

П. В. Кауров

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСИЛИЙ В СТЕРЖНЯХ
Расчетно-графическая работа

Учебно-методическое пособие

Санкт-Петербург
2024

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
**«Санкт-Петербургский государственный университет
промышленных технологий и дизайна»
Высшая школа технологии и энергетики**

П. В. Кауров

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ
ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСИЛИЙ В СТЕРЖНЯХ
Расчетно-графическая работа

Учебно-методическое пособие

Утверждено Редакционно-издательским советом ВШТЭ СПбГУПТД

Санкт-Петербург
2024

УДК 539.3 (075)
ББК 22.251я7
К 301

Рецензенты:

кандидат химических наук, доцент, заведующий кафедрой материаловедения
и технологии машиностроения Высшей школы технологии и энергетики
Санкт-Петербургского государственного университета промышленных технологий и дизайна
А. Н. Евдокимов;

кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой автоматизации, метрологии
и управления в технических системах ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный
лесотехнический университет имени С. М. Кирова»
А. В. Тенноев

Кауров, П. В.

К 301 Сопротивление материалов. Определение усилий в стержнях. Расчетно-
графическая работа: учебно-методическое пособие / П. В. Кауров. —
СПб.: ВШТЭ СПбГУПТД, 2024. — 54 с.

Учебно-методическое пособие соответствует программам и учебным планам дисциплины «Сопротивление материалов» для студентов, обучающихся по направлению подготовки 15.03.02 «Технологические машины и оборудование». Целью настоящего учебно-методического пособия является развитие навыков самостоятельного расчета элементов конструкций на прочность и жесткость. Учебно-методическое пособие содержит общие требования к выполнению расчетно-графической работы, краткие сведения по теории, варианты заданий и примеры расчета.

Учебно-методическое пособие предназначено для бакалавров очной формы обучения.

УДК 539.3 (075)
ББК 22.251я7

© ВШТЭ СПбГУПТД, 2024
© Кауров П. В., 2024

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
1. ПРОДОЛЬНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ	5
1.1. Краткие сведения по теории	5
1.2. Задача № 1. Продольная деформация.....	7
1.3. Пример выполнения задачи № 1	11
2. КРУЧЕНИЕ.....	14
2.1. Краткие сведения по теории	14
2.2. Задача № 2. Кручение	16
2.3. Пример выполнения задачи № 2	20
3. ИЗГИБ	24
3.1. Краткие сведения по теории	24
3.2. Задача № 3. Изгиб силами и моментами	26
3.3. Пример выполнения задачи № 3	30
3.4. Задача № 4. Изгиб деревянной и стальной балок.....	33
3.5. Пример выполнения задачи № 4а.....	36
3.6. Пример выполнения задачи № 4б	38
4. ДИНАМИЧЕСКАЯ НАГРУЗКА.....	43
4.1. Краткие сведения по теории	43
4.2. Задача № 5. Динамическая нагрузка.....	45
4.3. Пример выполнения задачи № 5	48
5. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ.....	53
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	54

ВВЕДЕНИЕ

В учебно-методическом пособии рассмотрены основные сведения по теории, приведены варианты заданий и примеры решения задач для студентов очной формы обучения по направлению подготовки 15.03.02 «Технологические машины и оборудование», выполняющих расчетно-графическую работу по следующим темам дисциплины «Сопротивление материалов»:

1. Продольная деформация.
2. Кручение.
3. Изгиб.
4. Динамическая нагрузка.

При решении каждой задачи контрольных работ в начале должны быть указаны исходные данные, т. е. условия задачи, схема и все заданные величины. Расчет следует сопровождать заголовками и краткими пояснениями. В аналитических выкладках вначале записываются формулы, а затем подставляются численные значения символов. В итоговых величинах указывается размерность. В окончательных результатах следует сохранять только оправданное количество значащих цифр.

Для измерения физических и механических величин используется международная система единиц. В качестве основных единиц в СИ приняты: метр (м); секунда (с); килограмм массы (кг); ньютон (Н); паскаль ($1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2$). Также используются кратные единицы: килоньютон ($1 \text{ кН} = 10^3 \text{ Н}$) и мегапаскаль ($1 \text{ МПа} = 1 \text{ Н/мм}^2 = 10^6 \text{ Па}$).

1. ПРОДОЛЬНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ

1.1. Краткие сведения по теории

Стержень подвергается *продольной деформации*, когда в его поперечных сечениях возникает внутренняя продольная сила N . Ее величина определяется методом сечений по участкам, границами которых являются места приложения внешних продольных сил, действующих на стержень. Из условия равновесия следует, что величина внутренней продольной силы N в поперечном сечении стержня численно равна алгебраической сумме внешних продольных сил, действующих по одну сторону от рассматриваемого сечения.

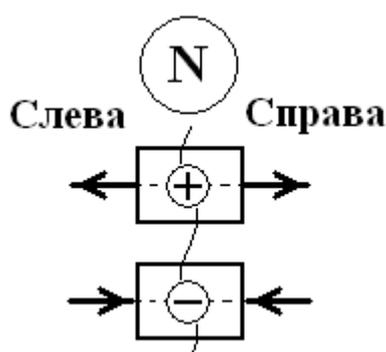


Рисунок 1

Продольная сила N в поперечном сечении стержня считается положительной, когда внешняя продольная сила, приложенная справа или слева от сечения, вызывает растяжение стержня; сжимающая сила считается отрицательной (рис. 1).

Эюра продольной силы – это график, показывающий изменение величины внутренней продольной силы N в поперечных сечениях стержня в зависимости от координаты x по длине стержня.

Величина *нормального напряжения* σ в любой точке поперечного сечения стержня определяется по формуле:

$$\sigma = \frac{N}{A},$$

где N – величина внутренней продольной силы в сечении;

A – площадь поперечного сечения стержня.

Условие прочности при продольной деформации имеет вид:

$$\sigma_{\text{MAX}} = \frac{|N_{\text{MAX}}|}{A} \leq [\sigma],$$

где N_{MAX} – максимальная величина внутренней продольной силы в сечении стержня;

$[\sigma]$ – допускаемое нормальное напряжение.

Абсолютное удлинение ΔL на участке длиной L , где продольная сила N постоянна, определяется по формуле:

$$\Delta L = \frac{N \cdot L}{E \cdot A},$$

где E – модуль Юнга материала стержня.

Произведение $E \cdot A$ называется *продольной жесткостью* стержня.

Если стержень имеет несколько участков, то абсолютное удлинение будет определяться как алгебраическая сумма абсолютных удлинений на участках

$$\Delta L = \sum_{i=1}^n \frac{N_i \cdot L_i}{E \cdot A_i}.$$

Величина наибольшего относительного удлинения на участке стержня длиной L определяется по формуле:

$$\varepsilon = \frac{|\Delta L_{\text{MAX}}|}{L}.$$

Условие жесткости при продольной деформации имеет вид:

$$\varepsilon_{\text{MAX}} \leq [\varepsilon],$$

где $[\varepsilon]$ – допускаемое относительное удлинение.

1.2. Задача № 1. Продольная деформация

Стальной стержень AE круглого поперечного сечения нагружен заданными продольными силами F_1 , F_2 , F_3 и F_4 .

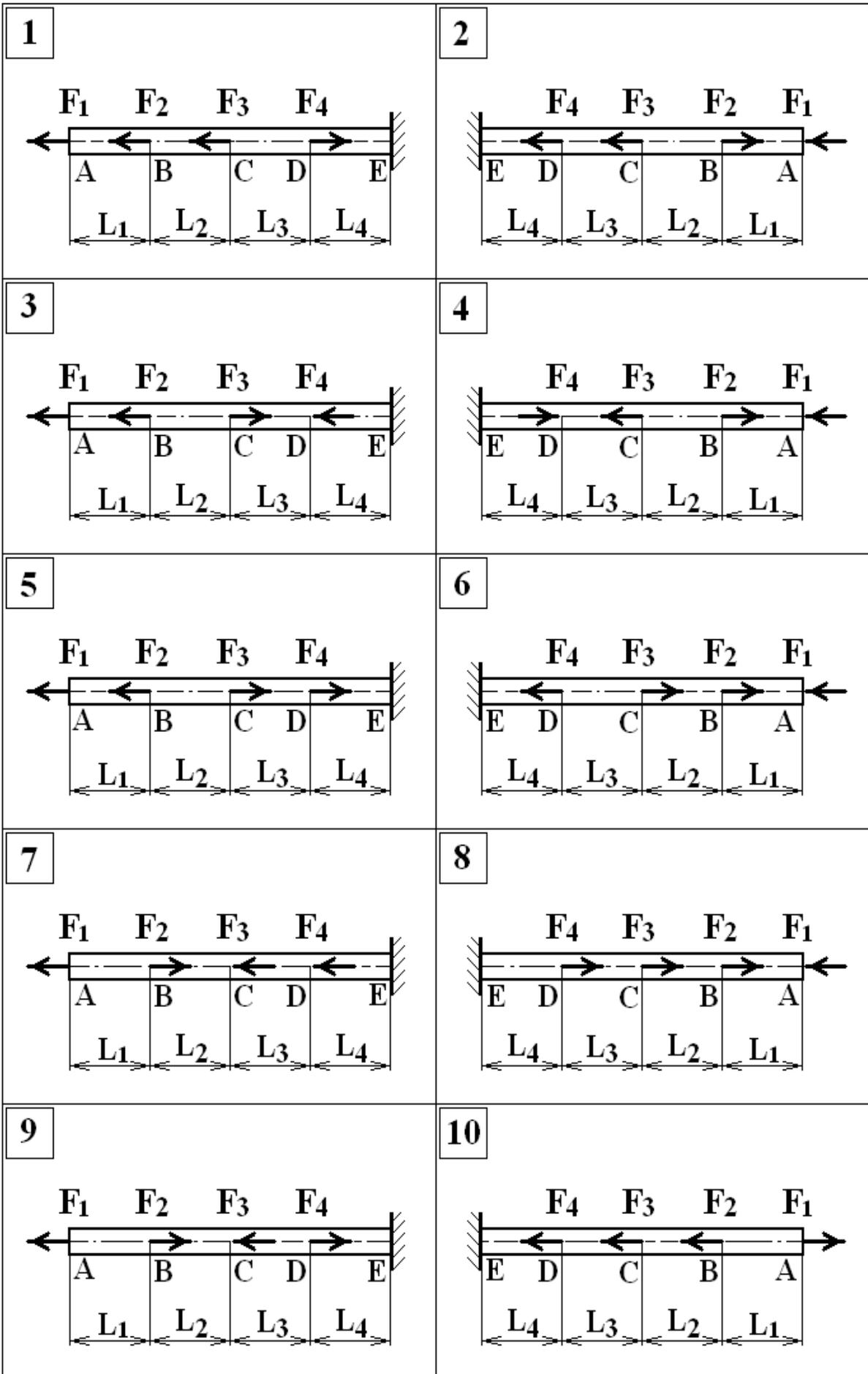
Относительные длины участков стержня $k_1 = L_1/L$, $k_2 = L_2/L$, $k_3 = L_3/L$, $k_4 = L_4/L$, допустимое напряжение $[\sigma]$ и допустимое относительное удлинение $[\varepsilon]$ известны. Модуль Юнга материала стержня $E = 2 \cdot 10^8$ кПа.

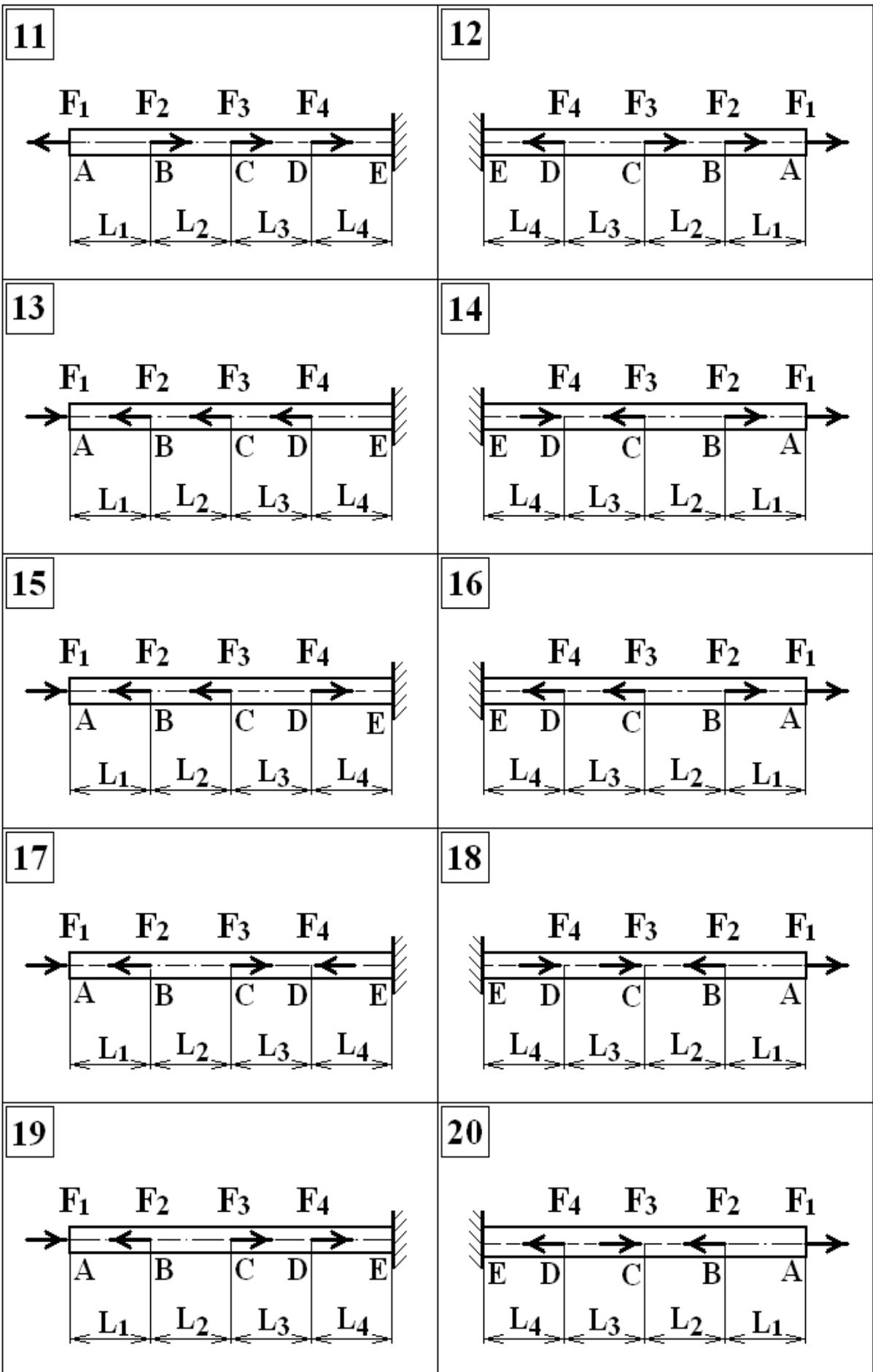
Требуется построить эпюры продольной силы N и относительного удлинения ε , с помощью которых определить диаметр поперечного сечения стержня из условий прочности и жесткости.

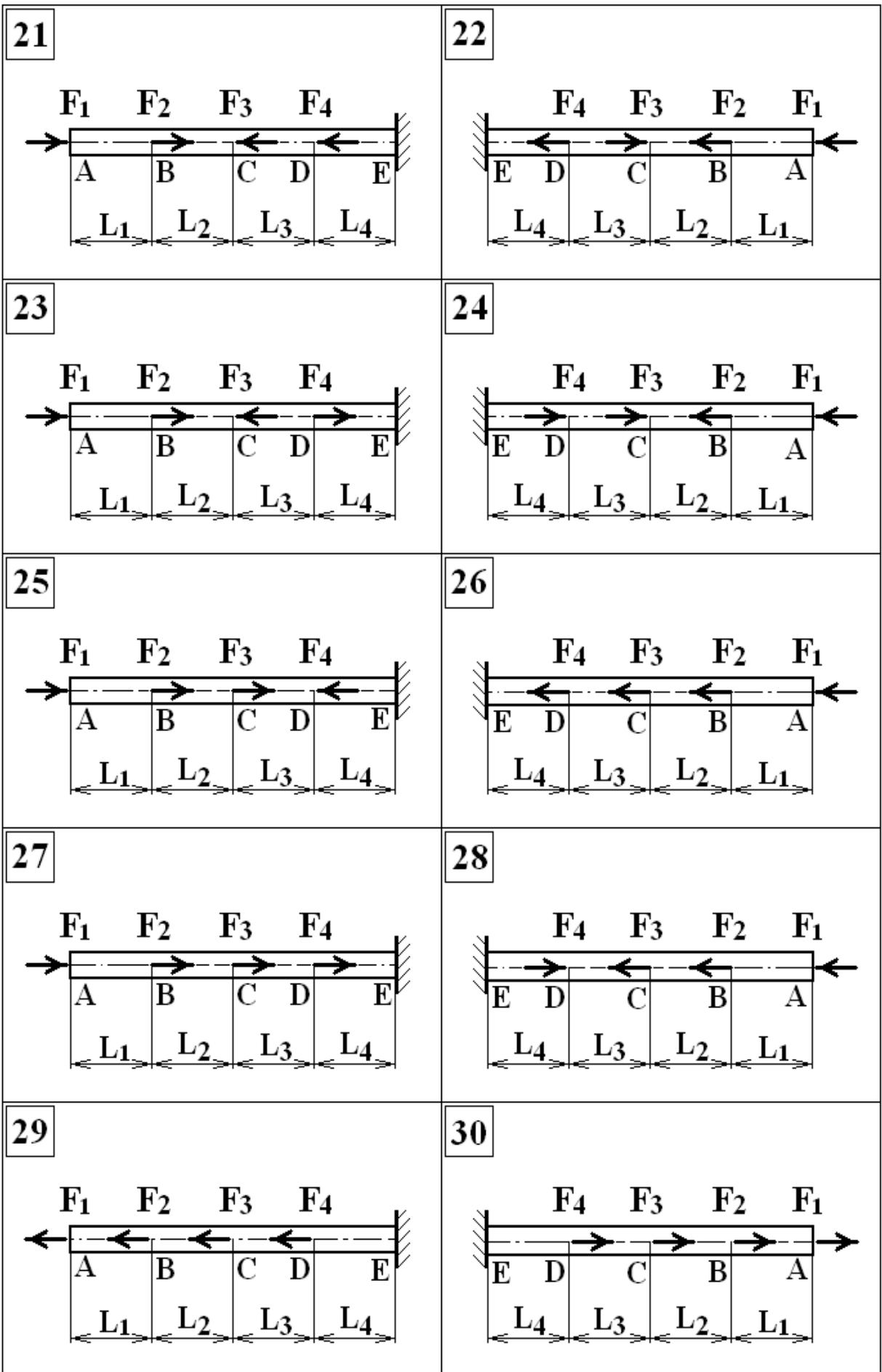
Данные, необходимые для вычисления, приведены в табл. 1.

