

**Н. Л. Белая
Б. Ф. Иванов**

МАТЕМАТИКА ДЛЯ ДИЗАЙНЕРОВ

Монография

**Санкт-Петербург
2024**

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

**«Санкт-Петербургский государственный университет
промышленных технологий и дизайна»
Высшая школа технологии и энергетики**

**Н. Л. Белая
Б. Ф. Иванов**

МАТЕМАТИКА ДЛЯ ДИЗАЙНЕРОВ

Монография

Утверждено Редакционно-издательским советом ВШТЭ СПбГУПТД

Санкт-Петербург
2024

УДК 519.22:7.072

ББК 22.1

Б 430

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, профессор, исполняющий обязанности
заведующего кафедрой дифференциальных уравнений СПбГУ

Е. В. Васильева;

доктор физико-математических наук, профессор кафедры
математического анализа СПбГУ

Н. А. Широков

Белая, Н. Л.

Б 430 Математика для дизайнеров: монография / Н. Л. Белая, Б. Ф. Иванов. —
СПб.: ВШТЭ СПбГУПТД, 2024. — 213 с.
ISBN 978-5-91646-367-5

Монография предназначена для бакалавров и магистров направления подготовки 54.03.01 «Дизайн» (бакалавриат), 54.04.01 «Дизайн» (магистратура). Ее содержание будет полезно для студентов и других направлений подготовки, связанных с художественным творчеством, искусствоведением и вопросами эстетики.

В этой книге рассматриваются вопросы применения методов теории функций комплексной переменной, ТВ и МС (теории вероятностей и математической статистики) в дизайне, живописи, искусствоведении и эстетике. В ней также содержится краткое изложение некоторых разделов курса высшей математики, необходимых для понимания содержания монографии.

В монографии, в частности, рассматривается применение ТВ и МС в вопросах экспериментальной эстетики и эргономики. Методами ТВ и МС исследуется соответствие пропорциям модулятора антропометрических параметров некоторых групп людей.

В главе книги, посвященной фракталам, обсуждается метод построения фрактальных картин; особое внимание уделяется теоретическим принципам компьютерной генерации ландшафтов, которая находит широкое применение в различных областях: разработка тренажеров для пилотов и водителей, создание компьютерных игр, кинематографические сцены, фоновые ландшафты в рекламе, в дизайне и др. В этой главе авторы также обсуждают тему фракталов и искусства.

УДК 519.22:7.072

ББК 22.1

ISBN 978-5-91646-367-5

© ВШТЭ СПбГУПТД, 2024

© Белая Н. Л., Иванов Б. Ф., 2024

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ.....	5
ГЛАВА 1. О МАТЕМАТИКЕ	8
§ 1.1. Что такое математика.....	8
§ 1.2. Этапы развития математики. Начальный этап	11
§ 1.3. Фалес.....	14
§ 1.4. Евклид и его «Начала».....	17
ГЛАВА 2. ЗОЛОТОЕ СЕЧЕНИЕ.....	21
§ 2.1. Определение золотого сечения. Числа Фибоначчи.....	21
§ 2.2. Краткая история теории «золотого сечения»	25
§ 2.3. Золотое сечение в скульптуре, архитектуре и живописи.....	31
§ 2.4. Модульор.....	38
ГЛАВА 3. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА.....	43
§ 3.1. Предел числовой последовательности.....	43
§ 3.2. Предел функции	46
§ 3.3. Непрерывность	49
§ 3.4. Определение производной, ее физический и геометрический смысл.....	51
§ 3.5. Основные правила и формулы дифференцирования.....	53
§ 3.6. Неопределённый интеграл	55
§ 3.7. Определённый интеграл и его геометрический смысл	57
§ 3.8. Несобственный интеграл по бесконечному промежутку	61
§ 3.9. Ряды	63
ГЛАВА 4. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ	67
§ 4.1. Случайные события. Основные понятия	68
§ 4.2. Классическое определение вероятности события	69
§ 4.3. Статистическое определение вероятности события.....	72
§ 4.4. Геометрическое определение вероятности события	80
§ 4.5. Задача о встрече	83
§ 4.6. Замечание об аксиоматическом определении вероятности события и об аксиоматике теории вероятностей.....	84
§ 4.7. Вероятность произведения двух событий	85
§ 4.8. Вероятность суммы двух событий	89
ГЛАВА 5. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ	92
§ 5.1. Случайные величины. Основные понятия.....	92
§ 5.2. Дискретные случайные величины	96
§ 5.3. Примеры распределений дискретных случайных величин	101
§ 5.4. Непрерывные случайные величины	104
§ 5.5. Примеры законов распределения непрерывных случайных величин ...	108

ГЛАВА 6. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА	112
§ 6.1. Основные понятия математической статистики	115
§ 6.2. Числовые характеристики статистического ряда	119
§ 6.3. Интервальный (группированный) статистический ряд. Гистограмма ..	123
§ 6.4. Доверительный интервал.....	127
§ 6.5. Понятие о статистической проверке гипотез	130
ГЛАВА 7. ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ В ПРОМЫШЛЕННОМ ДИЗАЙНЕ	136
§ 7.1. Связь моды, медианы, золотого сечения и математического ожидания.....	137
§ 7.2. Точки эстетических предпочтений в эксперименте фехнеровского типа и их доверительные интервалы.....	142
§ 7.3. Примеры применения теории вероятностей и математической статистики в эргономике	145
§ 7.4. Антропометрические данные и пропорции модулора	156
ГЛАВА 8. ФРАКТАЛЫ	162
§ 8.1. Комплексные числа.....	163
§ 8.2. Тригонометрическая форма комплексного числа. Умножение комплексных чисел в тригонометрической форме и возведение в степень	167
§ 8.3. Множества Жюлиа и множества Мандельброта.....	171
§ 8.4. Определение фрактала.....	179
§ 8.5. Фракталы и искусство.....	189
§ 8.6. Фрактальный ландшафт.....	195
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	205

ПРЕДИСЛОВИЕ

Математика является важной частью фундаментальной подготовки в системе образования, поскольку она представляет собой не только инструмент для решения прикладных задач, но в первую очередь формирует общую культуру человека, является универсальным языком науки.

Математика также является и основой культуры исследования; ее привычка оперировать с абстрактными объектами развивает строгость и точность суждений. Как говорил еще Леонардо да Винчи: «Ни одно человеческое исследование не может являться истинной наукой, если оно не прошло через математические доказательства». К настоящему времени многие разделы математики находят свое применение, как в теоретических, так и прикладных вопросах и, в частности, в гуманитарных областях.

Представление о том, как и каким разделам математики следует учить экономистов и лингвистов, сложилось уже в середине XX века. А в конце 20-го – начале 21-го веков начала активно дискутироваться (Н. Х. Розов, В. А. Успенский и др.) проблема математического образования и «чистых» гуманитариев, т. е. «филологов, журналистов, историков, философов, юристов и др.». Главными вопросами были – чему и как учить. При этом отмечалось, что гуманитарий должен не только получать знания, необходимые в профессии, но и образование. Однако для «чистых» гуманитариев в этом вопросе имеются сложности.

Известный математик и педагог Н. Х. Розов отмечал, что «Гуманитарии не любят точных дефиниций и формально-логических рассуждений вовсе не в силу слабости их мышления сравнительно с математиками. Причиной этого – у лучших представителей гуманитарных наук – является более глубокое понимание сложности бытия, противоречивости и неоднозначности реальности – в отличие от примитивной детерминированности математических конструкций. Математика является не просто областью знаний и универсальным инструментом, все шире проникающим и в гуманитарные разделы науки, но прежде всего неотъемлемой частью цивилизации, существенным элементом общей культуры, языком научного восприятия мира».

Сегодня учет особенностей гуманитарного мышления осложняется результатами нынешнего школьного образования. Учащиеся гуманитарных направлений плохо владеют основными математическими понятиями и порой даже при слове математика «шарахаются и впадают в ступор». Таким образом, вопрос – чему и как учить приобретает не только особую актуальность, но и заметную сложность.

В 2000 году была издана примерная программа дисциплины «Математика и информатика» (авторы: Кириллов А. И., Плис А. И. и Чуличков А. И.). В ней предлагались к изучению следующие разделы.

1. Становление современной математики.
2. Основные математические понятия.
3. Математические методы.

В блоке дисциплин, содержащих наиболее близкое нам направление «Искусство», для каждого из этих разделов предлагалась и детализация содержания.

Но эта программа не прижилась, т. к. требовала, в том числе, хотя бы элементарных иллюстраций изучаемого материала. Найти преподавателя математики, знакомого с азами в области физики или механики, не трудно, но вот с гуманитарными знаниями – живопись, скульптура, архитектура или музыка – гораздо сложнее. Далеко не сразу можно найти лектора, готового иллюстрировать математическую теорию примерами из последних перечисленных областей.

При формировании курса математики для «чистых» гуманитариев приходится решать следующие две основные задачи:

- 1) конкретизация перечня изучаемых вопросов;
- 2) выбор методики изучения.

Мы полагаем, что в целом, хотя и с некоторыми оговорками, программа 2000 года – это ответ на первый вопрос. Что же касается второго вопроса, то выбор методики тесно связан с иллюстрированием изучаемого материала примерами из гуманитарных областей.

Есть ряд замечательных монографий, научных, научно-популярных книг, содержащих как информативный материал, так и интересные приложения: Волошинов А. В., Петров В. М., Раушенбах Б. В., Мандельброт Б., Лотман Ю. М., Ливио М., Ковалёв Ф. В. и др. Есть также ряд учебных пособий для гуманитариев: Гресс П. В., Жолков С. Ю., Петров Н. Н. и Белая Н. Л. и др. На некоторых из упомянутых выше авторов мы будем ссылаться в тексте этой книги.

Содержание существующих учебных пособий и научно-популярных книг убедительно показывает, что на сегодняшний день нет единого четкого понимания об уровне строгости изложения математических вопросов для студентов-гуманитариев. Нет устоявшегося взгляда на то, где достаточно наглядности и примеров, а где нужна формализация. Конечно, многое зависит от избранного направления: архитектура, изобразительное искусство, дизайн, скульптура и т. д. И все это должно учитывать уровень школьной математической подготовки студентов (а точнее, его отсутствие).

Настоящая монография написана на основе курсов лекций, читавшихся на протяжении многих лет для дизайнеров Ивановым Б. Ф. и для юристов Петровым Н. Н. совместно с Белой Н. Л. Книга предназначена для студентов направлений 54.03.01 «Дизайн», бакалавриат (промышленный дизайн) и 54.04.01 «Дизайн», магистратура (промышленный дизайн). Авторы также надеются, что данная работа будет полезна при изучении курса математики студентам-гуманитариям и других направлений.

В этой монографии мы затронем лишь некоторые разделы математики, изучавшиеся в курсе математики для дизайнеров в ВШТЭ.

Целью изучения математики в данном кратком труде является:

1. Знакомство с разделами курса высшей математики, необходимыми для полноценного понимания прикладных инженерных дисциплин, связанных с промышленным дизайном.

2. Изучение некоторых разделов и понятий современной математики, имеющих приложение в искусствоведении и в дизайне, в частности.

3. Формирование общенаучной культуры.

В настоящей работе мы предложили свое видение решения перечисленных выше проблем.

Авторы выражают искреннюю благодарность проф. Е. В. Васильевой и проф. Н. А. Широкову за внимание к работе и ценные замечания, которые позволили улучшить содержание рукописи.

ГЛАВА 1. О МАТЕМАТИКЕ

В этой главе мы расскажем о предмете математики, т. е. с каким объектом она работает, что изучает; кратко коснемся истории ее развития и формирования некоторых понятий, а также рассмотрим этапы ее развития, что поможет в дальнейшем в понимании этой науки. Дело в том, что освоение и понимание различных математических понятий порой более продуктивно происходит при знакомстве с историей их возникновения, с кругом тех проблем, при решении которых они возникли. Например, комплексные числа, аналитическая геометрия и др. И конечно, каждое изучаемое понятие, сколь угодно абстрактным оно бы не было, должно и будет в последующих главах иллюстрироваться для читателя-гуманитария своим конкретным применением.

