<b>27</b>	<b>75 × 6</b>

### 3. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА

#### 3.1. Несимметричное сечение

##### 3.1.1. Исходные данные

Заданная по условию схема сечения имеет вид:

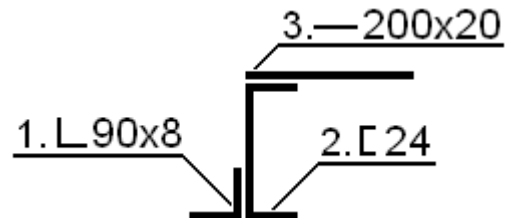


Рисунок 24

Элементы сечения – стандартные прокатные профили:

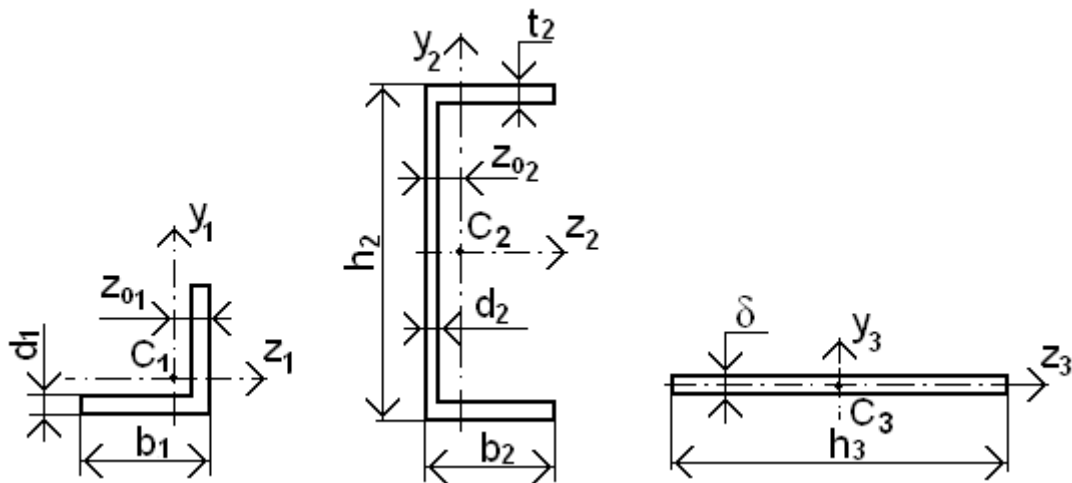


Рисунок 25

1. Параметры уголка равнобокого  $90 \times 8$  ГОСТ 8509-93:

$$b_1 = 90 \text{ мм} = 9 \text{ см};$$

$$d_1 = 8 \text{ мм} = 0,8 \text{ см};$$

$$z_{01} = 2,51 \text{ см};$$

$$A_1 = 13,93 \text{ см}^2;$$

$$I_{z1} = I_{y1} = 106,11 \text{ см}^4;$$

$$I_{\text{MAX}} = 168,4 \text{ см}^4;$$

$$I_{\text{MIN}} = 43,8 \text{ см}^4.$$

Центробежный момент инерции равнобокого уголка относительно его центральных осей  $y_1$  и  $z_1$  рассчитывается по формуле

$$I_{Z_1Y_1} = \frac{I_{\text{MAX}} - I_{\text{MIN}}}{2} \cdot \sin(2\alpha),$$

где угол  $\alpha = 45^\circ$ , так как согласно рис. 19 для совмещения оси  $Z_0$  с осью  $Z_1$  надо повернуть ось  $Z_0$  против часовой стрелки, тогда

$$I_{Z_1Y_1} = \frac{168,4 - 43,8}{2} \cdot \sin(2 \cdot 45^\circ) = 62,3 \text{ см}^4.$$

2. Параметры швеллера № 24 ГОСТ 8240-93:

$$h_2 = 24 \text{ см} = 240 \text{ мм};$$

$$b_2 = 90 \text{ мм} = 9 \text{ см};$$

$$d_2 = 56 \text{ мм} = 0,56 \text{ см};$$

$$t_2 = 10 \text{ мм} = 1 \text{ см};$$

$$z_{02} = 2,42 \text{ см};$$

$$A_2 = 30,6 \text{ см}^2;$$

$$I_{Z_2} = 2900 \text{ см}^4;$$

$$I_{Y_2} = 208 \text{ см}^4.$$

Центробежный момент инерции швеллера относительно осей  $y_2$  и  $z_2$  равен  $I_{Z_2Y_2} = 0 \text{ см}^4$ , так как ось  $z_2$  является осью симметрии, а значит – главной центральной осью.