Таблица 1 – Данные для вычисления задачи № 1

№	F_1	F_2	F_3	F_4	k_1	k_2	k_3	k_4	$[\sigma]$	$[\varepsilon]$
	кН	кН	кН	кН	-	-	-	-	МПа	%
0	3	7	2	11	0,4	0,5	0,2	0,6	110	0,15
1	2	3	11	7	0,2	0,4	0,6	0,5	120	0,14
2	11	7	3	2	0,6	0,5	0,4	0,2	125	0,13
3	3	2	11	7	0,4	0,2	0,6	0,5	130	0,12
4	2	11	7	3	0,2	0,6	0,5	0,4	135	0,11
5	3	11	2	7	0,4	0,6	0,2	0,5	140	0,1
6	7	2	3	11	0,5	0,2	0,4	0,6	145	0,09
7	11	2	3	7	0,6	0,2	0,4	0,5	150	0,08
8	7	11	2	3	0,5	0,6	0,2	0,4	155	0,07
9	3	2	7	11	0,4	0,2	0,5	0,6	160	0,06







1.3. Пример выполнения задачи № 1

Стальной стержень АЕ (рис. 2) круглого поперечного сечения нагружен заданными продольными силами $F_1 = 10$ кН, $F_2 = 7$ кН, $F_3 = 24$ кН и $F_4 = 15$ кН.

Длины участков стержня $L_1 = k_1L = 0,7L$, $L_2 = k_2L = 0,4L$, $L_3 = k_3L = 0,5L$, $L_4 = k_4L = 0,8L$, допускаемое напряжение $[\sigma] = 160$ МПа, допускаемое относительное удлинение $[\varepsilon] = 0,001$, модуль Юнга материала $E = 2 \cdot 10^8$ кПа.

Требуется построить эпюры продольной силы N и относительного удлинения ε , с помощью которых определить диаметр поперечного сечения стержня из условий прочности и жесткости.

Построение эпюры продольной силы

Не вычисляя из уравнений равновесия значение реакции в заделке и используя метод сечений, запишем выражения для продольной силы по участкам стержня. Будем двигаться при этом слева направо в сторону заделки **Е**, начиная со свободного конца **А** стержня и используя правило знаков согласно рис. 1.

Границы первого участка:

$$0 \leq x_1 \leq L_1.$$
$$N_1 = \sum N^{\text{ЛЭВ}} = F_1 = 10 \text{ кН.}$$

Границы второго участка:

$$L_1 \leq x_2 \leq L_1 + L_2.$$
$$N_2 = \sum N^{\text{ЛЭВ}} = F_1 - F_2 = 10 - 7 = 3 \text{ кН.}$$

Границы третьего участка:

$$L_1 + L_2 \leq x_3 \leq L_1 + L_2 + L_3.$$

Границы четвертого участка:

$$L_1 + L_2 + L_3 \leq x_4 \leq L_1 + L_2 + L_3 + L_4.$$
$$N_4 = \sum N^{\text{ЛЭВ}} = F_1 - F_2 - F_3 + F_4 = 10 - 7 - 24 + 15 = -6 \text{ кН.}$$

Полученные значения откладываем в масштабе на каждом из соответствующих участков стержня (рис. 2). После построения эпюры продольной силы делаем ее проверку, используя правило проверки правильности построения эпюры продольной силы: в тех сечениях стержня, где приложены сосредоточенные продольные силы, на эпюре будут скачки на их величину в соответствии с направлением хода построения и выбранного правила знаков.

Построение эпюры удлинения

Заделка неподвижна, поэтому удлинение в ней $\Delta L_E = 0$.

Удлинение сечения **Д** относительно неподвижной заделки **Е**

$$\Delta L_{DE} = \frac{N_4 \cdot L_4}{EA},$$

откуда $\varepsilon_{DE} \cdot EA = \frac{\Delta L_{DE}}{L} \cdot EA = N_4 \cdot k_4 = -6 \cdot 0,8 = -4,8 \text{ кН}.$

Относительное удлинение сечения **С** относительно неподвижной заделки **Е** складывается из суммы относительных удлинений сечения **С** относительно **Д** и сечения **Д** относительно **Е**, т. е.

$$\varepsilon_{CE} \cdot EA = \varepsilon_{CD} \cdot EA + \varepsilon_{DE} \cdot EA,$$

где $\varepsilon_{CD} \cdot EA = \frac{\Delta L_{CD}}{L} \cdot EA = N_3 \cdot k_3 = -21 \cdot 0,5 = -10,5 \text{ кН},$

тогда $\varepsilon_{CE} \cdot EA = \varepsilon_{CD} \cdot EA + \varepsilon_{DE} \cdot EA = -10,5 + (-4,8) = -15,3 \text{ кН}.$

Аналогично определяются относительные удлинения сечений **В** и **А** относительно неподвижной заделки **Е**:

$$\varepsilon_{BE} \cdot EA = \varepsilon_{BC} \cdot EA + \varepsilon_{CE} \cdot EA,$$

где $\varepsilon_{BC} \cdot EA = \frac{\Delta L_{BC}}{L} \cdot EA = N_2 \cdot k_2 = 3 \cdot 0,4 = 1,2 \text{ кН},$

тогда $\varepsilon_{BE} \cdot EA = \varepsilon_{BC} \cdot EA + \varepsilon_{CE} \cdot EA = -15,3 + 1,2 = -14,1 \text{ кН},$

$$\varepsilon_{AE} \cdot EA = \varepsilon_{AB} \cdot EA + \varepsilon_{BE} \cdot EA,$$

$$\varepsilon_{AB} \cdot EA = \frac{\Delta L_{AB}}{L} \cdot EA = N_1 \cdot k_1 = 10 \cdot 0,7 = 7 \text{ кН},$$

$$\varepsilon_{AE} \cdot EA = \varepsilon_{AB} \cdot EA + \varepsilon_{BE} \cdot EA = 7 + (-14,1) = -7,1 \text{ кН}.$$

Полученные значения откладываем в масштабе на каждом из соответствующих участков стержня (рис. 2).

Определение диаметра стержня

Так как сечение стержня по длине не меняется, то из условия прочности определим минимальный диаметр стержня круглого сплошного сечения:

$$d_{\text{MIN}} \geq \sqrt{\frac{4 \cdot |N_{\text{MAX}}|}{\pi \cdot [\sigma]}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 21 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 160 \cdot 10^6}} = 0,01293 \text{ м} = 12,93 \text{ мм}.$$

Полученное значение округлим до $d = 15 \text{ мм}.$

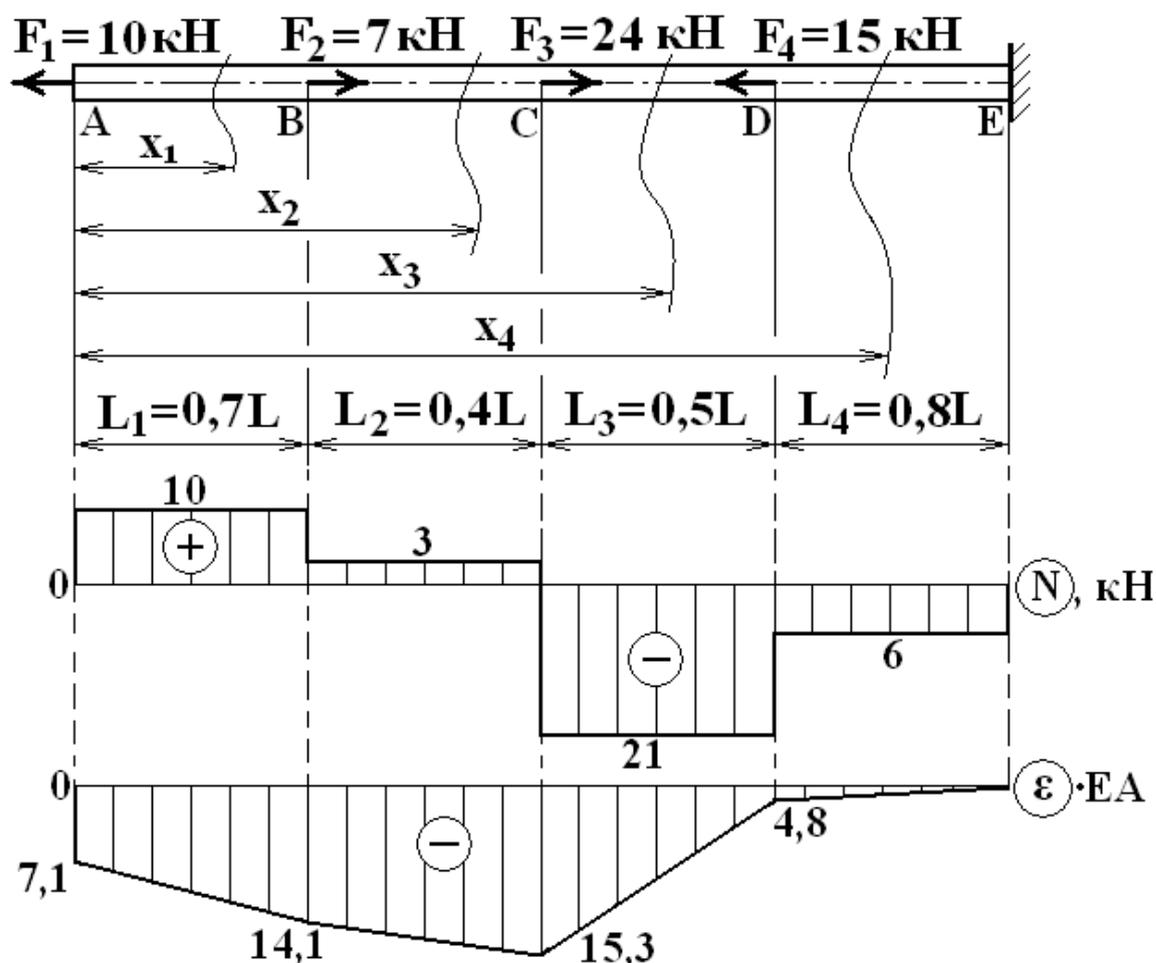


Рисунок 2

Определение наибольшего относительного удлинения

Сначала определим величину площади стержня круглого сплошного сечения:

$$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot (0,015)^2}{4} = 17,65 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2.$$

Тогда продольная жесткость стержня будет равна:

$$EA = 2 \cdot 10^8 \cdot 17,65 \cdot 10^{-5} = 35320 \text{ кН}.$$

Величина наибольшего относительного удлинения:

$$|\varepsilon_{\text{MAX}}| = \frac{|\varepsilon_{\text{CE}} \cdot EA|}{EA} = \frac{|-15,3|}{35320} = 0,00043.$$

Выполняем проверку условия жесткости стержня:

$$|\varepsilon_{\text{MAX}}| = 0,00043 < 0,001 = [\varepsilon].$$

Условие жесткости стержня для диаметра 15 мм выполняется, в противном случае диаметр стержня надо увеличить до значения, определяемого формулой:

$$d_{\text{MIN}} \geq \sqrt{\frac{4 \cdot |\varepsilon_{\text{MAX}} \cdot EA|}{E \cdot \pi \cdot [\varepsilon]}}.$$

2. КРУЧЕНИЕ

2.1. Краткие сведения по теории

Стержень подвергается деформации *кручения*, когда в его поперечных сечениях возникают внутренние крутящие моменты M_K . Их величина определяется методом сечений по участкам, границами которых являются места приложения внешних крутящих моментов T , действующих на стержень. Из условия равновесия следует, что величина внутреннего крутящего момента M_K в поперечном сечении стержня численно равна алгебраической сумме внешних крутящих моментов T , действующих по одну сторону от рассматриваемого сечения.

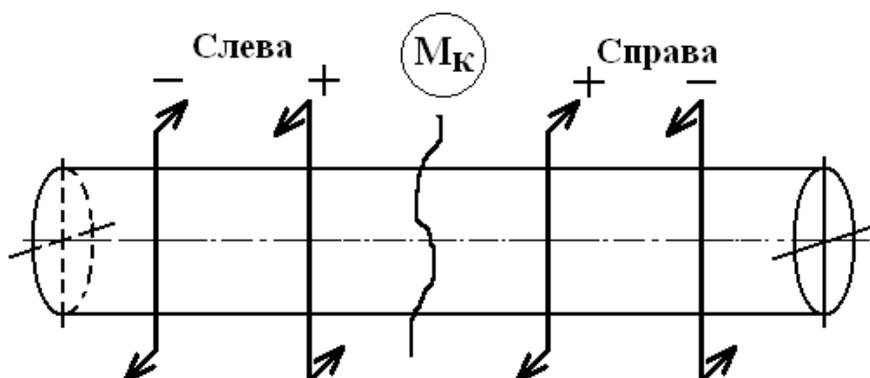


Рисунок 3

Крутящий момент M_K в поперечном сечении вала считается положительным, когда внешний крутящий момент T действует по часовой стрелке при взгляде на соответствующий торец вала (рис. 3).

Эюра крутящего момента – это график, показывающий изменение величины внутреннего крутящего момента в поперечных сечениях вала в зависимости от координаты x .

Для цилиндрического стержня круглого поперечного сечения диаметром d величина касательного напряжения τ в точке поперечного сечения, находящегося на расстоянии ρ от центра (рис. 4), определяется по формуле:

$$\tau = \frac{M_K}{I_P} \cdot \rho,$$

где M_K – величина крутящего момента в сечении;

I_P – полярный момент инерции сечения.

Для круглого сплошного сечения диаметром d полярный момент инерции I_P определяется по формуле:

$$I_P = \frac{\pi \cdot d^4}{32}.$$

Максимальные касательные напряжения τ в поперечном сечении вала действуют в точках, наиболее удаленных от центра, т. е. при $\rho = d/2$ (рис. 4). Их величина определяется по формуле:

$$\tau_{\text{MAX}} = \frac{M_{\text{K}}}{W_{\text{P}}},$$

где W_{P} – полярный момент сопротивления.

Для круглого сплошного сечения W_{P} определяется по формуле:

$$W_{\text{P}} = \frac{I_{\text{P}} \cdot 2}{d} = \frac{\pi \cdot d^3}{16}.$$

Условие прочности при кручении имеет вид:

$$\tau_{\text{MAX}} = \frac{|M_{\text{K}}|}{W_{\text{P}}} \leq [\tau],$$

где $[\tau]$ – допускаемое касательное напряжение при кручении.

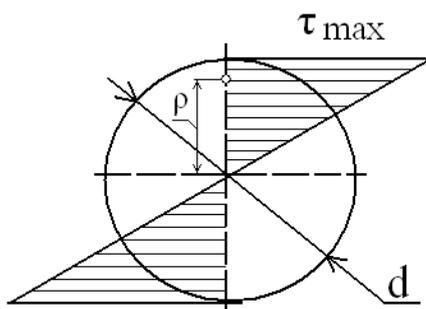


Рисунок 4

Угол закручивания φ на участке вала длиной L , где крутящий момент M_{K} постоянен, определяется по формуле:

$$\varphi = \frac{M_{\text{K}} \cdot L}{G \cdot I_{\text{P}}},$$

где G – модуль сдвига материала вала.

Произведение $G \cdot I_{\text{P}}$ называется **жесткостью при кручении** вала.