§ 1.1. Что такое математика

Прежде чем говорить что-либо о математике или ее применении, необходимо попытаться разобраться с вопросами: о предмете математики (т. е. с чем она имеет дело, что изучает), об отношении к окружающей действительности, а также о сущности математических абстракций.

Оказывается, что ответ на перечисленные выше вопросы зависит от осознанных или неосознанных философских воззрений отвечающего. Рассмотрим это подробнее.

В математике условно можно выделить два основных подхода к ответу на вопрос – о предмете математики (т. е. что изучает математика). Первый из них, материалистический, наиболее полно выражен Ф. Энгельсом и состоит в следующем [94, с. 37]: «Как понятие числа, так и понятие фигуры заимствованы исключительно из внешнего мира, а не возникли в голове из чистого мышления. Должны были существовать вещи, имеющие определенную форму, и эти формы должны были подвергаться сравнению, прежде чем можно было дойти до понятия фигуры. Чистая математика имеет своим объектом пространственные формы и количественные отношения действительного мира, стало быть – весьма реальный материал. Тот факт, что этот материал принимает чрезвычайно абстрактную форму, может лишь слабо затушевать его происхождение из внешнего мира. Но чтобы быть в состоянии исследовать эти формы и отношения в чистом виде, необходимо совершенно отделить их от их содержания, чтобы оставить это последнее в стороне как нечто безразличное; таким путем мы получаем точки, лишённые измерений, линии, лишённые толщины и ширины, разные a и b , x и y , постоянные и переменные величины, и только в самом конце мы доходим до продуктов свободного творчества и воображения самого разума, а именно – до мнимых величин». И далее [94, с. 37]: «Как и другие науки, математика возникла из практических нужд людей: из измерения площадей земельных участков и вместимости сосудов, из счисления времени и из механики. Но, как и во всех других областях мышления, законы, абстрагированные от реального мира, на известной ступени развития

отрываются от реального мира, противопоставляются ему как нечто самостоятельное, как явившиеся извне законы, с которыми мир должен сообразоваться». Добавим, что впоследствии эта точка зрения уточнялась и дополнялась за счет развития представлений об уровнях абстрагирования от своих прообразов из реального мира.

Другая точка зрения, которую следует считать идеалистической, принадлежит группе французских математиков, писавших под псевдонимом Николя Бурбаки. Вкратце их точка зрения такова. На множестве можно ввести различные структуры, основные из которых следующие:

- 1) алгебраические;
- 2) топологические (у каждого элемента определено семейство его окрестностей, обладающее определенными свойствами);
- 3) структуры порядка, когда для каждого элемента можно указать другой, который больше его или меньше, но при этом не обязательно, чтобы любые два элемента рассматриваемого множества можно было сравнить.

Используя такого рода терминологию, Бурбаки предлагают свое, ныне широко принятое, представление о математике [9, с. 258-259]: «В своей аксиоматической форме математика представляется скоплением абстрактных форм – математических структур, и оказывается (хотя и неизвестно почему), что некоторые аспекты экспериментальной действительности как будто в результате предопределения укладываются в некоторые из этих форм. Конечно, нельзя отрицать, что большинство этих форм имело при своем возникновении вполне определенное интуитивное содержание, но как раз сознательно лишая их этого содержания им сумели придать всю их действенность, которая и составляет их силу, и сделали для них возможным приобрести новые интерпретации и полностью выполнить свою роль в обработке данных».

Обе эти точки зрения, конечно, не являются некими внезапными откровениями, а имеют своих прадедушек и прабабушек еще в античной философии. (Мы имеем в виду Фалеса, Пифагора, Платона и других выдающихся мыслителей прошлого). Так, например, Платон говорил [45, с. 25], что: «Бог всегда является геометром». А для Декарта, Галилея, Кеплера, Лейбница и Ньютона [46, стр. 239] было совершенно очевидно, что мир создан Богом, и причем на математических принципах.

А вот еще один пример представления о математике. Наука «математическая логика» занимается вопросами основания математики. И вот в духе этой науки (т. е. математической логики) содиректор Боннского математического института Ю. И. Манин дал следующее определение: «Математика – это отрасль лингвистики или филологии, занимающаяся преобразованием конечных цепочек символов некоторого алфавита в другие такие цепочки при помощи конечного числа грамматических правил. Отличие от естественных языков, вроде китайского, английского или русского, состоит в том, что в грамматике этого специального языка есть отсутствующие в живых языках правила (вроде, например, набор символов «1+2» можно заменить на символ «3»). (Цитировано по книге [4, с. 14]). Мы не будем вдаваться в

подробности оснований математики и привели эту цитату с единственной целью – показать, что вопросы достаточно сложны.

Но не спешите критиковать ту или иную точку зрения. Это делалось уже до вас, делается и будет продолжаться делаться. Критика той или иной точки зрения, к сожалению, приводит к трудностям объяснения различных фактов, отвлекаться на которые мы здесь не можем.

Отметим также и некоторые радикальные точки зрения.

Так, например, известный русский математик академик А. А. Марков (1856 – 1922) на вопрос, что такое математика, ответил [80, с. 286; 74, с. 18], упомянув своих современников – выдающиеся ученых: «Математика – это то, чем занимаются Гаусс, Чебышев, Ляпунов, Стеклов и я».

А вот цитата из предисловия редактора перевода книги [45, с. 5]: «Вопрос «Что такое математика?» внесен в заглавие пользующейся заслуженной известностью книги Р. Куранта и Г. Роббинса [52]. В этом сочинении Курант сделал попытку «конструктивного» определения математики: «Математикой называется все то, о чем говорится в нашей книге»».

Из курса геометрии мы знаем, что математика базируется на аксиомах, Высшая, оказывается, тоже. Но эти вопросы достаточно сложны и находятся в сфере компетенции узких специалистов. При этом нет единой точки зрения и на аксиоматику – пример тому аксиома выбора и следствия ее принятия.

И в качестве «вишенки на торте» упомянем теорему Гёделя о неполноте, согласно которой в каждой достаточно богатой формальной теории существуют утверждения, которые нельзя ни доказать, ни опровергнуть.

Не все так просто и с математическими доказательствами. В профессиональной среде ведутся дискуссии на тему – что является доказательством и насколько можно доверять уже существующим.

Вот несколько тезисов из анонса докладов, прозвучавших на заседании Санкт-Петербургского математического общества 23 марта 2010 года и посвященных математическим доказательствам.

Н. А. Вавилов – д. ф.-м. н., профессор. «В последнее время все чаще обсуждается вопрос об изменении статуса доказательства и уменьшении нашей уверенности в их справедливости... Классические работы, как и публикуемые сегодня, полны заблуждений, ошибок и пробелов разной степени серьезности... Нужно честно признать, что математика является человеческой деятельностью... Достоверность математических доказательства и его убедительность относятся к области психологии и социологии, а не логики... Ни одно СЕРЬЕЗНОЕ (имеется в виду длинное и сложное. – *Прим. авт.*) математическое доказательство не может быть полностью ... записано в соответствии со стандартами, пропагандируемыми математической логикой...»

Ю. В. Матиясевич – академик РАН, д. ф.-м. н., профессор. «Мои взгляды полностью противоположны взглядам первого докладчика (Н. А. Вавилова. – *Прим. авт.*). По меньшей мере 99,999 % теорем, доказываемых современными математиками, выводятся из аксиом теории множеств, и потому эти теоремы в принципе могут быть изложены по всем канонам математической логики.

Критерием может служить требование, чтобы доказательство было проверено компьютером. Более того, реальная работа в этом направлении ведется давно, и на этом пути достигнут существенный прогресс...»

Итак, на основании вышесказанного можно сделать следующие выводы.

Математика – это НАУКА, причем ДЕДУКТИВНАЯ, т. е. все ее выводы производятся путем логического вывода из первичных, неопределяемых понятий – аксиом. Правда, есть некоторые нюансы. Не все согласны с набором правил логического вывода, например, можно ли пользоваться законом исключенного третьего. Также есть разногласия и по поводу аксиом. Не вдаваясь в детали, отметим, что есть, например, разногласия по поводу аксиомы выбора. Имеются различные точки зрения и на то, что такое ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Но обычные специалисты в классических областях математики внимания на перечисленные выше обстоятельства не обращают и не испытывают в процессе работы никакого когнитивного диссонанса. Мы также последуем их примеру.

Такое же отношение полученные математиками результаты имеют к построению достоверных моделей процессов, протекающих в окружающем мире.

После всего перечисленного выше становится понятным, что большинство математиков таких абстрактных вопросов о математике себе не задают, на чужие отвечают неохотно, а порой и грубо, отсылая к учебникам или куда-нибудь еще.

Все эти страшные рассказы приведены не для того, чтобы напугать юного читателя-гуманитария. Наша цель состояла лишь в том, чтобы хотя бы приблизительно ознакомиться с научными взглядами на математику и показать, что, во-первых, все не так просто, во-вторых, что все находится под контролем (чрезвычайно умных и авторитетных людей) и в-третьих, что мы будем старательно избегать обсуждения вопроса о том, что такое математика.

§ 1.2. Этапы развития математики. Начальный этап

Чтобы лучше себе уяснить содержание математических понятий и логику развития математики, необходимо рассмотреть этапы развития этой науки. Это нам пригодится в дальнейшем.

Советский академик А. Н. Колмогоров предложил следующую общепринятую на сегодняшний день периодизацию этапов развития математики.

1) Этап зарождения математики. Он продолжался с древнейших времен до 7 – 5 веков до нашей эры.

2) Период элементарной математики. Он длился с 7 века до нашей эры и закончился в 17 веке.

3) Этап математика переменных величин начался примерно с середины 17 века и продолжался примерно до середины 19 века.

4) Этап современной математики, начавшийся в 19 веке, продолжается в настоящее время.

Столь условные границы этапов объясняются тем, что этапы сформированы по временам возникновения и проникновения в математику принципиально новых идей.

В этом параграфе мы подробно остановимся на первом этапе. Как уже отмечалось выше, начальный этап был назван А. Н. Колмогоровым этапом зарождения математики. В этот период происходило накопление фактического материала. Он завершился формированием понятий числа, величины и геометрической фигуры. Что же имеется в виду?

Мы с вами считаем само собой разумеющимся употребление в своей речи числительных: два гвоздя, три яблока, пять карандашей и т. д. Это дает информацию как о количестве чего-либо, так и позволяет устанавливать соответствия между множествами объектов. Так, между четырьмя баранами и четырьмя студентами-хвостистами есть общее (мы вовсе не имели в виду то, о чем вы подумали). На самом деле их связывает то, что их ровно четыре! Для нас этот вывод представляется совершенно очевидным, но так было не всегда. Такой уровень абстракции в мышлении возник далеко не сразу и явился результатом длительной работы человеческой мысли. В языках некоторых народов сохранилось воспоминание о тех временах, когда счет уже возник, но еще не полностью оторвался от предмета счета и не соотносился с абстрактным представлением о числе. Так, например [53, с. 27]: «На острове Фиджи десять кокосовых орехов называются «коро», а десять лодок – «боло» ... Да и мы с вами зачастую обозначаем множества различных предметов разными словами: например, мы говорим «табун лошадей», но никогда не скажем «табун собак»».

Но было время, когда люди вообще не умели считать, как персонажи известного мультфильма «Козленок, который умел считать до десяти». (В нем козленок всех пытался всех сосчитать и напугал теленочка словами – сейчас я тебя сосчитаю. Потом в мультфильме все закончилось хорошо и даже поучительно).