3. Параметры полосы  $200 \times 20$ :

$$h_3 = 20 \text{ см} = 200 \text{ мм};$$

$$\delta_3 = 20 \text{ мм} = 2 \text{ см};$$

$$A_3 = h_3 \cdot \delta_3 = 20 \cdot 2 = 40 \text{ см}^2;$$

$$I_{Z_3Y_3} = 0 \text{ см}^4.$$

Осевые моменты инерции полосы относительно ее главных центральных осей  $y_3$  и  $z_3$  определяются, используя формулы (53) и (54) для прямоугольника:

$$I_{Z_3} = \frac{h \cdot \delta^3}{12} = \frac{20 \cdot 2^3}{12} = 13,3 \text{ см}^4,$$

$$I_{Y_3} = \frac{\delta \cdot h^3}{12} = \frac{2 \cdot 20^3}{12} = 1333 \text{ см}^4.$$

### 3.1.2. Определение положения центра тяжести сечения

Координаты центра тяжести всего сечения рассчитываются по формулам:

$$z_C = \frac{A_1 \cdot z_{C1} + A_2 \cdot z_{C2} + A_3 \cdot z_{C3}}{A},$$

$$y_C = \frac{A_1 \cdot y_{C1} + A_2 \cdot y_{C2} + A_3 \cdot y_{C3}}{A}.$$

где  $A$  – площадь всего сечения,  $A = A_1 + A_2 + A_3 = 13,93 + 30,6 + 40 = 84,53 \text{ см}^2$ ;

$z_{C1}, y_{C1}, z_{C2}, y_{C2}, z_{C3}, y_{C3}$  – координаты центров тяжести составных частей сечения, то есть уголка, швеллера и полосы соответственно (рис. 26).

Координаты центра тяжести всего сечения  $z_C$  и  $y_C$  удобнее определять, взяв в качестве исходных осей координат центральные оси составных фигур сечения таким образом, чтобы большая часть всего сечения попадала в первый положительный квадрант. В данном случае такими осями являются центральные оси уголка  $y_1$  и  $z_1$ .

Тогда координаты центров тяжести уголка, швеллера и полосы в этих осях будут соответственно равны:  $z_{C1} = 0 \text{ мм}$ ;  $y_{C1} = 0 \text{ мм}$ ;

$$z_{C2} = z_{01} + z_{02} = 2,51 + 2,42 = 4,93 \text{ см} = 49,3 \text{ мм};$$

$$z_{C3} = z_{01} + 0,5 \cdot h_3 = 2,51 + 0,5 \cdot 20 = 12,51 \text{ см} = 125,1 \text{ мм};$$

$$y_{C2} = 0,5 \cdot h_2 - z_{01} = 0,5 \cdot 24 - 2,51 = 9,49 \text{ см} = 94,9 \text{ мм};$$

$$y_{C3} = h_2 + 0,5 \cdot \delta_3 - z_{01} = 24 + 0,5 \cdot 20 - 2,51 = 22,49 \text{ см} = 224,9 \text{ мм}.$$

Теперь можно определить координаты центра тяжести всего сечения:

$$z_C = \frac{0 \cdot 13,93 + 30,6 \cdot 4,93 + 40 \cdot 12,51}{84,53} = 7,7 \text{ см} = 77 \text{ мм},$$

$$y_C = \frac{0 \cdot 13,93 + 30,6 \cdot 9,49 + 40 \cdot 22,49}{84,53} = 14,08 \text{ см} = 140,8 \text{ мм}.$$

Определяем по этим координатам центр тяжести всего сечения (точка  $C$ ) и показываем центральные оси всего сечения  $Z$  и  $Y$  (рис. 26).

### 3.1.3. Определение моментов инерции относительно центральных осей

Осевые и центробежный моменты инерции всего сечения относительно его центральных осей  $Z$  и  $Y$  рассчитываются по следующим формулам:

$$I_Z = \sum_{i=1}^n (I_{Zi} + A_i b_i^2);$$

$$I_Y = \sum_{i=1}^n (I_{Yi} + A_i c_i^2);$$

$$I_{ZY} = \sum_{i=1}^n (I_{Z_i Y_i} + A_i b_i c_i);$$

где расстояния между параллельными осями соответственно равны:

$$b_i = y_{C_i} - y_C;$$

$$c_i = z_{C_i} - z_C;$$

то есть

$$b_1 = -y_C = -14,08 \text{ см} = -140,8 \text{ мм};$$

$$b_2 = -y_C + y_{C_2} = -14,08 + 9,49 = -4,59 \text{ см} = -45,9 \text{ мм};$$

$$b_3 = y_{C_3} - y_C = 22,49 - 14,08 = 8,41 \text{ см} = 84,1 \text{ мм};$$

$$c_1 = -z_C = -7,7 \text{ см} = -77 \text{ мм};$$

$$c_2 = z_{C_2} - z_C = 4,93 + 4,93 = -2,77 \text{ см} = -27,7 \text{ мм};$$

$$c_3 = z_{C_3} - z_C = 12,51 - 7,7 = 4,81 \text{ см} = 48,1 \text{ мм}.$$

Тогда моменты инерции относительно центральных осей  $Z$  и  $Y$  будут равны:

