

**П. В. Кауров**

**СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ**

**КРУЧЕНИЕ И ИЗГИБ**

**Контрольная работа**

**Учебно-методическое пособие**

**Санкт-Петербург  
2024**

**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации**  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

**«Санкт-Петербургский государственный университет  
промышленных технологий и дизайна»  
Высшая школа технологии и энергетики**

**П. В. Кауров**

**СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ**

**КРУЧЕНИЕ И ИЗГИБ**

**Контрольная работа**

**Учебно-методическое пособие**

Утверждено Редакционно-издательским советом ВШТЭ СПбГУПТД

Санкт-Петербург  
2024

**УДК 539.3 (075)**  
**ББК 22.251я7**  
**К 301**

*Рецензенты:*

кандидат химических наук, доцент, заведующий кафедрой материаловедения и технологии машиностроения Высшей школы технологии и энергетики Санкт-Петербургского государственного университета промышленных технологий и дизайна  
*А. Н. Евдокимов;*

кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой автоматизации, метрологии и управления в технических системах ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный лесотехнический университет имени С. М. Кирова»  
*А. В. Тенноев*

**Кауров, П. В.**

**К 301** Сопротивление материалов. Кручение и изгиб. Контрольная работа: учебно-методическое пособие / П. В. Кауров. — СПб.: ВШТЭ СПбГУПТД, 2024. — 55 с.

Учебно-методическое пособие соответствует программам и учебным планам дисциплины «Сопротивление материалов» для студентов, обучающихся по направлению подготовки 15.03.02 «Технологические машины и оборудование». Целью настоящего учебно-методического пособия является развитие навыков самостоятельного расчета элементов конструкций на прочность и жесткость. Учебно-методическое пособие содержит общие требования к выполнению контрольной работы, краткие сведения по теории, варианты заданий и примеры расчета.

Учебно-методическое пособие предназначено для бакалавров заочной формы обучения.

УДК 539.3 (075)  
ББК 22.251я7

© ВШТЭ СПбГУПТД, 2024  
© Кауров П. В., 2024

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	4
1. КРУЧЕНИЕ .....	5
1.1. Краткие сведения по теории .....	5
1.2. Пример выполнения задачи № 1 .....	7
2. ИЗГИБ.....	14
2.1. Краткие сведения по теории .....	14
2.2. Пример выполнения задачи № 2 .....	15
3. СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ.....	26
3.1. Краткие сведения по теории .....	26
3.2. Пример выполнения задачи № 3 .....	30
3.3. Схемы нагружения валов II-X .....	41
4. ДИНАМИЧЕСКАЯ НАГРУЗКА .....	43
4.1. Краткие сведения по теории .....	43
4.2. Пример выполнения задачи № 4 .....	44
5. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ .....	54
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	55

## ВВЕДЕНИЕ

В учебно-методическом пособии рассмотрены основные сведения по теории, приведены варианты заданий и примеры решения задач для бакалавров заочной формы обучения по направлению подготовки 15.03.02 «Технологические машины и оборудование», выполняющих контрольную работу по следующим темам дисциплины «Сопротивление материалов»:

1. Кручение.
2. Изгиб.
3. Сложное сопротивление.
4. Динамическая нагрузка.

При решении каждой задачи контрольных работ в начале должны быть указаны исходные данные, т. е. условия задачи, схема и все заданные величины. Расчет следует сопровождать заголовками и краткими пояснениями. В аналитических выкладках вначале записываются формулы, а затем подставляются численные значения символов. В итоговых величинах указывается размерность. В окончательных результатах следует сохранять только оправданное количество значащих цифр.

Для измерения физических и механических величин используется международная система единиц. В качестве основных единиц в СИ приняты: метр (м); секунда (с); килограмм массы (кг); ньютон (Н); паскаль ( $1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2$ ). Также используются кратные единицы: килоньютон ( $1 \text{ кН} = 10^3 \text{ Н}$ ) и мегапаскаль ( $1 \text{ МПа} = 1 \text{ Н/мм}^2 = 10^6 \text{ Па}$ ).

Студент обязан взять из таблицы, прилагаемой к условию задачи, данные в соответствии со своим личным номером (шифром) и первыми шестью буквами русского алфавита, которые следует расположить под шифром, например:

шифр – **2 8 3 0 5 2**;  
буквы – **а б в г д е**.

Если личный номер состоит из семи цифр, то вторая цифра шифра не учитывается.

Из каждого вертикального столбца любой таблицы, обозначенного внизу определенной буквой, надо взять только одно число, стоящее в той горизонтальной строке, номер которой совпадает с номером буквы. Например, вертикальные столбцы табл. 1 обозначены буквами: **е, г, д, е, г, д, е, в**. В этом случае, при указанном выше личном номере (шифре) **283052**, студент должен взять из столбцов **е** строку номер 2 (схема II,  $c = 1,2 \text{ м}$ ,  $T_3 = 1200 \text{ Нм}$ ), из столбцов **г** – строку номер 0 ( $a = 2 \text{ м}$ ,  $T_1 = 2000 \text{ Нм}$ ), из столбца **в** – строку номер 3 ( $[\tau] = 45 \text{ МПа}$ ) и из столбцов **д** – строку номер 5 ( $b = 1,5 \text{ м}$ ,  $T_2 = 1500 \text{ Нм}$ ).

# 1. КРУЧЕНИЕ

## 1.1. Краткие сведения по теории

Стержень подвергается деформации *кручения*, когда в его поперечных сечениях возникают крутящие моменты. Их величина определяется методом сечений по участкам, границами которых являются места приложения внешних крутящих моментов, действующих на стержень. Из условия равновесия следует, что величина крутящего момента в поперечном сечении стержня численно равна алгебраической сумме внешних крутящих моментов, действующих по одну сторону от рассматриваемого сечения.

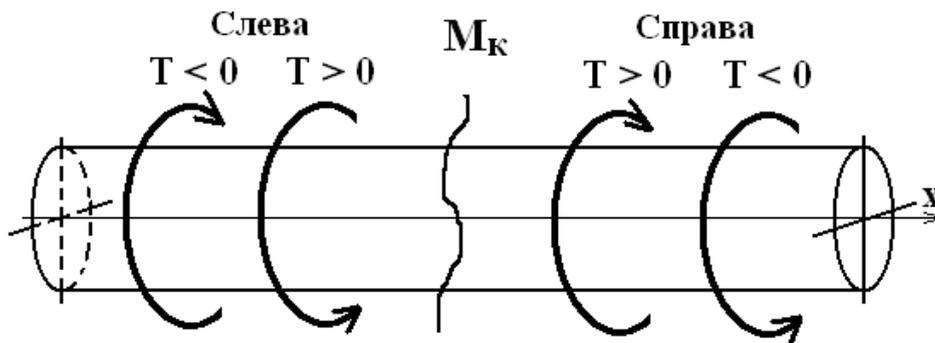


Рисунок 1

*Крутящий момент*  $M_K$  в поперечном сечении вала считается положительным, когда внешний крутящий момент  $T$  действует по часовой стрелке при взгляде на соответствующий торец вала (рис. 1).

*Эпюра крутящего момента* – это график, показывающий изменение величины внутреннего крутящего момента в поперечных сечениях вала в зависимости от координаты  $X$ .

Для цилиндрического стержня круглого поперечного сечения диаметром  $d$  величина касательного напряжения  $\tau$  в точке поперечного сечения, находящейся на расстоянии  $\rho$  от центра (рис. 2), определяется по формуле:

$$\tau = \frac{M_K}{I_p} \cdot \rho, \quad (1)$$

где  $M_K$  – величина крутящего момента в сечении;

$I_p$  – полярный момент инерции сечения.

Для круглого сплошного сечения диаметром  $d$  полярный момент инерции  $I_p$  определяется по формуле:

$$I_P = \frac{\pi \cdot d^4}{32}. \quad (2)$$

**Максимальные касательные напряжения  $\tau$**  в поперечном сечении вала действуют в точках, наиболее удаленных от центра, т. е. при  $\rho = 0,5 \cdot d$  (см. рис. 2). Их величина определяется по формуле:

$$\tau_{\text{MAX}} = \frac{M_K}{W_P}, \quad (3)$$

где  $W_P$  – полярный момент сопротивления.

Для круглого сплошного сечения  $W_P$  определяется по формуле:

$$W_P = \frac{I_P \cdot 2}{d} = \frac{\pi \cdot d^3}{16}. \quad (4)$$

**Условие прочности при кручении** имеет вид:

$$\tau_{\text{MAX}} = \frac{|M_K|}{W_P} \leq [\tau], \quad (5)$$

где  $[\tau]$  – допускаемое касательное напряжение при кручении.

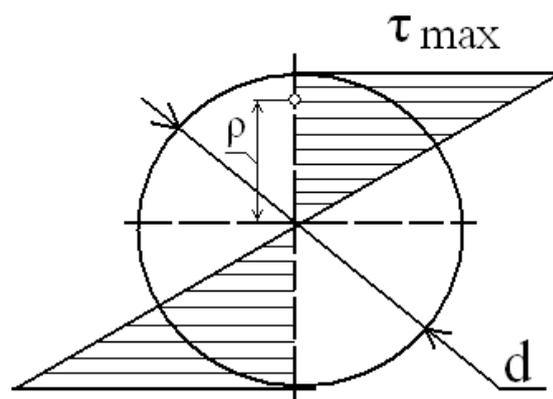


Рисунок 2

**Угол закручивания  $\phi$**  на участке вала длиной  $L$  и диаметром  $d$ , где крутящий момент  $M_K$  постоянен, определяется по формуле:

$$\varphi = \frac{M_K \cdot L}{G \cdot I_P}, \quad (6)$$

где  $G$  – модуль сдвига материала вала.

Если стержень имеет несколько участков, то угол закручивания будет определяться как алгебраическая сумма углов закручивания на участках:

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \frac{M_{Ki} \cdot L_i}{G \cdot I_{Pi}}. \quad (7)$$

Величина наибольшего относительного угла закручивания (рад/м) на участке вала длиной  $L$  определяется по формуле:

$$\Delta\varphi = \frac{|\varphi_{MAX}|}{L}. \quad (8)$$

## 1.2. Пример выполнения задачи № 1

К стальному валу приложены три известных момента  $T_1, T_2, T_3$  (рис. 3).

Требуется:

1. Установить, при каком значении момента  $X$  угол поворота правого концевого сечения вала равен нулю.
  2. Для найденного значения  $X$  построить эпюру крутящих моментов.
  3. При заданном значении  $[\tau]$  определить диаметр вала и округлить его значение до ближайшего, равного: **30, 32, 34, 35, 36, 38, 40, 42, 45, 47, 48, 50, 52, 53, 55, 56, 60, 62, 63, 65, 67, 70, 71, 72, 80, 85, 90, 95, 100** мм.
  4. Построить эпюру углов закручивания.
  5. Найти наибольший относительный угол закручивания.
- Данные взять из табл. 1.

### 1.2.1. Исходные данные

$a = 1,1$  м;  $b = 1,1$  м;  $c = 1,1$  м;  $[\tau] = 35$  МПа;  $T_1 = 1100$  Нм;  $T_2 = 1100$  Нм;  $T_3 = 1400$  Нм;  $G = 0,4 \cdot E$ ;  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па.

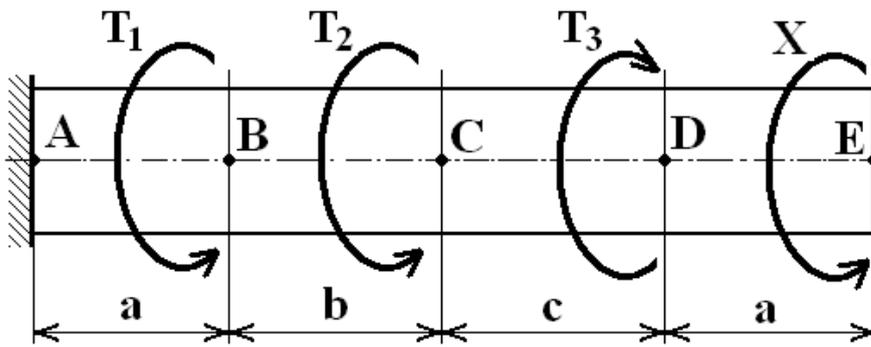


Рисунок 3

Таблица 1 – Исходные данные к задаче № 1

№ строки	Схема по рис. 4	Расстояния, м			Моменты, Нм			[ $\tau$ ], МПа
		a	b	c	T <sub>1</sub>	T <sub>2</sub>	T <sub>3</sub>	
1	I	1,1	1,1	1,1	1100	1100	1100	35
2	II	1,2	1,2	1,2	1200	1200	1200	40
3	III	1,3	1,3	1,3	1300	1300	1300	45
4	IV	1,4	1,4	1,4	1400	1400	1400	50
5	V	1,5	1,5	1,5	1500	1500	1500	55
6	VI	1,6	1,6	1,6	1600	600	1600	60
7	VII	1,7	1,7	1,7	1700	700	1700	65
8	VIII	1,8	1,8	1,8	1800	800	1800	70
9	IX	1,9	1,9	1,9	1900	900	1900	75
0	X	2,0	2,0	2,0	2000	1000	2000	80
	e	г	д	е	г	д	е	в

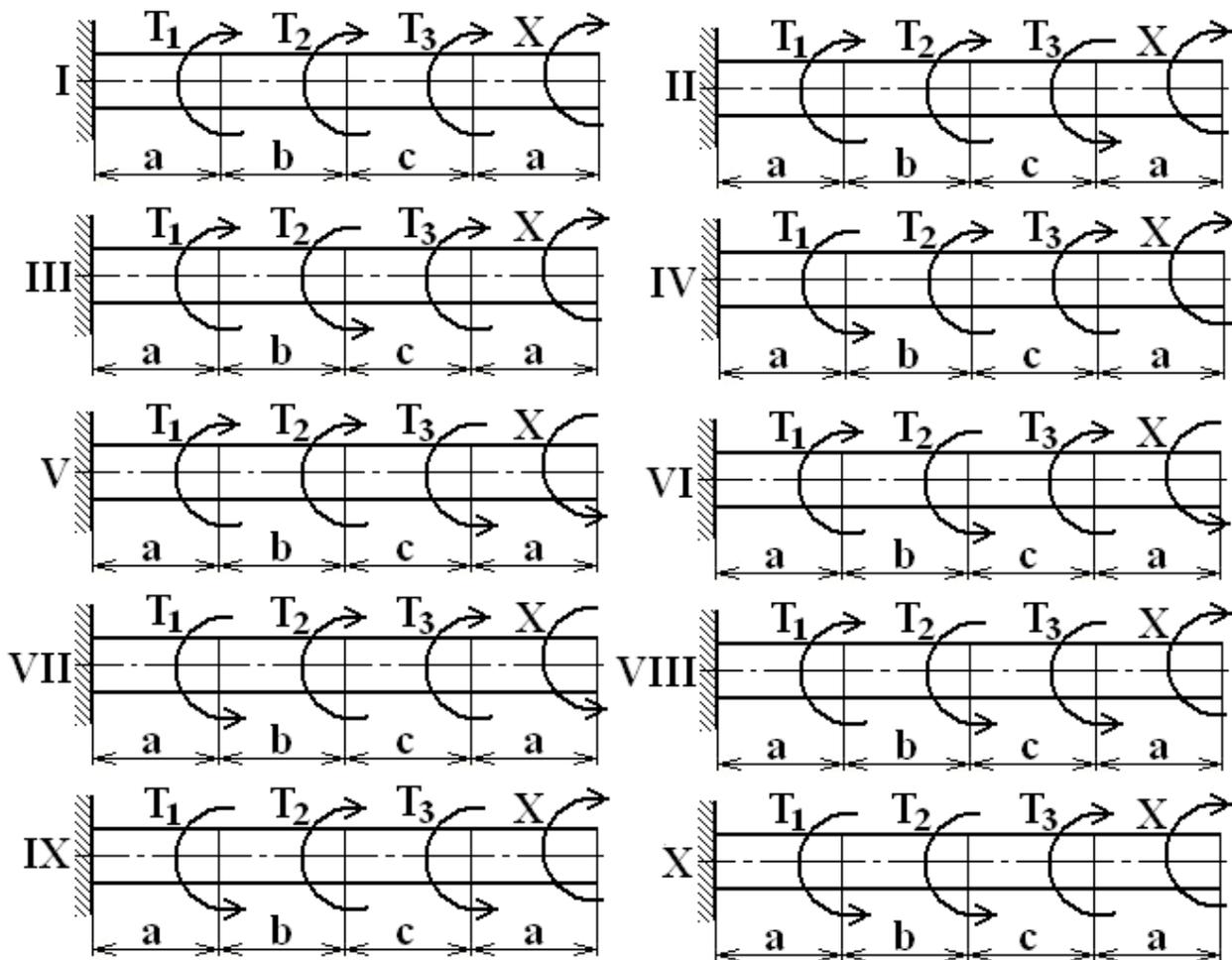


Рисунок 4

### 1.2.2. Определение момента $X$

Применим принцип независимости действия сил. Определим угол поворота сечения под действием каждого момента, деформирующего вал на определенном участке, по отдельности. Результирующий угол поворота будет равен алгебраической сумме всех углов поворота от действия каждого момента с учетом знака.