А как же жили в то время люди без арифметики? Ответ на этот вопрос исследователи получали путем реконструкции быта тех времен, сделанных на основе изучения мифов, легенд, археологических находок и исследований в области лингвистики, а также наблюдений, полученных в результатах этнографических экспедиций в места проживания коренных народов, находящихся на ранних стадиях развития.

Подлинной сенсацией в этой области стало в конце 20-го века изучение проповедником Эвереттом жизни, языка и быта небольшого южноамериканского племени пирахá, о чем помимо статей он написал в своей книге [93].

Оказалось, что люди этого племени не знают счета – в их языке нет понятия единицы. Есть слово, которым они обозначают один (предмет), но этим же словом они могут обозначить и два, и более предметов. Имеются также еще два других «числительных», употребление которых неустойчиво и зависит от конкретного человека и ситуации (см. [69], подробное описание исследования – в [102]).

Есть и другие, непривычные и неожиданные для нас аспекты их жизни. Так, например, их язык не знает будущего времени; у них нет мифов о происхождении; реально только то, что видишь сейчас, или за что некто поручился лично. А как же они все-таки живут. Да, в общем, неплохо: поспали, сходили в джунгли или на речку за едой, поели, пообщались, снова поспали и т. д. И так каждый день. Единственное, что им существенно портит жизнь – так это обилие змей в местах постоянного обитания племени. Одним словом, живут аки «птицы небесныя, яко не съютъ, ни жнутъ, ни собираютъ въ житницы», но и нынѣ и присно сыты бывают. (Орфография церковнославянская (рус.), см. [61, Евангелие от Матфея, гл. 6, ст. 26]).

Огромным достижением на этапе зарождения математики явилось формирование понятия величины. Одинаков ли урожай, который могут дать два разных по форме поля, количество воды в двух разных по форме сосудах и т. д.

Представления о геометрических фигурах возникли также из повседневной жизни человека. Так, уже [96, с. 13] «в глубокой древности изготовлялись скребки и ножи в форме дисков, треугольников, ромбов и сегментов, круглые сосуды; поля обычно имели форму прямоугольника, а здания – форму конуса, цилиндра и параллелепипеда». Из древней Греции к нам пришли и названия многих геометрических фигур: «ромб» – волчок, «сфера» – мяч, «цилиндр» – валик, «трапеция» – столик и др. Слово пирамида пришло к нам из Древнего Египта через Грецию. Рим дал нам слова: «линия» – первоначально под линией понимали натянутую льняную нить; «точка» происходит от латинского слова «ткнуть» и др.

Следует отметить, что порой для вычисления площадей и объемов использовались правила-формулы, дающие правильный результат только в частных случаях. Так, например [96, с. 30], для вычисления площади поля четырехугольной формы (см. рис. 1.2.1) предлагалось перемножить полусуммы длин противоположных сторон: $S = \frac{a+c}{2} \times \frac{b+d}{2}$.

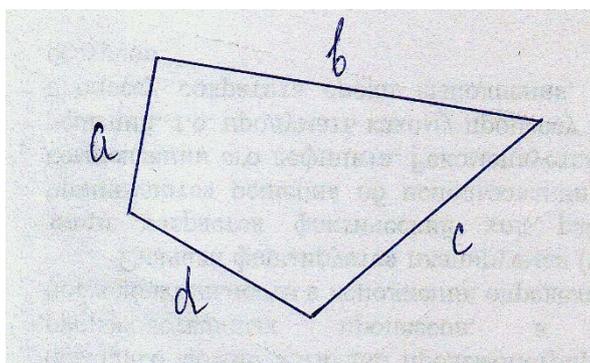


Рисунок 1.2.1 – План поля четырехугольной формы

Но такое правило справедливо только для полей прямоугольной формы. Как полагают авторы [96, с. 30], на практике такая формула расчета применялась к полям, форма которых была близка к прямоугольной.

Главной отличительной особенностью начального этапа развития математики является ОТСУТСТВИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ или какого-либо иного объяснения для обучаемых правильности применяемых формул. Авторы всевозможных правил-формул, видимо, в узком кругу как-то объясняли свои рекомендации для решения задач. Но до наших дней не дошло даже упоминаний о таких процедурах. Имеются лишь реконструкции вывода правил-формул, например, объема усеченной пирамиды [96, с. 32], площади круга [96, с. 31]. И, пожалуй, единственным исключением из сказанного является упоминание о том, что Фалес рассказал (объяснил, дал доказательство) египетским жрецам – как он вычислил высоту пирамиды.

Дошедшие до нашего времени учебные материалы школ писцов Египта лишь предлагают решать типовые производственные задачи по аналогии с разобранными в задачниках, сопровождая рассуждения указанием; «делай как делается» (в смысле, как сделано в типовом примере).

Как полагает современная наука [96, с. 56], «Догматический характер изложения не был просто педагогическим приемом, он отражал, как и в Египте, авторитарный склад мышления, господствовавший в строго иерархических государствах древнего Востока».

В математике Древнего Востока и Древнего Египта (ЭТО ВАЖНО!) не существовало понятия пропорции (отношения) и не существовало понятия иррационального числа.

§ 1.3. Фалес

Как уже говорилось выше, в 7 – 5 веках до нашей эры наступил новый этап в развитии математики, который был назван А. Н. Колмогоровым этапом математики постоянных величин. Он продолжался до 17 века. Начало этого этапа связано с именем Фалеса из Милета – города, располагавшегося на берегу Эгейского моря в устье реки Меандр.

Согласно традиции, датами жизни Фалеса принято считать 625 – 547 гг. до н. э. Эти даты условные, они установлены по косвенным признакам. С именем Фалеса, деталями его насыщенной биографии вы уже познакомились на лекциях по философии. На этом мы останавливаться не будем. Напомним лишь то, что Фалес считается первым в античном мире философом-материалистом или, как его называли, – стихийным [28, с. 40] материалистом. Здесь не нужно особенно обольщаться насчёт его материализма. «Началом всего он полагал воду, а мир считал одушевлённым и полным богов [31, с. 71]». Более того [31, с. 70], «Аристотель и Гипсий утверждают, что он приписывал душу даже неодушевленным телам, ссылаясь на магнит и янтарь». Точнее, Аристотель писал [3, О душе, кн. 1, гл. 2, с. 378], что: «По-видимому, и Фалес ... считал душу способной приводить в движение, ибо утверждал, что магнит имеет душу, так как движет железо». Материализм Фалеса состоял в том, что за первооснову мира он взял материальное – воду, а не Творца или акт его воли.

Фалес считается основоположником древнегреческой мысли, «отцом философии», а основанная им ионийская школа философии явилась первой в истории Греции философской школой. «Ионийцы [96, с. 64], стоя на наивно материалистических позициях, пытались объяснить все многообразие мира, исходя из единого материального начала. Сам Фалес первоосновой всего сущего считал воду». «Натурфилософия [45, с. 20] ионийцев представляла собой скорее набор дерзких умозаключений, хитроумных догадок и блестящих интуитивных прозрений ... они порвали с прежними представлениями, имевшими в основном мифологический характер, и предложили материалистическое, согласующееся с наблюдениями объяснение мироздания и природных явлений». Впрочем, все это вы и без нас знаете.

Здесь нас будет интересовать его вклад в математику (такой науки или рода интеллектуальной деятельности, как математика, еще не существовало и мы используем этот термин лишь условно). Считается, что именно Фалес в рассуждения о геометрических фигурах привнес требование доказывать утверждения. То есть стало нельзя утверждать, что два треугольника равны по стороне и двум прилежащим к ним углам (эта теорема принадлежит Фалесу), сославшись на то, что: «старший сказал», «и так понятно», «мамой клянусь» или «нам так давали» и т. д.

То есть до сих пор ничего доказывать было не нужно, а тут «здрасьте вам».

Представьте себе, какую головную боль привнес своими «чуждечествами» Фалес в интеллектуальную среду своего времени. И ведь его не только никуда не послали, а наоборот – причислили к когорте семи мудрецов. Справедливости ради отметим, что великим мудрецом его считали не только и не столько за математику. Он, как вы помните, был философом и государственным деятелем, а также разбирался в астрономии и бизнесе.

Но вернемся к доказательствам. Какая муха укусила Фалеса? Что же все-таки надоумило Фалеса, а его современников – на ура принять требование о необходимости доказательств. Чтобы разобраться с этим вопросом, обратимся к хорошо известному вам учебнику [13] истории Древнего Мира за пятый класс. В § 32 из главы 8 читаем, что в силу разных причин, среди которых наряду с политическими главным образом были экономические, греки в 8 – 6 веках до н. э. основали десятки поселений на берегах Средиземного и Черного морей. Одним из таких поселений был Милет, располагавшийся в Малой Азии. В это время (§ 29) в главном городе материковой Греции, в Афинах шла острая борьба за власть между знатью и демосом, которая (§ 30) закончилась в 594 году до н. э. избранием архонтом (архонт – *высшее должностное лицо* в древнегреческом городе-государстве) Солона. С его именем связывают (§ 30) зарождение демократии в Афинах. Он провел ряд демократических реформ. Теперь для решения важных государственных вопросов созывалось Народное собрание, а на судебных заседаниях выступали обвинитель, свидетели и обвиняемый. Приговор выносился тайным ГОЛОСОВАНИЕМ судей. (Могло ли такое быть при каком-нибудь Тутанхамоне?)

Разумеется, население к такому государственному устройству, к такому типу государственного управления и организации общественной жизни, было морально готово явно не накануне реформ. Также ясно, что и до колоний доносился ветер перемен. И вот в Милете, от которого до Афин рукой подать, все срослось: идеи демократии и гений Фалеса. Так что, если вчера вы в суде ДОКАЗЫВАЛИ, что вы, скажем, не верблюд, то почему сегодня вы должны верить на слово какому-то дяде, такому же гражданину, как и вы, что, например, что два треугольника равны по стороне и двум прилежащим к ним углам?

Конечно, например, какого-нибудь рыночного торговца из Афин или Милета вопросы равенства треугольников вряд ли интересовали, но сама идея о том, что доказательство было бы не лишним, даже ему была бы понятна.

Так в популярном изложении выглядит теория возникновения древнегреческой мысли, выдвинутая выдающимся французским историком-эллинистом и антропологом, исследователем-структуралистом Ж.-П. Вернаном.

В предисловии к монографии Вернана известный специалист по истории математики А. П. Юшкевич пишет [11, с. 6 – 7], что основной тезис Вернана сводится [11, с. 6] к следующему. «Существует тесная связь между нововведениями, внесёнными первыми ионийскими философами VI в. до н. э. в само мышление ... и изменениями в общественной жизни ... Прежние иерархические отношения господства и подчинения сменились новым типом общественных отношений ... В этих нововведениях и в этих границах греческая мысль есть порождение полиса».

До нас не дошли доказательства теорем, проводившиеся Фалесом. Полагают [96, с. 66], что «он широко пользовался перегибанием и наложением фигур». Но это не главное, главное, что он перегибал и накладывал, а не ссылался на авторитеты.

Далеко не все современники оценили значение Фалеса как математика. Так, например, Диоген Лаэртский (не путать с Диогеном Синопским, проживавшим в глиняной бочке (пифосе) [31, с. 241]), посвятил в своей книге Фалесу целых 7,5 страницы и только дважды мельком [31, с. 70] и [31, с. 71] упомянул о математике (точнее о геометрии). Первый раз [31, с. 70] об обучении геометрии у египтян и якобы им решенной одной задаче. Во второй раз об измерении высоты пирамиды. Но Диоген Лаэртский не указал самого главного, что сделал Фалес в математике – что он ввел доказательства.