$$I_Z = \sum_{i=1}^n (I_{Z_i} + A_i b_i^2) = 106,11 + 13,93 \cdot (-14,08)^2 + 2900 + \\ + 30,6 \cdot (-4,59)^2 + 13,3 + 40 \cdot 8,41^2 = 9254,8 \text{ см}^4;$$

$$I_Y = \sum_{i=1}^n (I_{Y_i} + A_i c_i^2) = 106,11 + 13,93 \cdot (-7,7)^2 + 208 + 30,6 \cdot (-2,77)^2 + \\ + 1333 + 40 \cdot 4,81^2 = 3626,4 \text{ см}^4;$$

$$I_{ZY} = \sum_{i=1}^n (I_{Z_i Y_i} + A_i b_i c_i) = 62,3 + 13,93 \cdot (-14,08) \cdot (-7,7) + \\ + 30,6 \cdot (-4,59) \cdot (-2,77) + 40 \cdot 8,41 \cdot 4,81 = 3579,7 \text{ см}^4.$$

### 3.1.4. Определение положения главных осей инерции

Определим положение главных осей:

$$\text{tg}(2\alpha_0) = -\frac{2 \cdot I_{ZY}}{I_Z - I_Y} = -\frac{2 \cdot 3579,7}{9254,8 - 3624,4} = -1,27;$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arctg}(-1,27) = -26^{\circ}.$$

Так как значение  $\alpha_0$  получилось отрицательным, то отложим этот угол по часовой стрелке от оси  $Z$  и проведем главную центральную ось  $U$ . Ось  $V$  будет ей перпендикулярна (рис. 26).

### 3.1.5. Определение экстремальных значений главных моментов инерции

Сначала определим, какое значение (максимальное или минимальное) будет у главного момента инерции, взятого относительно главной оси  $U$ , расположенной под углом  $\alpha_0$  к центральной оси  $Z$ . Для этого определим знак выражения:

$$\frac{d^2 I_U}{d\alpha^2} = -\frac{2 \cdot (I_Z - I_Y)}{\cos(2\alpha_0)} = -\frac{2 \cdot (9254,8 - 3626,4)}{\cos[2 \cdot (-26^{\circ})]} = -18822,4.$$

Так как результат выражения получился отрицательным, то значение момента инерции относительно главной центральной оси  $U$  будет максимальным:

$$I_{\text{MAX}} = \frac{I_Z + I_Y}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(I_Z - I_Y)^2 + 4 \cdot I_{ZY}^2} = \frac{9254,8 + 3626,4}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(9254,8 - 3626,4)^2 + 4 \cdot (3623,5)^2} = 10994 \text{ см}^4.$$

Тогда момент инерции относительно главной центральной оси  $V$  будет иметь минимальное значение:

$$I_{\text{MIN}} = \frac{I_Z + I_Y}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(I_Z - I_Y)^2 + 4 \cdot I_{ZY}^2} = \frac{9254,8 + 3626,4}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(9254,8 - 3626,4)^2 + 4 \cdot (3623,5)^2} = 1887,2 \text{ см}^4.$$

Так как  $I_{ZY} > 0$ , то главная ось, относительно которой момент инерции максимален, проходит через второй и четвертый квадранты (ось  $U$ ).

Выполним проверку проведенных вычислений:

$$I_P = I_Z + I_Y = I_{\text{MAX}} + I_{\text{MIN}} = 9254,8 + 3626,4 = 10994 + 1887,2 = 12881,2 \text{ см}^4.$$



### 3.1.6. Определение моментов сопротивления и радиусов инерции сечения

Сначала определим аналитически по формулам (34) и (35) координаты наиболее удаленных от главных центральных осей **U** и **V** точек 1 и 2 (рис. 26):

$$v_{\text{MAX}} = v_1 = y_1 \cdot \cos \alpha_0 - z_1 \cdot \sin \alpha_0;$$

$$y_1 = -y_C - z_{01} = -14,08 - 2,51 = -16,6 \text{ см};$$

$$z_1 = -b_1 - z_C + z_{01} = -9 - 7,7 + 2,51 = -14,19 \text{ см};$$

$$v_{\text{MAX}} = -16,6 \cdot 0,8995 - (-14,19) \cdot (-0,4368) = 21,12 \text{ см};$$

$$u_{\text{MAX}} = u_2 = z_2 \cdot \cos \alpha_0 + y_2 \cdot \sin \alpha_0;$$

$$z_2 = b_2 - c_2 - z_{02} = 9 - 2,77 - 2,42 = 3,81 \text{ см};$$

$$y_2 = -y_C - z_{01} = -14,08 - 2,51 = -16,6 \text{ см};$$

$$u_{\text{MAX}} = 3,81 \cdot 0,8995 - (-16,6) \cdot (-0,4368) = 10,67 \text{ см}.$$

Моменты сопротивления относительно главных центральных осей:

$$W_U = \frac{I_U}{v_{\text{MAX}}} = \frac{10994}{21,12} = 520,5 \text{ см}^3;$$

$$W_V = \frac{I_V}{u_{\text{MAX}}} = \frac{1887,15}{10,67} = 176,86 \text{ см}^3.$$