Если стержень имеет несколько участков, то угол закручивания будет определяться как алгебраическая сумма углов закручивания на участках

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \frac{M_{\text{Ki}} \cdot L_i}{G \cdot I_{\text{Pi}}}.$$

Величина наибольшего относительного угла закручивания (рад/м) на участке вала длиной L определяется по формуле:

$$\Delta\varphi = \frac{|\varphi_{\text{MAX}}|}{L}.$$

Условие жесткости при кручении имеет вид:

$$\Delta\varphi_{\text{MAX}} \leq [\Delta\varphi],$$

где $[\Delta\varphi]$ – допускаемый относительный угол закручивания.

2.2. Задача № 2. Кручение

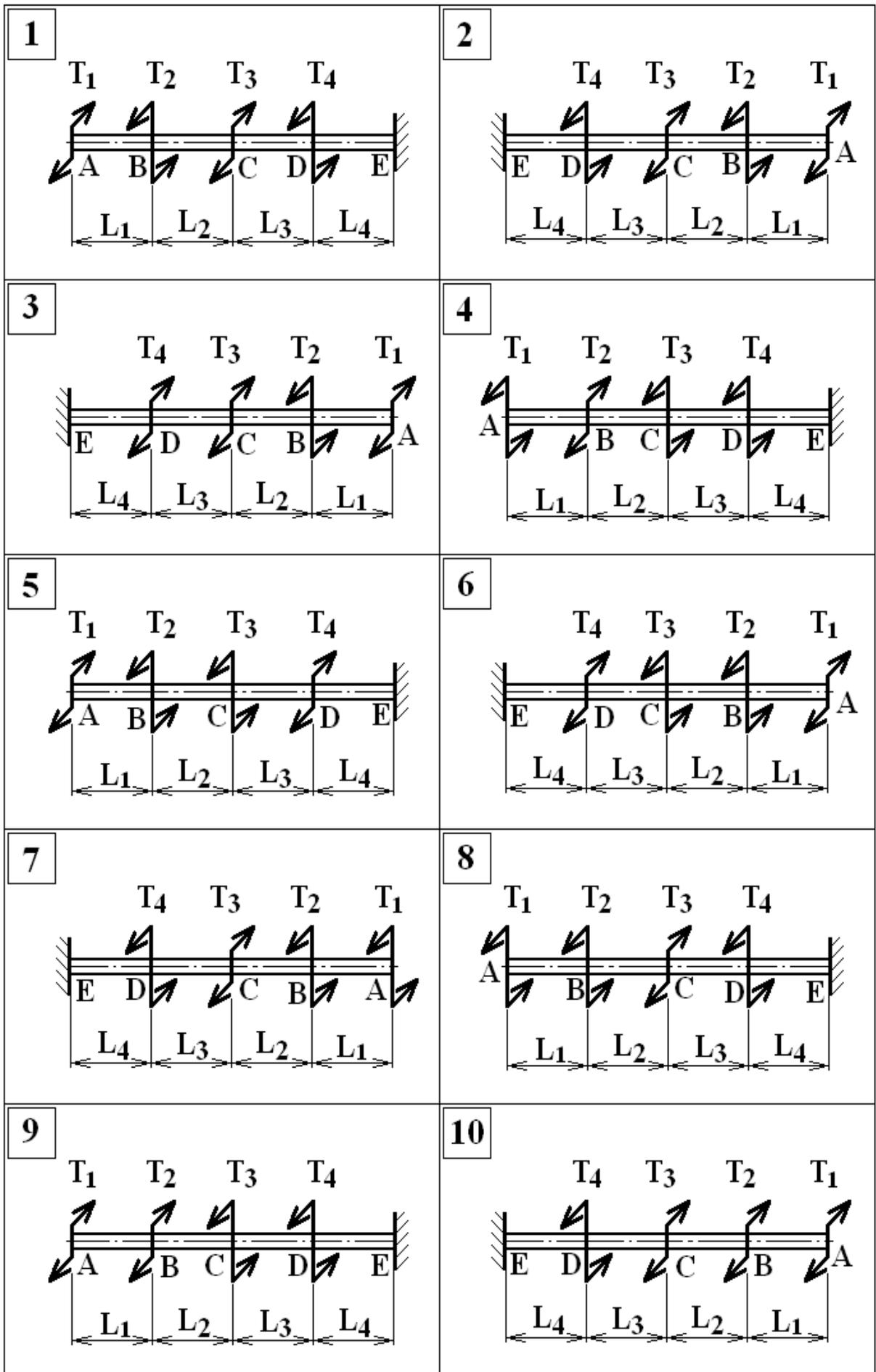
Стальной стержень **AE** круглого поперечного сечения нагружен заданными крутящими моментами T_1, T_2, T_3 и T_4 .

Относительные длины участков стержня $k_1 = L_1/L, k_2 = L_2/L, k_3 = L_3/L, k_4 = L_4/L$, допускаемое напряжение $[\tau]$ и относительный угол закручивания $[\Delta\varphi]$ известны. Модуль сдвига материала стержня $G = 0,8 \cdot 10^8$ кПа.

Требуется построить эпюры крутящего момента M_k и относительного угла закручивания $\Delta\varphi$, с помощью которых определить диаметр поперечного сечения стержня из условий прочности и жесткости. Данные, необходимые для вычисления, приведены в табл. 2.

Таблица 2 – Данные для вычисления к задаче № 2

№	T_1	T_2	T_3	T_4	k_1	k_2	k_3	k_4	$[\tau]$	$[\Delta\varphi]$
	кНм	кНм	кНм	кНм	-	-	-	-	МПа	рад/м
0	3	2	7	11	0,4	0,2	0,5	0,6	35	0,015
1	7	11	2	3	0,5	0,6	0,2	0,4	40	0,014
2	11	2	3	7	0,6	0,2	0,4	0,5	45	0,013
3	7	2	3	11	0,5	0,2	0,4	0,6	50	0,012
4	3	11	2	7	0,4	0,6	0,2	0,5	55	0,011
5	2	11	7	3	0,2	0,6	0,5	0,4	60	0,01
6	3	2	11	7	0,4	0,2	0,6	0,5	65	0,009
7	11	7	3	2	0,6	0,5	0,4	0,2	70	0,008
8	2	3	11	7	0,2	0,4	0,6	0,5	75	0,007
9	3	7	2	11	0,4	0,5	0,2	0,6	80	0,006



<p>11</p>	<p>12</p>
<p>13</p>	<p>14</p>
<p>15</p>	<p>16</p>
<p>17</p>	<p>18</p>
<p>19</p>	<p>20</p>

<p>21</p>	<p>22</p>
<p>23</p>	<p>24</p>
<p>25</p>	<p>26</p>
<p>27</p>	<p>28</p>
<p>29</p>	<p>30</p>

2.3. Пример выполнения задачи № 2

Стальной стержень АЕ круглого поперечного сечения нагружен крутящими моментами $T_1 = 7$ кНм, $T_2 = 10$ кНм, $T_3 = 15$ кНм и $T_4 = 24$ кНм.

Длины участков стержня $L_1 = k_1L = 0,8L$, $L_2 = k_2L = 0,7L$, $L_3 = k_3L = 0,4L$, $L_4 = k_4L = 0,5L$ (рис. 5), допустимое напряжение $[\tau] = 25$ МПа, допустимый относительный угол закручивания $[\Delta\varphi] = 0,006$ рад/м, модуль сдвига материала стержня $G = 0,8 \cdot 10^8$ кПа.

Требуется построить эпюры крутящего момента M_K и относительного угла закручивания $\Delta\varphi$, с помощью которых определить диаметр поперечного сечения стержня из условий прочности и жесткости.

Построение эпюры крутящих моментов

Не вычисляя из уравнений равновесия значение реактивного момента в заделке и используя метод сечений, запишем выражения для крутящего момента по участкам вала. Будем двигаться при этом слева направо в сторону заделки Е, начиная со свободного конца А вала и используя правило знаков согласно рис. 3.

Границы первого участка:

$$0 \leq x_1 \leq L_1.$$
$$M_{K1} = \Sigma T^{\text{ЛЭВ}} = T_1 = 7 \text{ кНм.}$$

Границы второго участка:

$$L_1 \leq x_2 \leq L_1 + L_2.$$
$$M_{K2} = \Sigma T^{\text{ЛЭВ}} = T_1 - T_2 = 7 - 10 = -3 \text{ кНм.}$$

Границы третьего участка:

$$L_1 + L_2 \leq x_3 \leq L_1 + L_2 + L_3.$$
$$M_{K3} = \Sigma T^{\text{ЛЭВ}} = T_1 - T_2 - T_3 = 7 - 10 - 15 = -18 \text{ кНм.}$$

Границы четвертого участка:

$$L_1 + L_2 + L_3 \leq x_4 \leq L_1 + L_2 + L_3 + L_4.$$
$$M_{K4} = \Sigma T^{\text{ЛЭВ}} = T_1 - T_2 - T_3 + T_4 = 7 - 10 - 15 + 24 = 6 \text{ кНм.}$$

Полученные значения откладываем в масштабе на каждом из соответствующих участков вала (рис. 5). После построения эпюры крутящих моментов делаем ее проверку, используя правило проверки правильности построения эпюры крутящих моментов: в тех сечениях вала, где приложены сосредоточенные крутящие моменты, на эпюре будут скачки на их величину в соответствии с направлением хода построения и выбранного правила знаков.

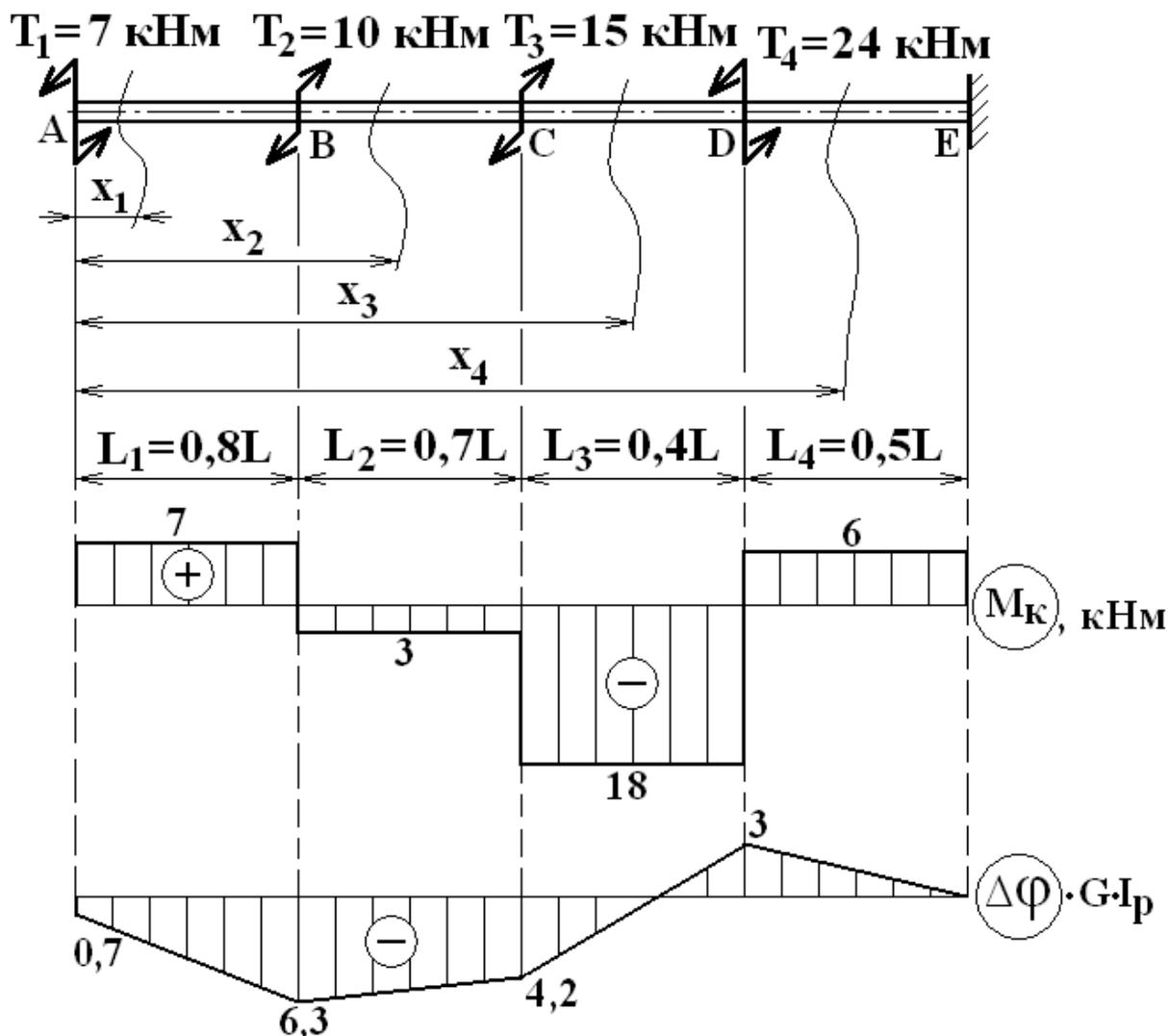


Рисунок 5

Построение эпюры углов закручивания

Заделка неподвижна, поэтому угол закручивания в ней $\varphi_E = 0$ рад.
Угол поворота сечения **D** относительно неподвижной заделки **E**

$$\varphi_{DE} = \frac{M_{K4} \cdot L_4}{G \cdot I_p},$$

откуда
$$\Delta\varphi_{DE} \cdot GI_p = \frac{\varphi_{DE}}{L} \cdot GI_p = M_{K4} \cdot k_4 = 6 \cdot 0,5 = 3 \text{ кНм}.$$

Относительный угол закручивания сечения **C** относительно неподвижной заделки **E** складывается из суммы относительных углов закручивания сечения **C** относительно **D** и сечения **D** относительно **E**, т. е.

$$\Delta\varphi_{CE} \cdot GI_p = \Delta\varphi_{CD} \cdot GI_p + \Delta\varphi_{DE} \cdot GI_p,$$

где
$$\Delta\varphi_{CD} \cdot GI_p = \frac{\varphi_{CD}}{L} \cdot GI_p = M_{K3} \cdot k_3 = -18 \cdot 0,4 = -7,2 \text{ кНм},$$

тогда $\Delta\varphi_{CE} \cdot GI_P = \Delta\varphi_{CD} \cdot GI_P + \Delta\varphi_{DE} \cdot GI_P = -7,2 + 3 = -4,2$ кНм.

Аналогично определяются относительные углы закручивания сечений В и А относительно неподвижной заделки Е:

$$\Delta\varphi_{BE} \cdot GI_P = \Delta\varphi_{BC} \cdot GI_P + \Delta\varphi_{CE} \cdot GI_P,$$

где $\Delta\varphi_{BC} \cdot GI_P = \frac{\varphi_{BC}}{L} \cdot GI_P = M_{K2} \cdot k_2 = -3 \cdot 0,7 = -2,1$ кНм,

тогда $\Delta\varphi_{BE} \cdot GI_P = \Delta\varphi_{BC} \cdot GI_P + \Delta\varphi_{CE} \cdot GI_P = -2,1 + (-4,2) = -6,3$ кНм,

$$\Delta\varphi_{AE} \cdot GI_P = \Delta\varphi_{AB} \cdot GI_P + \Delta\varphi_{BE} \cdot GI_P,$$

$$\Delta\varphi_{AB} \cdot GI_P = \frac{\varphi_{AB}}{L} \cdot GI_P = M_{K1} \cdot k_1 = 7 \cdot 0,8 = 5,6$$
 кНм,

$$\Delta\varphi_{AE} \cdot GI_P = \Delta\varphi_{AB} \cdot GI_P + \Delta\varphi_{BE} \cdot GI_P = 5,6 + (-6,3) = -0,7$$
 кНм.

Полученные значения откладываем в масштабе на каждом из соответствующих участков вала (рис. 5).

Определение диаметра вала

Так как сечение вала по длине не меняется, то из условия прочности определим минимальный диаметр вала круглого сплошного сечения:

$$d_{\min} \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot |M_{K\max}|}{\pi \cdot [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 18 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 25 \cdot 10^6}} = 0,154 \text{ м} = 154 \text{ мм}.$$

Полученное значение округлим до $d = 160$ мм.

Определение наибольшего относительного угла закручивания

Сначала определим величину полярного момента инерции I_P при кручении вала круглого сплошного сечения. Так как сечение вала по длине постоянно, то для каждого участка имеем:

$$I_P = \frac{\pi \cdot d^4}{32} = \frac{3,14 \cdot (0,16)^4}{32} = 64,3 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4.$$

Тогда жесткость стержня при кручении будет равна:

$$GI_P = 0,8 \cdot 10^8 \cdot 64,3 \cdot 10^{-6} = 5144,6 \text{ кНм}^2.$$

Величина наибольшего относительного угла закручивания будет равна:

$$|\Delta\varphi_{\text{MAX}}| = \frac{|\Delta\varphi_{\text{BE}} \cdot GI_p|}{GI_p} = \frac{|-6,3|}{5144,6} = 0,00122 \text{ рад/м}.$$

Выполняем проверку условия жесткости вала:

$$|\Delta\varphi_{\text{MAX}}| = 0,00122 \text{ рад/м} < 0,006 \text{ рад/м} = [\Delta\varphi].$$

Условие жесткости вала для диаметра 160 мм выполняется, в противном случае диаметр вала надо увеличить до значения, определяемого формулой:

$$d_{\text{MIN}} \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot |\Delta\varphi_{\text{MAX}} \cdot GI_p|}{G \cdot \pi \cdot [\Delta\varphi]}}.$$

3. ИЗГИБ

3.1. Краткие сведения по теории

Деформация, при которой меняется кривизна геометрической оси, называется *изгибом*. Стержень при изгибе называется *балкой*.