Допустим, что действует только момент  $X$  на участке вала  $EA$  длиной:

$$L_{EA} = a + c + b + a = 1,1 + 1,1 + 1,1 + 1,1 = 4,4 \text{ м.}$$

Согласно рис. 1 знак момента  $X$  будет отрицательным, а угол поворота сечения  $E$  относительно неподвижной заделки в сечении  $A$  будет равен:

$$\varphi_{EA} = \frac{-X \cdot L_{EA}}{G \cdot I_p}.$$

Допустим, что действует только момент  $T_3$  на участке вала  $DA$  длиной:

$$L_{DA} = c + b + a = 1,1 + 1,1 + 1,1 = 3,3 \text{ м.}$$

Тогда угол поворота сечения **D** относительно неподвижной заделки **A** равен:

$$\varphi_{DA} = \frac{T_3 \cdot L_{DA}}{G \cdot I_p}.$$

Рассуждая аналогичным образом об остальных участках, получим следующие выражения:

$$\varphi_{CA} = \frac{-T_2 \cdot L_{CA}}{G \cdot I_p},$$

$$\varphi_{BA} = \frac{-T_1 \cdot L_{BA}}{G \cdot I_p}.$$

По условию задачи угол поворота  $\varphi_{EA}$  от действия всех крутящих моментов равен нулю, тогда:

$$\varphi_{EA} = \frac{-X \cdot L_{EA}}{G \cdot I_p} + \frac{T_3 \cdot L_{DA}}{G \cdot I_p} - \frac{T_2 \cdot L_{CA}}{G \cdot I_p} - \frac{T_1 \cdot L_{BA}}{G \cdot I_p} = 0,$$

откуда выразим искомый момент:

$$\begin{aligned} X &= \frac{T_3 \cdot L_{DA} - T_2 \cdot L_{CA} - T_1 \cdot L_{BA}}{L_{EA}} = \\ &= \frac{1400 \cdot 3,3 - 1100 \cdot 2,2 - 1100 \cdot 1,1}{4,4} = 225 \text{ Нм.} \end{aligned}$$

Так как значение момента **X** получилось положительным, то его направление соответствует показанному направлению **X** на расчетной схеме (см. рис. 3); в противном случае направление следует поменять на обратное.

### ***1.2.3. Построение эпюры крутящих моментов***

Не вычисляя по уравнениям равновесия значение реактивного момента в заделке и используя метод сечений, запишем выражения для крутящего момента по участкам вала. Будем двигаться при этом справа налево в сторону заделки, начиная со свободного конца и используя правило знаков согласно рис. 1.

Границы первого участка:  $0 \leq x_1 \leq a$ .

$$M_{K1} = \Sigma T^{PP} = -X = -225 \text{ Нм} = -0,225 \text{ кНм.}$$

Границы второго участка:  $a \leq x_2 \leq a + c$ .

$$M_{K2} = \Sigma T^{PP} = -X + T_3 = -225 + 1400 = 1175 \text{ Нм} = 1,175 \text{ кНм.}$$

Границы третьего участка:  $a + c \leq x_3 \leq a + b + c$ .

$$M_{K3} = \Sigma T^{PP} = -X + T_3 - T_2 = -225 + 1400 - 1100 = 75 \text{ Нм} = 0,075 \text{ кНм}.$$

Границы четвертого участка:  $a + b + c \leq x_4 \leq a + b + c + a$ .

$$M_{K4} = \Sigma T^{PP} = -X + T_3 - T_2 - T_1 = -225 + 1400 - 1100 - 1100 = -1025 \text{ Нм} = -1,025 \text{ кНм}.$$

Полученные значения откладываем в масштабе на каждом из соответствующих участков вала (рис. 5). После построения эпюры крутящих моментов делаем ее проверку, используя правило проверки правильности построения эпюры крутящих моментов: в тех сечениях вала, где приложены сосредоточенные крутящие моменты, на эпюре будут скачки на их величину в соответствии с направлением хода построения и выбранным правилом знаков.

#### 1.2.4. Определение диаметра вала

Так как сечение вала по длине не меняется, то по условию прочности определим минимальный диаметр вала круглого сплошного сечения:

$$d_{\text{MIN}} \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot |M_{K\text{MAX}}|}{\pi \cdot [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1,175 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 35 \cdot 10^6}} = 0,0555 \text{ м} = 55,5 \text{ мм}.$$

Полученное значение округлим до ближайшего большего, заданного по условию задачи,  $d = 56 \text{ мм}$ .

#### 1.2.5. Построение эпюры углов закручивания

Сначала определим величину полярного момента инерции  $I_p$  при кручении вала круглого сплошного сечения. Так как сечение вала по длине постоянно, то для каждого участка имеем:

$$I_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32} = \frac{3,14 \cdot (0,056)^4}{32} = 0,965 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4.$$

Выражения для углов закручивания на каждом участке вала получены в п. 1.2.2, поэтому определим теперь их численные значения, начиная с левого конца вала.

Заделка неподвижна, поэтому угол закручивания сечения в ней  $\varphi_A = 0 \text{ рад}$ .

Угол поворота сечения **В** относительно неподвижной заделки **А**:

$$\varphi_{BA} = \frac{M_{K4} \cdot L_{BA}}{G \cdot I_p} = \frac{-1,025 \cdot 10^3 \cdot 1,1}{0,4 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 0,965 \cdot 10^{-6}} = -14,47 \cdot 10^{-3} \text{ рад}.$$

Угол поворота сечения **С** относительно неподвижной заделки **А** складывается из суммы углов поворотов сечения **В** относительно **А** и **С** относительно **В**, т. е.:

$$\varphi_{CA} = \varphi_{CB} + \varphi_{BA},$$

где 
$$\varphi_{CB} = \frac{M_{K3} \cdot L_{CB}}{G \cdot I_p} = \frac{0,075 \cdot 10^3 \cdot 1,1}{0,4 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 0,965 \cdot 10^{-6}} = 1,05 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

тогда 
$$\varphi_{CA} = \varphi_{CB} + \varphi_{BA} = 1,05 \cdot 10^{-3} + (-14,47 \cdot 10^{-3}) = -13,42 \cdot 10^{-3} \text{ рад.}$$

Аналогично определим углы закручивания сечений **Д** и **Е** относительно неподвижной заделки **А**:

$$\varphi_{DA} = \varphi_{DC} + \varphi_{CA},$$

где 
$$\varphi_{DC} = \frac{M_{K2} \cdot L_{DC}}{G \cdot I_p} = \frac{1,175 \cdot 10^3 \cdot 1,1}{0,4 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 0,965 \cdot 10^{-6}} = 16,7 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

тогда 
$$\varphi_{DA} = \varphi_{DC} + \varphi_{CA} = 16,7 \cdot 10^{-3} + (-13,42 \cdot 10^{-3}) = 3,28 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$\varphi_{EA} = \varphi_{ED} + \varphi_{DA},$$

где 
$$\varphi_{ED} = \frac{M_{K1} \cdot L_{ED}}{G \cdot I_p} = \frac{-0,225 \cdot 10^3 \cdot 1,1}{0,4 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 0,965 \cdot 10^{-6}} = -3,28 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$\varphi_{EA} = \varphi_{ED} + \varphi_{DA} = 3,28 \cdot 10^{-3} + (-3,28 \cdot 10^{-3}) = 0 \text{ рад.}$$

Полученные значения углов закручивания сечений в соответствии с их знаками откладываем на эпюре в масштабе и соединяем их прямыми линиями (см. рис. 5). Тот факт, что угол поворота правого концевое сечения вала равен нулю, может служить проверкой проведенных вычислений.

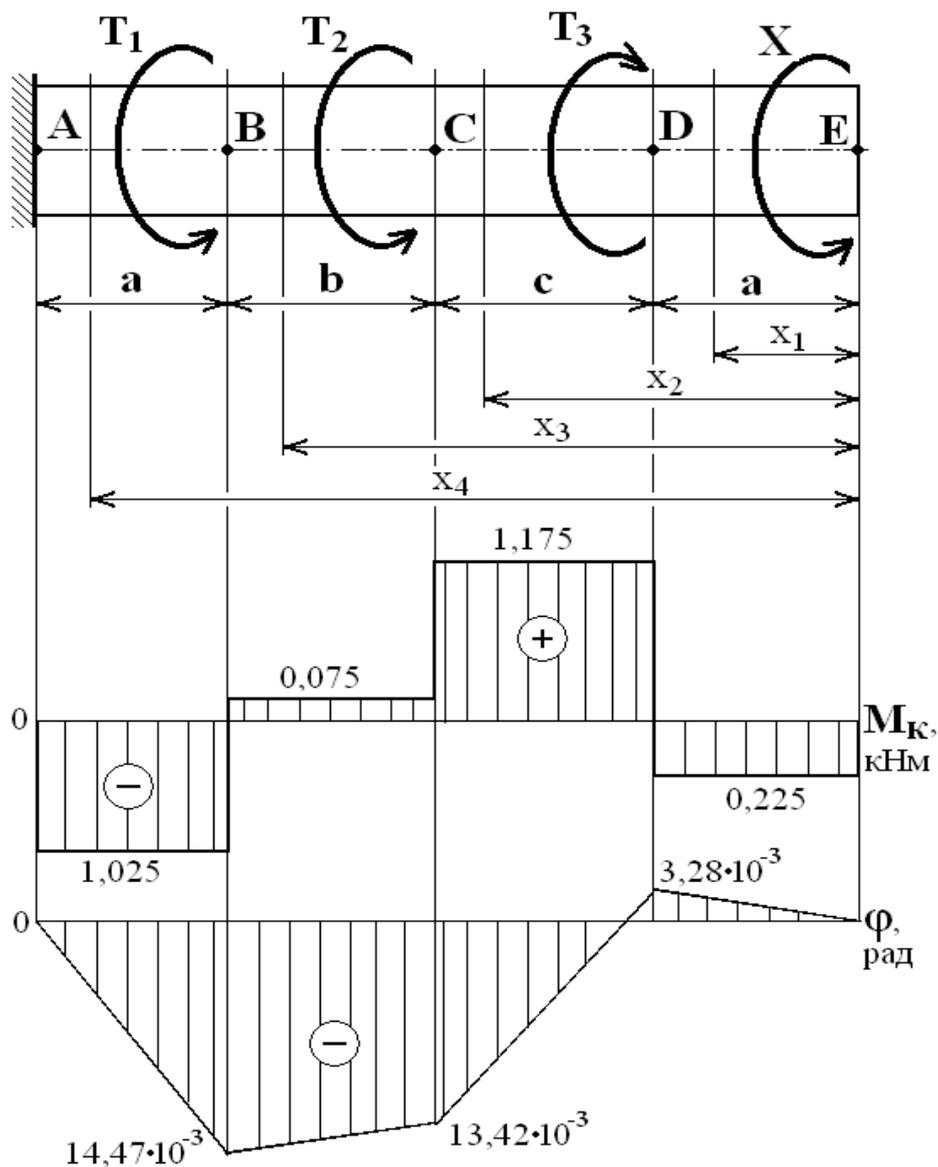


Рисунок 5

### 1.2.6. Определение наибольшего относительного угла закручивания

По эпюре углов закручивания видно (см. рис. 5), что наибольший угол закручивания по абсолютной величине равен  $\varphi_{\text{MAX}} = 14,47 \cdot 10^{-3}$  рад на участке длиной  $a = 1,1$  м, тогда величина наибольшего относительного угла закручивания (рад/м) будет равна:

$$\Delta\varphi = \frac{|\varphi_{\text{MAX}}|}{L_{\text{BA}}} = \frac{14,47 \cdot 10^{-3}}{1,1} = 13,15 \cdot 10^{-3} \text{ рад/м.}$$

## 2. ИЗГИБ

### 2.1. Краткие сведения по теории

Деформация, при которой меняется кривизна геометрической оси, называется *изгибом*. Стержень при изгибе называется *балкой*.

При изгибе стержня за счет действия на него внешней поперечной нагрузки (сосредоточенных сил, моментов, распределенных нагрузок) в поперечных сечениях стержня возникают следующие внутренние силовые факторы: поперечные силы  $Q_Y$  и  $Q_Z$ , изгибающие моменты  $M_Y$  и  $M_Z$ .

Если плоскость, в которой лежат действующие нагрузки, совпадает с одной из главных плоскостей инерции, то такой изгиб называется *прямым*, а если не совпадает, то *косым*. Если величина поперечной силы в сечении не равна нулю, то такой изгиб называется *поперечным*. Если величина поперечной силы в сечении равна нулю и изгибающий момент постоянен, то такой изгиб называется *чистым*.

Далее будет рассмотрена теория прямого поперечного изгиба.

Величина *поперечной силы*  $Q_Y$  в поперечном сечении балки численно равна алгебраической сумме проекций на ось  $Y$  всех внешних сил, действующих по одну сторону (справа или слева) от рассматриваемого сечения. Поперечная сила считается положительной, если она направлена слева вверх и справа вниз. При противоположных направлениях поперечная сила считается отрицательной (рис. 6а).

Величина *изгибающего момента*  $M_Z$  в поперечном сечении балки численно равна алгебраической сумме моментов внешних нагрузок, действующих по одну сторону (справа или слева) от рассматриваемого сечения. Изгибающий момент считается положительным, если он направлен слева от сечения по часовой стрелке, а справа – против часовой стрелки. При противоположных направлениях считается отрицательным (рис. 6б).

*Эпюрой поперечных сил  $Q$  и изгибающих моментов  $M$*  называется график, показывающий изменение соответствующих величин в зависимости от координаты  $X$ .

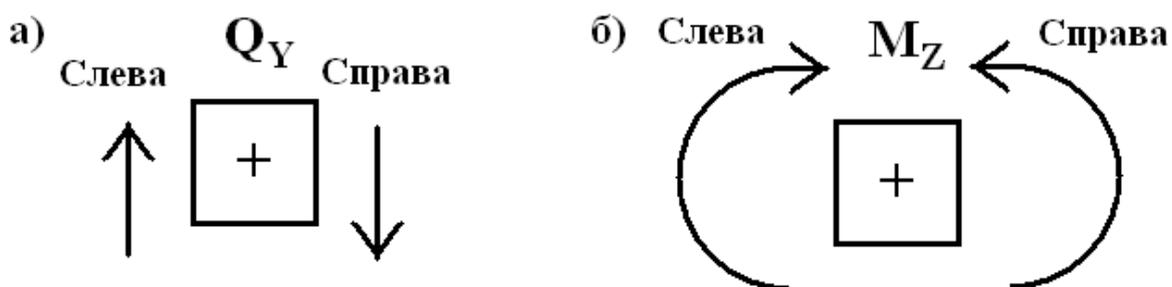


Рисунок 6

**Условие прочности** по нормальным напряжениям при изгибе:

$$\sigma_{\text{MAX}} = \frac{|M_{\text{MAX}}|}{W_Z} \leq [\sigma], \quad (9)$$

где  $\sigma_{\text{MAX}}$  – максимальное нормальное напряжение в поперечном сечении балки;  
 $|M_{\text{MAX}}|$  – наибольшее по модулю значение изгибающего момента, взятое с его эпюры;

$W_Z$  – момент сопротивления поперечного сечения;

$[\sigma]$  – допускаемое нормальное напряжение при изгибе.

При изгибе балки существуют дифференциальные зависимости:

$$\frac{dM(x)}{dx} = Q(x), \quad \frac{dQ(x)}{dx} = q(x). \quad (10)$$

Из них следуют правила проверки построенных эпюр **Q** и **M**:

1. В тех сечениях балки, где приложены сосредоточенные силы, включая опорные реакции, на эпюре **Q** будут скачки на их величину, а на эпюре **M** – излом эпюры.

2. В тех сечениях балки, где приложены сосредоточенные моменты, включая опорные в заделках, на эпюре **M** будут скачки на их величину, а на эпюре **Q** особенностей не будет.

3. На участке, где действует равномерно распределенная нагрузка **q**, на эпюре **Q** будет наклонная линия, а на эпюре **M** – парабола, выпуклостью направленная навстречу нагрузке **q**.

4. Если эпюра **Q** проходит через ноль и меняет знак, то в этом сечении эпюра **M** будет иметь экстремум.

5. На участке, где отсутствует равномерно распределенная нагрузка **q**, эпюра **Q** будет представлена горизонтальной линией, а эпюра **M** – наклонной к оси **x** прямой.

6. На участке, где поперечная сила **Q** положительна, изгибающий момент **M** возрастает, а если сила **Q** отрицательна, то момент **M** убывает.

## 2.2. Пример выполнения задачи № 2

Для заданных двух схем балок (рис. 8) требуется написать выражения **Q** и **M** для каждого участка в общем виде, построить эпюры **Q** и **M**, найти  $M_{\text{MAX}}$  и подобрать:

1. Для схемы (а) деревянную балку круглого поперечного сечения при  $[\sigma] = 8 \text{ МПа}$ .

2. Для схемы (б) стальную балку двутаврового поперечного сечения при  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ . Данные взять из табл. 2.

### 2.2.1. Исходные данные для деревянной балки

$M_0 = 30$  кНм;  $q = 10$  кН/м;  $a = 1$  м;  $b = 1$  м;  $c = 1$  м;  $[\sigma] = 8$  МПа (рис. 7).