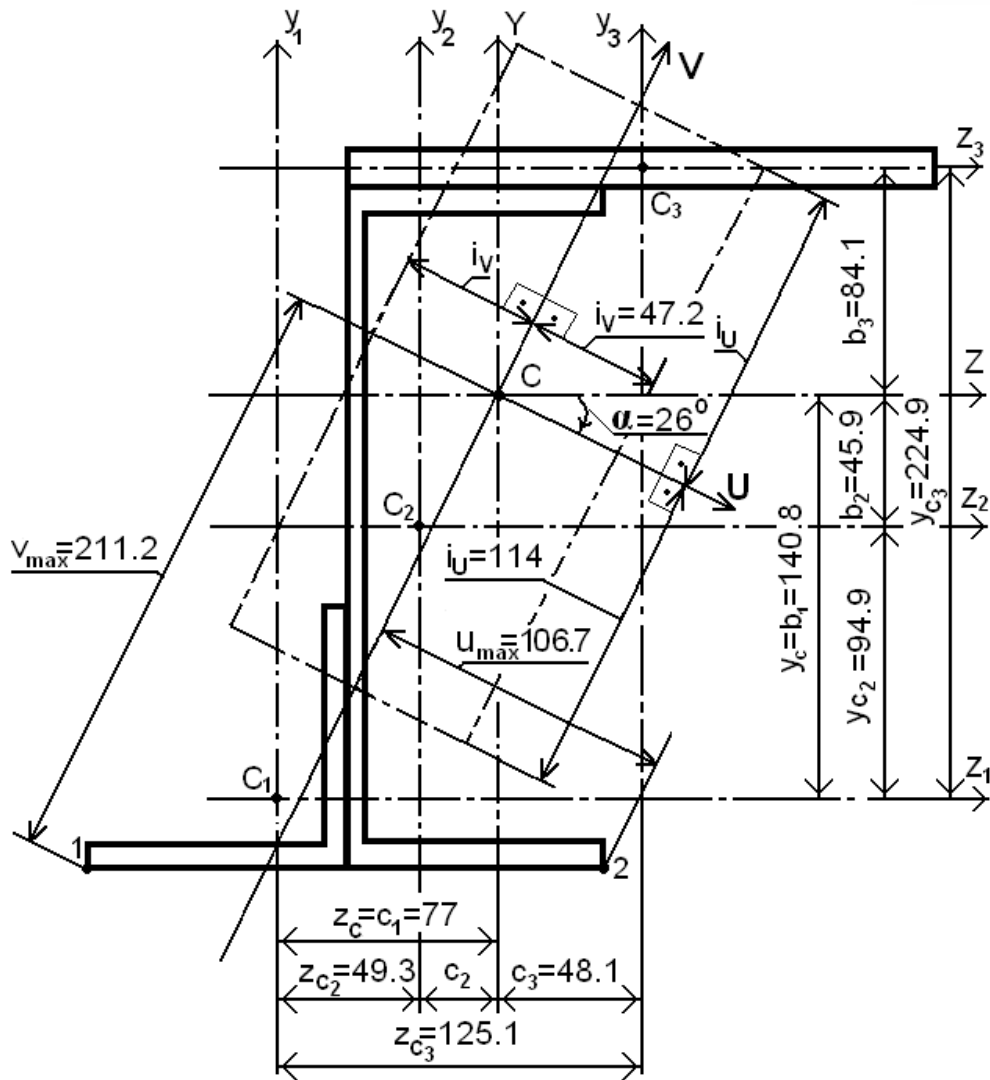
Определим радиусы инерции сечения по формулам:

$$i_U = \sqrt{\frac{I_U}{A}} = \sqrt{\frac{10994}{84,53}} = 11,4 \text{ см} = 114 \text{ мм};$$

$$i_V = \sqrt{\frac{I_V}{A}} = \sqrt{\frac{1884}{84,53}} = 4,72 \text{ см} = 47,2 \text{ мм}.$$

Радиусы инерции откладываем следующим образом:  $i_U \perp U$ ,  $i_V \perp V$  (рис. 26).

КОКМ 223.111.000 ПЗ



					<b>КОКМ 223.111.000 ПЗ</b>			
<i>Изм.</i>	<i>Лист</i>	<i>№ докум.</i>	<i>Подп.</i>	<i>Дата</i>	<i>Определение геометрических характеристик плоских фигур</i>	<i>Лист</i>	<i>Масса</i>	<i>Масшт.</i>
<i>Разраб.</i>		<b>Сидоров</b>						1:2
<i>Проб.</i>		<b>Кауров</b>				<i>Лист</i>	<i>Листов</i>	
<i>Т. конт.</i>						<b>ВШТЭ СПБГУПТД Группа 223</b>		
<i>Н. конт.</i>								
<i>Утв.</i>								