При изгибе стержня за счет действия на него внешней поперечной нагрузки (сосредоточенных сил и моментов) в поперечных сечениях стержня возникают следующие внутренние силовые факторы: поперечная сила Q и изгибающий момент M .

Если плоскость, в которой лежат действующие нагрузки, совпадает с одной из главных плоскостей инерции, то такой изгиб называется *прямым*, а если не совпадает, то *косым*. Если величина поперечной силы в сечении не равна нулю, то такой изгиб называется *поперечным*. Если величина поперечной силы в сечении равна нулю и изгибающий момент постоянен, то такой изгиб называется *чистым*.

Далее будет рассмотрена теория прямого поперечного изгиба.

Величина *поперечной силы* Q_Y в поперечном сечении балки численно равна алгебраической сумме проекций на ось Y всех внешних сил, действующих по одну сторону (справа или слева) от рассматриваемого сечения. Поперечная сила считается положительной, если она направлена слева вверх и справа вниз. При противоположных направлениях поперечная сила считается отрицательной (рис. 6).

Величина *изгибающего момента* M_Z в поперечном сечении балки численно равна алгебраической сумме моментов внешних нагрузок, действующих по одну сторону (справа или слева) от рассматриваемого сечения. Изгибающий момент считается положительным, если он направлен слева от сечения по часовой стрелке, а справа – против часовой стрелки. При противоположных направлениях считается отрицательным (рис. 6).

Эпюрой поперечных сил Q и изгибающих моментов M называется график, показывающий изменение соответствующих величин в зависимости от координаты X .

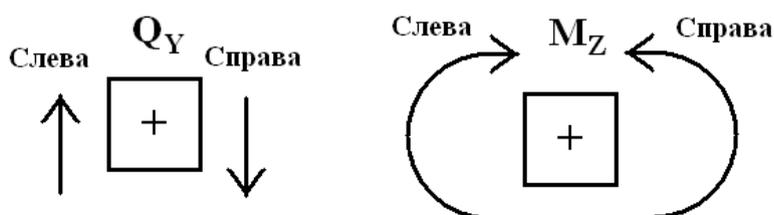


Рисунок 6

Условие прочности по нормальным напряжениям при изгибе имеет вид:

$$\sigma_{\text{MAX}} = \frac{|M_{\text{MAX}}|}{W_Z} \leq [\sigma],$$

где σ_{MAX} – максимальное нормальное напряжение в поперечном сечении балки;
 $|M_{\text{MAX}}|$ – наибольшее по модулю значение изгибающего момента, взятое с его эпюры;

W_Z – момент сопротивления постоянной по длине балки площади поперечного сечения;

$[\sigma]$ – допускаемое нормальное напряжение при изгибе.

Для круглого сплошного сечения величина W_Z определяется по формуле:

$$W_Z = \frac{\pi \cdot d^3}{32},$$

где d – диаметр стержня.

При изгибе балки существуют дифференциальные зависимости:

$$\frac{dM(x)}{dx} = Q(x), \quad \frac{dQ(x)}{dx} = q(x).$$

Из них следуют правила проверки построенных эпюр Q и M :

1. В тех сечениях балки, где приложены сосредоточенные силы, включая опорные реакции, на эпюре Q будут скачки на их величину, а на эпюре M – излом эпюры.

2. В тех сечениях балки, где приложены сосредоточенные моменты, включая опорные в заделках, на эпюре M будут скачки на их величину, а на эпюре Q особенностей не будет.

3. На участке, где действует равномерно распределенная нагрузка q , на эпюре Q будет наклонная линия, а на эпюре M – парабола, выпуклостью направленная навстречу нагрузке q .

4. Если эпюра Q проходит через ноль и меняет знак, то в этом сечении эпюра M будет иметь экстремум.

5. На участке, где отсутствует равномерно распределенная нагрузка q , эпюра Q будет представлена горизонтальной линией, а эпюра M – наклонной к оси x прямой.

6. На участке, где поперечная сила Q положительна, изгибающий момент M возрастает, а если сила Q отрицательна, то момент M убывает.

3.2. Задача № 3. Изгиб силами и моментами

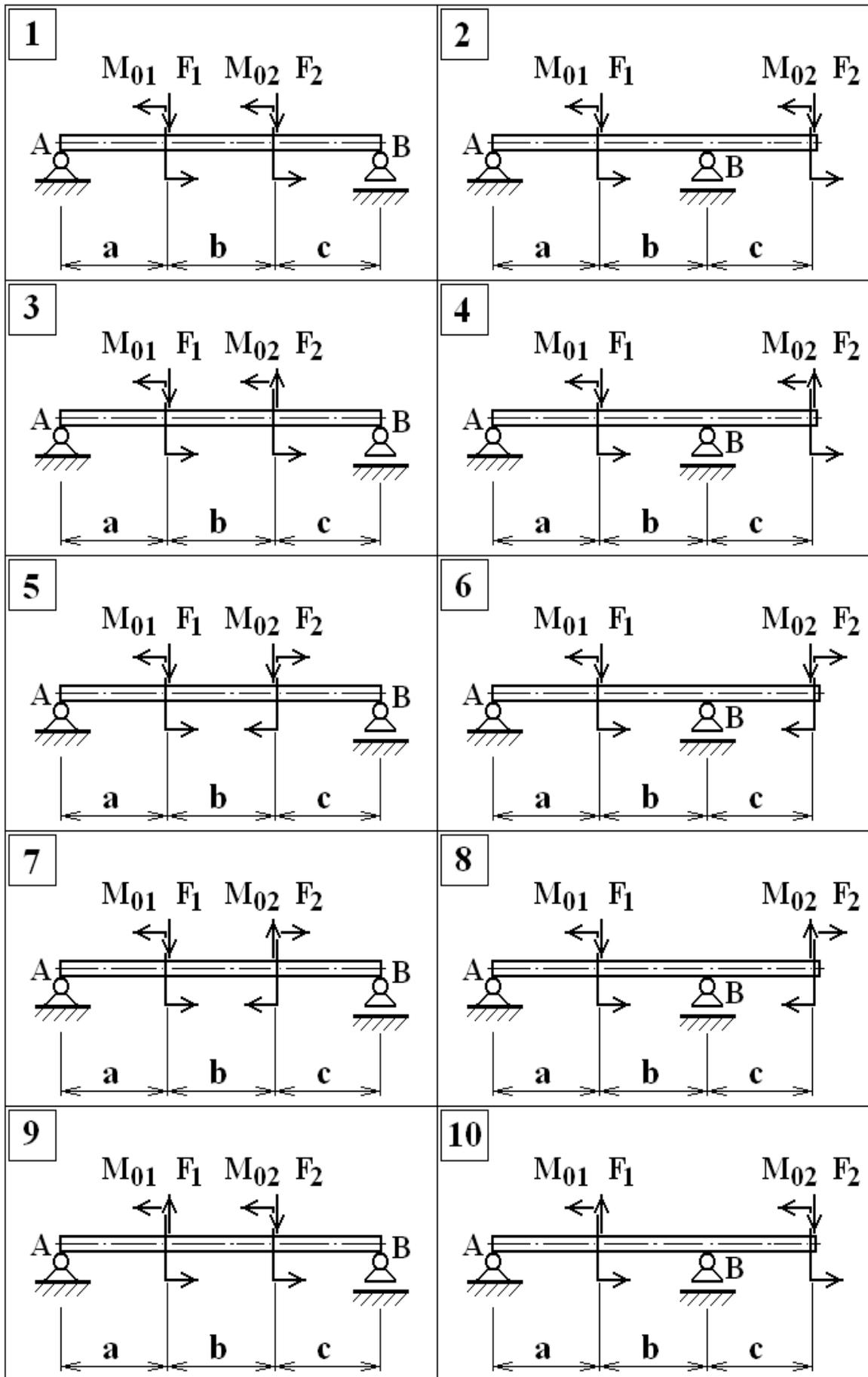
Стальной стержень **АВ** круглого поперечного сечения нагружен заданными изгибающими моментами M_{01} , M_{02} и поперечными силами F_1 и F_2 .

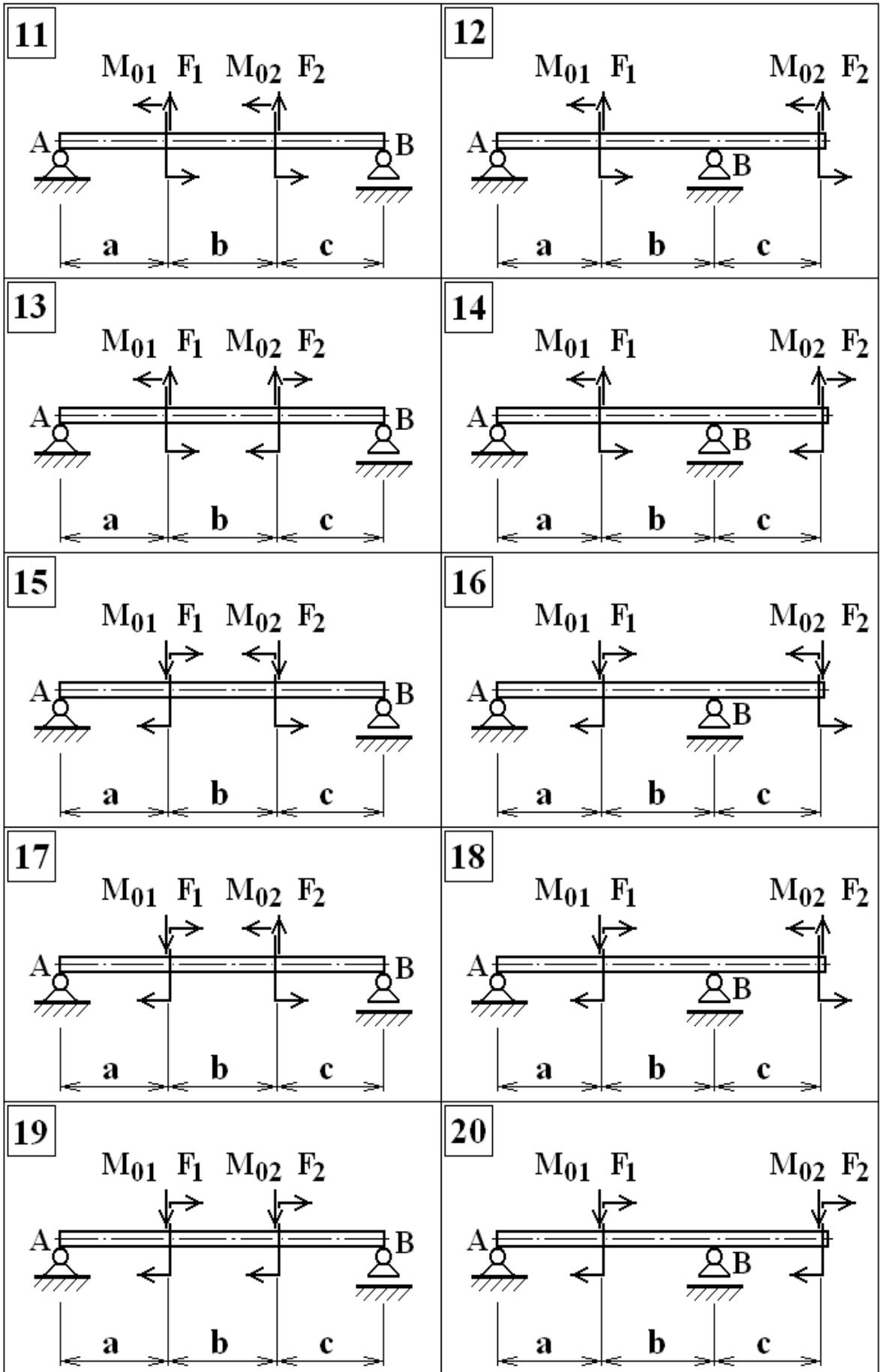
Длины участков стержня **a**, **b**, **c** и допускаемое напряжение $[\sigma]$ известны.

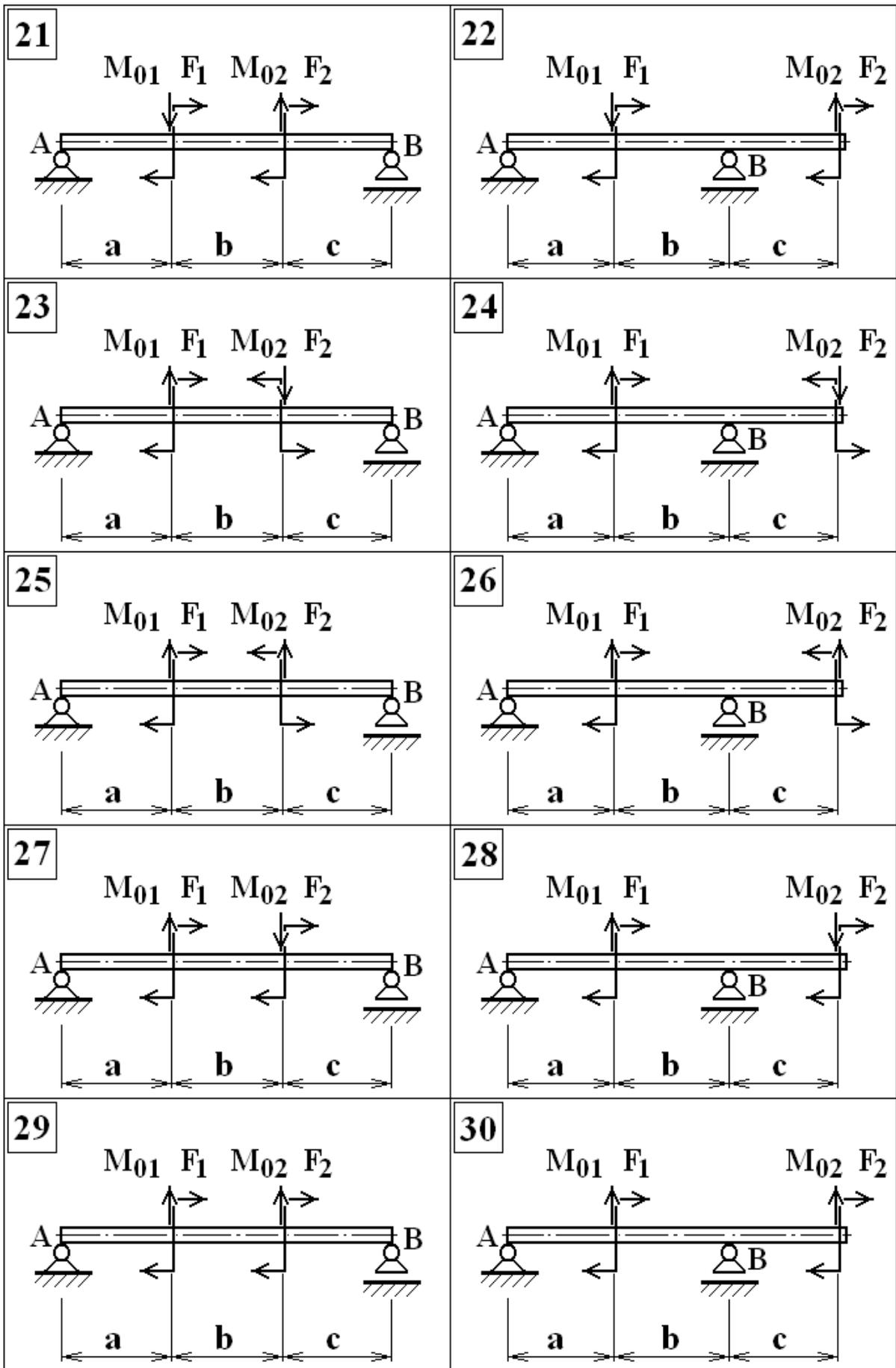
Требуется определить реакции в опорах **A** и **B**, построить эпюры поперечной силы **Q** и изгибающего момента **M**, определить диаметр поперечного сечения стержня из условия прочности. Данные, необходимые для вычисления, приведены в табл. 3.

Таблица 3 – Данные для вычисления к задаче № 3

№	M_{01}	F_1	M_{02}	F_2	a	b	c	$[\sigma]$
	кНм	кН	кНм	кН	м	м	м	МПа
0	4	2	3	5	1	2	3	110
1	7	3	2	4	2	3	1	120
2	2	8	5	6	3	1	2	125
3	7	9	8	2	2	1	3	130
4	6	5	7	3	1	3	2	135
5	3	7	5	6	2	2	1	140
6	2	8	9	7	1	3	1	145
7	6	5	8	2	3	1	1	150
8	4	2	3	7	2	3	2	155
9	5	3	2	4	3	2	1	160







3.3. Пример выполнения задачи № 3

Стальной стержень АВ круглого поперечного сечения нагружен изгибающими моментами $M_{01} = 15$ кНм, $M_{02} = 15$ кНм и поперечными силами $F_1 = 5$ кН и $F_2 = 20$ кН (рис. 7).

Длины участков стержня $a = 2$ м, $b = 3$ м, $c = 1$ м, допускаемое напряжение $[\sigma] = 160$ МПа.