Согласно легенде, Фалес измерил высоту пирамиды, чем поразил египетских жрецов. Видимо, египтян и самих не устраивали знания, полученные из инструкций и руководств к практическим работам, раз они выслушивали объяснения Фалеса. Впрочем, возможно, они просто хотели «проэкзаменовать» Фалеса. А, может быть, они и сами уже не знали, как найти высоту, и им тем более потребовались объяснения. Главное состоит в том, что согласно греческой интерпретации, египтяне выслушивали объяснения-доказательства Фалеса и, следовательно, по крайней мере в узком кругу они пользовались какими-то объяснениями-доказательствами. Заслуга же Фалеса состоит в том, что он сделал доказательства публично необходимыми.

Задание

1. Найдите на карте Малую Азию и город Милет. Как называлась река, в устье которой стоял Милет, и зачем нам это надо знать?
2. Что еще обозначается словом меандр. Нарисуйте это по памяти и проверьте себя, сравнив свой рисунок с оригиналом.
3. Прочитайте, кто такие семь мудрецов и легенду о рыбаках и треножнике; кто такая Елена Прекрасная и кто такой Парис?
4. Прочитайте биографию Фалеса.
5. Какие еще теоремы из школьного курса геометрии принадлежат Фалесу?

§ 1.4 Евклид и его «Начала»

В 332 – 331 г. до н. э. в дельте Нила, на побережье Средиземного моря, Александр Македонский заложил город Александрию. В 323 году до н. э. Александр скончался. О причинах его смерти имеются различные предположения. Но, бесспорно, одно – к своим 36 годам он имел последствия многочисленных тяжелых ранений, полученных в боях. Кроме того, не улучшили его здоровье и веселые ночные гулянки с друзьями, водочкой и девочками (вспомните, например, Таис Афинскую и сожженный дворец Ксеркса).

После смерти Александра Македонского империя распалась на отдельные государства. Египтом стал править сподвижник Александра – полководец Птолемей, живший ок. 367/366 – 283/282 г. до н. э. Он основал новую династию правителей Египта – династию Птолемеев. Птолемей I Сотер (Спаситель), начал активно застраивать Александрию. Он был основателем [1, с. 88] культа Сараписа, учредителем Мусейона (дома Муз) и библиотеки. При Птолемее I Александрия стала формироваться как научный, культурный и религиозный центр. Дело Птолемея I продолжил его сын – Птолемей II (Филадельф). С ним и его сестрой-женой царицей Асиной вы можете познакомиться по камее Гонзага, хранящейся в Эрмитаже. В Мусейон входили [6, с. 70]: храм Сараписа, библиотека, зоологический и ботанический сады, обсерватория. Ученые занимались философией, математикой, астрономией, медициной и другими науками. Важной особенностью было то, что работники Мусейона находились на государственном обеспечении [96, с. 106]. К первому веку нашей эры библиотека содержала [96, с. 106] более 700 000 рукописей.

Около 300 г. до н. э. в Александрии [1, с. 448] жил и преподавал математик Евклид. О нем самом известно очень мало (см. Интернет). Но нам хорошо известен его выдающийся труд «Начала».

«Начала» – это не энциклопедия математики времен Евклида. В нее не вошли целый ряд известных к тому времени научных результатов, например, исследования по теории конических сечений, знаменитые задачи древности и др. К слову сказать, некоторые из этих вопросов были буквально на слуху у населения Греции. Так, например, задача о квадратуре круга была упомянута Аристофаном комедии «Птицы». Подчеркнем, комедии, рассчитанной на широкие народные массы. Полагают [96, с. 109], что цель Евклида состояла в

том, чтобы «... дать описание тех основных элементов, на основе которых могут быть развиты все разделы современной ему математики ...»

«Начала» состоят из 13 книг, иногда к ним добавляются еще две, написанные другими авторами. Рассмотрим вкратце содержание «Начал». Книги I – IV посвящены планиметрии и геометрической алгебре; в V – VI изучается теория отношений; книги VII – IX посвящены теории целых и рациональных чисел; в X проводится классификация квадратичных иррациональностей; XI книга посвящена стереометрии; содержание XII связано с применением метода исчерпывания к вычислению отношений площадей и объемов, а в XIII рассматриваются правильные многогранники.

Остановимся подробнее на первой книге. Она начинается с определений. Приведем некоторые из них [34, с. 11]:

«1. Точка есть то, что не имеет частей.

2. Линия же – длина без ширины.»

За определениями идут постулаты. Всего их пять. Вот примеры постулатов [96, с. 14].

«1. От всякой точки до всякой точки можно провести прямую линию.»

То есть в нашей современной формулировке – через две точки можно провести прямую.

«2. Ограниченную прямую можно непрерывно продолжить по прямой.»

В нашей современной формулировке – отрезок прямой можно продолжить неограниченно.

«3. Из всякого центра и всяким раствором может быть описан круг.»

И т. д. Сравните с текстом из школьного учебника [5, Гл. III, § 2, п. 27]. Знакомо, не правда ли?

...

5. Пятый постулат у Евклида звучит довольно громоздко, запутано и больше напоминает формулировку теоремы, чем постулат. Его более поздняя формулировка звучит хорошо знакомым нам образом: *через точку вне прямой можно провести только одну прямую, параллельную этой прямой.*

После постулатов идут аксиомы. Вот их примеры [34, с. 15].

1. Равные одному и тому же равны между собой.

...

4. Совмещающиеся друг с другом равны между собой.

5. Целое больше части.

Впоследствии постулаты также стали именовать аксиомами.

После определений постулатов и аксиом рассматриваются некоторые задачи на построение и доказываются ряд теорем.

В попытках минимизировать число постулатов целым рядом авторов, среди которых были Прокл, Омар Хайям, Валлис и др., предпринимались попытки вывести пятый постулат из других постулатов и аксиом, то есть доказать это утверждение, как теорему. Но в их рассуждениях обнаруживались пробелы.

Работая над проблемой пятого постулата, выдающийся российский математик Н. И. Лобачевский создал новую геометрию, названную позднее геометрией Лобачевского. В этой геометрии через точку вне прямой можно провести бесконечное число прямых, параллельных данной. Справедливости ради также отметим, что к подобным выводам независимо от Лобачевского пришли великий Гаусс (не опубликовано, видимо, не рискнул выступить с подобной теорией) и Янош Бolyai (опубликовал на три года позже Лобачевского).

Теперь рассмотрим вопрос о значении «Начал». Как сказано в [14, с. 11]: «Книга Евклида является первой из дошедших до нашего времени попыток аксиоматического изложения математической дисциплины. Хотя во времена Евклида не вставал еще вопрос об описании логических средств, применяемых для извлечения содержательных следствий из аксиом, в системе Евклида была уже четко проведена основная идея получения всего основного содержания геометрической теории чисто дедуктивным путем из небольшого числа утверждений – аксиом».

«На протяжении [30, с. 74] более двух тысячелетий «Начала» Евклида считались образцом строгости и оказали длительное влияние на развитие математики». Известно [96, с. 114], что: «И в странах ислама, и в Европе Средних веков «Начала» служили настольной книгой каждого серьезного математика ...». «В «Началах» Евклид дает (см. [6, с. 70]) строгое и логическое изложение всего геометрического материала, известного до него и дополненного им самим. Это изложение строится при помощи дедуктивного метода, заключающегося в том, что в основу положены некоторые определения и истины, не требующие доказательств, а все дальнейшие положения выводятся путем строгих доказательств, основанных или на этих истинах, или на положениях, полученных из них. ... Общее содержание и даже характер изложения учебников по геометрии нашего времени нередко весьма близки к «Началам» Евклида, хотя со времени их написания прошло более двух тысяч лет»

В заключение упомянем о некоторых выдающихся ученых III века до н. э., чьи имена связаны с Александрийской школой.

Эратосфен (276 – 194 г. до н. э.) из города Перга (Малая Азия) помимо математических результатов известен тем, что впервые в истории измерил диаметр Земли. О точности его расчетов судить трудно, так как в качестве единицы измерения использовался стадий, величине которого (в метрах) придавались различные значения.

Аристарх Самосский (ок. 310 г. до н. э. – ок. 230 г. до н. э.) измерил расстояние от Земли до Луны. Согласно его расчетам, оно равно примерно 60 радиусам Земли – практически точный результат.

И все это без всякой помощи тайных знаний исчезнувших цивилизаций, внемлемого разума, инопланетян или нечистой силы!

Архимед (287 – 212 годы до н. э.) – фигура настолько выдающаяся и известная, что мы даже не будем давать никаких комментариев.

Вообще, III век до нашей эры был золотым веком античной науки.

Музейон просуществовал до 391 года, когда он был официально закрыт по Указу императора Феодосия. После этого центр греческой науки переместился в Афины, где на протяжении V – VI вв. наблюдался кратковременный расцвет математических наук. Но 529 г. н. э. Академия в Афинах была закрыта императором Юстинианом. Им был издан закон «О злодеях, математиках и тому подобных», в котором под страхом смертной казни запрещались занятия математикой.

Чем же так не угодили математики Юстиниану? Математика здесь ни при чем – их перепутали с гадателями.

Задание

1. Кто такая Таис Афинская? Кто такие гетеры и чем они отличаются от женщин легкого поведения? (см. [1, с. 474])
2. Что такое камея, гемма, глиптика. Кто такой Гонзага, чье имя связано с камеей. Нарисуйте по памяти камею Гонзага.
3. Расскажите о культе Сараписа. Чем Птолемею I не угодили другие достойные представители этой профессии. Ну, например, Зевс, Гера, Осирис или на худой конец Аполлон?
4. Какие еще сочинения Омара Хайяма вам известны? Прочитайте что-нибудь из них.
5. Как вы думаете, почему Гаусс, намного раньше пришедший к геометрии Лобачевского, ничего не опубликовал на эту тему?

ГЛАВА 2. ЗОЛОТОЕ СЕЧЕНИЕ

В этой главе мы подробно рассмотрим золотое сечение и некоторые связанные с ним вопросы, с которыми мы столкнёмся в главе 7 при изучении приложений математической статистики.

§ 2.1. Определение золотого сечения. Числа Фибоначчи

Итак, что же такое «золотое сечение»? Рассмотрим отрезок AB (см. рис. 2.1.1). Пусть точка $C \in (A, B)$.



Рисунок 2.1.1 – Разбиение отрезка AB

Определение 2.1.1. *Золотое сечение (золотое деление, гармоническое деление, деление в крайнем и среднем отношении)* – это такое деление отрезка AB (см. рис. 2.1.1), точкой $C \in (A, B)$ на два отрезка AC и CB , при котором для длин этих отрезков выполняется равенство:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AB}{AC} \quad (2.1.1)$$

Равенство (2.1.1) – это пропорция. Она называется *золотой пропорцией* или *пропорцией золотого сечения*.

Замечание. Данное определение является своего рода итогом, результатом суммирования и анализа определений, содержащихся в [15, с. 466, 467], [95, с. 134], [12, 1153], [58, с. 123], [44, с. 78].

Найдём длину отрезка AC . Пусть длина отрезка AB равна a . Обозначим через x длину отрезка AC , тогда:

$$\frac{x}{a-x} = \frac{a}{x},$$

откуда получаем:

$$x^2 = (a-x)a, \quad x^2 + ax - a^2 = 0.$$

Решим это квадратное уравнение:

$$x_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4a^2}}{2} = \frac{\pm\sqrt{5a^2} - a}{2} = a \frac{\pm\sqrt{5} - 1}{2}$$

Согласно геометрическому смыслу, число x положительно. Следовательно,

$$AC = x = a \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

Обозначим: $\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Тогда, $AC = a \varphi$, где $\varphi \approx 0,618\ 034$. Возвращаясь к нашему делению отрезка, получаем, что при сделанных выше обозначениях: $\frac{AC}{AB} = \varphi$, так как $AC = x = a \varphi$, $AB = a$ и, следовательно,

$$\frac{AC}{AB} = \frac{a \varphi}{a} \quad \text{или} \quad \frac{AC}{AB} = \frac{\varphi}{1}$$

Таким образом, найдя длину отрезка AC мы дополнительно получили, что точка C делит отрезок AB в отношении $\varphi : 1$ (читается φ к единице) или примерно в отношении $0,618 : 1$. Как известно, пропорция – это равенство отношений. В нашем случае это отношения $\frac{AC}{CB}$ и $\frac{AB}{AC}$, которые равны отношению $\frac{\sqrt{5}-1}{2} : 1$. Отношение $\frac{\sqrt{5}-1}{2} : 1$ называется *золотым отношением*. Отношению $\frac{\sqrt{5}-1}{2} : 1$ соответствует число $\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Это число называется *золотым числом*. Оно является коэффициентом пропорциональности в пропорции (2.1.1).