Рисунок 26

## 3.2. Симметричное сечение

### 3.2.1. Исходные данные

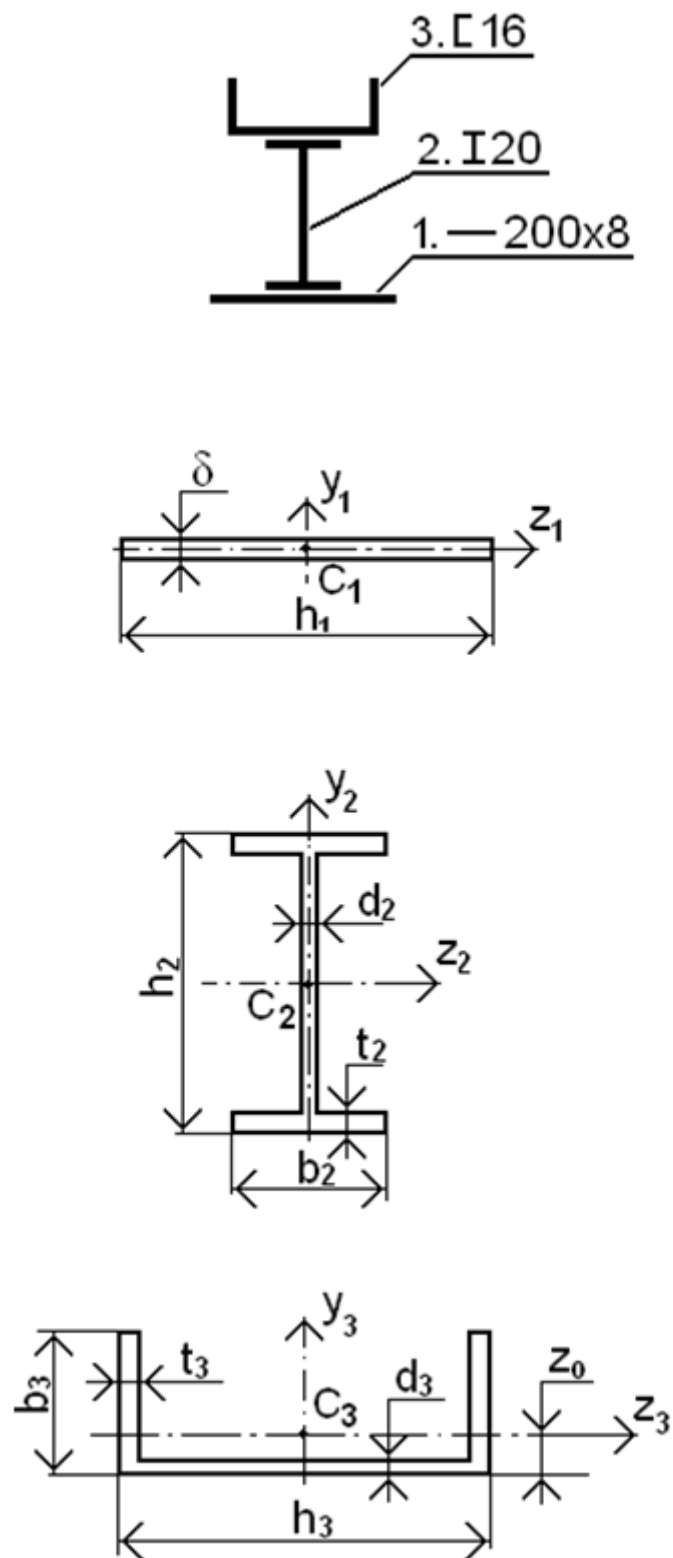


Рисунок 27

1. Параметры полосы **200 × 8**:

$$h_1 = 20 \text{ см} = 200 \text{ мм};$$

$$\delta = 8 \text{ мм} = 0,8 \text{ см};$$

$$A_1 = h_1 \cdot \delta = 20 \cdot 0,8 = 16 \text{ см}^2.$$

Так как оси **Z<sub>1</sub>** и **Y<sub>1</sub>** являются осями симметрии, а значит и главными центральными осями, то  $I_{Z_1 Y_1} = 0 \text{ см}^4$ . Осевые моменты инерции полосы относительно ее главных центральных осей **Z<sub>1</sub>** и **Y<sub>1</sub>** найдем, используя формулы (53) и (54) для прямоугольника:

$$I_{Z_1} = \frac{h_1 \cdot \delta^3}{12} = \frac{20 \cdot 0,8^3}{12} = 0,85 \text{ см}^4;$$

$$I_{Y_1} = \frac{\delta \cdot h_1^3}{12} = \frac{0,8 \cdot 20^3}{12} = 533 \text{ см}^4.$$