Требуется определить реакции в опорах А и В, построить эпюры поперечной силы Q и изгибающего момента M , определить диаметр поперечного сечения стержня из условия прочности.

Определение реакций опор

Для определения реакции в опорных закреплениях используем уравнения равновесия статики на плоскости. Для этого в опорах А и В покажем действие реакций Y_A и Y_B , направив их предварительно вертикально вверх (см. рис. 7). Так как горизонтальных сил к балке не приложено, то $X_A = 0$.

Для нахождения реакции Y_A составим сумму моментов всех действующих сил относительно точки В:

$$\sum_{i=1}^n M_{Bi} = 0; \quad -Y_A \cdot (a + b + c) + M_{01} - F_1 \cdot (b + c) - M_{02} + F_2 \cdot c = 0;$$

$$Y_A = \frac{M_{01} - F_1 \cdot (b + c) - M_{02} + F_2 \cdot c}{a + b + c} = \frac{15 - 5 \cdot (3 + 1) - 10 + 20 \cdot 1}{2 + 3 + 1} = 0,833 \text{ кН.}$$

Так как значение реакции Y_A получилось положительным, то ее направление соответствует показанному направлению Y_A на расчетной схеме (в противном случае направление следует поменять на обратное).

Для нахождения реакции Y_B составим сумму моментов всех действующих сил относительно точки А:

$$\sum_{i=1}^n M_{Ai} = 0; \quad Y_B \cdot (a + b + c) + M_{01} - F_2 \cdot (b + a) - M_{02} + F_1 \cdot a = 0;$$

$$Y_B = \frac{M_{02} + F_2 \cdot (b + a) - M_{01} - F_1 \cdot a}{a + b + c} = \frac{10 + 20 \cdot (3 + 2) - 15 - 5 \cdot 2}{2 + 3 + 1} = 14,167 \text{ кН.}$$

Так как значение реакции Y_B получилось положительным, то ее направление соответствует показанному направлению Y_B на расчетной схеме (в противном случае направление следует поменять на обратное).

Сделаем проверку найденных реакций:

$$\sum_{i=1}^n Y_i = Y_A + Y_B + F_1 - F_2 = 0,833 + 14,167 + 5 - 20 = 0.$$

Проверка сошлась, теперь на расчетной схеме все известно и можно приступить к построению эпюр поперечной силы и изгибающего момента.

Построение эпюр поперечной силы и изгибающего момента

Заданная балка состоит из трех участков. Рассечем ее последовательно на каждом из них и запишем выражения для поперечной силы и изгибающего момента, действующих по одну сторону от рассматриваемого сечения, используя правило знаков согласно рис. 7.

Границы первого участка:

$$0 \leq x_1 \leq a.$$

$$Q_1 = \Sigma Q^{\text{ЛЭВ}} = Y_A = 0,833 \text{ кН.}$$

$$M_1 = \Sigma M^{\text{ЛЭВ}} = Y_A \cdot x_1 = 0,833 \cdot x_1.$$

При $x_1 = 0$ м, $M_1 = 0$ кНм.

При $x_1 = a = 2$ м, $M_1 = 1,667$ кНм.

Границы второго участка:

$$0 \leq x_2 \leq c.$$

$$Q_2 = \Sigma Q^{\text{ПР}} = -Y_B = -14,167 \text{ кН.}$$

$$M_2 = \Sigma M^{\text{ПР}} = Y_B \cdot x_2 = 14,167 \cdot x_2.$$

При $x_2 = 0$ м, $M_2 = 0$ кНм.

При $x_2 = c = 1$ м, $M_2 = 14,167$ кНм.

Границы третьего участка:

$$a \leq x_3 \leq a + b.$$

$$Q_3 = \Sigma Q^{\text{ЛЭВ}} = Y_A + F_1 = 0,833 + 5 = 5,833 \text{ кН.}$$

$$M_3 = \Sigma M^{\text{ЛЭВ}} = Y_A \cdot x_3 - M_{01} + F_1 \cdot (x_3 - a) = 0,833 \cdot x_3 - 15 + 5 \cdot (x_3 - 2).$$

При $x_3 = a = 2$ м, $M_3 = 0,833 \cdot 2 - 15 = -13,333$ кНм.

При $x_3 = a + b = 5$ м, $M_3 = 0,833 \cdot 5 - 15 + 5 \cdot (5 - 2) = 4,167$ кНм.

Полученные значения откладываем в масштабе на каждом из соответствующих участков балки (рис. 7). После построения эпюры делаем ее проверку, используя правила построения эпюр при изгибе.

Определение диаметра балки

Так как сечение балки по длине не меняется, то из условия прочности определим минимальный диаметр балки круглого сплошного сечения:

$$d_{\text{MIN}} \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot |M_{\text{MAX}}|}{\pi \cdot [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 14,167 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 160 \cdot 10^6}} = 0,0966 \text{ м} = 96,6 \text{ мм}.$$

Полученное значение округлим до $d = 100$ мм.

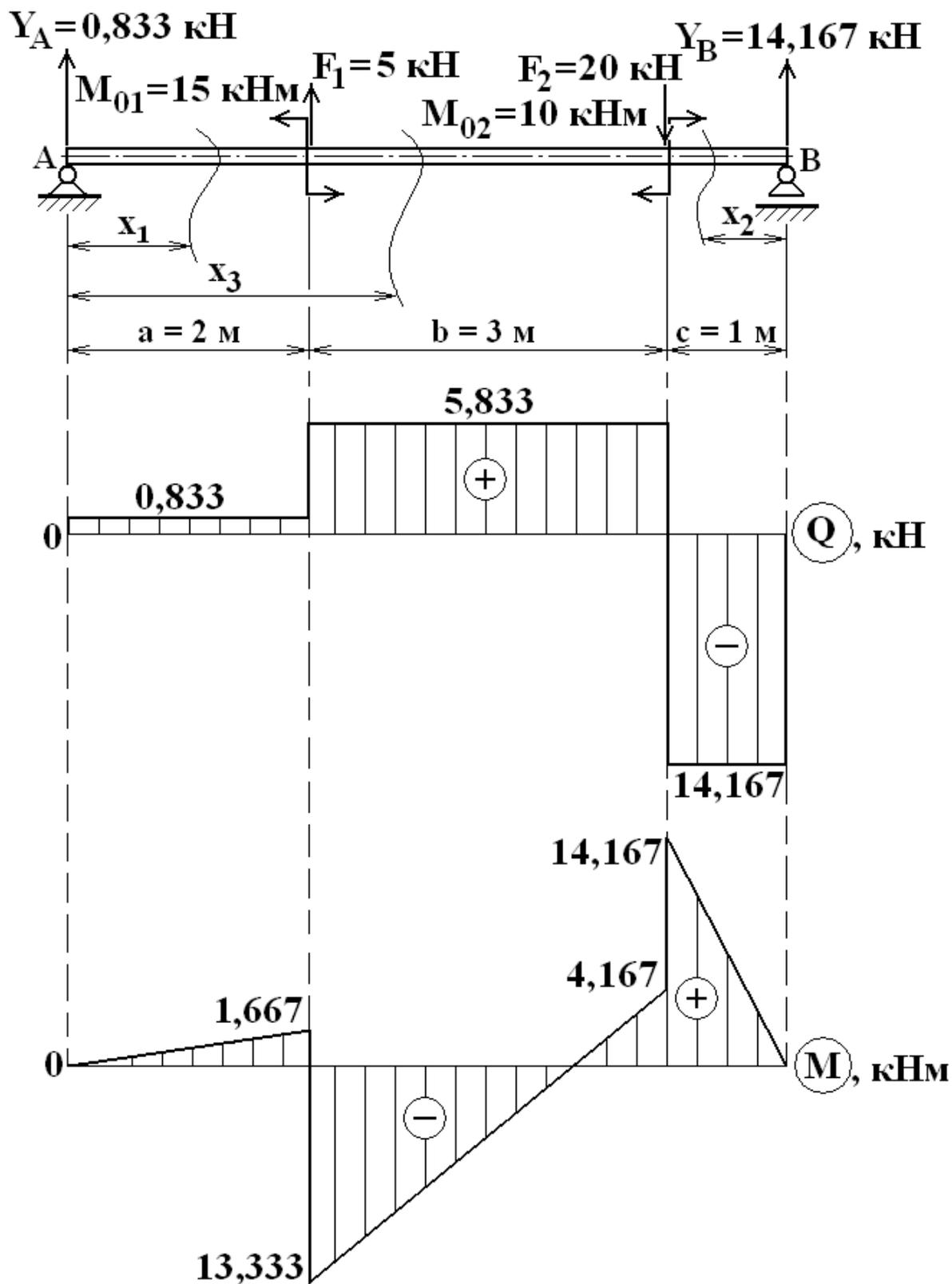


Рисунок 7

3.4. Задача № 4. Изгиб деревянной и стальной балок

Для заданных двух схем балок (рис. 8) требуется написать выражения Q и M для каждого участка в общем виде, построить эпюры Q и M , найти M_{\max} и подобрать:

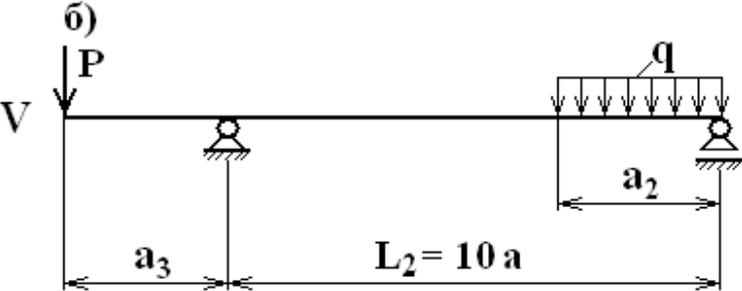
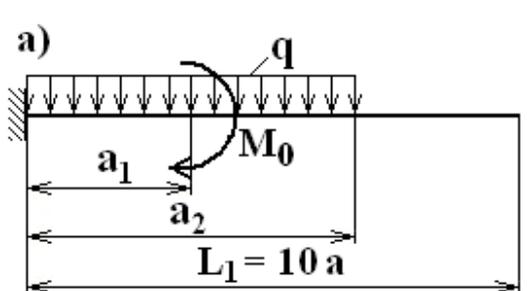
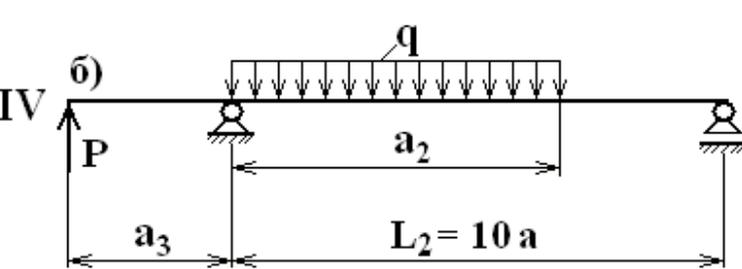
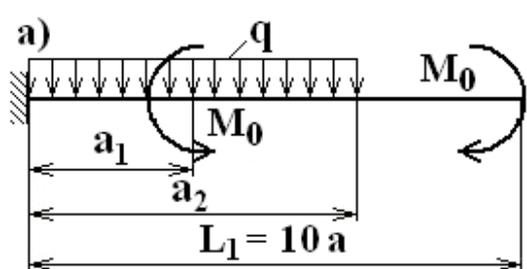
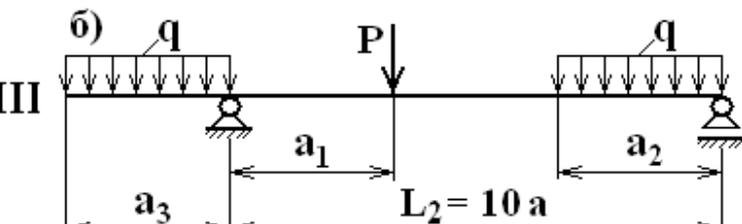
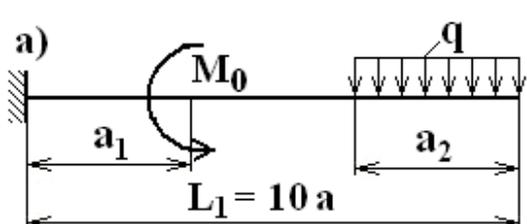
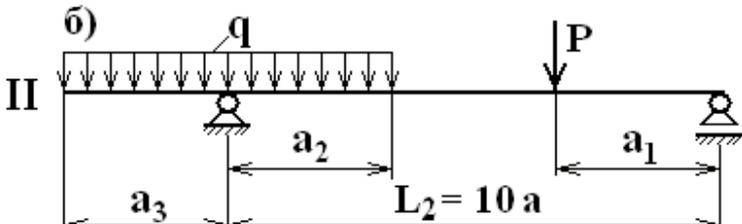
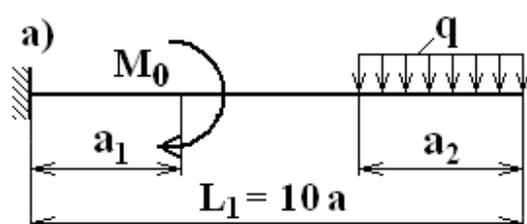
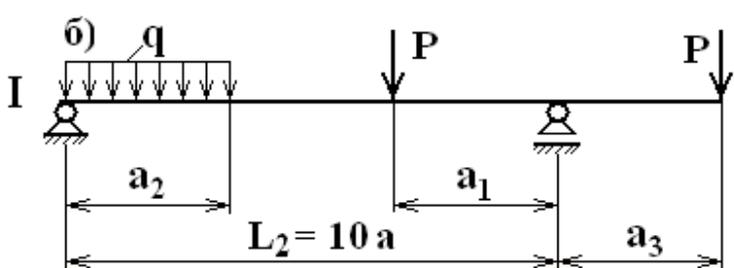
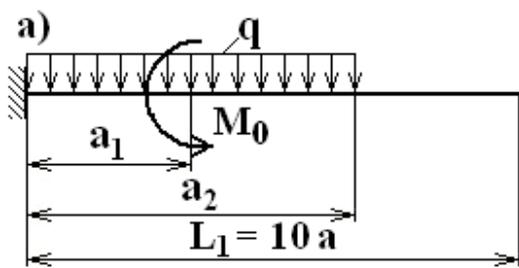
1. Для схемы (а) деревянную балку круглого поперечного сечения при $[\sigma] = 8 \text{ МПа}$.

2. Для схемы (б) стальную балку двутаврового поперечного сечения при $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

Данные, необходимые для вычисления, приведены в табл. 4.

Таблица 4 – Исходные данные к задаче № 4

№ строки	Схема по рис. 8	L_1	L_2	Расстояния в долях пролета			M_0 , кНм	Сосредоточенная сила P , кН	q , кН/м
		м	a_1/a	a_2/a	a_3/a				
1	I	1,1	6	1	9	1	10	10	10
2	II	1,2	7	2	8	2	20	20	20
3	III	1,3	3	3	7	3	3	3	3
4	IV	1,4	4	4	6	4	4	4	4
5	V	1,5	5	5	5	5	5	5	5
6	VI	1,6	6	6	6	1	6	6	6
7	VII	1,7	7	7	7	2	7	7	7
8	VIII	1,8	8	8	8	3	8	8	8
9	IX	1,9	9	9	9	4	9	9	9
0	X	2,0	10	10	10	5	10	10	10



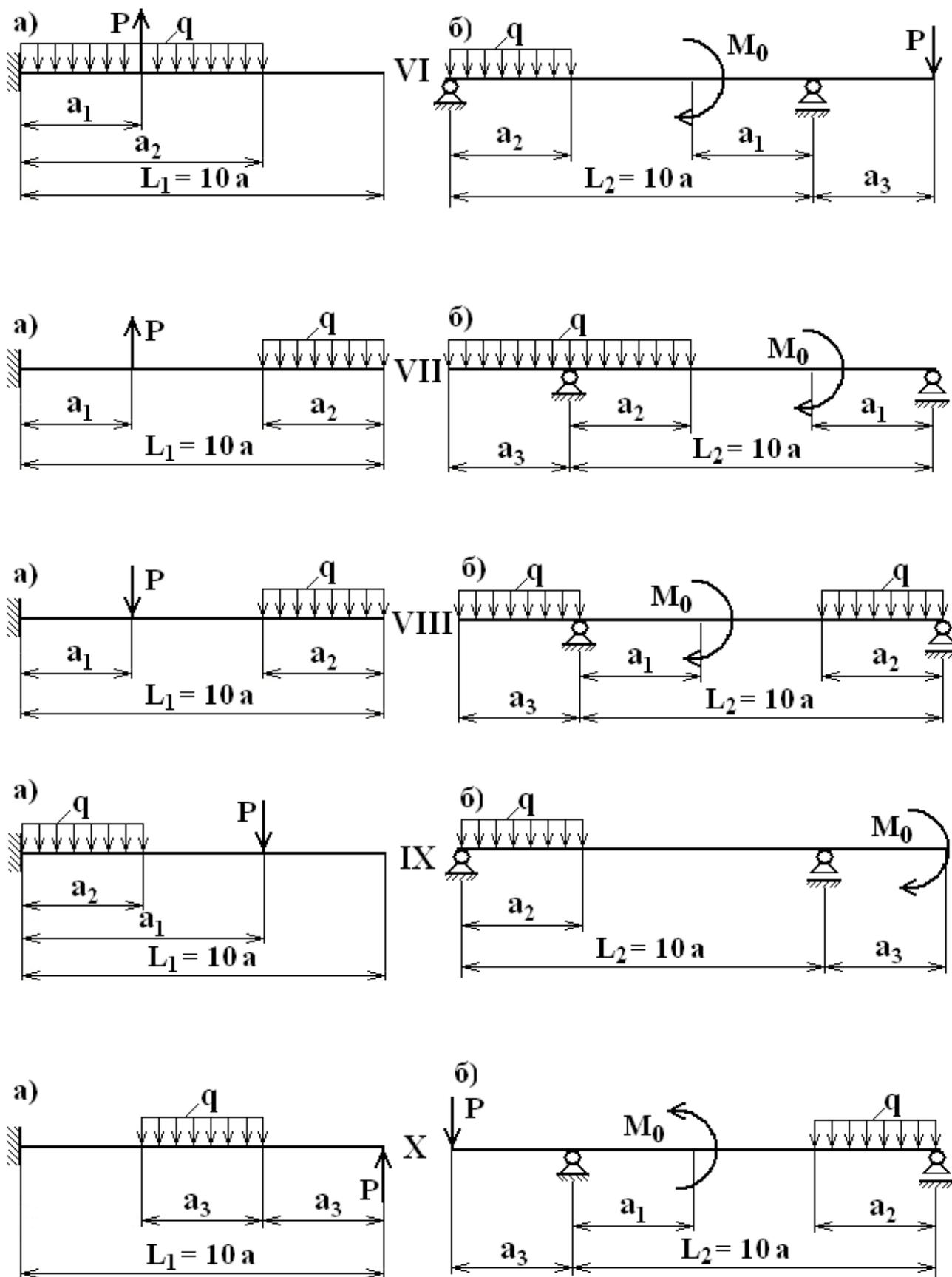


Рисунок 8

3.5. Пример выполнения задачи № 4а

Исходные данные для деревянной балки

$M_0 = 30$ кНм; $q = 10$ кН/м; $a = 1$ м; $b = 1$ м; $c = 1$ м; $[\sigma] = 8$ МПа (рис. 9).