Итак, золотое сечение – это деление отрезка AB в золотой (по золотой) пропорции, т. е. в пропорции с *золотым коэффициентом пропорциональности*.

Еще раз обратим внимание на логическую (смысловую) тонкость, которую нередко по небрежности упускают из виду. Есть разница между понятиями «пропорция», т. е. равенство отношений и «коэффициент пропорциональности», т. е. число.

В рассмотренной выше задаче мы делили в золотой пропорции отрезок AB . Но можно также говорить о разложении числа на сумму двух слагаемых, частное от деления которых равняется золотому числу. Это будет называться золотым сечением числа. Так академик архитектуры Гримм Д. И. в [27, с. 9] пишет, «... что число 21 дает возможность наиболее близкого деления его целыми числами по золотому сечению, где большая часть будет 13, а меньшая 8; при весьма незначительной погрешности – 21, деленное по золотому сечению дает» приближенно 12,979 и 8,021 (в оригинальном тексте опечатки, поэтому авторы приводят результаты своих вычислений). Числа 21, 13 и 8 взяты не случайно – это числа Фибоначчи, о которых пойдет речь далее. Кроме того, они тесно связаны с Птолемеевским канонем пропорций.

Наряду с числом φ также используется и число:

$$\Phi = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{a \varphi} = \frac{1}{\varphi}$$

Найдём величину числа Φ :

$$\Phi = \frac{1}{\varphi} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{5-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1,618$$

Отметим еще одно соотношение, связывающее числа Φ и φ . Справедливо равенство:

$$\Phi = \varphi + 1,$$

которое следует из того, что

$$\Phi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = \frac{\sqrt{5} - 1 + 2}{2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} + \frac{2}{2} = \varphi + 1$$

Число Φ также называют *золотым числом*.

Обозначение $\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ было предложено в начале XX века американским инженером Марком Барром (Mark Barr) в честь Фидия (см., например [53, с. 17]). Реже в литературе встречается обозначение $\tau = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Это обозначение – τ происходит от греческого слова $\tau\omega\mu\eta$ (томе), которое переводится, как «сечение», «разрез». Термин – $\tau\omega\mu\eta$ встречается, например, у Гемина [38, с. 196]. (Гемин – древнегреческий математик и астроном первого века до н. э.). Понятие «деление отрезка в крайнем и среднем отношении» было введено Евклидом в его «Началах» [34, Книга VI. Определение 3, с. 173], III век до н. э. Термин «божественная пропорция» для пропорции (2.1.1) ввел Лука Пачоли [38, с. 196], а название «золотое сечение» по недоразумению иногда приписывают Кеплеру. Полагают [53, с. 19], что этот термин ввел не позднее 1835 года Мартин Ом (брат Георга Ома, автора известного нам закона Ома).

Отметим, что в литературе, порой, используется не совсем корректная терминология. Это объясняется как неряшливостью, так и сложившейся практикой. Здесь и далее авторы будут придерживаться введённой выше терминологии.

Аналогичные неточности встречаются порой и в зарубежной литературе. Так, например, в обзорной статье [103] автор, говоря о числе φ , называет его золотым сечением (golden section) и в примечании добавляет, что его также называют: золотым числом (golden number), золотым отношением (имеется в виду отношение чисел – golden ratio) и золотой пропорцией (golden proportion). Автор смешивает деление на части (section), число (number), отношение чисел (ratio) и равенство отношений – пропорцию (proportion).

Золотое сечение обладает целым рядом интересных математических свойств, но мы остановимся только на одном из них – на связи с числами Фибоначчи.

Леонардо Пизанский (ок. 1170 – ок. 1250), он же Фибоначчи, в своем труде «Книга абака» приводит следующую задачу. Некто поместил в загончик пару новорожденных кроликов – самца и самочку. По достижении возраста в один месяц кролики начинают спариваться и еще через один месяц после этого крольчиха приносит крольчат, которые, достигнув возраста в один месяц, спариваются и т. д. Родители при этом тоже не теряют времени зря. Вопрос: сколько пар кроликов будет в загоне по прошествии n месяцев, если считать, что каждая пара приносит ровно двух кроликов – самца и самочку? Также предполагается, что кролики не умирают. (В оригинальной формулировке самого Фибоначчи кролики изначально были взрослыми, а вопрос об их численности касался года).

Оказывается, что, если обозначить количество пар кроликов, находящихся в загоне в месяце с номером n через f_n , то согласно условию получится, что:

$$f_1 = 1, f_2 = 1,$$

а дальше будем иметь $f_3 = 2, f_4 = 3, f_5 = 5$ и так далее. Доказано, что при $n \geq 1$ эти числа f_n удовлетворяют соотношению:

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \quad (2.1.2)$$

с начальными условиями: $f_1 = 1, f_2 = 1,$

Как видно из формулы (2.1.2), зная два последовательных числа пар кроликов, можно при $n \geq 3$ вычислить следующее число пар. Так, например,

$$f_3 = f_2 + f_1 = 1 + 1 = 2,$$

$$f_4 = f_3 + f_2 = 2 + 1 = 3,$$

$$f_5 = f_4 + f_3 = 3 + 2 = 5,$$

$$f_6 = f_5 + f_4 = 5 + 3 = 8,$$

$$f_7 = 13, f_8 = 21, f_9 = 34, f_{10} = 55 \text{ и т. д.}$$

Так была решена задача Фибоначчи. Позднее даже была найдена формула (см., например, [19. с. 25]) для нахождения числа f_n по номеру n для любого $n \geq 1$.

Впоследствии оказалось, что числа Фибоначчи при всей искусственности условий задачи имеют большое практическое применение.

Все это, конечно, очень интересно, но нам то оно зачем? Мы же не животноводы. Но не спешите делать выводы. Кое-что от фибоначчиевых кроликов будет нужно и нам. Для нас будет важным следующее свойство этих чисел. Рассмотрим последовательность значений дробей вида $\frac{f_n}{f_{n+1}}$ при различных значениях числа n :

$$\text{если } n = 4, \text{ то } \frac{f_n}{f_{n+1}} = \frac{f_4}{f_5} = \frac{3}{5} = 0,6;$$

$$\text{если } n = 5, \text{ то } \frac{f_n}{f_{n+1}} = \frac{f_5}{f_6} = \frac{5}{8} = 0,625;$$

$$\text{если } n = 6, \text{ то } \frac{f_n}{f_{n+1}} = \frac{f_6}{f_7} = \frac{8}{13} \approx 0,61538;$$

$$\text{если } n = 7, \text{ то } \frac{f_n}{f_{n+1}} = \frac{f_7}{f_8} = \frac{13}{21} \approx 0,619048;$$

$$\text{если } n = 8, \text{ то } \frac{f_n}{f_{n+1}} = \frac{f_8}{f_9} = \frac{21}{34} \approx 0,617647;$$

$$\text{если } n = 9, \text{ то } \frac{f_n}{f_{n+1}} = \frac{f_9}{f_{10}} = \frac{34}{55} \approx 0,618182$$

и т. д.

Сравните эти числа с числом $\varphi \approx 0,618\ 034$. Да, вы не ошиблись, при увеличении числа n дробь $\frac{f_n}{f_{n+1}}$ всё ближе и ближе приближается к числу φ . И это можно доказать математически. Не вдаваясь сейчас в научные определения, отметим, что обнаруженный факт математически записывается с помощью формулы:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{f_{n+1}} = \varphi,$$

которая читается следующим образом: предел дроби $\frac{f_n}{f_{n+1}}$ при n , стремящемся к бесконечности равен числу φ .

§ 2.2. Краткая история теории «золотого сечения»

Ввиду повышенного, а порой и нездорового, интереса к числу φ и к его роли в искусстве и окружающем мире мы кратко остановимся на истории появления и применения золотого сечения.

Обычно, история какого-либо вопроса устанавливается с той или иной степенью достоверности подробностей и некоторые возможные неточности волнуют лишь узких специалистов. В нашем случае это совсем не так. Но обо всём немного не по порядку.

В 1854 году вышла в свет книга Цейзинга [114] о золотом сечении под названием: «Новая теория пропорций человеческого тела от неизвестного доселе основного морфологического закона, пронизывающего всю природу и искусство». В этом труде, содержащем 457 страниц, автор на многочисленных примерах убеждал читателя в том, что совершенство форм практически любого объекта живой и рукотворных созданий неживой природы основано на том, что его части соотносятся по размерам в «золотой» пропорции. Фолиант изобилует многочисленными иллюстрациями и таблицами, которые подтверждали выводы автора. После первых восторгов читателей раздалась критическая, а порой и язвительная замечания специалистов. Но их мнением никто особенно не интересовался.

В 1876 г. вышел [16] сокращенный русский перевод труда Цейзинга, после появления которого и российский читающий мир захватило повальное увлечение теорией мировой гармонии, основанной на золотой пропорции. Её старательно искали везде и с восторгом находили. Справедливости ради следует отметить, что были и добросовестные исследователи, которые пытались разобраться и к неудовольствию сторонников «золота» начинали многое опровергать. Подробнее об этом можно прочитать, например, в работе [72].

Одним из первых русскоязычных критиков теории Цейзинга был архитектор А. А. Парланд [64, с. 246 – 248]. В этом сочинении Парланд также воздал должное и другим искателям универсальных законов красоты, тактично отметив [64, с. 250], неудачные попытки «отыскать законы, обуславливающие ту гармонию общаго, т. е. тѣ счастливыя пропорціи частей и цѣлаго во взаимномъ ихъ соотношеніи, поражающую насъ въ памятникахъ античной и въ особенности греческой архитектуры».

Новая (вторая) волна увлечения золотым сечением началась с монографии [23] румынского офицера, адвоката, дипломата, инженера и, как говорят, математика Матилы Гика. Романтик по духу, он самозабвенно продолжил дело Цейзинга, искушая окружающих истиной о мировом законе гармонии. Многие повелись на знание этой сокровенной тайны. Так, например, под влиянием

встречи с Гика Сальвадор Дали [53, с. 13] построил композицию своей картины «Тайная вечеря» на основе золотого сечения. А Ле Корбюзье, начитавшись [53, с. 259; 47, с. 238] творения Гика, на этой пропорции практически целиком построил свой «Модулар».

Параллельно с активным обнаружением все новых и новых проявлений закона мировой гармонии стали выяснять его предысторию. Так как закон мировой гармонии согласно Цейзингу проявил себя уже в творениях античности, то совершенно необходимо было докопаться до первоисточников этого тайного знания.

Но там, где есть такие всеобщие мировые законы, они доступны поначалу только посвященным и должны появиться или представители инопланетного разума или, на худой конец, исчезнувших цивилизаций. Как волнительно и приятно оказаться посвященным. И делать-то для этого ничего особенно не надо. И последние как бы нашлись. Ими оказались древние египтяне. А козырной картой поклонников «золота» явилась палетка, изготовленная ранее 3000 г. до н. э. (см. рис. 2.2.1). Особенность этого артефакта состоит в том, что фигуры персонажей, изображённых на ней, явно взаимно пропорциональны. И некоторые авторы (см., например, [48, с. 25]) полагают, что коэффициент пропорциональности – это золотое число φ .