2. Параметры двутавра № 20 ГОСТ 8239-93:

$$h_2 = 20 \text{ см} = 200 \text{ мм};$$

$$b_2 = 100 \text{ мм} = 10 \text{ см};$$

$$d_2 = 5,2 \text{ мм} = 0,52 \text{ см};$$

$$t_2 = 8,4 \text{ мм} = 0,84 \text{ см};$$

$$A_2 = 26,8 \text{ см}^2;$$

$$I_{Z_2 Y_2} = 0 \text{ см}^4;$$

$$I_{Z_2} = 1840 \text{ см}^4;$$

$$I_{Y_2} = 115 \text{ см}^4.$$

3. Параметры швеллера № 16 ГОСТ 8240-93:

$$h_3 = 16 \text{ см} = 160 \text{ мм};$$

$$b_3 = 6,4 \text{ см} = 64 \text{ мм};$$

$$t_3 = 8,4 \text{ мм} = 0,84 \text{ см};$$

$$d_3 = 5 \text{ мм} = 0,5 \text{ см};$$

$$z_0 = 1,8 \text{ см};$$

$$A_3 = 18,1 \text{ см}^2;$$

$$I_{Z_3} = 63,3 \text{ см}^4;$$

$$I_{Y_3} = 747 \text{ см}^4;$$

$$I_{Z_3 Y_3} = 0 \text{ см}^4.$$

### 3.2.2. Определение положения центра тяжести сечения

Координаты центра тяжести всего сечения найдем по формулам:

$$z_C = \frac{A_1 \cdot z_{C1} + A_2 \cdot z_{C2} + A_3 \cdot z_{C3}}{A},$$

$$y_C = \frac{A_1 \cdot y_{C1} + A_2 \cdot y_{C2} + A_3 \cdot y_{C3}}{A},$$

где  $A$  – площадь всего сечения;

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = 18,1 + 23,8 + 16 = 60,9 \text{ см}^2;$$

$z_{C1}, y_{C1}, z_{C2}, y_{C2}, z_{C3}, y_{C3}$  – координаты центров тяжести составных частей сечения, то есть полосы, двутавра и швеллера соответственно (рис. 28).

Так как заданное сечение имеет ось симметрии, то центры тяжести составных частей сечения находятся на ней, поэтому

$$z_{C1} = z_{C2} = z_{C3} = 0 \text{ см.}$$

Вертикальную координату положения центра тяжести всего сечения  $y_C$  наиболее удобно определить, взяв в качестве второй исходной оси горизонтальную центральную ось одной из составных фигур сечения таким образом, чтобы большая часть всего сечения располагалась выше нее. В данном случае такой осью является центральная ось полосы  $z_1$ , так как она находится наиболее низко по отношению ко всему сечению. Тогда ордината центра тяжести полосы  $y_{C1}$  будет равна нулю, а ординаты центров тяжести двутавра и швеллера будут иметь положительные значения, т. е.:

$$y_{C2} = 0,5 \cdot h_2 + 0,5 \cdot \delta = 0,5 \cdot 20 + 0,5 \cdot 0,8 = 10,4 \text{ см} = 104 \text{ мм},$$

$$y_{C3} = 0,5 \cdot \delta + h_2 + z_0 = 0,5 \cdot 0,8 + 20 + 1,8 = 22,2 \text{ см} = 222 \text{ мм}.$$

Теперь можно определить координаты центра тяжести всего сечения. Относительно исходных осей  $z_1$  и  $y_1$  они будут соответственно равны:

$$z_C = 0 \text{ мм};$$

$$y_C = \frac{18,1 \cdot 22,2 + 26,8 \cdot 10,4 + 0 \cdot 16}{60,9} = 11,2 \text{ см} = 112 \text{ мм}.$$

Определяем по этим координатам центр тяжести всего сечения (точка  $C$ ) и показываем центральные оси всего сечения  $Z$  и  $Y$  (рис. 28).

### 3.2.3. Расчет моментов инерции сечения относительно центральных осей

Так как заданное сечение имеет ось симметрии  $Y$ , то эта ось является главной центральной осью, все остальные главные оси ей перпендикулярны. Тогда центробежный момент инерции всего сечения относительно его главных центральных осей  $Z$  и  $Y$  будет равен нулю.

Осевые моменты инерции всего сечения относительно его главных центральных осей  $Z$  и  $Y$  определяются по формулам:

$$I_Z = \sum_{i=1}^n (I_{Zi} + A_i b_i^2),$$

$$I_Y = \sum_{i=1}^n (I_{Yi} + A_i c_i^2),$$

где расстояния между параллельными осями соответственно равны:

$$b_i = y_{Ci} - y_C;$$

$$c_i = z_{Ci} - z_C;$$

то есть

$$b_1 = -y_C = -11,2 \text{ см} = -112 \text{ мм};$$

$$b_2 = -y_C + y_{C2} = -11,2 + 10,4 = -0,8 \text{ см} = -8 \text{ мм};$$

$$b_3 = y_{C3} - y_C = 22,2 - 11,2 = 11 \text{ см} = 110 \text{ мм}.$$

Поскольку все вертикальные центральные оси фигур совпадают, то

$$c_1 = c_2 = c_3 = 0 \text{ мм}.$$

Тогда моменты инерции относительно центральных осей  $Z$  и  $Y$  будут равны:

$$I_Z = \sum_{i=1}^n (I_{Zi} + A_i b_i^2) = 0,85 + 16 \cdot (-11,2)^2 + 1840 + \\ + 26,8 \cdot (-0,8)^2 + 63,3 + 18,1 \cdot 11^2 = 6118,4 \text{ см}^4;$$

$$I_Y = \sum_{i=1}^n (I_{Yi} + A_i c_i^2) = 533 + 115 + 747 = 1395 \text{ см}^4.$$