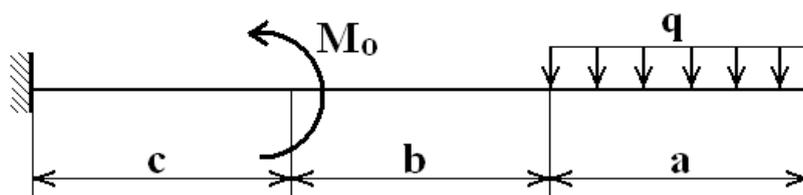
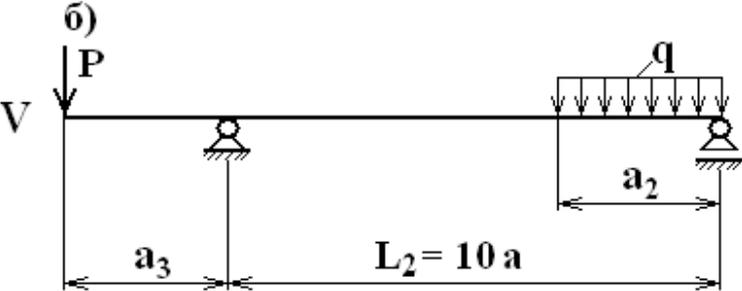
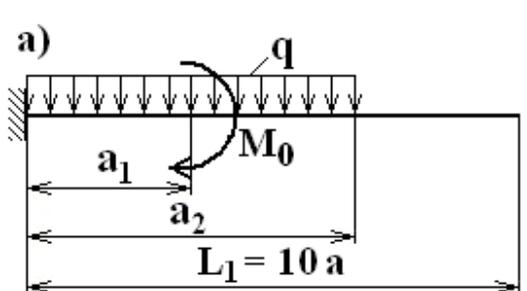
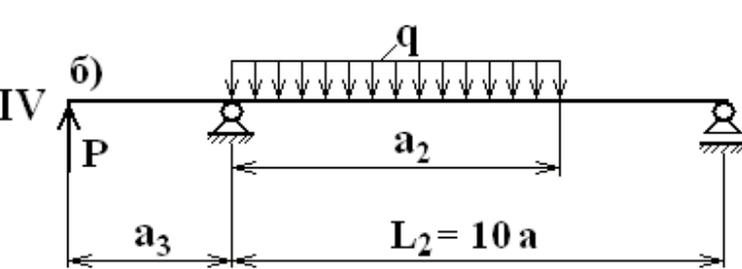
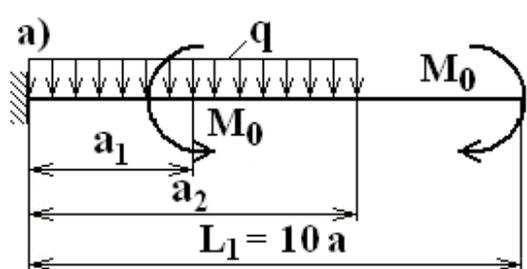
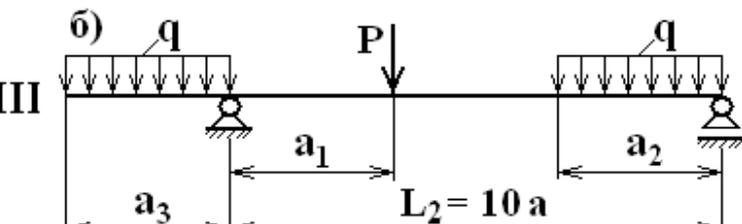
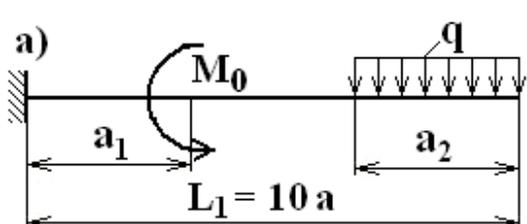
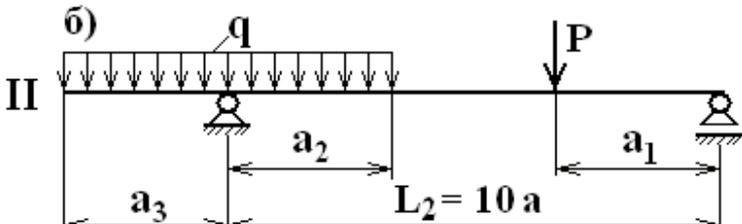
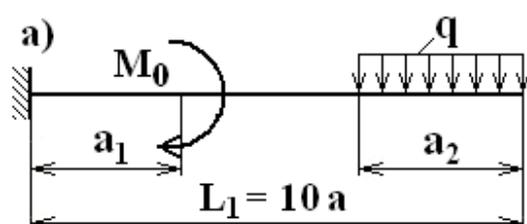
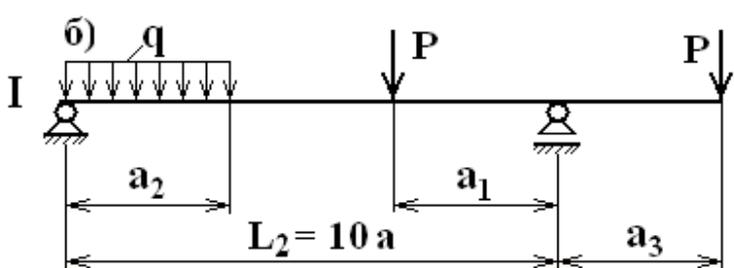
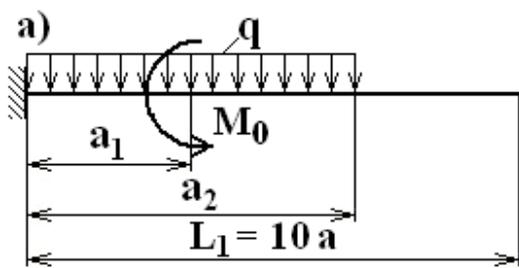


Рисунок 7

Таблица 2 – Исходные данные к задаче № 2

№ строки	Схема по рис. 8	$L_1$	$L_2$	Расстояния в долях пролета			$M_0$ , кНм	Сосредоточенная сила $P$ , кН	$q$ , кН/м
		м	$a_1/a$	$a_2/a$	$a_3/a$				
1	I	1,1	6	1	9	1	10	10	10
2	II	1,2	7	2	8	2	20	20	20
3	III	1,3	3	3	7	3	3	3	3
4	IV	1,4	4	4	6	4	4	4	4
5	V	1,5	5	5	5	5	5	5	5
6	VI	1,6	6	6	6	1	6	6	6
7	VII	1,7	7	7	7	2	7	7	7
8	VIII	1,8	8	8	8	3	8	8	8
9	IX	1,9	9	9	9	4	9	9	9
0	X	2,0	10	10	10	5	10	10	10
	е	д	е	г	д	е	г	д	е



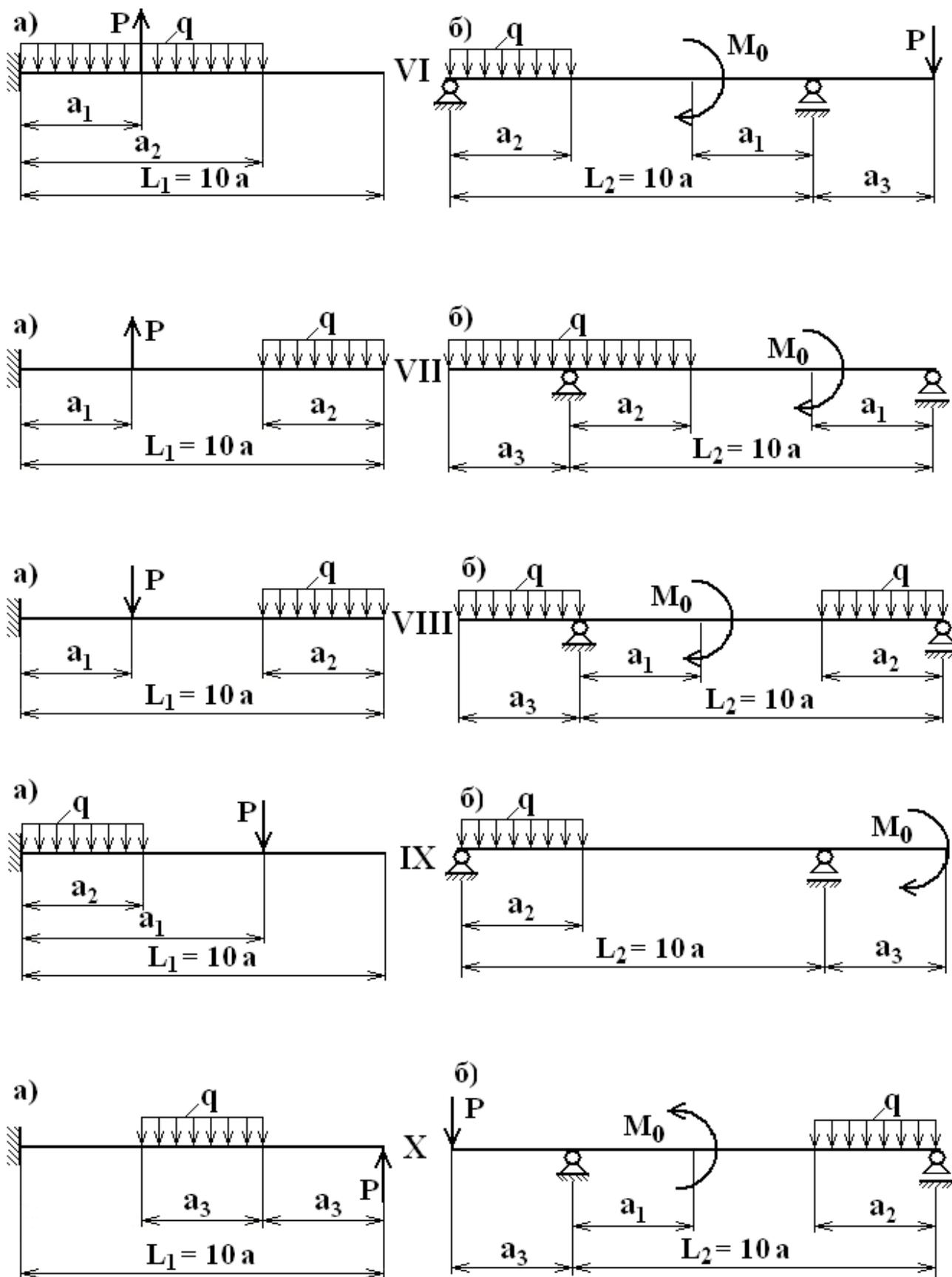


Рисунок 8

### 2.2.2. Построение эпюр поперечной силы и изгибающего момента

Не вычисляя из уравнений равновесия значения реакций в заделке, используя метод сечений, запишем выражения для поперечной силы и изгибающего момента по участкам балки. Будем двигаться при этом справа налево в сторону заделки, начиная со свободного конца и используя правило знаков согласно рис. 6.

Границы первого участка:  $0 \leq x_1 \leq a$  (рис. 9).

$$Q_1 = \Sigma Q^{PP} = q \cdot x_1 = 10 \cdot x_1.$$

$$M_1 = \Sigma M^{PP} = -0,5 \cdot q \cdot x_1 \cdot x_1 = -5 \cdot x_1^2.$$

При  $x_1 = 0$  м,  $Q_1 = 0$  кН,  $M_1 = 0$  кНм.

При  $x_1 = a = 1$  м,  $Q_1 = 10$  кН,  $M_1 = -5$  кНм.

Так как эпюра  $Q$  на первом участке не меняет свой знак, то на эпюре  $M$  не будет экстремального значения. Поэтому для построения параболы на эпюре  $M$  возьмем точку посередине первого участка и определим значение изгибающего момента в ней:  $x_1 = 0,5 \cdot a = 0,5$  м,  $M_1 = -1,25$  кНм.

Границы второго участка:  $a \leq x_2 \leq a + b$ .

$$Q_2 = \Sigma Q^{PP} = q \cdot a = 10 \text{ кН.}$$

$$M_2 = \Sigma M^{PP} = -q \cdot a \cdot (x_2 - 0,5 \cdot a) = -10 \cdot (x_2 - 0,5).$$

При  $x_2 = a = 1$  м,  $M_2 = -5$  кНм.

При  $x_2 = a + b = 2$  м,  $M_2 = -15$  кНм.

Границы третьего участка:  $a + b \leq x_3 \leq a + b + c$ .

$$Q_3 = \Sigma Q^{PP} = q \cdot a = 10 \text{ кН.}$$

$$M_3 = \Sigma M^{PP} = -q \cdot a \cdot (x_3 - 0,5 \cdot a) + M_0 = -10 \cdot (x_3 - 0,5) + 30.$$

При  $x_3 = a + b = 2$  м,  $M_3 = 15$  кНм.

При  $x_3 = a + b + c = 3$  м,  $M_3 = 5$  кНм.

Полученные значения откладываем в масштабе на каждом из соответствующих участков балки (см. рис. 9) и делаем проверку эпюр.

### 2.2.3. Подбор поперечного сечения деревянной балки

Для подбора деревянной балки круглого поперечного сечения используем условие прочности по нормальным напряжениям при изгибе:

$$\sigma_{\text{MAX}} = \frac{|M_{\text{MAX}}|}{W_Z} \leq [\sigma],$$

где  $\sigma_{\text{MAX}}$  – максимальное нормальное напряжение в поперечном сечении балки;

$|M_{\text{MAX}}| = 15$  кНм – наибольшее по модулю значение изгибающего момента;

$[\sigma]$  – допускаемое нормальное напряжение при изгибе,  $[\sigma] = 8$  МПа;

$W_Z$  – момент сопротивления площади поперечного сечения балки.

Для круга диаметром  $d$  момент сопротивления:

$$W_z = \frac{\pi \cdot d^3}{32}.$$

Найдем минимальный диаметр балки круглого поперечного сечения:

$$d_{\text{MIN}} \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot |M_{\text{MAX}}|}{\pi \cdot [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 15 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 8 \cdot 10^6}} = 0,267 \text{ м.}$$

Полученное значение округлим до ближайшего большего, получим  $d = 0,28 \text{ м}$ .

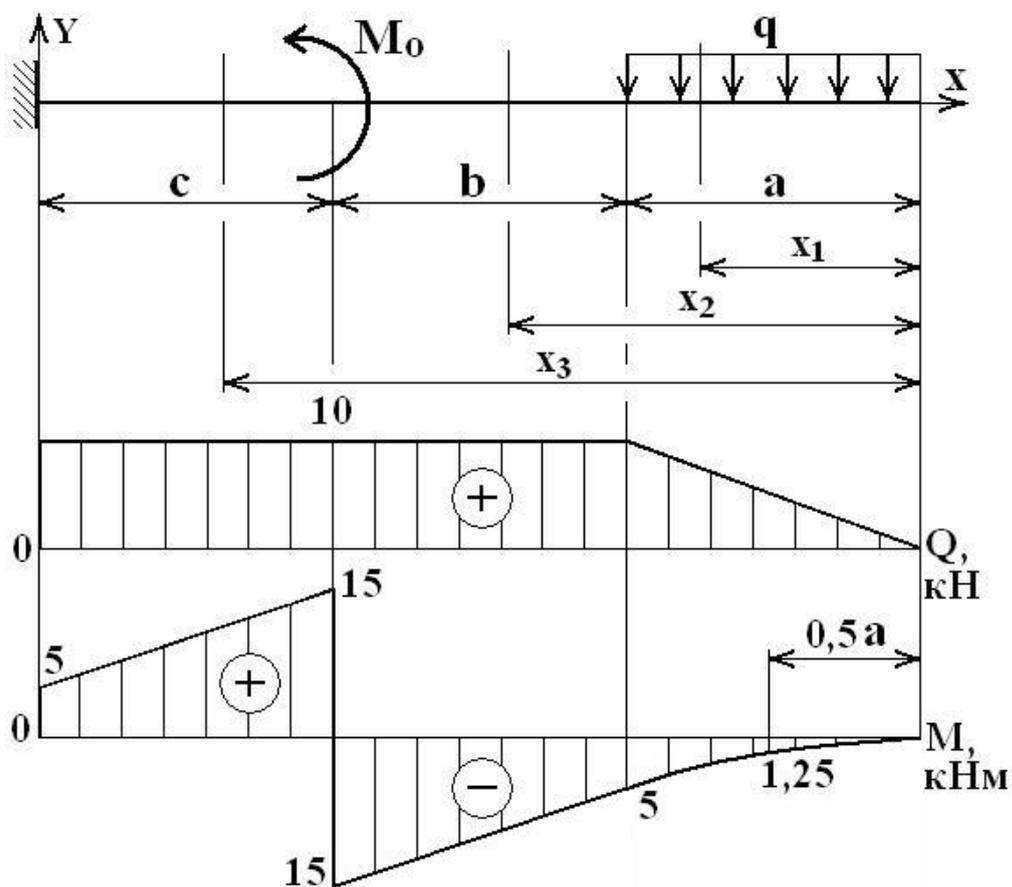


Рисунок 9

#### 2.2.4. Исходные данные для стальной балки

$q = 20 \text{ кН/м}$ ;  $a = 1 \text{ м}$ ;  $b = 2 \text{ м}$ ;  $c = 1 \text{ м}$ ;  $d = 3 \text{ м}$ ;  $P = 25 \text{ кН}$ ;  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$   
(рис. 10).

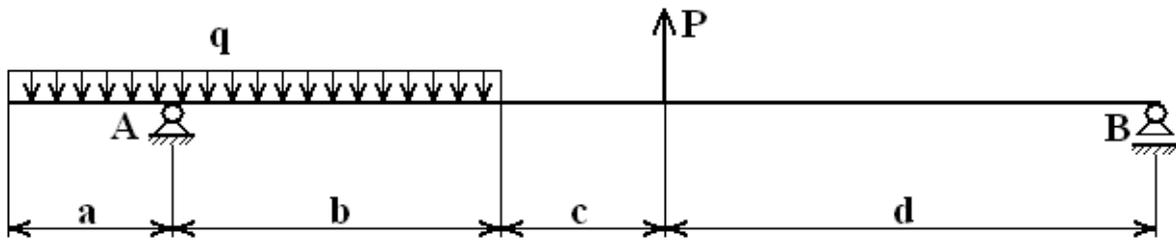


Рисунок 10

### 2.2.5. Построение эпюр поперечной силы и изгибающего момента

Перед построением эпюр в случае шарнирных балок следует определить реакции в опорных закреплениях, используя уравнения равновесия статики. Для этого отбросим опоры **A** и **B** и заменим их действие реакциями  $Y_A$  и  $Y_B$ , направив их предварительно вертикально вверх. Так как горизонтальных сил к балке не приложено, то  $X_A = 0$ . Распределенную нагрузку интенсивностью  $q$  на участках **a** и **b** приведем к соответствующим равнодействующим в виде сосредоточенных сил  $q \cdot a$  и  $q \cdot b$ , направленных вертикально вниз из середины каждого участка **a** и **b** (рис. 11).

Для нахождения реакции  $Y_B$  составим сумму моментов всех действующих сил относительно точки **A**:

$$\sum_{i=1}^n M_{Ai} = 0, \quad q \cdot a \cdot \frac{a}{2} - q \cdot b \cdot \frac{b}{2} + P \cdot (b + c) + Y_B \cdot (b + c + d) = 0.$$

$$20 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} - 20 \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} + 25 \cdot (2 + 1) + Y_B \cdot (2 + 1 + 3) = 0, \quad Y_B = -7,5 \text{ кН.}$$

Так как значение реакции  $Y_B$  при выбранном направлении оказалось отрицательным, то действие реакции  $Y_B$  следует изменить на расчетной схеме на противоположное, т. е. вниз, и считать ее положительной величиной (рис. 12).