Рисунок 2.2.1 – Палетка фараона Нармера. Изготовлена не позднее 3000 г. до н. э.

В связи с пропорциональностью фигур можно также вспомнить и стелу аккадского царя Нарамсина (см. рис. 2.2.2). Он правил примерно в 2237 – 2200 году до нашей эры. В ней, судя по рисунку, коэффициент пропорциональности по крайней мере близок к числу φ .



Рисунок 2.2.2 – Стела аккадского царя Нарамсина. На ней изображен кульминационный момент битвы войска Нарамсина с горцами, когда вождь горцев был поражен копьем Нарамсина в шею

Справедливости ради отметим, что есть и другие артефакты, в которых нет и близко золотого числа (см., например, рис. 2.2.3).



Рисунок 2.2.3 – Бехистунский рельеф (прорисовка из Википедии). Конец VI в. до н. э. При изображении фигур Дария, пленных, телохранителя и воина из отряда «бессмертных» явно выдержаны определенные пропорции, хотя и не имеющие отношения к «золоту»

Приведенные примеры лишь демонстрируют наличие каких-то правил изображения. Предположительно имеются не только интуитивные представления мастеров-изготовителей. Но причем тут золотая пропорция, связывающая части и целое (вспомним определение золотого сечения). А вдруг там коэффициент пропорциональности не 0,618, а $0,625 = 5/8$. Сечение с коэффициентом пропорциональности $5/8$ может построить даже воспитанник детского сада, не утруждающий себя пониманием глубокого философского смысла деления целого на части в крайнем и среднем отношении.

Впрочем, есть один пример, о котором с придыханием говорят сторонники тайных знаний, завещанных нам не то пришельцами, не то представителями древних высоко развитых цивилизаций. Речь идет о пропорциях пирамиды Хеопса. Это козырной туз сторонников тайных знаний. Желающие могут подробнее ознакомиться с ним по книге [53, с. 84 – 99] и статье [73]. От самих древних египтян до нас ничего об этих пропорциях не дошло. Историкам математики достоверно известно, лишь то, что иррациональных чисел они (египтяне) не знали. Однако, Геродот (ок. 484 г. до н. э. – ок. 425 г. до н. э.) сообщает в [22, кн. II, часть 124] следующую фразу. Итак, вот текст о пирамиде Хеопса, цитируемый по [35, с. 297] и снабженный подстрочным переводом:

τῆς	ἔστι	πανταχῆ	μέτῳπον	ἑκαστου
У нее (т. е. у пирамиды)	есть	повсюду	метоп	каждый
ὀκτώ	ἐούσης	τῆθρα	τετραγώνου	καὶ
восемь	являющейся	плетров,	квадратной,	и
ἕβου	ἴσου	равная.		
высота				

Здесь все серьезно: есть пирамида (и, вообще говоря, еще две – Хефрена и Микерина), есть текст Геродота, есть варианты перевода этого текста и есть угол наклона ее боковой грани.

Мы привели цитату из Геродота не для того, чтобы смутить наших читателей. Единственная цель – показать, что существует не только пирамида, но и текст, и не все так однозначно с его пониманием.

Итак, есть разные варианты перевода. Вот они.

1. «Она четырехсторонняя, каждая сторона ее шириной в 8 плетров и такой же высоты, и сложена из тесаных, тщательно прилаженных друг к другу камней. Каждый камень длиной, по крайней мере, в 30 футов.»

Так звучит отрывок из Геродота в переводе с древнегреческого Г. А. Стратановского (см. [22, кн. II, часть 124]).

2. Согласно же переводу Д. Д. Мордухай-Болтовского, [35, с. 297 – 299], смысл приведенной выше фразы из Геродота состоит в том, что площадь каждой боковой грани равна квадрату высоты самой пирамиды.

У второго перевода есть и противники [53, с. 84 – 99]. Если признать такой (второй) перевод правильным, то это будет означать следующее. Великая пирамида Хеопса проектировалась и была построена так, что отношение высоты ее треугольной стороны к половине стороны основания равно золотому числу. Вывод, заставляющий учащенно биться сердца пирамидологов и сторонников зашифрованных посланий потомкам от представителей инопланетян и / или исчезнувших высокоразвитых цивилизаций.

Но в математике древних египтян не было иррациональных чисел, а число $\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ как раз и является иррациональным. Кстати, там (у пирамиды) находят еще и число π , также являющееся иррациональным (а точнее трансцендентным).

И вот, в статье [73] предлагается объяснение второго перевода из Геродота, не связанное с золотым сечением. Заметим, что статья [73] появилась много позже возражений М. Ливио [53]. Попутно также отметим, что в константах пропорций пирамиды Хеопса обнаружено и число π , о котором говорилось ранее (например, в [53, с. 95]) и объяснение появлению которого также дано в [73]. В [73] также дано с единых позиций объяснение пропорций всех трех пирамид.

Мы не призываем наших читателей принимать ту или иную сторону и, более того, заняться самостоятельными поисками истины. Для этого нужно иметь опыт и образование. Мы сообщаем Вам наиболее вероятную с нашей точки зрения гипотезу.

Есть и еще одно свидетельство об использовании золотого сечения. Это цитата из «Тимея» [70, Т. 3, с. 435]. Мы приведем ее: «Однако два члена сами по себе не могут быть хорошо сопряжены без третьего, ибо необходимо, чтобы между одним и другим родилась некая объединяющая их связь. Прекраснейшая же из связей такая, которая в наибольшей степени единит себя и связуемое, и задачу эту наилучшим образом выполняет пропорция, ибо, когда из трех чисел – как кубических, так и квадратных – при любом среднем числе первое так относится к среднему, как среднее к последнему, и соответственно последнее к среднему, как среднее к первому, тогда при перемещении средних чисел на первое и последнее место, а последнего и первого, напротив, на средние места выяснится, что отношение необходимо остается прежним, а коль скоро это так, значит, все эти числа образуют между собой единство».

На первый взгляд «золотая пропорция» в чистом виде. Но в тексте есть слова «... трех чисел – как кубических, так и квадратных ...». Для таких чисел, оказывается [73], можно обойтись и без иррационального φ , используя только натуральные числа.

Ввиду многочисленных публикаций, касающихся пропорций античных зданий, нельзя обойти вниманием Парфенон. В монографии Цейзинга [114] пропорциям этого храма уделена целая страница. А в книгах [18, § 16; 67, с. 33 – 42] рассказывается о различных теориях ряда архитекторов – И. Ш. Шевелёва, Г. Д. Гримма, И. В. Жолтовского, Джей Хембриджа, Альфреда Месселя и др., предложивших свои реконструкции пропорционального строя Парфенона. И все

эти реконструкции так или иначе были связаны с золотым сечением. По-видимому, точку в этих поисках поставил Бондаренко Н. Н. [7], заметивший связь Парфенона с храмом Зевса в Олимпии.

Далее, вплоть до начала XVI века, нет никаких упоминаний о золотой пропорции и этом числе φ . И вот в 1509 году Лука Пачоли издает книгу «Божественная пропорция. Сочинение, весьма полезное всякому проницательному и любознательному уму, из коего каждый изучающий философию, перспективу, живопись, скульптуру, архитектуру, музыку или другие математические предметы извлечет приятнейшее, остроумное и удивительное учение и развлечет себя различными вопросами секретнейшей науки». Иллюстрации для нее были выполнены Леонардо да Винчи. Исследуя это сочинение, А. И. Щетников делает [92, с. 38 – 39] следующий вывод. «И, хотя Пачоли и приложил к посланию «О божественной пропорции» трактат об архитектуре и о пропорциях человеческого тела, но о золотом сечении в этом трактате он не обмолвился ни единым словом. Стало быть, никакого другого взгляда на золотое сечение, кроме математико-космологического, у него не было, и мысль о том, что золотое сечение может выступать в качестве базовой пропорции произведений архитектуры и живописи, ему просто не приходила в голову. В точности такие же воззрения характерны для Иоганна Кеплера и других авторов эпохи Возрождения, интересовавшихся золотым сечением и ролью правильных многогранников в «гармонии мира». Так что искать в их сочинениях некую концепцию золотого сечения, связанную с эстетикой произведений искусства, – это совершенно напрасное занятие, поскольку ее там попросту не было».

Далее, как пишет известный русский и советский философ, историк науки, искусствовед, энциклопедист и переводчик В. П. Зубов [38, с. 200]: «За промежуток времени свыше трех с половиной столетий с момента выхода в свет трактата Луки Пачоли в 1509 г. до трудов Адольфа Цейзинга в 50-х гг. XIX в., не было, насколько мне известно, опубликовано ни одного сочинения, специально посвященного «золотой», или «божественной», пропорции. В области теории – несомненный разрыв традиции, и потому исследователи – как современники Цейзинга, так и последующие – имели право называть его создателем новой математической эстетики».

Рассуждая о тех или иных пропорциях, мы упустили один очень важный вопрос – почему именно в последние 100 – 200 лет вдруг возникла идея поиска универсальной пропорции? По этому поводу В. П. Зубов [38, с. 200] высказывает важную мысль: *«Искания Цейзинга относятся к началу того периода в истории эстетики, который характеризуется стремлением построить эстетику в качестве «строгой науки» по образцу математического естествознания, иными словами, отыскать законы красоты, основанные на числах, подобно математическим законам природы.»*

Критические замечания в адрес Цейзинга [114] продолжают и в наши дни (см., например, [18]). На это, в частности, указывается в работе [74, с. 3]:

«Цейзинг анализирует не сами скульптуры или картины, а их изображения (гравюры), которые имеют весьма существенные отклонения от оригиналов, как по массам, так и по пропорциям». Такого же рода замечания и по примерам из архитектуры [74, с. 9 – 10]. Со своей стороны, добавим, что Цейзинг в качестве аргументов приводит данные измерений также и по анатомическим атласам.

§ 2.3. Золотое сечение в скульптуре, архитектуре и живописи

Возникает вопрос, что понимать под словами: композиция построена по золотому сечению. Или это строгое следование в духе адептов Цейзинга золотой пропорции, или примерное следование? Если это первое, то, как показали многочисленные замеры античных скульптур (см., например, Радзюкевич [74]), таких примеров практически нет. Мы же будем придерживаться второй точки зрения.

Критика теории наличия золотых пропорций в античной архитектуре началась, как было сказано выше, с критики Цейзинга и продолжилась критикой его последователей.

Как уже отмечалось в § 2.2, в XX веке продолжали появляться работы (Брунов, Гримм, Жолтовский, Хэмбридж, Мёссель, Ле Корбюзье и др.), в которых делались попытки реконструкции пропорций памятников античной и средневековой архитектуры в рамках теории универсального закона красоты – золотого сечения. Однако [7, с. 45], имелись «...специалисты иного склада ума, скептически относящиеся к бездоказательным теориям. В первую очередь надо назвать имя В. П. Зубова ... В ... своих трудах он не раз обращал внимание на отсутствие свидетельств о применении «золотых» соотношений в письменных источниках». Не поддались обаянию секретов пропорционирования и многие другие крупные как отечественные, так и зарубежные историки и теоретики градостроительства. Они предпочитали исследовать памятники архитектуры, и в частности, античные храмы «без предвзятых теорий, а на основе целочисленных модулей в соотношении с детальными натурными наблюдениями и обмерами» [7, с. 45].

Примечательна судьба описания Парфенона. Сколько остроумных теорий объясняли его эстетическое совершенство. И все с помощью золотого сечения. С ними можно познакомиться в книгах [18, § 16] и [67, с. 33 – 42]. Но есть и другие точки зрения. Так, например, И. А. Бондаренко [7, с. 48] полагает, что Иктин и Калликрат, строившие Парфенон, ориентировались в своих идеях на храм Зевса в Олимпии (построен между 460 и 450 гг. до н. э., архитектор Либон из Элиды). «Архитекторам всегда помогала опора на апробированные образцы. Вместе с тем образцы никогда не воспроизводятся буквально, а это неизбежно вызывает отклонения от их пропорционального строя ...». И далее [7, с. 55]: «Итак, можно констатировать, что древние греки из века в век вырабатывали и оттачивали единые в основе своей традиции храмостроения. Парфенон не был чем-то принципиально новым. Его создатели следовали образцам. Однако их

работа была очень творческой. Известные образцы копировались отнюдь не буквально ... Воспроизводились их структурные элементы, но часто в других количествах и пропорциях, не говоря уж об отделке и стилистике».