### 3.2.4. Вычисление моментов сопротивления и радиусов инерции сечения

Значения моментов сопротивления сечения относительно главных центральных осей  $Z$  и  $Y$  определяются по формулам:

$$W_Z = \frac{I_Z}{|y_{\text{MAX}}|},$$

$$W_Y = \frac{I_Y}{|z_{\text{MAX}}|},$$

где  $|y_{\text{MAX}}|$  и  $|z_{\text{MAX}}|$  – соответственно наибольшие расстояния от главных центральных осей  $Z$  и  $Y$  до наиболее удаленных точек сечения.

В данном случае такими точками являются точки 1 и 2 (рис. 28). Определим их координаты аналитически:

$$y_{\text{MAX}} = b_3 - z_0 + y_{c3} - y_c = 6,4 - 1,8 + 22,2 - 11,2 = 15,6 \text{ см} = 156 \text{ мм};$$

$$z_{\text{MAX}} = 0,5 \cdot h_1 = 0,5 \cdot 20 = 10 \text{ см} = 100 \text{ мм}.$$

Тогда значения моментов сопротивления относительно главных центральных осей  $Z$  и  $Y$  будут равны:

$$W_Z = \frac{6118,4}{15,6} = 392,2 \text{ см}^3; \quad W_Y = \frac{1395}{10} = 139,5 \text{ см}^3.$$

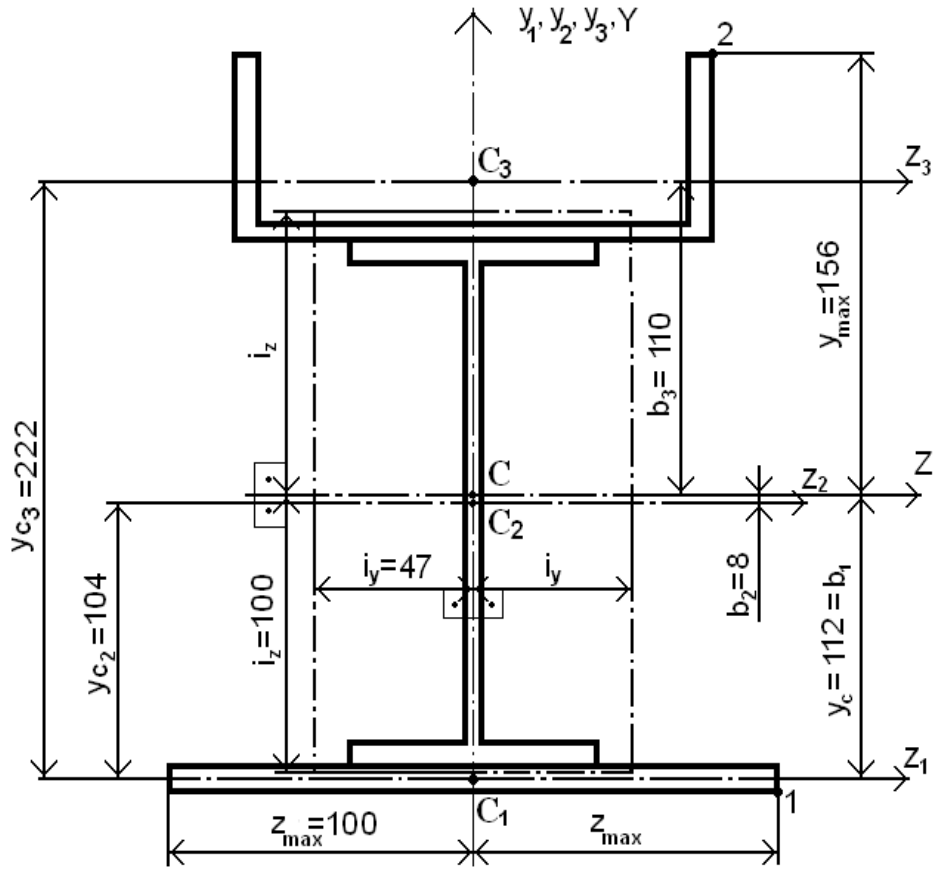
Определение радиусов инерции сечения производится по следующим формулам:

$$i_Z = \sqrt{\frac{I_Z}{A}} = \sqrt{\frac{6118,4}{60,9}} = 10 \text{ см} = 100 \text{ мм},$$

$$i_Y = \sqrt{\frac{I_Y}{A}} = \sqrt{\frac{1395}{60,9}} = 4,7 \text{ см} = 47 \text{ мм}.$$

Найденные радиусы инерции откладываем перпендикулярно соответствующим осям ( $i_Z \perp Z$ ,  $i_Y \perp Y$ ) (рис. 28).