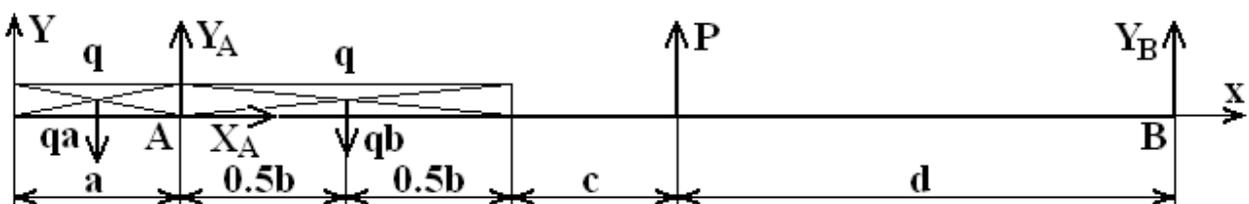


Рисунок 11

При составлении суммы моментов всех действующих сил относительно точки **В** (для нахождения реакции  $Y_A$ ) распределенную нагрузку  $q$  удобнее привести к одной сосредоточенной силе  $q \cdot (a+b)$ , направленной вертикально вниз и действующей по середине участка  $(a + b)$ , тогда

$$\sum_{i=1}^n M_{Bi} = 0, \quad -P \cdot d - Y_A \cdot (b + c + d) + q \cdot (a + b) \cdot \left(d + c + \frac{a + b}{2}\right) = 0,$$

$$-25 \cdot 3 - Y_A \cdot (2 + 1 + 3) + 20 \cdot (1 + 2) \cdot \left(3 + 1 + \frac{1 + 2}{2}\right) = 0, \quad Y_A = 42,5 \text{ кН.}$$

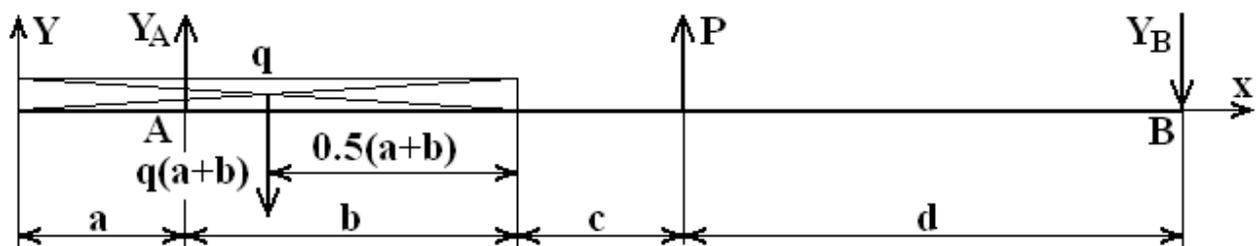


Рисунок 12

Так как значение реакции  $Y_A$  при выбранном направлении оказалось положительным, то действие реакции  $Y_A$  направлено вверх (см. рис. 12).

Сделаем проверку найденных реакций:

$$\sum_{i=1}^n Y_i = 0, \quad P + Y_A - Y_B - q \cdot (a + b) = 25 + 42,5 - 7,5 - 20 \cdot (1 + 2) =$$

$$= 67,5 - 67,5 = 0.$$

Проверка сошлась, теперь на расчетной схеме все известно и можно приступить к построению эпюр поперечной силы и изгибающего момента.

Заданная балка состоит из четырех участков. Рассечем ее последовательно на каждом из них и запишем выражения для поперечной силы и изгибающего момента, действующих по одну сторону от рассматриваемого сечения, используя правило знаков согласно рис. 6.

Границы первого участка:  $0 \leq x_1 \leq d$  (рис. 13).

$$Q_1 = \Sigma Q^{PP} = Y_B = 7,5 \text{ кН.}$$

$$M_1 = \Sigma M^{PP} = -Y_B \cdot x_1 = -7,5 \cdot x_1.$$

При  $x_1 = 0$  м,  $M_1 = 0$  кНм.

При  $x_1 = d = 3$  м,  $M_1 = -22,5$  кНм.

Границы второго участка:  $d \leq x_2 \leq d + c$ .

$$Q_2 = \Sigma Q^{PP} = Y_B - P = 7,5 - 25 = -17,5 \text{ кН.}$$

$$M_2 = \Sigma M^{PP} = -Y_B \cdot x_2 + P \cdot (x_2 - d) = -7,5 \cdot x_2 + 25 \cdot (x_2 - 3).$$

При  $x_2 = d = 3$  м,  $M_2 = 22,5$  кНм.

При  $x_2 = d + c = 4$  м,  $M_2 = -5$  кНм.

Границы третьего участка:  $0 \leq x_3 \leq a$ .

$$Q_3 = \Sigma Q^{IEB} = -q \cdot x_3 = -20 \cdot x_3.$$

$$M_3 = \Sigma M^{IEB} = -0,5 \cdot q \cdot x_3 \cdot x_3 = -10 \cdot x_3^2.$$

При  $x_3 = 0$  м,  $Q_3 = 0$  кН,  $M_3 = 0$  кНм.

При  $x_3 = a = 1$  м,  $Q_3 = -20$  кН,  $M_3 = -10$  кНм.

Так как эпюра  $Q$  на третьем участке не меняет свой знак, то на эпюре  $M$  не будет экстремального значения. Поэтому для построения параболы на эпюре  $M$  возьмем третью точку посередине рассматриваемого участка и определим значение изгибающего момента в ней:

$$x_3 = 0,5 \cdot a = 0,5 \text{ м}; M_3 = -2,5 \text{ кНм.}$$

Границы четвертого участка:  $a \leq x_4 \leq a + b$ .

$$Q_4 = \Sigma Q^{IEB} = -q \cdot x_4 + Y_A = -20 x_4 + 42,5.$$

$$M_4 = \Sigma M^{IEB} = -0,5 \cdot q \cdot x_4 \cdot x_4 + Y_A \cdot (x_4 - a) = -10 \cdot x_4^2 + 42,5 \cdot (x_4 - 1).$$

При  $x_4 = a = 1$  м,  $Q_4 = 22,5$  кН,  $M_4 = -10$  кНм.

При  $x_4 = a + b = 3$  м,  $Q_4 = -17,5$  кН,  $M_4 = -5$  кНм.

Так как на данном участке эпюра  $Q$  меняет знак, то, приравняв выражение  $Q_4$  к нулю, найдем координату, при которой на эпюре  $M$  будет экстремум:

$$Q_4 = -q \cdot x_{04} + Y_A = -20 \cdot x_{04} + 42,5 = 0,$$

$$\text{откуда } x_{04} = Y_A / q = 42,5 / 20 = 2,125 \text{ м.}$$

Экстремальное значение изгибающего момента:

$$M^{\text{EXT}} = -0,5 \cdot q \cdot x_{04} \cdot x_{04} + Y_A \cdot (x_{04} - a) = -10 \cdot x_{04}^2 + 42,5 \cdot (x_{04} - 1) = -10 \cdot (2,125)^2 + 42,5 \cdot (2,125 - 1) = 2,66 \text{ кНм.}$$

В качестве дальнейшего обсуждения рассматриваемого вопроса можно показать, что значения эпюр не изменятся, если делать сечения, идя при этом с другой стороны. Так, например, сделаем сечение на участке  $b$  и рассмотрим оставшуюся часть балки с правой стороны.

Границы пятого участка:  $d + c \leq x_5 \leq d + c + b$ .

$$Q_5 = \Sigma Q^{IP} = Y_B - P + q \cdot (x_5 - (d + c)) = -17,5 + 25 \cdot (x_5 - 4).$$

$$M_5 = \Sigma M^{IP} = -Y_B \cdot x_5 + P \cdot (x_5 - d) - 0,5 \cdot q \cdot (x_5 - (d + c))^2 = -7,5 \cdot x_5 + 25 \cdot (x_5 - 3) - 10 \cdot (x_5 - 4)^2.$$

При  $x_5 = d + c = 4$  м,  $Q_5 = -17,5$  кН,  $M_5 = -5$  кНм.

При  $x_5 = d + c + b = 6$  м,  $Q_5 = 22,5$  кН,  $M_5 = -10$  кНм.

Определим экстремальное значение изгибающего момента на этом участке:

$$Q_5 = Y_B - P + q \cdot (x_{05} - (d + c)) = -17,5 + 25 \cdot (x_{05} - 4) = 0,$$

$$\text{откуда } x_{05} = 17,5 / 20 + 4 = 4,875 \text{ м.}$$

$$M^{\text{EXT}} = -Y_B \cdot x_{05} + P \cdot (x_{05} - d) - 0,5 \cdot q \cdot (x_{05} - (d + c))^2 =$$

$$-7,5 \cdot x_{05} + 25 \cdot (x_{05} - 3) - 10 \cdot (x_{05} - 4)^2 =$$

$$-7,5 \cdot 4,875 + 25 \cdot (4,875 - 3) - 10 \cdot (4,875 - 4)^2 = 2,66 \text{ кНм.}$$

Полученные значения откладываем в масштабе на каждом из соответствующих участков балки (см. рис. 13). После построения эпюры делаем ее проверку, используя правила проверки правильности построения эпюр для поперечной силы и изгибающего момента.

### **2.2.6. Подбор поперечного сечения стальной балки**

Для подбора стальной балки двутаврового поперечного сечения используем условие прочности по нормальным напряжениям при изгибе:

$$\sigma_{\text{MAX}} = \frac{|M_{\text{MAX}}|}{W_Z} \leq [\sigma],$$

где  $\sigma_{\text{MAX}}$  – максимальное нормальное напряжение в поперечном сечении балки;

$|M_{\text{MAX}}|$  – наибольшее по модулю значение изгибающего момента;

$|M_{\text{MAX}}| = 22,5 \text{ кНм}$ ;

$[\sigma]$  – допускаемое нормальное напряжение при изгибе;

$[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ ;

$W_Z$  – момент сопротивления площади поперечного сечения балки.

Выразим момент сопротивления из условия прочности:

$$W_Z \geq \frac{|M_{\text{MAX}}|}{[\sigma]} = \frac{22,5 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0,1406 \text{ м}^3 = 140,6 \text{ см}^3.$$

По сортаменту принимаем двутавр № 18 ГОСТ 8239-93, у которого момент сопротивления  $W_Z = 143 \text{ см}^3$ .

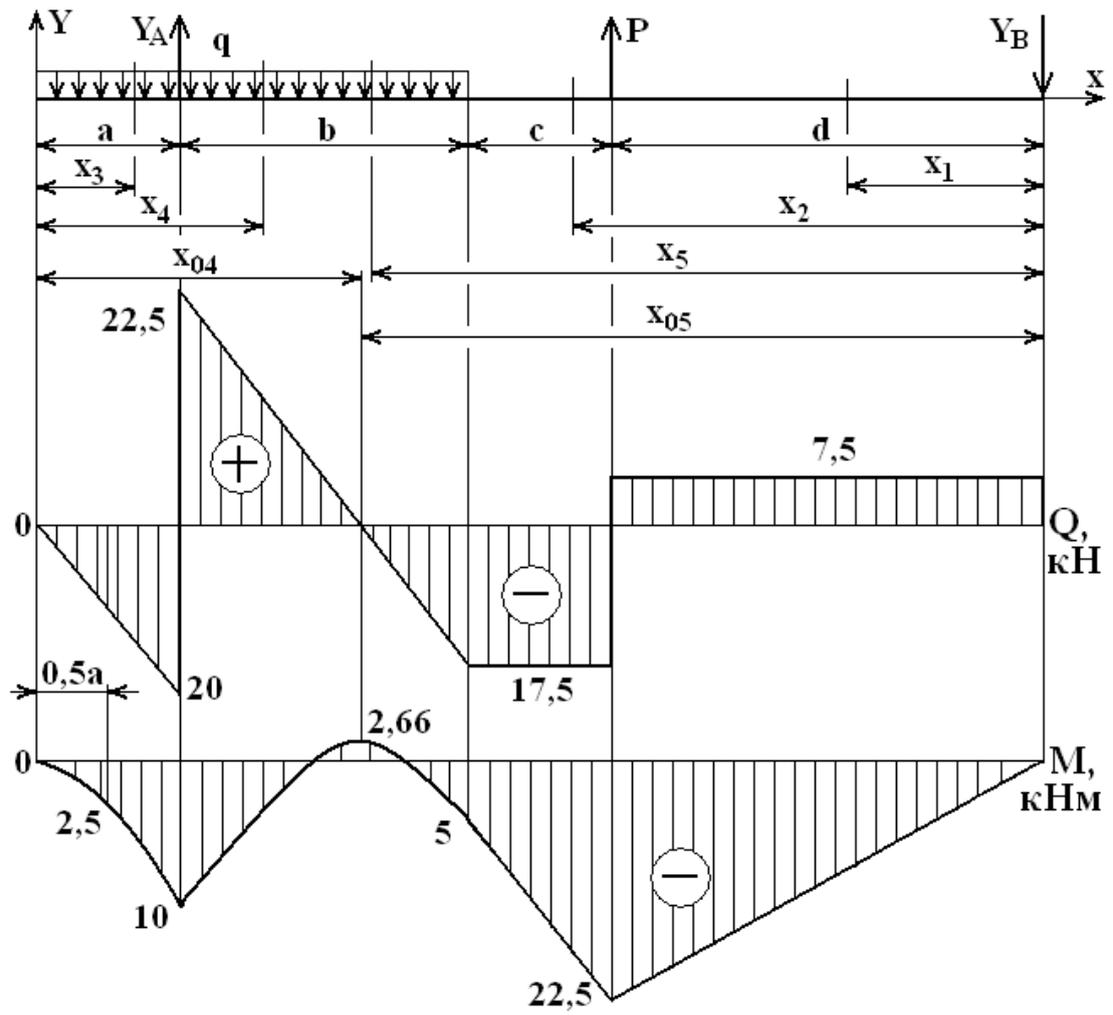


Рисунок 13

### 3. СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

#### 3.1. Краткие сведения по теории

Деталь испытывает сложное сопротивление тогда, когда она испытывает одновременно несколько простейших видов деформации.

В общем случае нагружения в поперечном сечении стержня действуют шесть усилий (продольная сила  $N$ , два изгибающих момента  $M_y$  и  $M_z$ , две поперечные силы  $Q_y$  и  $Q_z$ , крутящий момент  $M_k$ ).

Таким образом, стержень может испытывать следующие виды деформации: поперечные изгибы в горизонтальной и вертикальной плоскостях, продольную деформацию и кручение.

Совместное действие изгиба в главных плоскостях инерции  $XOY$  и  $XOZ$  называется сложным (косым) изгибом (рис. 14).

Стержень испытывает внецентренное действие нагрузки, когда продольная сила (сжимающая или растягивающая) приложена эксцентрично, т. е. есть направление ее действия не совпадает с продольной осью стержня (рис. 15).

При совместном действии изгибающих моментов и продольных сил стержень испытывает сложный изгиб с продольной деформацией (рис. 16).

Изгиб с кручением также является одним из видов сложного сопротивления.

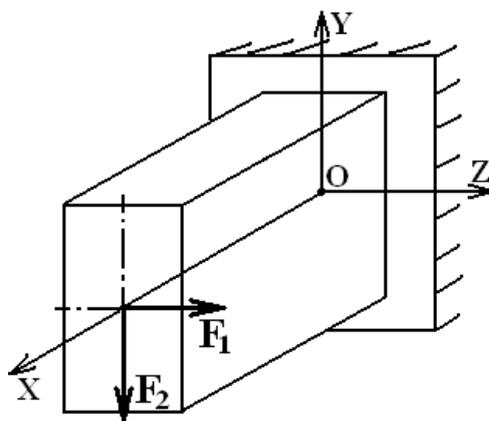


Рисунок 14

В машиностроительных конструкциях характерным примером деталей, работающих на изгиб и кручение, являются валы различных машин.

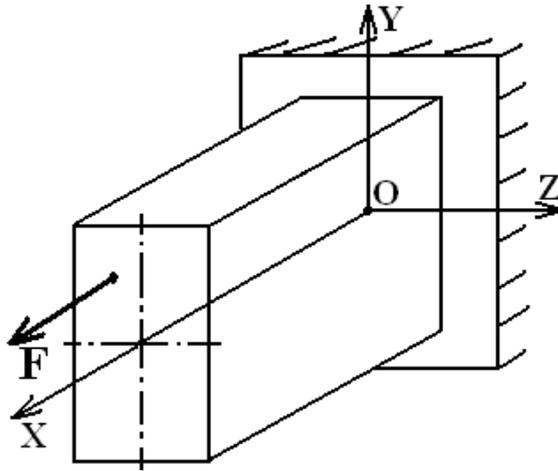


Рисунок 15

Если стержень достаточно жесткий, то расчет можно вести по недеформированной схеме и при определении нормальных и касательных напряжений применить принцип суперпозиции:

$$\sigma = \sigma(N) + \sigma(M_z) + \sigma(M_Y) + \sigma(M_K), \quad (11)$$

$$\tau = \tau(Q_Y) + \tau(Q_z) + \tau(M_K). \quad (12)$$

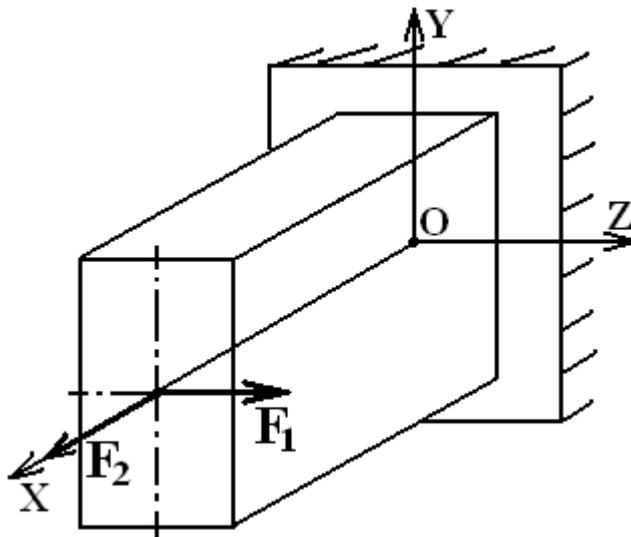


Рисунок 16

При работе вала в его поперечных сечениях преобладающими являются нормальные напряжения  $\sigma_{II}$  от изгиба (если нет продольной деформации) и

касательные напряжения  $\tau_{\text{кр}}$  от кручения.