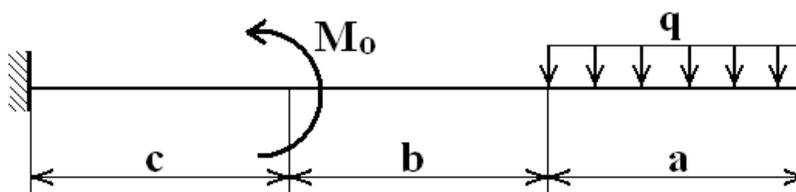


Рисунок 9

Построение эпюр поперечной силы и изгибающего момента

Не вычисляя из уравнений равновесия значения реакций в заделке, используя метод сечений, запишем выражения для поперечной силы и изгибающего момента по участкам балки. Будем двигаться при этом справа налево в сторону заделки, начиная со свободного конца и используя правило знаков согласно рис. 6.

Границы первого участка: $0 \leq x_1 \leq a$ (рис. 10).

$$Q_1 = \Sigma Q^{ПП} = q \cdot x_1 = 10 \cdot x_1.$$

$$M_1 = \Sigma M^{ПП} = -0,5 \cdot q \cdot x_1 \cdot x_1 = -5 \cdot x_1^2.$$

При $x_1 = 0$ м, $Q_1 = 0$ кН, $M_1 = 0$ кНм.

При $x_1 = a = 1$ м, $Q_1 = 10$ кН, $M_1 = -5$ кНм.

Так как эпюра Q на первом участке не меняет свой знак, то на эпюре M не будет экстремального значения. Поэтому для построения параболы на эпюре M возьмем точку посередине первого участка и определим значение изгибающего момента в ней: $x_1 = 0,5 \cdot a = 0,5$ м, $M_1 = -1,25$ кНм.

Границы второго участка: $a \leq x_2 \leq a + b$.

$$Q_2 = \Sigma Q^{ПП} = q \cdot a = 10 \text{ кН.}$$

$$M_2 = \Sigma M^{ПП} = -q \cdot a \cdot (x_2 - 0,5 \cdot a) = -10 \cdot (x_2 - 0,5).$$

При $x_2 = a = 1$ м, $M_2 = -5$ кНм.

При $x_2 = a + b = 2$ м, $M_2 = -15$ кНм.

Границы третьего участка: $a + b \leq x_3 \leq a + b + c$.

$$Q_3 = \Sigma Q^{ПП} = q \cdot a = 10 \text{ кН.}$$

$$M_3 = \Sigma M^{ПП} = -q \cdot a \cdot (x_3 - 0,5 \cdot a) + M_0 = -10 \cdot (x_3 - 0,5) + 30.$$

При $x_3 = a + b = 2$ м, $M_3 = 15$ кНм.

При $x_3 = a + b + c = 3$ м, $M_3 = 5$ кНм.

Полученные значения откладываем в масштабе на каждом из соответствующих участков балки (см. рис. 10) и делаем проверку эпюр.

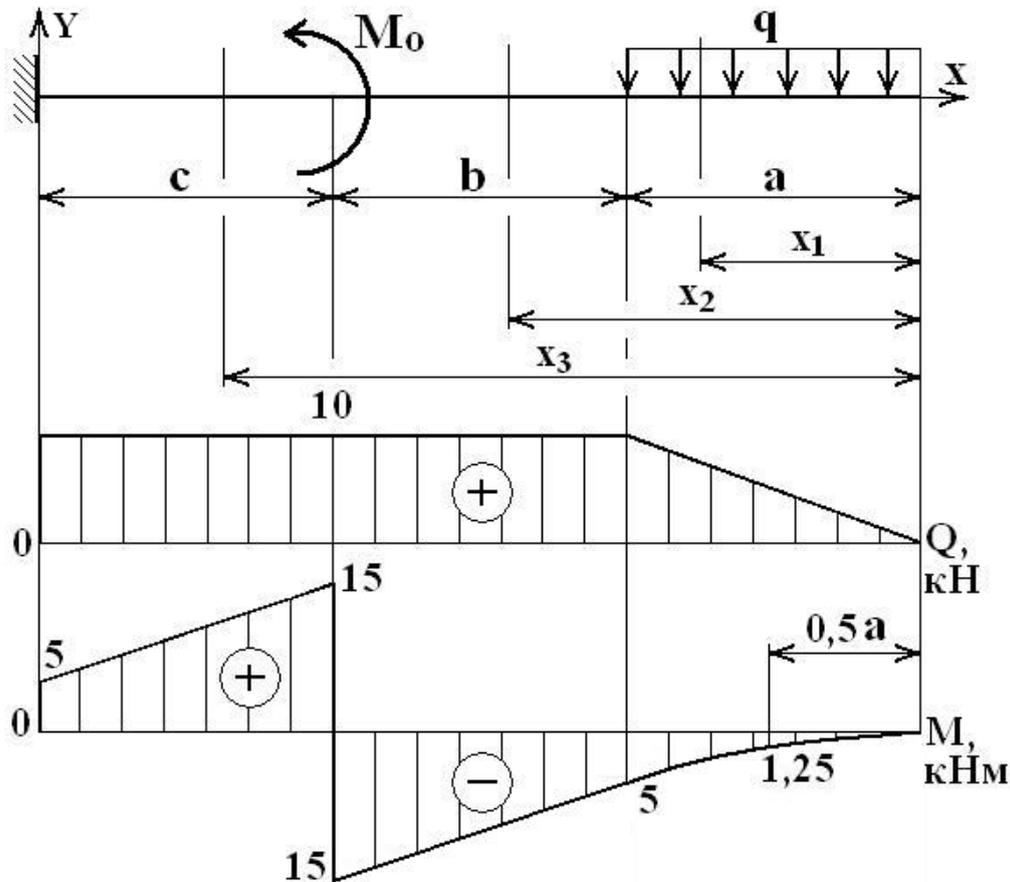


Рисунок 10

Подбор поперечного сечения деревянной балки

Для подбора деревянной балки круглого поперечного сечения используем условие прочности по нормальным напряжениям при изгибе:

$$\sigma_{\text{MAX}} = \frac{|M_{\text{MAX}}|}{W_Z} \leq [\sigma],$$

где σ_{MAX} – максимальное нормальное напряжение в поперечном сечении балки;

$|M_{\text{MAX}}| = 15 \text{ кНм}$ – наибольшее по модулю значение изгибающего момента;

$[\sigma]$ – допускаемое нормальное напряжение при изгибе;

$[\sigma] = 8 \text{ МПа}$;

W_Z – момент сопротивления площади поперечного сечения балки.

Для круга диаметром d момент сопротивления:

$$W_Z = \frac{\pi \cdot d^3}{32}.$$

Найдем минимальный диаметр балки круглого поперечного сечения:

$$d_{\text{MIN}} \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot |M_{\text{MAX}}|}{\pi \cdot [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 15 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 8 \cdot 10^6}} = 0,267 \text{ м.}$$

Полученное значение округлим до ближайшего большего, получим $d = 0,28 \text{ м}$.

3.6. Пример выполнения задачи № 46

Исходные данные для стальной балки

$q = 20 \text{ кН/м}$; $a = 1 \text{ м}$; $b = 2 \text{ м}$; $c = 1 \text{ м}$; $d = 3 \text{ м}$; $P = 25 \text{ кН}$; $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$
(рис. 11).

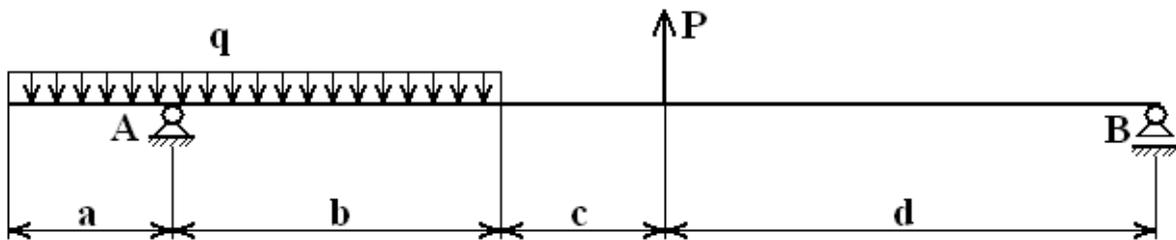


Рисунок 11

Построение эпюр поперечной силы и изгибающего момента

Перед построением эпюр в случае шарнирных балок следует определить реакции в опорных закреплениях, используя уравнения равновесия статики. Для этого отбросим опоры **A** и **B** и заменим их действие реакциями Y_A и Y_B , направив их предварительно вертикально вверх. Так как горизонтальных сил к балке не приложено, то $X_A = 0$. Распределенную нагрузку интенсивностью q на участках **a** и **b** приведем к соответствующим равнодействующим в виде сосредоточенных сил $q \cdot a$ и $q \cdot b$, направленных вертикально вниз из середины каждого участка **a** и **b** (рис. 12).

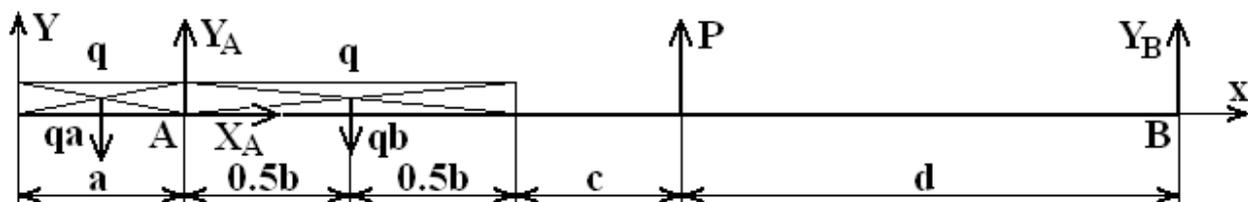


Рисунок 12

Для нахождения реакции Y_B составим сумму моментов всех действующих сил относительно точки A :

$$\sum_{i=1}^n M_{Ai} = 0, \quad q \cdot a \cdot \frac{a}{2} - q \cdot b \cdot \frac{b}{2} + P \cdot (b + c) + Y_B \cdot (b + c + d) = 0.$$

$$20 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} - 20 \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} + 25 \cdot (2 + 1) + Y_B \cdot (2 + 1 + 3) = 0, \quad Y_B = -7,5 \text{ кН.}$$

Так как значение реакции Y_B при выбранном направлении оказалось отрицательным, то действие реакции Y_B следует изменить на расчетной схеме на противоположное, т. е. вниз, и считать ее положительной величиной (рис. 13).

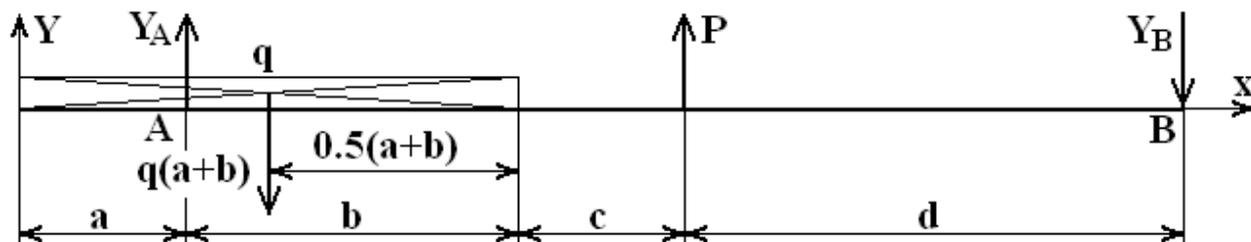


Рисунок 13

При составлении суммы моментов всех действующих сил относительно точки B (для нахождения реакции Y_A) распределенную нагрузку q удобнее привести к одной сосредоточенной силе $q \cdot (a + b)$, направленной вертикально вниз и действующей по середине участка $(a + b)$, тогда

$$\sum_{i=1}^n M_{Bi} = 0, \quad -P \cdot d - Y_A \cdot (b + c + d) + q \cdot (a + b) \cdot \left(d + c + \frac{a + b}{2}\right) = 0,$$

$$-25 \cdot 3 - Y_A \cdot (2 + 1 + 3) + 20 \cdot (1 + 2) \cdot \left(3 + 1 + \frac{1 + 2}{2}\right) = 0, \quad Y_A = 42,5 \text{ кН.}$$

Так как значение реакции Y_A при выбранном направлении оказалось положительным, то действие реакции Y_A направлено вверх (см. рис. 13).

Сделаем проверку найденных реакций:

$$\sum_{i=1}^n Y_i = 0, \quad P + Y_A - Y_B - q \cdot (a + b) = 25 + 42,5 - 7,5 - 20 \cdot (1 + 2) =$$

$$= 67,5 - 67,5 = 0.$$

Проверка сошлась, теперь на расчетной схеме все известно и можно приступать к построению эпюр поперечной силы и изгибающего момента.

Заданная балка состоит из четырех участков. Рассечем ее последовательно на каждом из них и запишем выражения для поперечной силы и изгибающего момента, действующих по одну сторону от рассматриваемого сечения, используя правило знаков согласно рис. 6.

Границы первого участка: $0 \leq x_1 \leq d$ (рис. 14).

$$Q_1 = \Sigma Q^{PP} = Y_B = 7,5 \text{ кН.}$$

$$M_1 = \Sigma M^{PP} = - Y_B \cdot x_1 = - 7,5 \cdot x_1.$$

При $x_1 = 0$ м, $M_1 = 0$ кНм.

При $x_1 = d = 3$ м, $M_1 = - 22,5$ кНм.

Границы второго участка: $d \leq x_2 \leq d + c$.

$$Q_2 = \Sigma Q^{PP} = Y_B - P = 7,5 - 25 = - 17,5 \text{ кН.}$$

$$M_2 = \Sigma M^{PP} = - Y_B \cdot x_2 + P \cdot (x_2 - d) = - 7,5 \cdot x_2 + 25 \cdot (x_2 - 3).$$

При $x_2 = d = 3$ м, $M_2 = 22,5$ кНм.

При $x_2 = d + c = 4$ м, $M_2 = - 5$ кНм.

Границы третьего участка: $0 \leq x_3 \leq a$.

$$Q_3 = \Sigma Q^{LEB} = - q \cdot x_3 = - 20 \cdot x_3.$$

$$M_3 = \Sigma M^{LEB} = - 0,5 \cdot q \cdot x_3 \cdot x_3 = - 10 \cdot x_3^2.$$

При $x_3 = 0$ м, $Q_3 = 0$ кН, $M_3 = 0$ кНм.

При $x_3 = a = 1$ м, $Q_3 = - 20$ кН, $M_3 = - 10$ кНм.

Так как эпюра Q на третьем участке не меняет свой знак, то на эпюре M не будет экстремального значения. Поэтому для построения параболы на эпюре M возьмем третью точку посередине рассматриваемого участка и определим значение изгибающего момента в ней:

$$x_3 = 0,5 \cdot a = 0,5 \text{ м; } M_3 = - 2,5 \text{ кНм.}$$

Границы четвертого участка: $a \leq x_4 \leq a + b$.

$$Q_4 = \Sigma Q^{LEB} = - q \cdot x_4 + Y_A = - 20 x_4 + 42,5.$$

$$M_4 = \Sigma M^{LEB} = - 0,5 \cdot q \cdot x_4 \cdot x_4 + Y_A \cdot (x_4 - a) = - 10 \cdot x_4^2 + 42,5 \cdot (x_4 - 1).$$

При $x_4 = a = 1$ м, $Q_4 = 22,5$ кН, $M_4 = - 10$ кНм.