КОКМ 223.111.000 ПЗ



				КОКМ 223.111.000 ПЗ				
Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Определение геометрических характеристик плоских фигур	Лист	Масса	Масшт.
Разраб.		Еидоров						1:2
Проб.		Кауров				Лист	Листов	
Т.конт.						ВШТЭ СПбГУПТД Группа 223		
Н.конт.								
Чтв.								

Рисунок 28



#### **4. ОБРАЗЕЦ ОФОРМЛЕНИЯ ТИТУЛЬНОГО ЛИСТА**

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ПРОМЫШЛЕННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ДИЗАЙНА  
ВЫСШАЯ ШКОЛА ТЕХНОЛОГИИ И ЭНЕРГЕТИКИ  
Кафедра основ конструирования машин**

Расчетно-графическая работа № 1

### **ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПЛОСКИХ ФИГУР**

КОКМ 221.111.000 ПЗ

Выполнил  
студент 221 группы  
Сидоров А. С.

Принял  
доцент  
Кауров П. В.

Санкт-Петербург  
2024

## 5. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Что называется геометрическими характеристиками поперечного сечения и для чего их надо знать?
2. Что называется статическим моментом площади?
3. В чем измеряется статический момент площади?
4. Как определить координаты центра тяжести плоской фигуры?
5. В каком случае статический момент площади равен нулю?
6. Каким образом вычислить статический момент площади сложной фигуры?
7. Что называется осевым моментом инерции сечения?
8. В чем измеряется осевой момент инерции сечения?
9. Что называется полярным моментом инерции сечения?
10. В чем измеряется полярный момент инерции сечения?
11. Что называется центробежным моментом инерции сечения?
12. Какие моменты инерции всегда положительны? Почему?
13. Относительно каких осей центробежный момент инерции равен нулю?
14. Как называются оси, проходящие через центр тяжести сечения?
15. Как определить осевой момент инерции фигуры относительно параллельной оси?
16. Как найти центробежный момент инерции относительно параллельной оси?
17. Как определяются моменты инерции сложной фигуры?
18. Как изменяются моменты инерции при повороте осей координат?
19. Как определяется положение главных осей инерции при повороте осей координат?
20. Как определить величины главных моментов инерции?
21. Как определяются экстремальные значения моментов инерции?
22. Что называется моментом сопротивления сечения?
23. Что называется полярным моментом сопротивления сечения?
24. В чем измеряются моменты сопротивления сечения?
25. Что такое радиус инерции?
26. В чем измеряются радиусы инерции сечения?
27. Как вычислить момент инерции фигуры относительно центральной оси с помощью радиуса инерции?
28. Как определить знак центробежного момента инерции равнобокого уголка?
29. Как определяются геометрические характеристики прямоугольника, круга и кольца относительно главных центральных осей?
30. Какие существуют зависимости между полярным и осевыми моментами инерции сечения?
31. Что называют прокатными профилями и для чего они служат?
32. Как определить геометрические характеристики сечения относительно оси симметрии?
33. Что называется главными осями и главными моментами инерции сечения?

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Мельников, Б. Е. Сопротивление материалов: учебник для вузов / Б. Е. Мельников, Л. К. Паршин, А. С. Семенов, В. А. Шерстнев. – 2-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2023. – 576 с. – URL: <https://e.lanbook.com/book/341261> (дата обращения: 29.01.2024). – Текст: электронный.
2. Степин, П. А. Сопротивление материалов: учебник / П. А. Степин. – 13-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2022. – 320 с. – URL: <https://e.lanbook.com/book/210815> (дата обращения: 29.01.2024). – Текст: электронный.
3. ГОСТ 8239-93. Сталь горячекатаная. Балки двутавровые.
4. ГОСТ 8240-93. Сталь горячекатаная. Швеллеры.
5. ГОСТ 8509-93. Сталь горячекатаная. Уголки равнобокие.

Учебное издание

**Кауров Павел Викторович  
Томилова Ольга Васильевна**

**Сопротивление материалов  
Геометрические характеристики  
Расчетно-графическая работа**

*Учебно-методическое пособие*

Редактор и корректор А. А. Чернышева  
Техн. редактор Д. А. Романова

Учебное электронное издание сетевого распространения

Системные требования:  
электронное устройство с программным обеспечением  
для воспроизведения файлов формата PDF

Режим доступа: [http://publish.sutd.ru/tp\\_get\\_file.php?id=202016](http://publish.sutd.ru/tp_get_file.php?id=202016), по паролю.  
- Загл. с экрана.

Дата подписания к использованию 12.09.2024 г. Рег. № 5331/24

Высшая школа технологии и энергетики СПбГУПТД  
198095, СПб., ул. Ивана Черных, 4.