Проверку прочности валов, изготовленных из пластичных материалов, следует производить по третьей или четвертой теории прочности, так как они используются для пластичных материалов.

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma_{\text{И}}^2 + 4\tau_{\text{кр}}^2} \leq [\sigma], \quad (13)$$

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma_{\text{И}}^2 + 3\tau_{\text{кр}}^2} \leq [\sigma], \quad (14)$$

где  $[\sigma]$  – допускаемое нормальное напряжение.

Эти неравенства являются условиями прочности валов при одновременном их изгибе с кручением. Они должны выполняться во всех сечениях вала.

Для круглых поперечных сечений полярный момент сопротивления равен удвоенному моменту сопротивления относительно любой центральной оси ( $W_P = 2 \cdot W_Z = 2 \cdot W_Y$ ).

Наибольшие значения нормального и касательного напряжений для круглого сплошного вала достигаются в точках на его контуре, и они определяются, соответственно, следующими формулами (рис. 17):

$$\sigma_{\text{И}} = \frac{M_{\text{И}}}{W_Z}, \quad (15)$$

$$\tau_{\text{кр}} = \frac{M_{\text{к}}}{W_P} = \frac{M_{\text{к}}}{2 \cdot W_Z}. \quad (16)$$

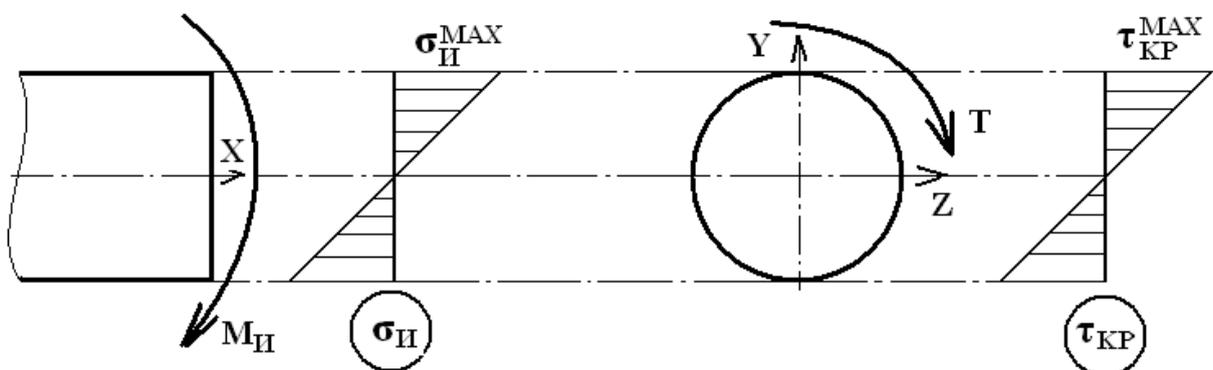


Рисунок 17

Т. е. при расчете элементов, работающих одновременно на изгиб и кручение, в первую очередь необходимо выяснять расчетные значения изгибающих  $M_{\text{И}}$  и крутящих моментов  $M_{\text{к}}$ .

Подставив выражения для напряжений в условия прочности, получим:

$$\sigma^{\text{III}}_{\text{ЭКВ}} = \frac{\sqrt{M_{\text{И}}^2 + M_{\text{К}}^2}}{W_Z} \leq [\sigma], \quad (17)$$

$$\sigma^{\text{IV}}_{\text{ЭКВ}} = \frac{\sqrt{M_{\text{И}}^2 + 0,75 \cdot M_{\text{К}}^2}}{W_Z} \leq [\sigma]. \quad (18)$$

Выражения, стоящие в числителе, назовем эквивалентными моментами:

$$M^{\text{III}}_{\text{ЭКВ}} = \sqrt{M_{\text{И}}^2 + M_{\text{К}}^2}, \quad (19)$$

$$M^{\text{IV}}_{\text{ЭКВ}} = \sqrt{M_{\text{И}}^2 + 0,75 \cdot M_{\text{К}}^2}. \quad (20)$$

Вал изгибается в горизонтальной и вертикальной плоскостях, но так как поперечное сечение круглое, то результирующий изгибающий момент определяется по формуле:

$$M_{\text{И}} = \sqrt{M_Z^2 + M_Y^2}, \quad (21)$$

т. е. 
$$M^{\text{III}}_{\text{ЭКВ}} = \sqrt{M_Z^2 + M_Y^2 + M_{\text{К}}^2}, \quad (22)$$

$$M^{\text{IV}}_{\text{ЭКВ}} = \sqrt{M_Z^2 + M_Y^2 + 0,75 \cdot M_{\text{К}}^2}. \quad (23)$$

В общем случае  $M_Y$ ,  $M_Z$  и  $M_{\text{К}}$ , а следовательно, и эквивалентные моменты изменяются по длине вала. Для проверки прочности вала необходимо знать максимальную величину эквивалентного момента  $M_{\text{ЭКВ, макс}}$ .

Часто по виду эпюр  $M_Y$ ,  $M_Z$  и  $M_{\text{К}}$  можно сразу определить наиболее опасное сечение, т. е. сечение, где эквивалентный момент максимален. В некоторых случаях приходится рассматривать два-три сечения, определять в них значение эквивалентного момента и таким образом найти  $M_{\text{ЭКВ, макс}}$ .

Подбор сечения сплошного вала, т. е. определение его диаметра, осуществляется из условия прочности:

$$\frac{M_{\text{ЭКВ,МАХ}}}{W_Z} \leq [\sigma]. \quad (24)$$

Для круглых поперечных сечений:

$$W_Z = \frac{\pi \cdot d^3}{32}, \quad (25)$$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{\text{ЭКВ,МАХ}}}{\pi \cdot [\sigma]}}. \quad (26)$$

Полученное значение диаметра следует округлить до ближайшего большего из нормального ряда чисел.

### 3.2. Пример выполнения задачи № 3

Шкив диаметром  $D_1$  и с углом наклона ветвей ремня к горизонту  $\alpha_1$  делает  $n$  оборотов в минуту и передает мощность  $P$  кВт. Два других шкива имеют одинаковый диаметр  $D_2$  и одинаковые углы наклона ветвей ремня к горизонту  $\alpha_2$ , и каждый из них передает мощность  $0,5 \cdot P$  (рис. 18).

Требуется:

- 1) определить моменты, приложенные к шкивам, по заданным  $P$  и  $n$ ;
- 2) построить эпюры крутящих моментов  $M_K$ ;
- 3) определить окружные усилия  $F_{t1}$  и  $F_{t2}$ , действующие на шкивы, по заданным диаметрам шкивов  $D_1$  и  $D_2$ ;
- 4) определить давления на вал, принимая их равными трем окружным усилиям;
- 5) определить силы, изгибающие вал в горизонтальной и вертикальной плоскостях (вес шкивов и вала не учитывать);
- 6) построить эпюры изгибающих моментов от горизонтальных сил  $M_Y$  и от вертикальных сил  $M_Z$ ;
- 7) построить эпюры суммарных изгибающих моментов, пользуясь формулой  $M_{\text{И}} = \sqrt{M_Z^2 + M_Y^2}$ ;
- 8) при помощи эпюр  $M_K$  и  $M_{\text{И}}$  найти опасное сечение и определить максимальный эквивалентный момент (по третьей теории прочности);
- 9) подобрать диаметр вала  $d$  при  $[\sigma] = 70 \text{ МПа}$  и округлить его значение до ближайшего большего, равного: **30, 32, 34, 35, 36, 38, 40, 42, 45, 47, 48, 50, 52, 53, 55, 56, 60, 62, 63, 65, 67, 70, 71, 72, 80, 85, 90, 95, 100 мм.**

Данные взять из табл. 3.

Таблица 3 – Исходные данные для задачи № 3

№ строки	Схема по рис. 18	P, кВт	n, об / мин	a	b	c	D <sub>1</sub>	D <sub>2</sub>	α <sub>1</sub> , град	α <sub>2</sub> , град
1	I	10	100	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	10	10
2	II	20	200	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	20	20
3	III	30	300	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	30	30
4	IV	40	400	1,4	1,4	1,4	1,4	1,4	40	40
5	V	50	500	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	50	50
6	VI	60	600	1,6	1,6	1,6	0,6	0,6	60	60
7	VII	70	700	1,7	1,7	1,7	0,7	0,7	70	70
8	VIII	80	800	1,8	1,8	1,8	0,8	0,8	80	80
9	IX	90	900	1,9	1,9	1,9	0,9	0,9	90	90
0	X	100	1000	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	0	0
	<i>e</i>	<i>δ</i>	<i>e</i>	<i>z</i>	<i>δ</i>	<i>e</i>	<i>δ</i>	<i>e</i>	<i>δ</i>	<i>e</i>

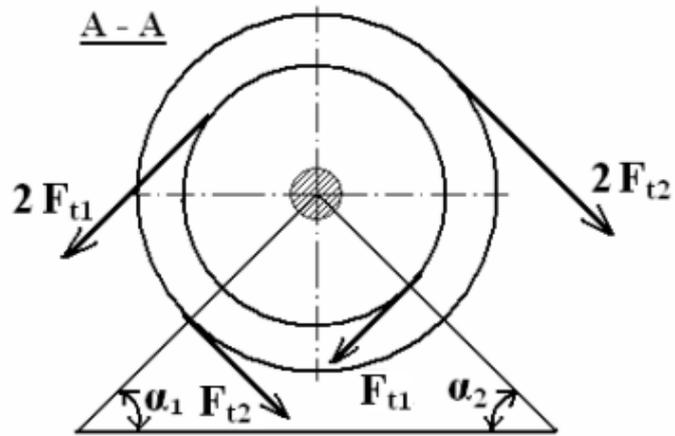
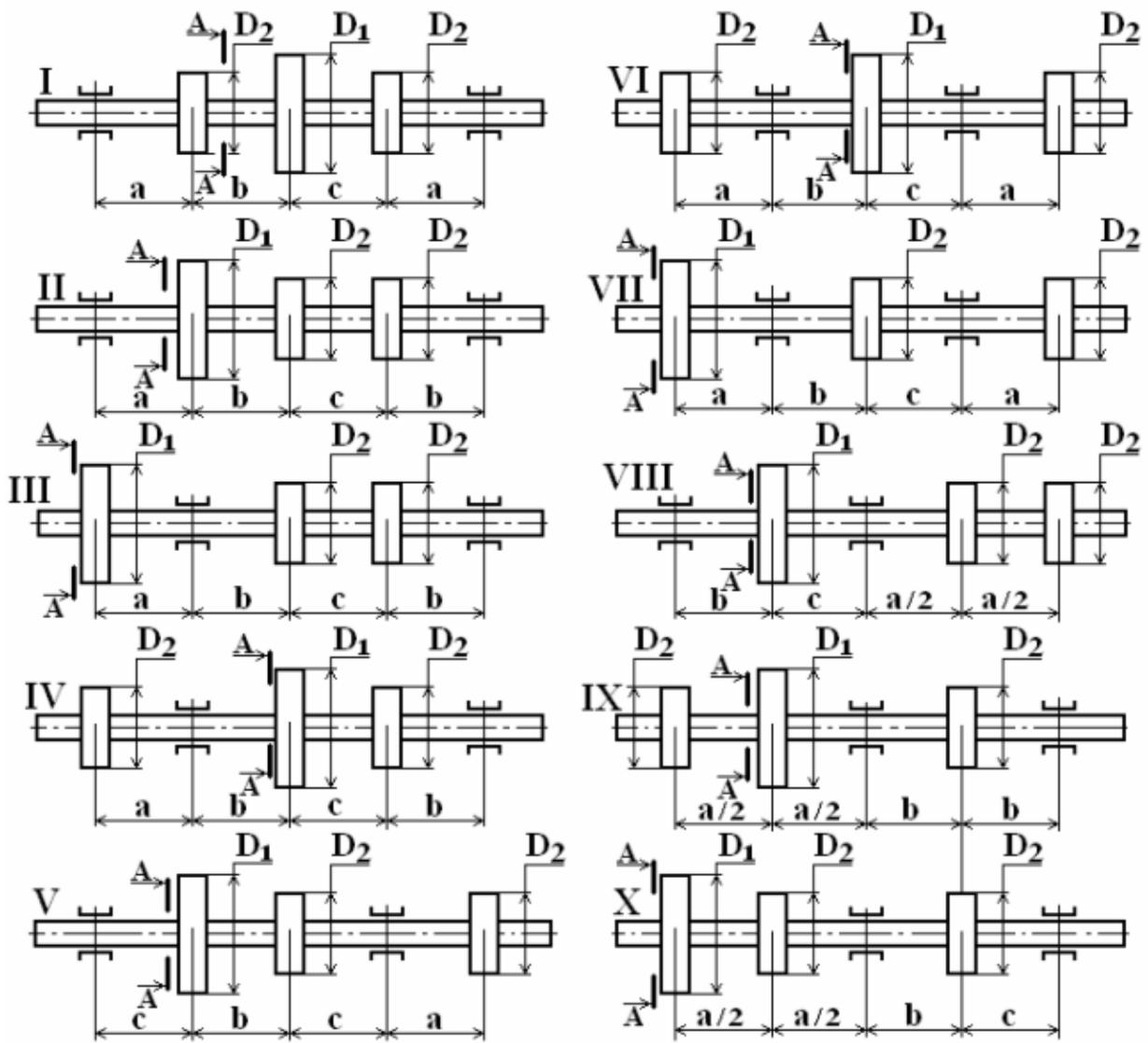


Рисунок 18

### 3.2.1. Исходные данные

$P = 60$  кВт;  $n = 100$  об/мин;  $a = 1,4$  м;  $b = 1,1$  м;  $c = 1,1$  м;  $D_1 = 0,6$  м;  
 $D_2 = 1,1$  м;  $\alpha_1 = 60^\circ$ ;  $\alpha_2 = 10^\circ$  (рис. 19а и 19б).

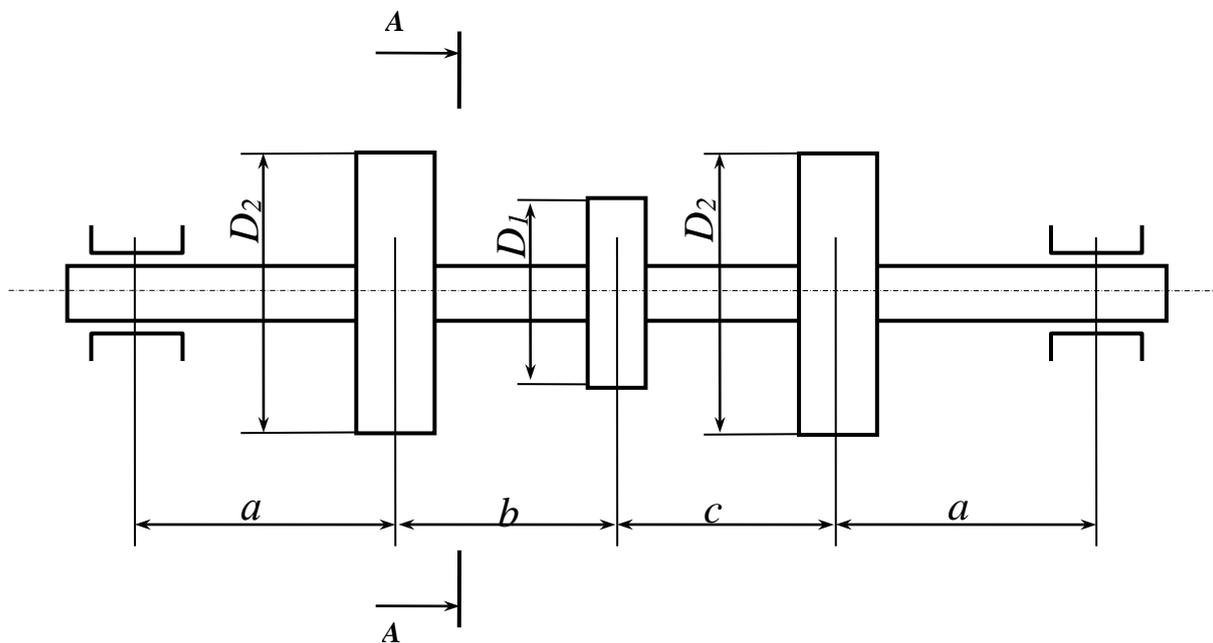


Рисунок 19а

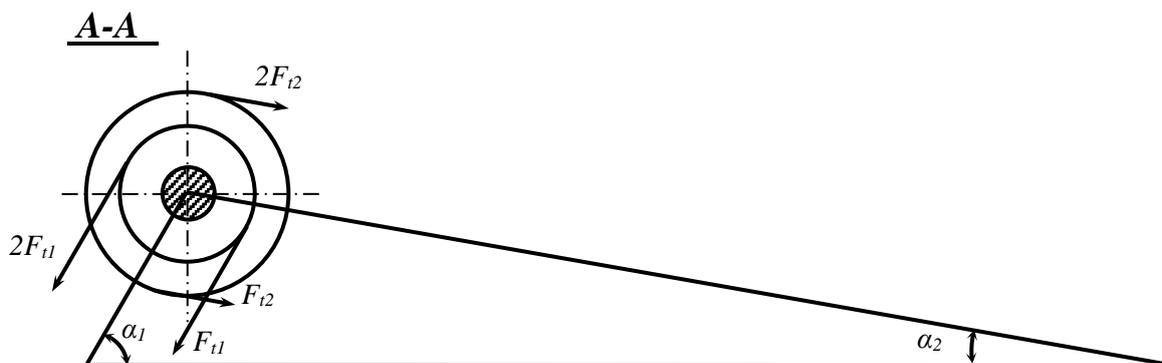


Рисунок 19б

### 3.2.2. Определение моментов, приложенных к шкивам, по заданной мощности и частоте вращения вала

Крутящий момент на ведущем шкиве будет равен:

$$T = 9,55 \frac{P}{n}, \quad \text{кНм},$$

$$T_1 = 9,55 \frac{60}{100} = 5,73 \text{ кНм}.$$

Так как два других шкива диаметром  $D_2$  передают мощность  $P/2$ , то

$$T_2 = T_3 = \frac{T_1}{2} = 2,865 \text{ кНм}.$$

### 3.2.3. Построение эпюры крутящих моментов

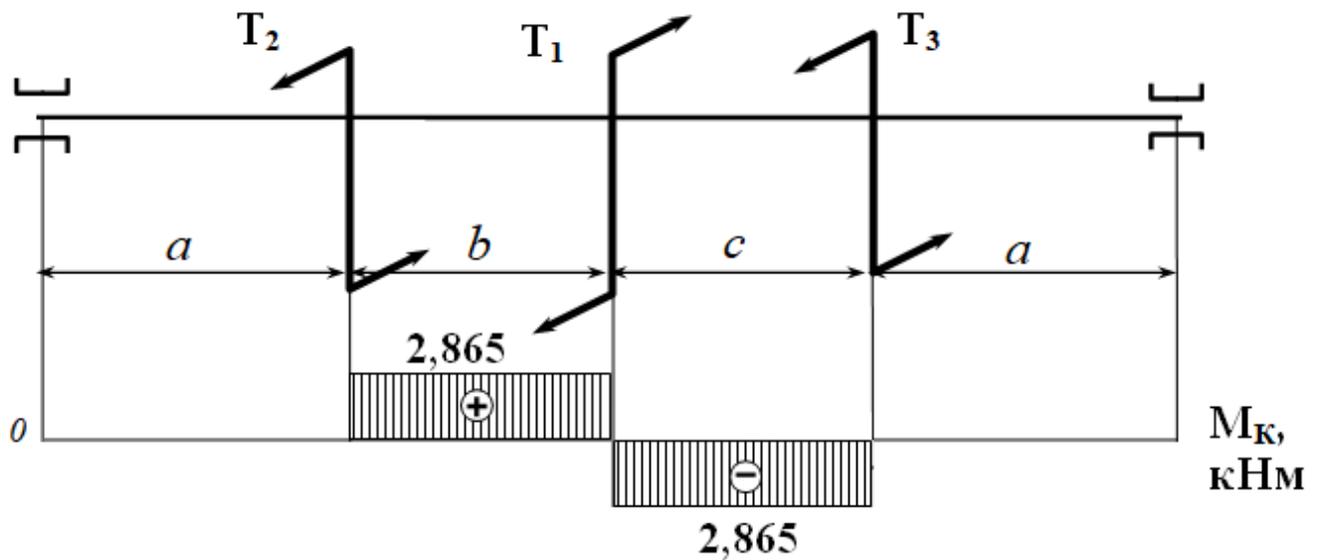


Рисунок 20

### 3.2.4. Определение окружных усилий $F_{t1}$ и $F_{t2}$

Момент  $T_1$  создается разностью усилий в набегающей и сходящей ветвях ремня. При заданном соотношении между этими усилиями ( $F_{t1}$  и  $F_{t2}$ )

$$T_1 = F_{t1} \frac{D_1}{2},$$
$$F_{t1} = \frac{2 \cdot T_1}{D_1} = \frac{2 \cdot 5,73}{0,6} = 19,1 \text{ кН},$$
$$F_{t2} = F_{t3} = \frac{2 \cdot T_2}{D_2} = \frac{2 \cdot 2,865}{1,1} = 5,209 \text{ кН}.$$

### 3.2.5. Определение давления на вал

$$R_1 = 3 F_{t1} = 3 \cdot 19,1 = 57,3 \text{ кН},$$
$$R_2 = R_3 = 3 \cdot F_{t2} = 3 \cdot 5,209 = 15,627 \text{ кН}.$$

### 3.2.6. Определение сил, изгибающих вал в горизонтальной и вертикальной плоскостях

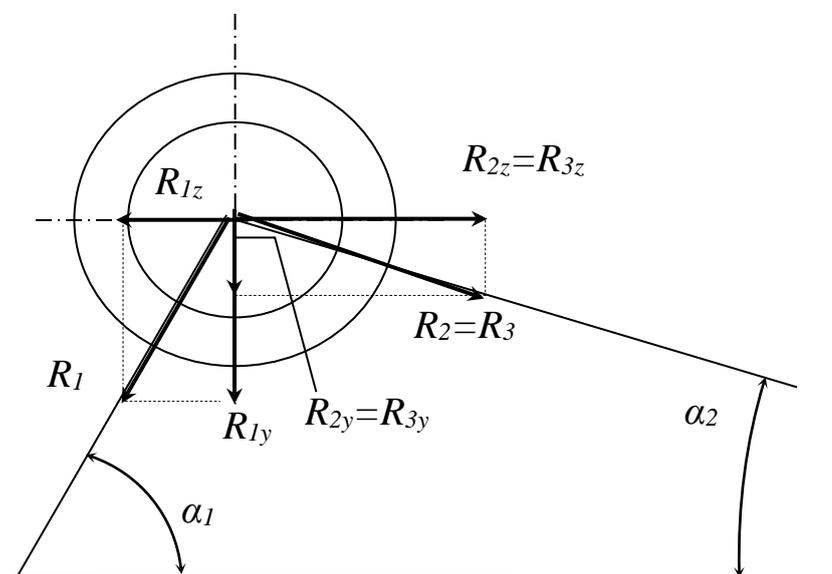


Рисунок 21

$$R_{1z} = R_1 \cdot \cos \alpha_1 = 57,3 \cdot \cos (60^\circ) = 28,65 \text{ кН};$$

$$R_{1Y} = R_1 \cdot \sin \alpha_1 = 57,3 \cdot \sin (60^\circ) = 49,623 \text{ кН};$$

$$R_{2Z} = R_{3Z} = R_2 \cdot \cos \alpha_2 = 15,627 \cdot \cos (10^\circ) = 15,39 \text{ кН};$$

$$R_{2Y} = R_{3Y} = R_2 \cdot \sin \alpha_2 = 15,627 \cdot \sin (10^\circ) = 2,714 \text{ кН}.$$

### 3.2.7. Построение эюр изгибающих моментов в горизонтальной и вертикальной плоскостях

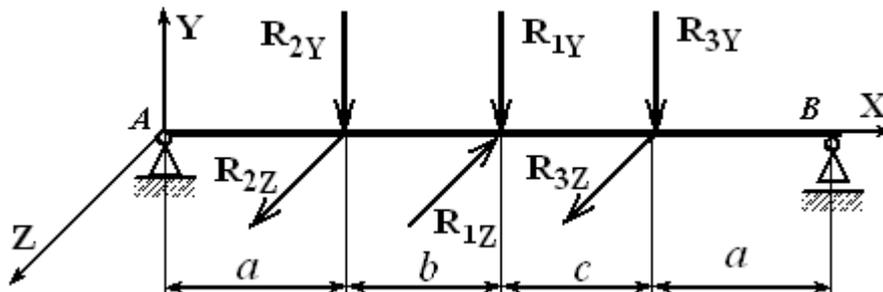


Рисунок 22

На рис. 22 показан вал, нагруженный силами, изгибающими его в горизонтальной и вертикальной плоскостях.

На рис. 23а изображен вал, нагруженный в вертикальной плоскости.

Определим опорные реакции:

$$\sum_{i=1}^n X_i = 0;$$

$$X_A = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n M_{iA} = 0;$$

$$- R_{2Y}a - R_{1Y}(a+b) - R_{3Y}(a+b+c) + Y_B(2a+b+c) = 0;$$

$$Y_B = \frac{R_{1Y}(a+b) + R_{2Y}(2a+b+c)}{2a+b+c} = R_{1Y} \cdot \frac{a+b}{2a+b+c} + R_{2Y} =$$

$$= 49,623 \cdot \frac{2,5}{5} + 2,714 = 27,525 \text{ кН}.$$

$$\sum_{i=1}^n Y_i = 0;$$

$$Y_A + Y_B - 2R_{2Y} - R_{1Y} = 0;$$

$$Y_A = 2R_{2Y} + R_{1Y} - Y_B = 2 \cdot 2,714 + 49,623 - 27,525 = 27,525 \text{ кН.}$$

Проверка правильности нахождения опорных реакций:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n M_{iB} &= R_{3Y}a + R_{1Y}(a+c) + R_{2Y}(a+b+c) - Y_A(2a+b+c) = \\ &= 2,714 \cdot 1,4 + 49,623 \cdot 2,5 + 2,714 \cdot 3,6 - 27,525 \cdot 5 = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, реакции найдены верно.

Разобьем вал на 4 участка.

Границы первого участка:  $0 \leq x_1 \leq a$ .

$$M_{Z1} = \Sigma M^{ЛЭВ} = Y_A \cdot x_1 = 27,525 \cdot x_1.$$

При  $x_1 = 0$ ,  $M_{Z1} = 0$  кНм.

При  $x_1 = a = 1,4$  м,  $M_{Z1} = 38,535$  кНм.

Границы второго участка:  $a \leq x_2 \leq a+b$ .

$$M_{Z2} = \Sigma M^{ЛЭВ} = Y_A \cdot x_2 - R_{2Y} \cdot (x_2 - a) = 27,525 \cdot x_2 - 2,714 \cdot (x_2 - 1,4).$$

При  $x_2 = a = 1,4$  м,  $M_{Z2} = 38,535$  кНм.

При  $x_2 = a + b = 2,5$  м,  $M_{Z2} = 65,827$  кНм.

Границы третьего участка:  $0 \leq x_3 \leq a$ .

$$M_{Z3} = \Sigma M^{ПР} = Y_B \cdot x_3 = 27,525 \cdot x_3.$$

При  $x_3 = 0$ ,  $M_{Z1} = 0$  кНм.

При  $x_3 = a = 1,4$  м,  $M_{Z1} = 38,535$  кНм.

Границы четвертого участка:  $a \leq x_4 \leq a+c$ .

$$M_{Z4} = \Sigma M^{ПР} = Y_B \cdot x_4 - R_{3Y} \cdot (x_4 - a) = 27,525 \cdot x_4 - 2,714 \cdot (x_4 - 1,4).$$

При  $x_4 = a = 1,4$  м,  $M_{Z4} = 38,535$  кНм.

При  $x_4 = a + c = 2,5$  м,  $M_{Z4} = 65,827$  кНм.

Эпюра изгибающих моментов в вертикальной плоскости изображена на рис. 23б.

Теперь рассмотрим нагружение вала в горизонтальной плоскости (рис. 23в).

Определим опорные реакции:

$$\sum_{i=1}^n Z_i = 0; \quad Z_A + Z_B + R_{2Z} - R_{1Z} + R_{3Z} = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n M_{iA} = 0; \quad R_{2Z}a - R_{1Z}(a+b) + R_{3Z}(a+b+c) + Z_B(2a+b+c) = 0;$$

$$Z_B = \frac{-R_{2Z}(2a+b+c) + R_{1Z}(a+b)}{2a+b+c} = -R_{2Z} + R_{1Z} \frac{2,5}{5} =$$

$$= -15,39 + 28,65 \cdot 0,5 = -1,065 \text{ кН}.$$

$$Z_A = R_{1Z} - 2 \cdot R_{2Z} - Z_B = 28,65 - 2 \cdot 15,39 + 1,065 = -1,065 \text{ кН}.$$

Проверка правильности нахождения опорных реакций:

$$\sum_{i=1}^n M_{iB} = 0; \quad -R_{3Z}a + R_{1Z}(a+c) - R_{2Z}(a+b+c) - Z_A(2a+b+c) = 0;$$

$$-15,39 \cdot 1,4 + 28,65 \cdot 2,5 - 15,39 \cdot 3,6 + 1,065 \cdot 5 = 0.$$

Следовательно, реакции найдены верно.

Разобьем вал на 4 участка

Границы первого участка:  $0 \leq x_1 \leq a$ .

$$M_{Y1} = \Sigma M^{ЛЭВ} = Z_A \cdot x_1 = -1,065 \cdot x_1.$$

При  $x_1 = 0$ ,  $M_{Y1} = 0$  кНм.

При  $x_1 = a = 1,4$  м,  $M_{Y1} = -1,491$  кНм.

Границы второго участка:  $a \leq x_2 \leq a+b$ .

$$M_{Y2} = \Sigma M^{ЛЭВ} = Z_A \cdot x_2 + R_{2Z} \cdot (x_2 - a) = -1,065 \cdot x_2 + 15,39 \cdot (x_2 - 1,4).$$

При  $x_2 = a = 1,4$  м,  $M_{Y2} = -1,491$  кНм.

При  $x_2 = a + b = 2,5$  м,  $M_{Y2} = 14,267$  кНм.

Границы третьего участка:  $0 \leq x_3 \leq a$ .

$$M_{Y3} = \Sigma M^{ПР} = Z_B \cdot x_3 = -1,065 \cdot x_3.$$

При  $x_3 = 0$ ,  $M_{Y3} = 0$  кНм.

При  $x_3 = a = 1,4$  м,  $M_{Y3} = -1,491$  кНм.

Границы четвертого участка:  $a \leq x_4 \leq a+c$ .

$$M_{Y4} = \Sigma M^{ПР} = Z_B \cdot x_4 + R_{3Z} \cdot (x_4 - a) = -1,065 \cdot x_4 + 15,39 \cdot (x_4 - 1,4).$$

При  $x_4 = a = 1,4$  м,  $M_{Y4} = -1,491$  кНм.

При  $x_4 = a + c = 2,5$  м,  $M_{Y4} = 14,267$  кНм.

Эпюра изгибающих моментов в горизонтальной плоскости изображена на рис. 23г.

### 3.2.8. Построение эпюры суммарных изгибающих моментов

Для каждого сечения вала имеется своя плоскость действия изгибающего момента. Но так как вал имеет круглое поперечное сечение, то  $W_Z = W_Y = W$ ,

и, следовательно, плоскости действия всех изгибающих моментов можно совместить.

$$M_{II} = \sqrt{M_Z^2 + M_Y^2} ;$$

$$M_{II1} = \sqrt{38,535^2 + (-1,491)^2} = 38,565 \text{ кНм};$$

$$M_{II2} = \sqrt{65,827^2 + 14,267^2} = 67,357 \text{ кНм}.$$

Эпюра суммарных изгибающих моментов показана на рис. 23д.

### **3.2.9. Выбор опасного сечения**

Как видно по эпюрам  $M_K$  и  $M_{II}$  (рис. 20 и 23д), опасным является сечение посередине вала, для которого  $M_K = 2,865 \text{ кНм}$ , а  $M_{II} = 67,357 \text{ кНм}$ .

По третьей теории прочности:

$$M_{III_{ЭКВ}} = \sqrt{M_{II}^2 + M_K^2} = \sqrt{67,357^2 + 2,865^2} = 67,418 \text{ кНм}.$$

### **3.2.10. Определение диаметра вала**

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{III_{ЭКВ,MAX}}}{\pi \cdot [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 67,418 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 70 \cdot 10^6}} = 0,214 \text{ м} = 214 \text{ мм}.$$

Окончательно принимаем диаметр вала 215 мм.