При $x_4 = a + b = 3$ м, $Q_4 = - 17,5$ кН, $M_4 = - 5$ кНм.

Так как на данном участке эпюра Q меняет знак, то, приравняв выражение Q_4 к нулю, найдем координату, при которой на эпюре M будет экстремум

$$Q_4 = - q \cdot x_{04} + Y_A = - 20 \cdot x_{04} + 42,5 = 0,$$

откуда $x_{04} = Y_A / q = 42,5 / 20 = 2,125$ м.

Экстремальное значение изгибающего момента:

$$M^{EXT} = - 0,5 \cdot q \cdot x_{04} \cdot x_{04} + Y_A \cdot (x_{04} - a) = - 10 \cdot x_{04}^2 + 42,5 \cdot (x_{04} - 1) =$$

$$= - 10 \cdot (2,125)^2 + 42,5 \cdot (2,125 - 1) = 2,66 \text{ кНм.}$$

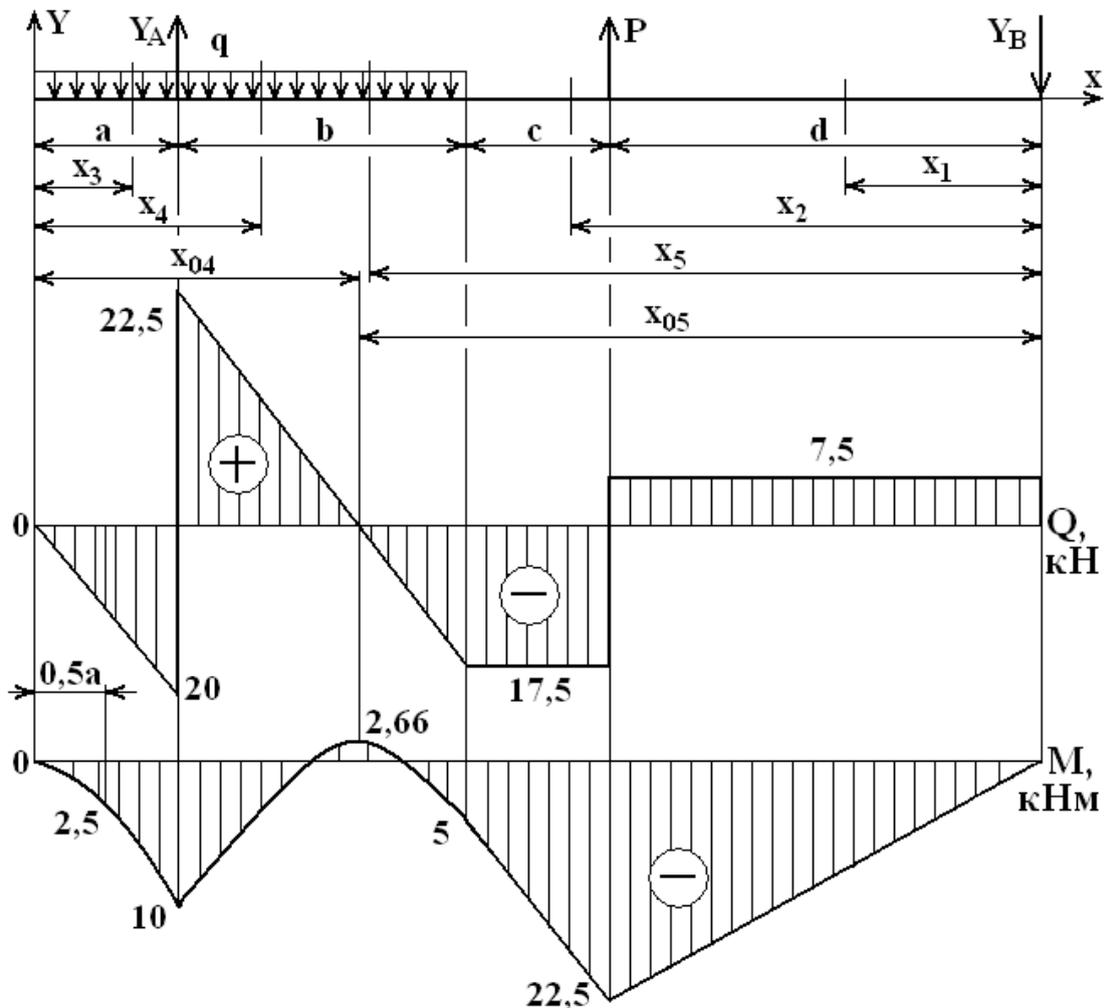


Рисунок 14

В качестве дальнейшего обсуждения рассматриваемого вопроса можно показать, что значения эпюр не изменятся, если делать сечения, идя при этом с другой стороны. Так, например, сделаем сечение на участке **b** и рассмотрим оставшуюся часть балки с правой стороны.

Границы пятого участка: $d + c \leq x_5 \leq d + c + b$.

$$Q_5 = \sum Q^{ПП} = Y_B - P + q \cdot (x_5 - (d + c)) = -17,5 + 25 \cdot (x_5 - 4).$$

$$M_5 = \sum M^{ПП} = -Y_B \cdot x_5 + P \cdot (x_5 - d) - 0,5 \cdot q \cdot (x_5 - (d + c))^2 = -7,5 \cdot x_5 + 25 \cdot (x_5 - 3) - 10 \cdot (x_5 - 4)^2.$$

При $x_5 = d + c = 4$ м, $Q_5 = -17,5$ кН, $M_5 = -5$ кНм.

При $x_5 = d + c + b = 6$ м, $Q_5 = 22,5$ кН, $M_5 = -10$ кНм.

Определим экстремальное значение изгибающего момента на этом участке:

$$Q_5 = Y_B - P + q \cdot (x_{05} - (d + c)) = -17,5 + 25 \cdot (x_{05} - 4) = 0,$$

откуда $x_{05} = 17,5 / 20 + 4 = 4,875$ м.

$$M^{EXT} = -Y_B \cdot x_{05} + P \cdot (x_{05} - d) - 0,5 \cdot q \cdot (x_{05} - (d + c))^2 =$$

$$= -7,5 \cdot x_{05} + 25 \cdot (x_{05} - 3) - 10 \cdot (x_{05} - 4)^2 =$$

$$= -7,5 \cdot 4,875 + 25 \cdot (4,875 - 3) - 10 \cdot (4,875 - 4)^2 = 2,66 \text{ кНм.}$$

Полученные значения откладываем в масштабе на каждом из

соответствующих участков балки (см. рис. 14). После построения эпюры делаем ее проверку, используя правила проверки правильности построения эпюр для поперечной силы и изгибающего момента.

Подбор поперечного сечения стальной балки

Для подбора стальной балки двутаврового поперечного сечения используем условие прочности по нормальным напряжениям при изгибе:

$$\sigma_{\text{MAX}} = \frac{|M_{\text{MAX}}|}{W_Z} \leq [\sigma],$$

где σ_{MAX} – максимальное нормальное напряжение в поперечном сечении балки;

$|M_{\text{MAX}}|$ – наибольшее по модулю значение изгибающего момента;

$|M_{\text{MAX}}| = 22,5 \text{ кНм}$;

$[\sigma]$ – допускаемое нормальное напряжение при изгибе;

$[\sigma] = 160 \text{ МПа}$;

W_Z – момент сопротивления площади поперечного сечения балки.

Выразим момент сопротивления из условия прочности:

$$W_Z \geq \frac{|M_{\text{MAX}}|}{[\sigma]} = \frac{22,5 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0,1406 \text{ м}^3 = 140,6 \text{ см}^3.$$

По сортаменту принимаем двутавр № 18 ГОСТ 8239-93, у которого момент сопротивления $W_Z = 143 \text{ см}^3$.

4. ДИНАМИЧЕСКАЯ НАГРУЗКА

4.1. Краткие сведения по теории

Нагрузка, приложенная к системе, называется динамической, если при расчете нельзя пренебречь силами инерции, возникающими в элементах системы. Силы инерции выступают как дополнительная внешняя нагрузка. Их взаимодействие с силами упругости часто порождает возникновение колебаний, которые могут привести к многократному росту внутренних усилий и напряжений.

Известно, что элементарная сила инерции dF , действующая на бесконечно малый объем тела dV , определяется как произведение ускорения a этого объема на его массу dm :

$$dF = a \cdot dm = a \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot dV,$$

где γ – удельный вес материала;

g – ускорение силы тяжести.

Сила инерции всегда направлена противоположно ускорению.

Пусть однородный стержень **АВ** вращается вокруг оси с постоянной угловой скоростью ω , причем вектор угловой скорости параллелен оси стержня (рис. 15а).

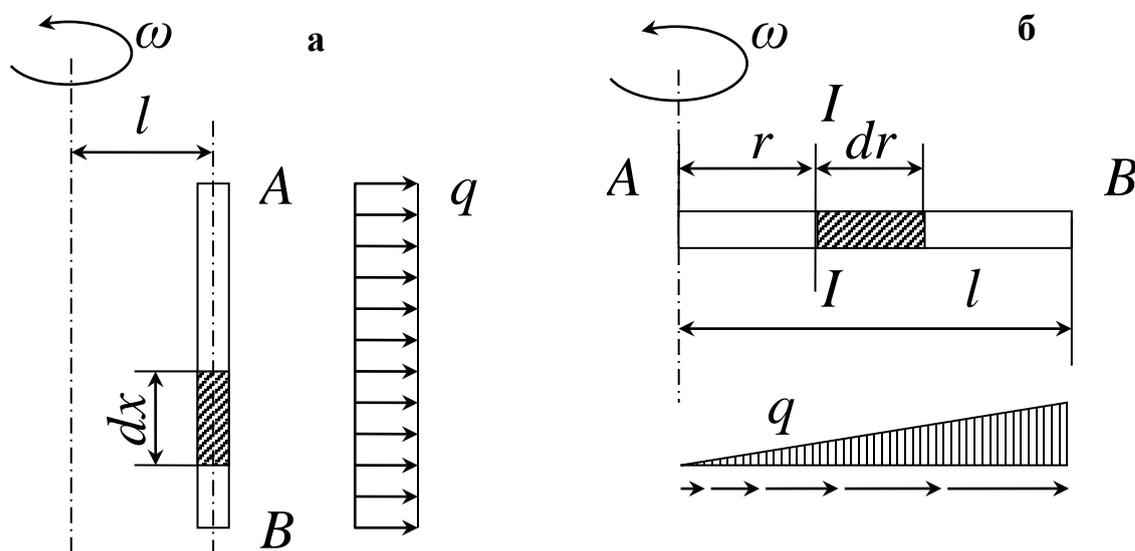


Рисунок 15

Все точки на оси стержня имеют одинаковые ускорения a , равные центростремительному ускорению a_n :

$$a = a_n = \omega^2 \cdot l,$$

где l – расстояние между осями.

Элементарная сила инерции:

$$dF = \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \cdot l \cdot dV = \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \cdot l \cdot A \cdot dx ,$$

где A – площадь поперечного сечения стержня. Отсюда найдем интенсивность сил инерции, распределенных по длине стержня:

$$q = \frac{dF}{dx} = \frac{\gamma A}{g} \omega^2 l .$$

Эпюра сил инерции изображена справа на рис. 15а.

Пусть теперь ось стержня перпендикулярна оси вращения (рис. 15б), и торцевое сечение A касается оси. Выберем произвольное сечение $I-I$, удаленное от оси вращения на расстояние r . На элемент dr , расположенный правее этого сечения, действует элементарная сила инерции:

$$dF = \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \cdot r \cdot A \cdot dr .$$

Тогда интенсивность сил инерции в сечении с координатой r будет:

$$q_r = \frac{dF}{dr} = \frac{\gamma A}{g} \omega^2 r .$$

При $r = 0$, $q_r = 0$.

При $r = l$, $q_r = \gamma \cdot A \cdot \omega^2 \cdot l / g$.

На рис. 15б внизу изображена эпюра сил инерции, где стрелками указаны их направления.

4.2. Задача № 5. Динамическая нагрузка

Валик и жестко соединенный с ним ломаный стержень того же поперечного сечения вращаются с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси **AB** (рис. 16). Требуется: 1) построить эпюру изгибающих моментов от сил инерции, возникающих на вертикальном **CD** и горизонтальном **DEF** участках ломаного стержня; силы инерции самого валика можно не учитывать (при изображенном на рис. 16 положении ломаного стержня силы инерции складываются с силами собственного веса, но последними, ввиду их незначительности, при построении эпюры **M** можно пренебречь); 2) найти допустимое число оборотов валика в минуту при допустимом напряжении $[\sigma] = 100 \text{ МПа}$ и $\gamma = 78 \text{ кН/м}^3$. Данные взять из табл. 5.

Таблица 5 – Исходные данные к задаче № 5

№ строки	Схема по рис. 16	l, см	Диаметр валика d, мм
1	I	15	21
2	II	20	22
3	III	25	23
4	IV	30	24
5	V	35	25
6	VI	40	16
7	VII	45	17
8	VIII	50	18
9	IX	55	19
0	X	60	20