Но есть архитекторы, которые сознательно используют золотое сечение. С одним из них – Ле Корбюзье мы познакомимся в следующем параграфе.

Все эти работы подвергались критике оппонентов. Кратко суммируя эту дискуссию, Радзюкевич отмечает в [72], что на сегодняшний день теория золотого сечения в практических работах архитекторов используется крайне мало.

Перейдем к живописи. В связи с вопросом, что понимать под золотым сечением, процитируем два отрывка из монографии Ф. В. Ковалёва [48].

Итак, первый [48, с. 14 – 15]. «В русской Академии художеств знали о законе золотого сечения. ... В книге «Далёкое – близкое» И. Е. Репин описывает встречу знаменитого критика В. В. Стасова с учениками Академии художеств. На встрече присутствовали кроме Репина и Стасова ... Г. И. Семирадский ... и др. Разговор шел о новом реалистическом искусстве и устаревшем академизме. Илья Ефимович отмечает, что Семирадский щеголял перед Стасовым знанием греческого искусства, эстетических трактатов и золотого сечения, и замечает, что все это прекрасно знал и В. В. Стасов».

Далее, второй отрывок [48, с. 15]. «Золотое сечение применялось художниками при композиционном построении картины. Был разработан упрощенный метод, когда плоскость картины делилась на 10 частей по вертикали и горизонтали. Линия золотого сечения намечалась в отношении 6 и 4 частей ... Это не давало отношения 6:2:38, но давало близкое к нему 60:40. Практически этого было достаточно ... Тот же результат получали и художники Мюнхенской академии делением картины на 5 частей. Золотая пропорция бралась в отношении 3:2 ...».

Т. е. на стр. 14 в [48] пропорция 60:40 демонстративно подчеркнута отделяется от золотой пропорции, которой щеголял Семирадский. Затем пропорция 60:40 называется близкой к нему, а далее и вовсе пропорция 3:2 фактически именуется разновидностью золотой пропорции. Интересно, что тогда можно сказать о дроби $\frac{5}{8}$, которой бálговались [109] французы.

Ясно одно: некоторые заслуженно уважаемые авторы, вероятно не отдавая себе отчёта, пытаются связать несвязуемое: золотое сечение и не золотое сечение. Они понимают, что расположение доминанты в интервале от 0,60 до 0,63 (а, возможно, и до 0,66 из правила третей в фотографии) создает определенную эмоциональную окраску восприятия сюжета, но следуют тренду и говорят о золотом сечении.

Прежде чем переходить к изучению, разбору и анализу роли золотого сечения в живописи, рассмотрим одно понятие.

Доминанта (от лат. *dominans* «господствующий») – термин, используемый в разных предметных областях и означающий главенствующую идею, основной признак или важнейшую составную часть чего-нибудь.

Под доминантой в живописи понимается смысловой центр, линия, смещённая ось симметрии или главный элемент, который сразу бросается в глаза, роль остальных – второстепенная, их задача – выделить доминанту, направить на нее взгляд зрителя при рассматривании картины. С доминанты начинается восприятие произведения. В пейзаже доминантой может являться то, на что больше художник хочет обратить внимание зрителя.

Теперь покажем на примере, что дает построение композиции при использовании золотого сечения. Рассмотрим картину Ивана Ивановича Шишкина «Корабельная роща» (см. рис 2.3.1). Об этой картине написано достаточно много, поэтому для наших целей мы ограничимся лишь несколькими словами.

Перед нами летний лес. Сочная зелень хвои и сумрак чащи оттеняют освещенные солнцем стволы могучих сосен. Богатая палитра красок передает его светлое спокойствие. Ближние сосны ярко освещены солнцем, но чем дальше от лужайки с переднего плана, тем лесной массив выглядит сумрачнее и прохладнее. Медленно и тихо течет вода в обмелевшем ручье с золотистыми песчаными отмелями и желто-зелеными клочками травы по берегам. На его берегу, освещенном летним солнечным светом, расположились несколько молоденьких сосенок. В воздухе разлито безмятежное спокойствие летнего дня. Колорит картины сдержанный. Все создает ощущение спокойного величия.

При взгляде на эту картину сразу бросается в глаза сосна, стоящая на переднем плане, чуть правее осевой линии полотна. В свете вышесказанного ее и следует считать доминантой.

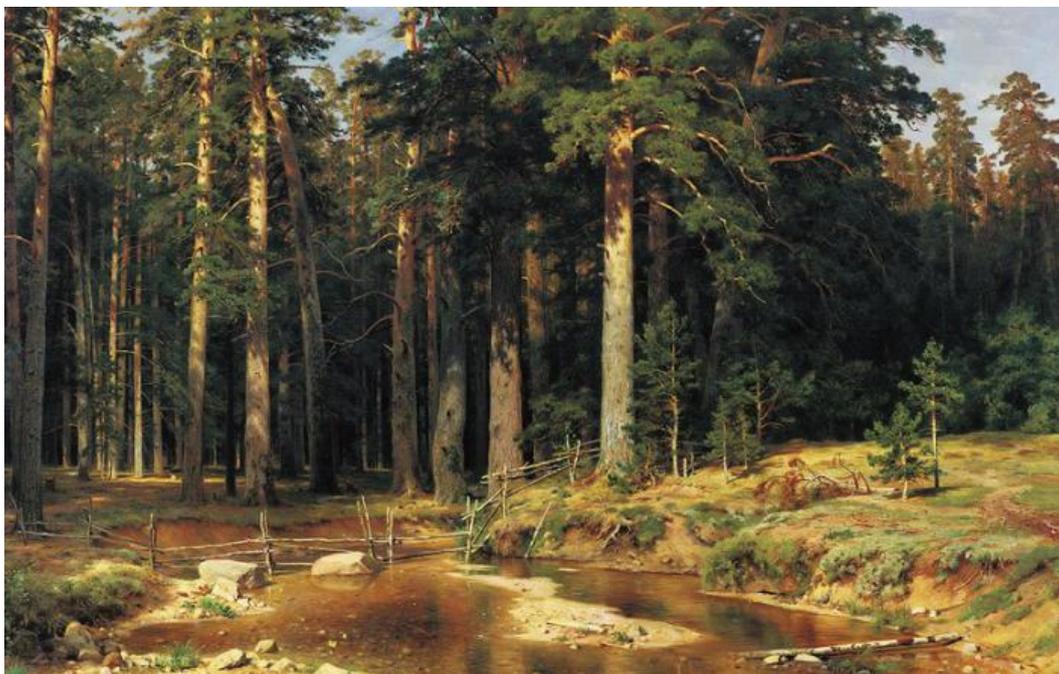


Рисунок 2.3.1 – Картина И. И. Шишкина «Корабельная роща»

Теперь посмотрим, как проходят вертикали, отстоящие на 0,60 и 0,62 ширины полотна, считая от левого края (см. рис. 2.3.2).

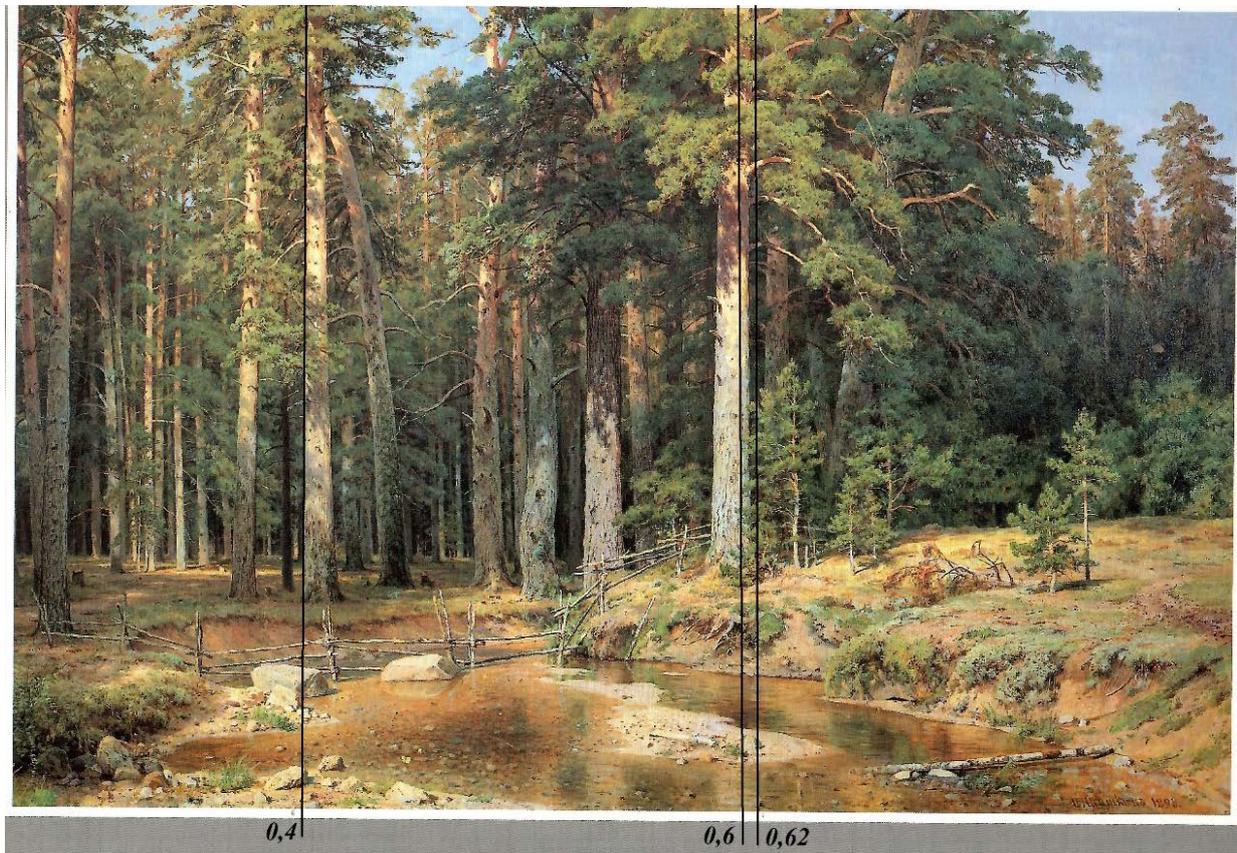


Рисунок 2.3.2 – Вертикали 0,60 и 0,62 на картине И. И. Шишкина «Корабельная роща», а также вертикаль 0,40 на части полотна между левым краем и вертикалью 0,60. Доминанта заднего плана на 0,40 образована двумя ярко освещенными стволами сосен

Немного подправим шедевр художника. На рисунке 2.3.3 полотно оптимизировано: слева и справа удалены «лишние, ненужные» детали.