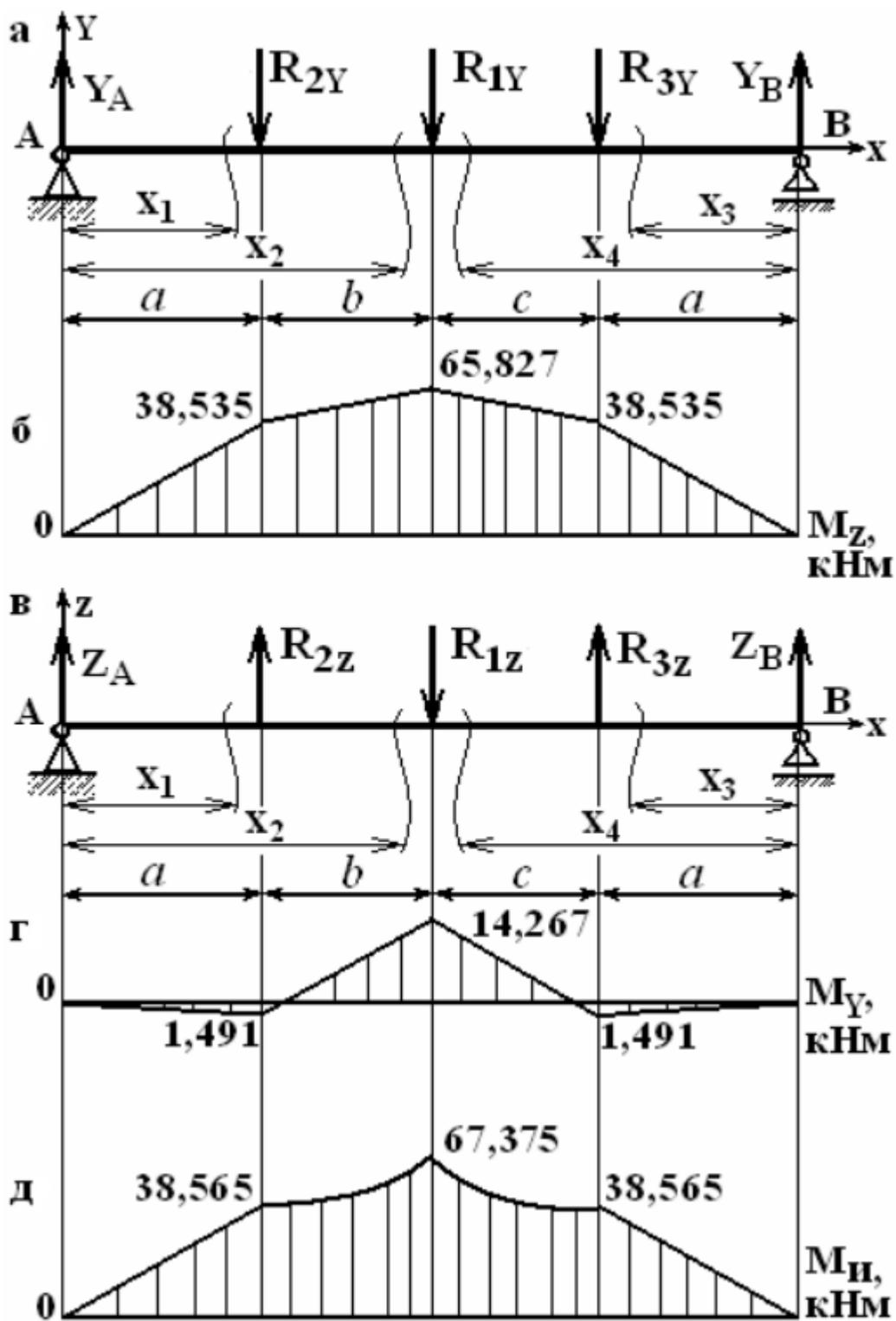


Рисунок 23

### 3.3. Схемы нагружения валов II-X

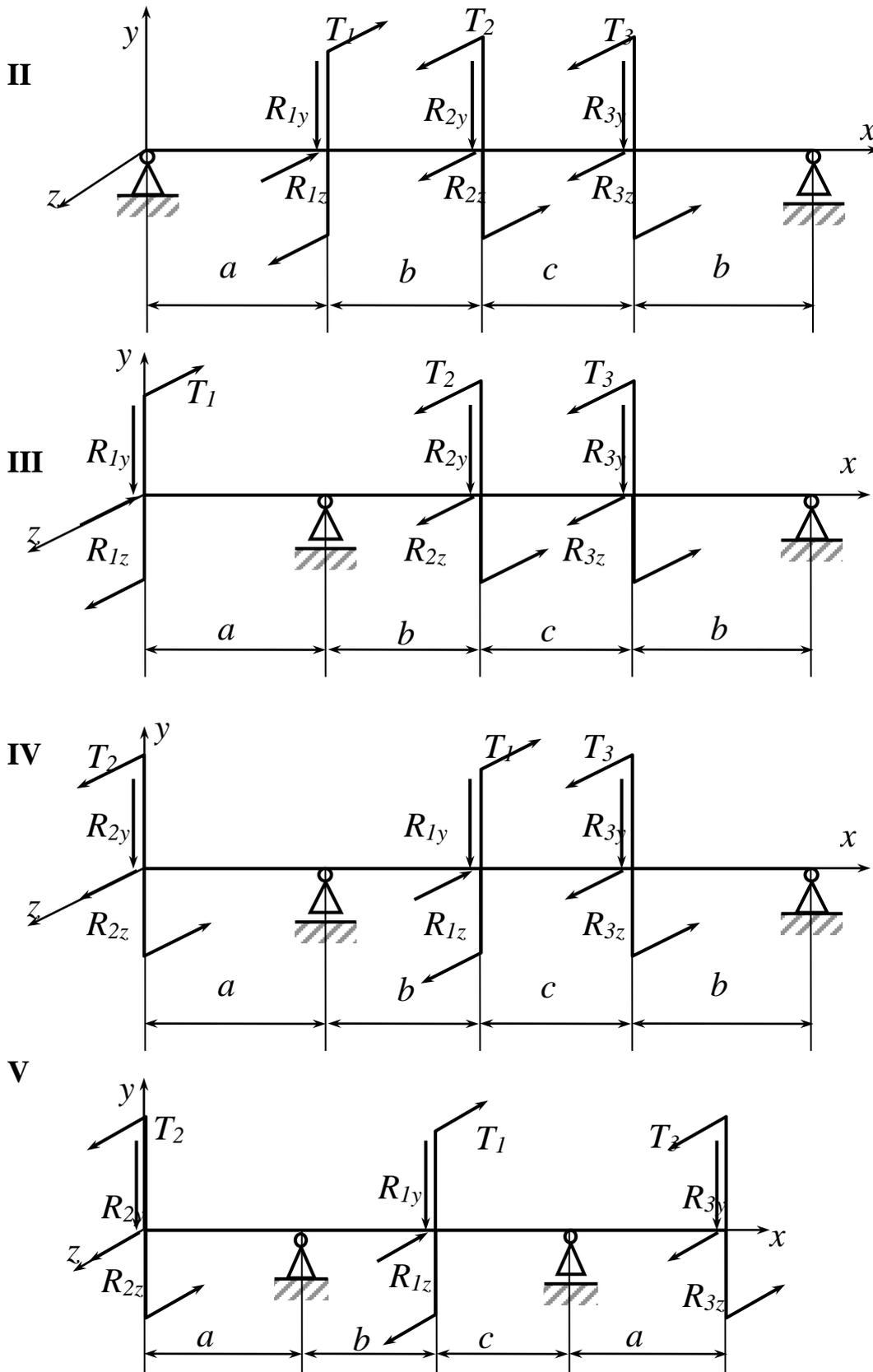


Рисунок 24а

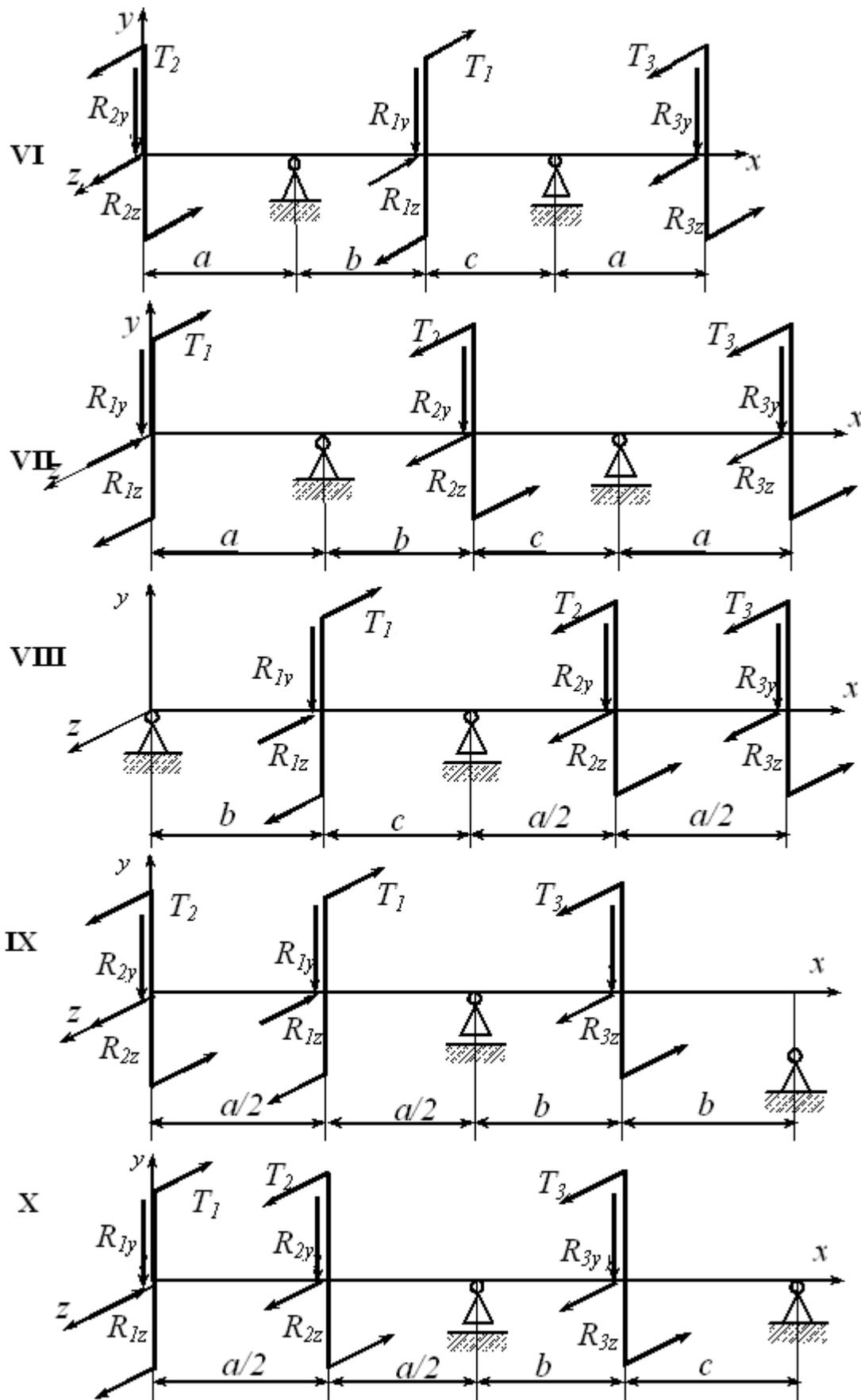


Рисунок 246

## 4. ДИНАМИЧЕСКАЯ НАГРУЗКА

### 4.1. Краткие сведения по теории

Под динамической (ударной) понимается нагрузка, действующая в течение короткого времени. Продолжительность действия ударной нагрузки должна быть значительно меньше периода собственных колебаний системы. За время действия такой нагрузки не произойдет сколько-нибудь заметных перемещений масс системы, но массы приобретут за это время конечные скорости.

Отношение динамического значения некоторого фактора к соответствующему статическому значению этого фактора называется динамическим коэффициентом. Например, если речь идет о напряжении, то

$$K_{дин} = \frac{\sigma_{дин}}{\sigma_{ст}}. \quad (27)$$

Все факторы в рассматриваемой системе при ударе возрастают в одно и то же число раз по сравнению со статическим нагружением. Это число и есть динамический коэффициент.

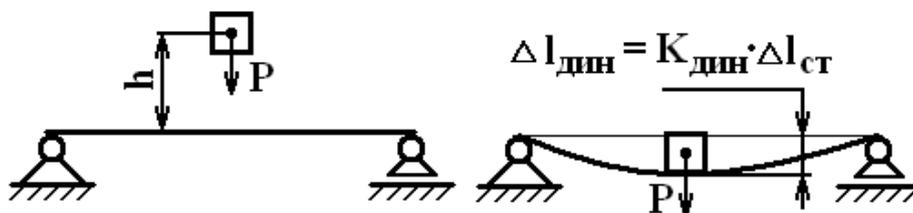


Рисунок 25

При поперечном ударе (рис. 25) динамический коэффициент можно вычислить по следующей формуле

$$K_{дин} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta l_{ст}} \cdot \frac{1}{1 + m/M}}, \quad (28)$$

где  $h$  – высота падения груза;

$\Delta l_{ст}$  – перемещение, вызванное падающим грузом, но приложенным статически;

$m$  – масса ударяемого тела;

$M$  – масса ударяющего тела.

Формула (28) выведена на основании закона сохранения энергии при следующих допущениях:

- 1) тела после удара движутся совместно и друг от друга не отделяются;
- 2) выполняется закон Гука, т. е. напряжение при ударе меньше, чем предел пропорциональности;
- 3) та часть энергии, которая переходит в теплоту и в энергию колебательного движения, считается пренебрежимо малой.

Если масса балки, подвергающейся удару, значительно меньше массы падающего на нее груза, то динамический коэффициент можно вычислить по следующей формуле:

$$K_{\text{дин}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta l_{\text{ст}}}}. \quad (29)$$

Динамическое значение напряжения при ударном действии нагрузки можно вычислить по формуле:

$$\sigma_{\text{дин}} = \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta l_{\text{ст}}}} \right) \cdot \sigma_{\text{ст}}. \quad (30)$$

Значение динамического напряжения зависит от величины статического перемещения ударяемого тела, т. е. не только от формы и размеров поперечного сечения стержня, но и от его длины и модуля упругости материала.

При горизонтальном ударе формула для динамического коэффициента будет выглядеть так:

$$K_{\text{дин}} = \sqrt{\frac{V^2}{g \cdot \Delta l_{\text{ст}}} \cdot \frac{1}{1 + m/M}}, \quad (31)$$

где  $V$  – скорость движения груза;

$g$  – ускорение силы тяжести;

$m$  – масса ударяемого тела;

$M$  – масса ударяющего тела;

$\Delta l_{\text{ст}}$  – перемещение, вызванное силой, равной весу ударяющего тела, приложенной статически.

#### 4.2. Пример выполнения задачи № 4

На двутавровую балку ГОСТ 8239 – 93, свободно лежащую на двух жестких опорах (рис. 27), с высоты  $h$  падает груз  $P$ . Требуется:

- 1) найти наибольшее нормальное напряжение в балке;
- 2) решить аналогичную задачу при условии, что правая опора заменена пружиной, податливость которой (т.е. осадка от груза весом  $1 \text{ кН}$ ) равна  $\alpha$ ;

3) сравнить полученные результаты.  
 Данные взять из табл. 4.

Таблица 4 – Исходные данные для задачи № 4

№ строки	Схема по рис. 26	№ двутавра	$I_z, \text{см}^4$	$W_z, \text{см}^3$	$l, \text{м}$	$P, \text{Н}$	$h, \text{см}$	$10^3 \cdot \alpha, \text{м/кН}$
1	I	20	1840	184	2,1	1100	11	21
2	II	20a	2030	203	2,2	1200	12	22
3	III	24	3460	289	2,3	300	3	23
4	IV	24a	3800	317	2,4	400	4	24
5	V	27	5010	371	2,5	500	5	25
6	VI	27a	5500	407	2,6	600	6	26
7	VII	30	7080	472	2,7	700	7	27
8	VIII	30a	7780	518	2,8	800	8	28
9	IX	33	9840	597	2,9	900	9	29
0	X	36	13380	743	3,0	1000	10	30
	<i>e</i>	<i>δ</i>			<i>e</i>	<i>z</i>	<i>δ</i>	<i>e</i>

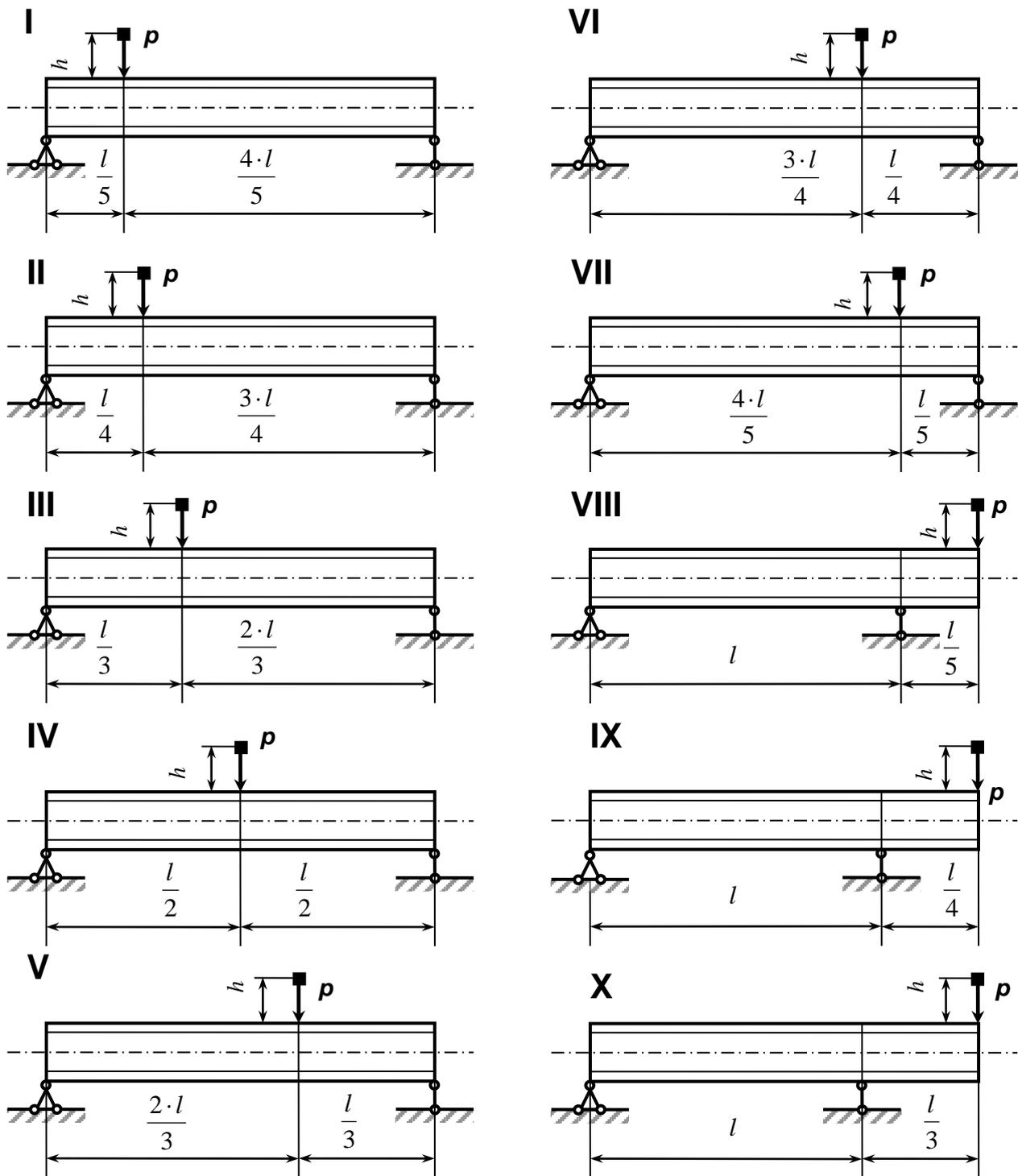


Рисунок 26

#### 4.2.1. Исходные данные

Двутавр № 20а;  $I_Z = 2030 \text{ см}^4$ ;  $W_Z = 203 \text{ см}^3$ ;  $l = 2,8 \text{ м}$ ;  $P = 500 \text{ Н}$ ;  
 $h = 12 \text{ см}$ ;  $\alpha = 28 \cdot 10^{-3} \text{ м/кН}$ ;  $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ .

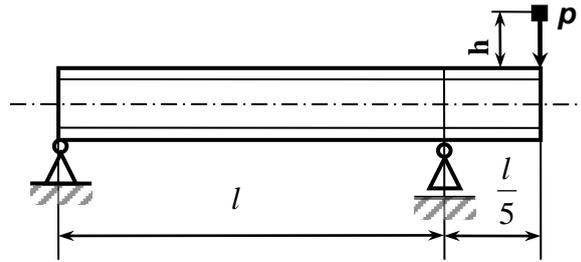


Рисунок 27

#### 4.2.2. Расчет динамического напряжения

Для определения статического напряжения необходимо вычислить максимальный изгибающий момент, для чего строим эпюру изгибающих моментов (рис. 28). Собственным весом балки пренебрегаем.

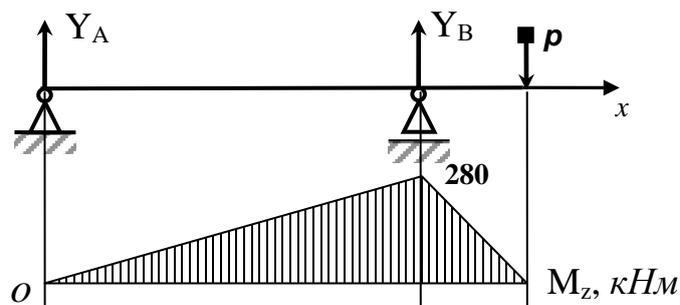


Рисунок 28

Определяем опорные реакции:

$$\sum_{i=1}^n Y_i = 0; \quad Y_A + Y_B - P = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n M_{iA} = 0; \quad -P \cdot \frac{6}{5}l + Y_B \cdot l = 0;$$

$$Y_B = P \cdot \frac{6}{5} = \frac{500 \cdot 6}{5} = 600 \text{ H};$$

$$Y_A = -Y_B + P = -600 + 500 = -100 \text{ H}.$$

Проверка правильности нахождения опорных реакций:

$$\sum_{i=1}^n M_{iB} = 0; \quad -P \cdot \frac{l}{5} - Y_A \cdot l = -\frac{500 \cdot 2,8}{5} + 100 \cdot 2,8 = 0.$$

Следовательно, реакции найдены верно.

Разобьем балку на 2 участка.

Границы первого участка:  $0 \leq x_1 \leq 1$ .

$$M_1 = Y_A \cdot x_1 = -100 \cdot x_1.$$

При  $x_1 = 0$  м,  $M_1 = 0$  Нм.

При  $x_1 = 1 = 2,8$  м,  $M_1 = -280$  Нм.

Границы второго участка:  $0 \leq x_2 \leq 1/5$ .

$$M_2 = -P \cdot x_2 = -500 \cdot x_2.$$

При  $x_2 = 0$  м,  $M_2 = 0$  Нм.

При  $x_2 = 1/5 = 0,56$  м,  $M_2 = -280$  Нм.

$$\sigma_{CT} = \frac{|M_{MAX}|}{W_Z} = \frac{280}{203 \cdot 10^{-6}} = 1,4 \cdot 10^6 \text{ Па} = 1,4 \text{ МПа}.$$

Для определения статического прогиба необходимо построить эпюру единичных моментов. Схема балки, нагруженной единичной силой, и эпюра единичных моментов изображены на рис. 29.

Определяем опорные реакции:

$$\sum_{i=1}^n Y_i = 0; \quad \bar{Y}_A + \bar{Y}_B - 1 = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_{iA} = 0; \quad -1 \cdot \frac{6}{5} l + \bar{Y}_B \cdot l = 0;$$

$$\bar{Y}_B = P \cdot \frac{6}{5} = \frac{1 \cdot 6}{5} = 1,2; \quad \bar{Y}_A = -\bar{Y}_B + 1 = -1,2 + 1 = -0,2.$$

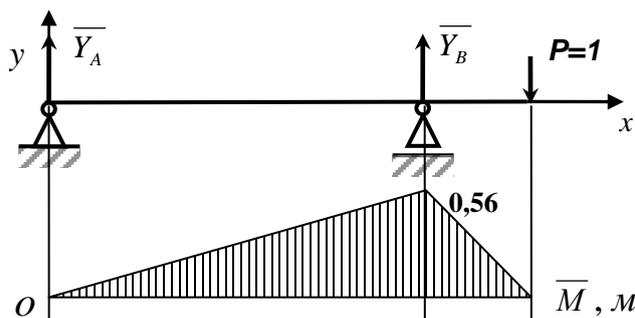


Рисунок 29

Проверка правильности нахождения опорных реакций:

$$\sum_{i=1}^n M_{iB} = 0; \quad -1 \cdot \frac{l}{5} - Y_A \cdot l = -\frac{1 \cdot 2,8}{5} + 0,2 \cdot 2,8 = 0.$$

Следовательно, реакции найдены верно.

Разобьем балку на 2 участка.

Границы первого участка:  $0 \leq x_1 \leq 1$ .

$$M_1 = Y_A \cdot x_1 = -0,2 \cdot x_1.$$

При  $x_1 = 0$  м,  $M_1 = 0$  Нм.

При  $x_1 = 1 = 2,8$  м,  $M_1 = -0,56$  Нм.

Границы второго участка:  $0 \leq x_2 \leq 1/5$ .

$$M_2 = -P \cdot x_2 = -1 \cdot x_2.$$

При  $x_2 = 0$  м,  $M_2 = 0$  Нм.

При  $x_2 = 1/5 = 0,56$  м,  $M_2 = -0,56$  Нм.

### 4.2.3. Определение перемещений

Перемещения  $\delta_{ij}$  и  $\Delta_{1P}$  проще всего определяются по методу Максвелла-Мора с использованием способа Верещагина:

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} = \sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \frac{\bar{M}_i \bar{M}_j}{EI} dx = \sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \frac{\bar{M}_j \bar{M}_i}{EI} dx, \quad (32)$$

$$\Delta_{ip} = \sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \frac{\bar{M}_i M_p}{EI} dx, \quad (33)$$

где  $\bar{M}_i$ ,  $\bar{M}_j$ ,  $M_p$  – алгебраические выражения изгибающих моментов на  $k$ -м участке основной системы, вызванных, соответственно, действием только одной единичной силы  $\bar{X}_i = 1$  или  $\bar{X}_j = 1$ , или внешней нагрузкой;

$EI$  – изгибная жесткость стержня.

Для стержневых систем интегралы Мора удобно вычислять по способу Верещагина. При этом операция интегрирования аналитических выражений изгибающих моментов заменяется перемножением эпюр.

Способ Верещагина применяется в случае, когда эпюры от единичных силовых факторов на прямолинейных участках оказываются линейными, а грузовая эпюра имеет следующие очертания: прямоугольник, трапеция или парабола. В связи с этим, согласно способу Верещагина, интеграл вида

$$\int \bar{M}_i M_p dx$$

равен произведению площади криволинейной эпюры  $\Omega$  (рис. 30а) на ординату линейной эпюры  $\bar{M}_i$ , расположенную под центром тяжести криволинейной

эпюры (рис. 30б). Следовательно, величины  $\delta_{ij}$  и  $\Delta_{ip}$  можно определить по формулам:

$$\delta_{ij} = \sum_{i=1}^n \frac{\Omega_i \bar{M}_{cj}}{EJ}, \quad (34)$$

$$\Delta_{ip} = \sum_{i=1}^n \frac{\Omega_p \bar{M}_{ci}}{EJ}, \quad (35)$$

где  $\Omega_p$  – площадь грузовой эпюры момента на участке;

$\bar{M}_{ci}$  – ордината прямолинейной (единичной) эпюры, взятая под центром тяжести с грузовой эпюры  $M_p$ .

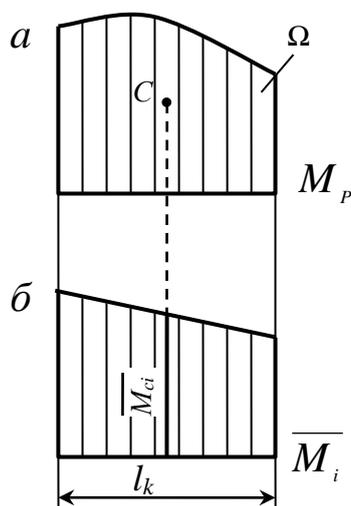


Рисунок 30

Если обе эпюры (единичная и грузовая) линейные, то безразлично, площадь какой из эпюр подсчитывается, но ордината момента обязательно берется с другой эпюры.

Далее приведены площади и координаты центров тяжести некоторых фигур (рис. 31).

В тех случаях, когда перемножаются две эпюры, имеющие вид трапеций, или когда одна эпюра имеет вид трапеции, а другая – квадратичной параболы, можно использовать формулу Симпсона. Знаки определяются следующим образом: если эпюры направлены в одну сторону, то ставится знак «+», а если в разные, то «-». Результатом перемножения будут следующие выражения, приведенные на рис. 32.

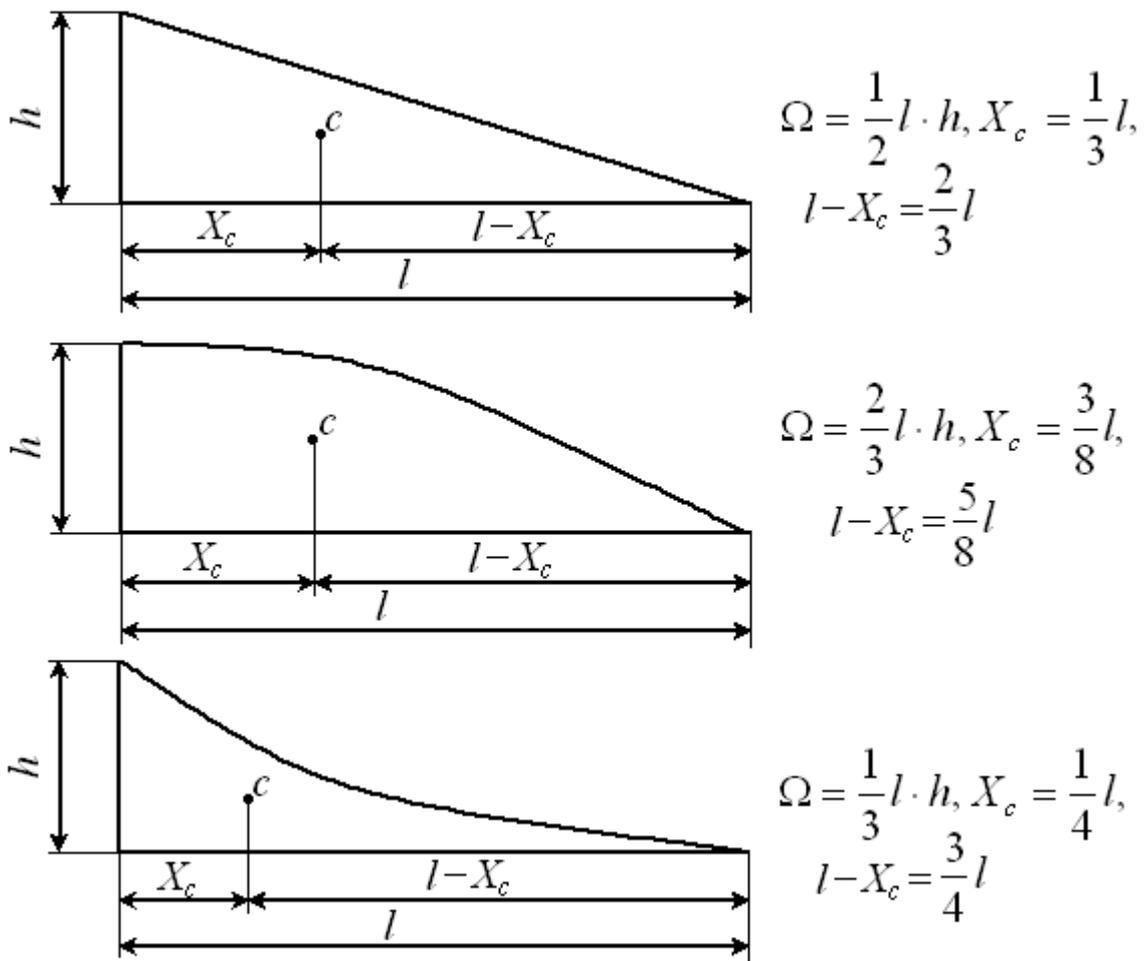
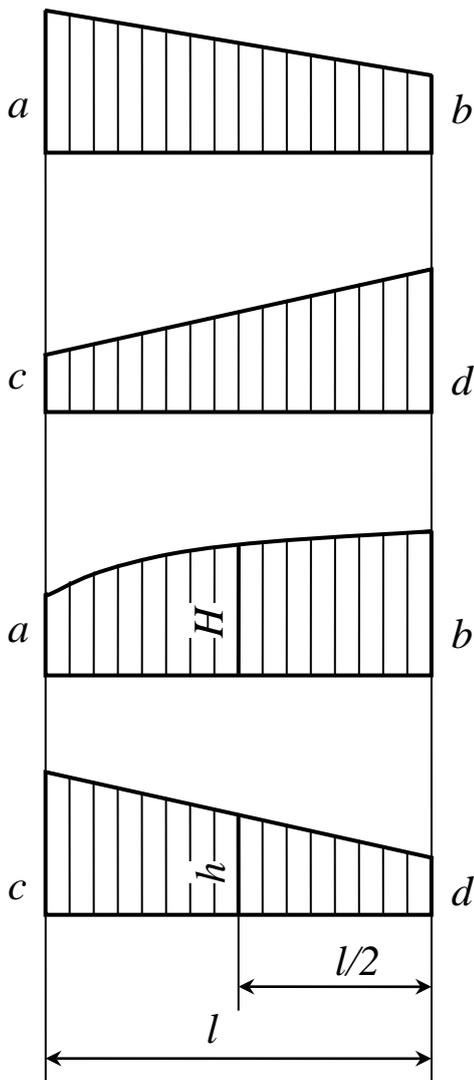


Рисунок 31

Вычислим величину статического прогиба, используя способ Верещагина для интеграла Максвелла-Мора:

$$\Delta l_{CT} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 280 \cdot \frac{6}{5} \cdot 2,8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,56}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 2030 \cdot 10^{-8}} = 0,0432 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,0432 \text{ мм};$$

$$\sigma_{дин} = \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 120}{0,0432}} \right) \cdot 1,4 = 104,2 \text{ МПа}.$$



$$\Delta = \frac{l(2a \cdot c + 2b \cdot d + a \cdot d + b \cdot c)}{6EI}$$

$$\Delta = \frac{l(a \cdot c + b \cdot d + 4H \cdot h)}{6EI}$$

Рисунок 32

#### 4.2.4. Расчет динамического напряжения при условии, что правая опора заменена пружиной

Перемещение в правой опоре:

$$a = \alpha \cdot Y_B = 28 \cdot 10^{-3} \cdot 600 = 16,8 \text{ мм}.$$

Из подобия треугольников находим (рис. 33):

$$\frac{a}{a_1} = \frac{l}{\frac{6}{5} \cdot l} = \frac{5}{6}; \quad a_1 = \frac{6 \cdot a}{5} = \frac{6 \cdot 16,8}{5} = 20,16 \text{ мм};$$

$$\Delta l_{CT1} = \Delta l_{CT} + a_1 = 0,0432 + 20,16 = 20,2032 \text{ мм};$$

$$\sigma_{дин1} = \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 120}{20,2032}} \right) \cdot 1,4 = 6,4 \text{ МПа} .$$

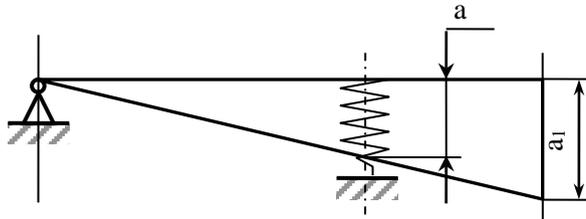


Рисунок 33

#### 4.2.5. Сравнение результатов

$$\frac{\sigma_{дин}}{\sigma_{дин1}} = \frac{104,2}{6,4} = 16,3 .$$

Для остальных схем расчет производится аналогичным образом.

## 5. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Что называется крутящим моментом?
2. Как построить эпюру углов закручивания вала?
3. Какой изгиб называется поперечным?
4. Какое напряжение называется допускаемым?
5. Какие напряжения возникают в поперечном сечении стержня при изгибе с кручением?
6. Как находят опасные сечения стержня при изгибе с кручением?
7. В каких точках круглого поперечного сечения возникают наибольшие напряжения при изгибе с кручением?
8. Почему обычно не учитывают касательные напряжения от изгиба при совместном действии изгиба и кручения?
9. Как находят расчетный момент при изгибе с кручением стержня круглого поперечного сечения?
10. В чем сущность способа Верещагина?
11. Что называется динамическим коэффициентом?
12. Зависит ли напряжение при изгибающем ударе от материала балки?

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Мельников, Б. Е. Сопротивление материалов: учебник для вузов / Б. Е. Мельников, Л. К. Паршин, А. С. Семенов, В. А. Шерстнев. – 2-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2023. – 576 с. – URL: <https://e.lanbook.com/book/341261> (дата обращения: 29.01.2024). – Текст: электронный.
2. Степин, П. А. Сопротивление материалов: учебник / П. А. Степин. – 13-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2022. – 320 с. – URL: <https://e.lanbook.com/book/210815> (дата обращения: 29.01.2024). – Текст: электронный.
3. ГОСТ 8239-93. Сталь горячекатаная. Балки двутавровые.

Учебное издание

**Кауров Павел Викторович**

**Сопротивление материалов**  
**Кручение и изгиб**  
**Контрольная работа**

*Учебно-методическое пособие*

Редактор и корректор А. А. Чернышева  
Техн. редактор Д. А. Романова

Учебное электронное издание сетевого распространения

Системные требования:  
электронное устройство с программным обеспечением  
для воспроизведения файлов формата PDF

Режим доступа: [http://publish.sutd.ru/tp\\_get\\_file.php?id=202016](http://publish.sutd.ru/tp_get_file.php?id=202016), по паролю.  
- Загл. с экрана.

Дата подписания к использованию 10.09.2024 г. Рег. № 5332/24

Высшая школа технологии и энергетики СПбГУПТД  
198095, СПб., ул. Ивана Черных, 4.