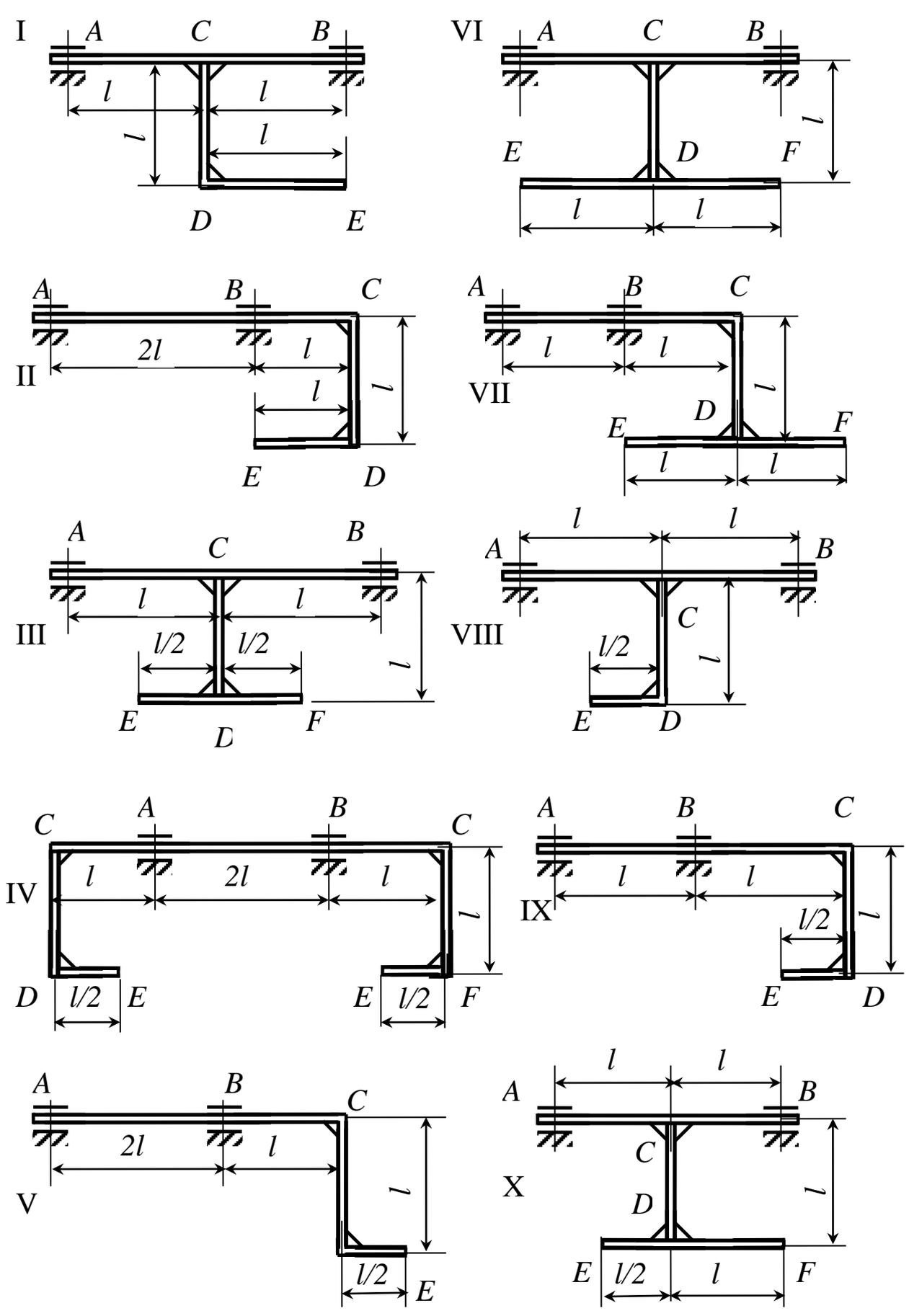


Рисунок 16

Расчетные схемы нагружения II – X

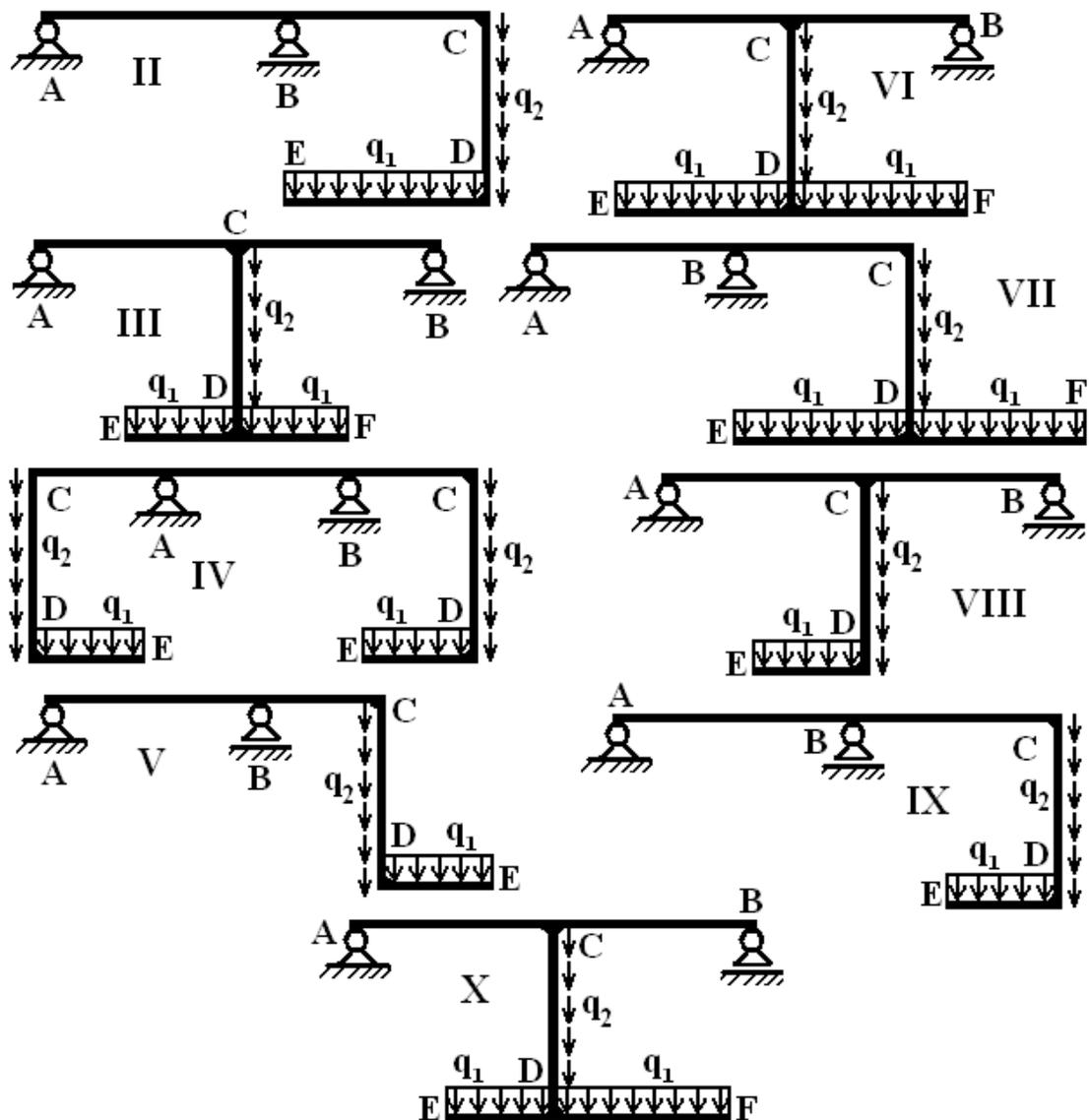


Рисунок 17

Указания. Для упрощения вычислений рекомендуется производить их сначала в общем виде, обозначив интенсивность сил инерции на горизонтальном участке через q . Равнодействующие сил инерции на горизонтальном и вертикальном участках, опорные реакции, ординаты эпюры M надо выразить через q и l .

4.3. Пример выполнения задачи № 5

Исходные данные

$d = 25 \text{ мм} = 25 \cdot 10^{-3} \text{ м}$; $l = 40 \text{ см} = 0,4 \text{ м}$; $[\sigma] = 100 \text{ МПа} = 100 \cdot 10^6 \text{ Па}$;
 $\gamma = 78 \text{ кН} \cdot \text{м}^{-3} = 78 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}^{-3}$.

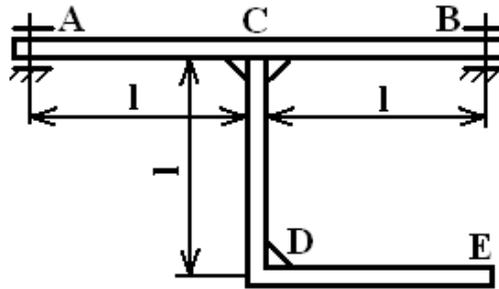


Рисунок 18

Построение эпюры изгибающих моментов

Расчетная схема показана на рис. 19.

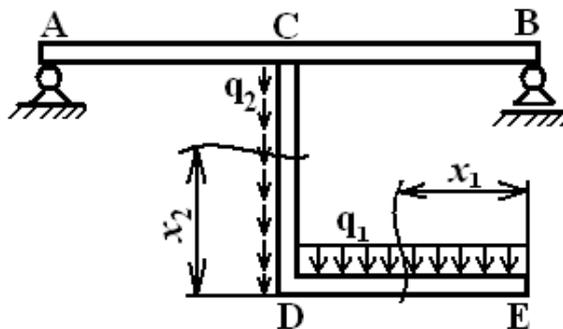


Рисунок 19

Определим величины действующих нагрузок.
Участок **DE**:

$$q_1 = \frac{\gamma \cdot A}{g} \cdot l \cdot \omega^2,$$

где A – площадь поперечного сечения стержня:

$$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot (25 \cdot 10^{-3})^2}{4} = 0,49 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

Тогда:

$$q_1 = \frac{78 \cdot 10^3 \cdot 0,49 \cdot 10^{-3} \cdot 0,4}{9,816} \cdot \omega^2 = 1,56 \cdot \omega^2.$$

Участок **CD**:

$$q_2 = \frac{\gamma \cdot A}{g} \cdot x \cdot \omega^2 = \frac{78 \cdot 10^3 \cdot 0,49 \cdot 10^{-3}}{9,816} \cdot x \cdot \omega^2 = 3,89 \cdot x \cdot \omega^2.$$

Построим эпюру изгибающего момента на участках **DE** и **CD** стержня.

Границы первого участка: $0 \leq x_1 \leq 1$.

$$M_1 = 0,5 \cdot q_1 \cdot x_1^2 = 0,78 \cdot x_1^2 \cdot \omega^2.$$

При $x_1 = 0$ м, $M_1 = 0$.

При $x_1 = 1 = 0,4$ м, $M_1 = 0,125 \cdot \omega^2$.

При $x_1 = 0,5 \cdot 1$ м = $0,2$ м, $M_1 = 0,03 \cdot \omega^2$.

Границы второго участка: $0 \leq x_2 \leq 1$.

$$M_2 = 0,5 \cdot q_1 \cdot x_2^2 = 0,125 \cdot \omega^2.$$

Эпюра изгибающего момента на этих участках показана на рис. 20.

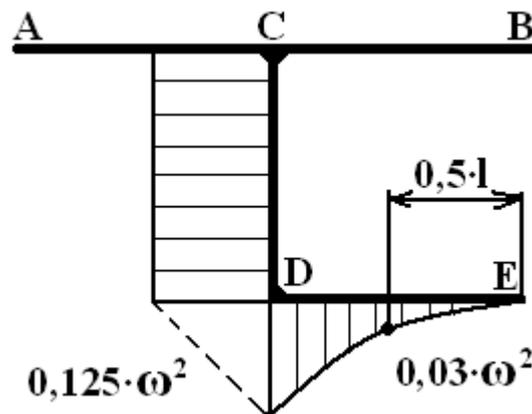


Рисунок 20

Рассмотрим теперь участки **AC** и **BC** валика (рис. 21). В точке **C** со стороны отброшенного ломаного стержня **CDE** действуют следующие силовые факторы, вызывающие изгиб стержня **AB**: изгибающий момент $M = 0,125 \cdot \omega^2$ и поперечная сила:

$$Q = N_{CD} + Q_{DE},$$

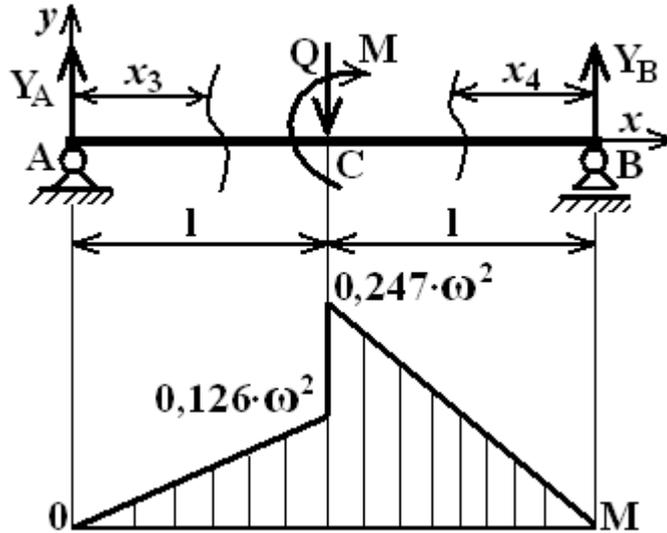


Рисунок 21

где N_{CD} – продольная растягивающая сила от нагрузки q_2 на участке CD :

$$N_{CD} = \int_0^{x_2} q_2 dx_2 = \frac{\gamma \cdot A \cdot \omega^2}{g} \cdot \int_0^{x_2} x_2 dx_2 = \frac{\gamma \cdot A \cdot \omega^2}{g} \cdot \frac{x_2^2}{2}.$$

В точке C , т. е. при $x_2 = l = 0,4$ м, будет:

$$N_{CD} = \frac{\gamma \cdot A}{2 \cdot g} \cdot l^2 \cdot \omega^2 = \frac{78 \cdot 10^3 \cdot 0,49 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 9,816} (0,4)^2 \omega^2 = 0,312 \omega^2.$$

Q_{DE} – поперечная сила от нагрузки q_1 на участке DE , она будет вызывать растяжение участка CD .

$$Q_{DE} = q_1 \cdot l = 1,56 \cdot \omega^2 \cdot 0,4 = 0,624 \cdot \omega^2.$$

Тогда
$$Q = 0,312 \cdot \omega^2 + 0,624 \cdot \omega^2 = 0,936 \cdot \omega^2.$$

Определим опорные реакции (рис. 21):

$$\Sigma X = 0; \quad X_A = 0; \quad \Sigma M_A = 0; \quad -M - Q \cdot l + Y_B \cdot 2 \cdot l = 0;$$

$$Y_B = \frac{M + Q \cdot l}{2 \cdot l} = \frac{0,121 \cdot \omega^2 + 0,936 \cdot 0,4 \cdot \omega^2}{2 \cdot 0,4} = 0,624 \cdot \omega^2.$$

$$\Sigma M_B = 0; \quad -M + Q \cdot l - Y_A \cdot 2 \cdot l = 0;$$

$$Y_A = \frac{-M + Q \cdot l}{2 \cdot l} = \frac{-0,125 \cdot \omega^2 + 0,936 \cdot 0,4 \cdot \omega^2}{2 \cdot 0,4} = 0,316 \cdot \omega^2.$$

$$\Sigma Y = 0; \quad Y_A + Y_B - Q = 0,316 \cdot \omega^2 + 0,624 \cdot \omega^2 - 0,936 \cdot \omega^2 = 0.$$

Построим эпюру изгибающего момента на участках **АС** и **ВС** валика.

Границы третьего участка: $0 \leq x_3 \leq l$.

$$M_3 = Y_A \cdot x_3 = 0,316 \cdot x_3 \cdot \omega^2.$$

При $x_3 = 0$ м, $M_3 = 0$. При $x_3 = l = 0,4$ м, $M_3 = 0,126 \cdot \omega^2$.

Границы четвертого участка: $0 \leq x_4 \leq l$.

$$M_4 = Y_B \cdot x_4 = 0,624 \cdot x_4 \cdot \omega^2.$$

При $x_4 = 0$ м, $M_4 = 0$. При $x_4 = l = 0,4$ м, $M_4 = 0,247 \cdot \omega^2$.

В сечении **С**, где приложен изгибающий момент $M = 0,121 \cdot \omega^2$, на полученной эпюре (рис. 22) видим скачок на такую же величину:

$$0,247 \cdot \omega^2 - 0,126 \cdot \omega^2 = 0,121 \cdot \omega^2.$$

Окончательное распределение изгибающего момента по валику **АСВ** и стержню **СДЕ** показано на рис. 22. На эпюре видно, что максимальное значение изгибающего момента находится в сечении **С** справа и оно равно $M_{MAX} = 0,247 \cdot \omega^2$.

Определение допускаемого числа оборотов валика

Условие прочности по нормальным напряжениям при изгибе:

$$\sigma_{MAX} = \frac{M_{MAX}}{W_Z} \leq [\sigma],$$

где W_Z – осевой момент сопротивления поперечного сечения:

$$W_Z = \frac{\pi \cdot d^3}{32} = \frac{3,142 \cdot (25 \cdot 10^{-3})^3}{32} = 1,533 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Из условия прочности имеем:

$$M_{MAX} = [\sigma] \cdot W_Z = 0,247 \cdot \omega^2 ,$$

откуда
$$\omega = \sqrt{\frac{[\sigma] \cdot W_Z}{0,247}} = \sqrt{\frac{100 \cdot 10^6 \cdot 1,533 \cdot 10^{-6}}{0,247}} = 24,8 \text{ с}^{-1} .$$

Величина угловой скорости также определяется по формуле:

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{60} ,$$

откуда допускаемое число оборотов:

$$n = \frac{30 \cdot \omega}{\pi} = \frac{30 \cdot 24,8}{3,142} = 234,5 \text{ об / мин} .$$

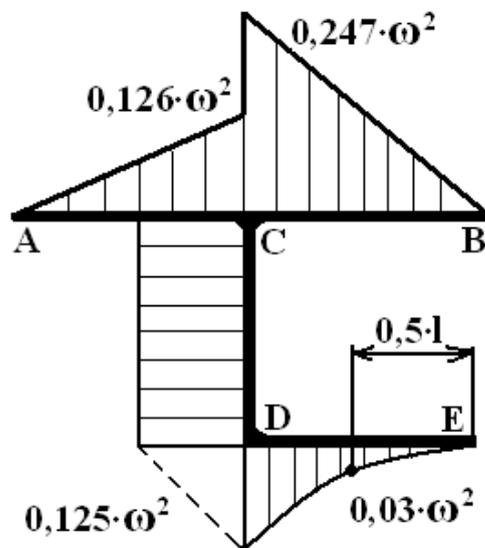


Рисунок 22

5. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Что называется продольной деформацией?
2. Как построить эпюру продольной силы?
3. Как построить эпюру нормальных напряжений?
4. Как построить эпюру удлинений?
5. Как находят опасные сечения стержня при продольной деформации?
6. Что называется крутящим моментом?
7. Как построить эпюру крутящего момента?
8. Как построить эпюру углов закручивания вала?
9. Как построить эпюру касательных напряжений?
10. В каких точках круглого поперечного сечения возникают наибольшие напряжения при кручении?
11. Какой изгиб называется поперечным?
12. Какое напряжение называется допускаемым?
13. Какие напряжения возникают в поперечном сечении стержня при изгибе?
14. Как находят опасные сечения стержня при изгибе?
15. В каких точках поперечного сечения возникают наибольшие напряжения при изгибе?

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Мельников, Б. Е. Сопротивление материалов: учебник для вузов / Б. Е. Мельников, Л. К. Паршин, А. С. Семенов, В. А. Шерстнев. – 2-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2023. – 576 с. – URL: <https://e.lanbook.com/book/341261> (дата обращения: 29.01.2024). – Текст: электронный.
2. Степин, П. А. Сопротивление материалов: учебник / П. А. Степин. – 13-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2022. – 320 с. – URL: <https://e.lanbook.com/book/210815> (дата обращения: 29.01.2024). – Текст: электронный.
3. ГОСТ 8239-93. Сталь горячекатаная. Балки двутавровые.

Учебное издание

Кауров Павел Викторович

Сопротивление материалов
Определение усилий в стержнях
Расчетно-графическая работа

Учебно-методическое пособие

Редактор и корректор А. А. Чернышева
Техн. редактор Д. А. Романова

Учебное электронное издание сетевого распространения

Системные требования:
электронное устройство с программным обеспечением
для воспроизведения файлов формата PDF

Режим доступа: http://publish.sutd.ru/tp_get_file.php?id=202016, по паролю.
- Загл. с экрана.

Дата подписания к использованию 05.09.2024 г. Рег. № 2333/24

Высшая школа технологии и энергетики СПбГУПТД
198095, СПб., ул. Ивана Черных, 4.

Высшая школа технологии и энергетики СПбГУПТД
198095, СПб., ул. Ивана Черных, 4.