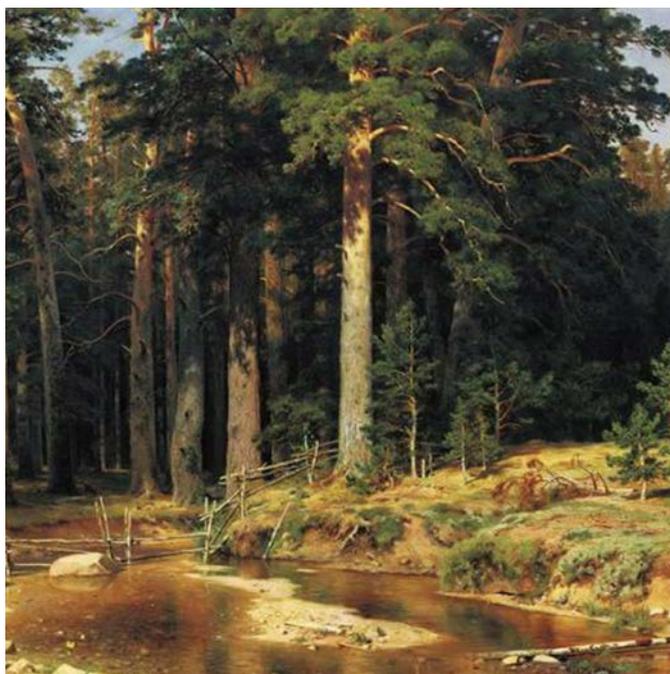


Рисунок 2.3.3 – Оптимизированная картина И. И. Шишкина

Посмотрим, что изменилось. Вроде бы ничего особенного: сосна-доминанта, одна штука – есть; обмелевшая речка, одна штука – есть; деревьев на заднем плане стало меньше, но все равно их много, целая роща. Но все-таки что-то стало не так. Давайте сравним ощущения от старой картины и новой. Во-первых, сосна-доминанта, стоявшая в положении 0,60, переместилась в центр и, так как она полностью занимает внимание зрителя, то картину, наверное, следовало бы назвать «Корабельная сосна» или как-то так. Все детали и прилагательные из описания старой картины практически сохранились, но теперь взгляд зрителя уже не блуждает по роще. Он сконцентрирован на доминанте, он стал внутренне напряжен и при этом пропало философское, безмятежное ощущение природы.

Однако, продолжим наши эксперименты. Удалим «лишние, ненужные» детали справа (см. рис. 2.3.4). Все краски и почти все материальные предметы сохранились. Но внутренняя притягательность картины исчезла. Доминантная сосна превратилась в обыкновенную большую сосну. Взгляд, не останавливаясь, скользит по деревьям рощи, не вызывая никаких эмоций, не зная, что подвергнуть вниманию: то ли большую сосну, то ли два сумрачных участка рощи слева и справа от нее, а может быть обмелевший ручей? Нарисовано хорошо, красиво, но все в целом как-то ни о чем.



Рисунок 2.3.4 – Оптимизированная справа картина И. И. Шишкина

Итак, можно сделать следующий вывод. Помещение доминанты в положение, близкое к золотому сечению, а точнее в интервал, примерно равный (0,60; 0,63), минимизирует напряжение в передаче главной темы сюжета. Если речь идет о портрете, то доминанта – это смещенная ось симметрии.

Кроме того, помещая доминанту в какое-либо положение на холсте, следует отдавать себе отчет в том, что на картине будут находиться и другие объекты. На совокупное восприятие будет влиять наличие массивных тел, создающих цветовые пятна.

Также следует отметить использование правила третей, особенно в фотографии.

Имеются и другие тонкости использования золотого сечения, связанные в том числе с сознательным небольшим смещением доминанты с положения золотого сечения. О них можно прочитать, например, в [48, с. 46 – 110].

Здесь также уместно упомянуть о работе Маргариты Невё [109], исследовавшей творчество Синьяка, Сера, Серюзье и Мане. Оказалось, что, вопреки расхожим утверждениям, эти художники не опирались на золотое сечение. Изучая письма и фотографии их картин в ультрафиолетовых лучах, а также наброски, Невё пришла к выводу о том, эти художники использовали пропорцию $5/8 = 0,625$.

Задание

1. Кому посвящен храм Парфенон и где он находится? Назовите архитекторов.
2. Кто автор этой картины и как она называется?



- а) Что изображено на этой картине? Напишите об этом не менее трех предложений.
- б) Проведите доминантную линию (линии). Где проходит золотое сечение?
3. Кто автор этой картины и как она называется?



- а) Что изображено на этой картине? Напишите об этом не менее трех предложений.
- б) Проведите доминантную линию (линии). Где проходит золотое сечение?

§ 2.4. Модуль

Человек есть мера всех вещей

Протагор

Как нам кажется, Платон и Диоген Лаэртский неправильно поняли эту фразу античного гения. На самом деле Протагор, наверное, имел в виду не критерии истинности своего знания о мире, а предвидел пректирование интерьеров в пропорциях от Ле Корбюзье. Впрочем, обо всем по порядку.

Конец XIX и начало XX века ознаменовался в Европе и Америке бурным промышленным и жилищным строительством. Это потребовало создания каких-то стандартов в конструкционных элементах и развития эстетических норм и принципов как для зданий, так и для интерьеров.

В попытке совместить гармонию и стандарт французский архитектор Ле Корбюзье (*Le Corbusier* – фамилия предка по материнской линии; настоящее имя и фамилия Шарль-Эдуар Жаннерэ Гри 1887 – 1965) предложил в середине XX века свою систему пропорционирования, т. е. свой способ гармонизации формы на основе равенства количественных отношений ее частей. Другими словами, он предложил систему, позволяющую выбирать пропорции в предметах интерьера, элементах архитектуры зданий и всего сооружения в целом. Эта система была названа – «модуль».

По словам самого Ле Корбюзье [47, с. 204], модуль «это система, имеющая целью ввести в архитектуру и механику размеры и габариты, согласованные с человеческими масштабами, увязать с бесконечным разнообразием чисел те основные жизненные ценности, которые завоевывает человек, осваивая пространство.» И далее: [47, с. 250] «модуль» это средство измерения, основой которого является рост человека и математика».

Что же касается значения этого слова, то, как отмечено в [47, с. 249], «modulor (лат.) – ритмическая размерность ... автор употребляет это слово как существительное: ритмический размер». Некоторые же авторы видят в слове «модуль» французское module or (модюльёр) – золотой модуль.

Основой своей шкалы (модулем) он выбрал фигуру человека. Он взял два параметра: рост человека и высоту человека, стоящего с поднятой вверх рукой. Каждую из этих величин он последовательно умножал на степени золотого числа Φ . Таким образом он получил ряд чисел из роста и назвал его красным рядом; его элементы мы обозначили: $a_k, k \in Z$. Также Ле Корбюзье построил ряд чисел из высоты этого же человека, но с поднятой вверх рукой и назвал его синим рядом; его элементы мы обозначили: $b_k, k \in Z$. Величины отрицательных степеней числа Φ Ле Корбюзье предложил использовать в качестве высот элементов интерьера. В таблице 2.4.1 приведены некоторые значения красного и синего рядов для человека ростом 182,9 см и высотой поднятой руки 226,0 см.

Таблица 2.4.1 – Некоторые числовые значения элементов красного и синего рядов, вычисленные согласно Ле Корбюзье, по формулам: $a_k = \Phi^k \times 182,9$, $b_k = \Phi^k \times 226,0$, $k = -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2$

Степени числа Φ	Φ^{-4}	Φ^{-3}	Φ^{-2}	Φ^{-1}	Φ^0	Φ^1	Φ^2
Значение	0,146	0,236	0,382	0,618	1	1,618	2,618
Красный ряд: a_k	$a_{-4} = 26,7$	$a_{-3} = 43,2$	$a_{-2} = 69,8$	$a_{-1} = 113,0$	$a_0 = 182,9$	$a_1 = 295,9$	$a_2 = 478,8$
Синий ряд: b_k	$b_{-4} = 33,0$	$b_{-3} = 53,4$	$b_{-2} = 86,3$	$b_{-1} = 139,7$	$b_0 = 226,0$	$b_1 = 365,8$	$b_2 = 591,8$

Далее, на рисунке 2.4.1 схематично показаны типичные положения тела человека в различных жизненных ситуациях.

Красный ряд: человек стоит, опершись локтями о стойку; сидит в кресле, опершись о подлокотники; сидит на стуле; сидит на низкой скамеечке.

Синий ряд: человек стоит; стоит, вытянув руку вверх; стоит, опершись плечом; стоит, опустив руки вниз и касаясь при этом руками стола.

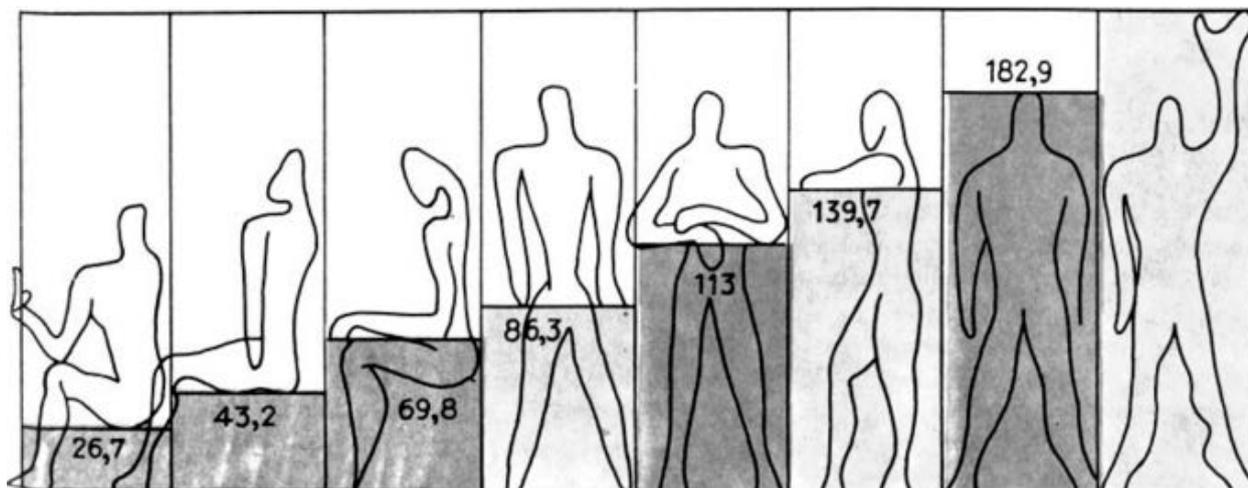


Рисунок 2.4.1 – Система пропорций Ле Корбюзье. Красный ряд на нашем рисунке составлен из фигур, частично или полностью закрашенных темным цветом. Синий ряд – из бледно закрашенных фигур

Итак, пропорции предметов окружающей среды стали гармонично согласованы с человеком. Отметим также, что в соотношении $182,9 = 6 \text{ ft}$ (т. е. рост равен шести футам), принятом в модуле, ряд авторов увидели параллель с античной традицией (пропорцией) (см. [17, с. 61].), восходящей к канонам Древнего Египта: «Ступня составляет шестую часть длины тела ...». («Шестая часть» – это не описка, в чем вы сами можете убедиться, например, посмотрев на барельефы и статуэтки в египетском зале Эрмитажа.)

Дело в том, что в первоначальном варианте теории Ле Корбюзье взял рост среднестатистического француза 175 см. Однако возникли сложности при

переводе элементов метрической шкалы в футы – дюймы. Хотелось, чтобы целые числа сантиметров переходили в целые или практически целые числа дюймов. И вот однажды архитектор Пей – коллега и соратник Ле Корбюзье сказал [47, с. 251]: «Значения, принятые «модулом», определены исходя из роста человека 1,75 метра. Но это, скорее, рост француза. У англичан, как вы, наверное, читали в их детективных романах, красавцы мужчины, например, полисмены, неизменно имеют рост 6 футов. Мы попытались применить этот эталон: 6 футов = 6 × 30,48 = 182,88 сантиметра. К нашему восхищению, шкала нового «модулора», построенная исходя из роста человека в шесть футов, легко переводилась для футов – дюймов в целые числа на всех ступенях». Высота фигуры с поднятой рукой составила при этом 226 см (89 дюймов).

Между элементами синего и красного рядов имеется простая связь. Оказывается, что практически выполняется равенство:

$$b_k = 2a_{k-1}, k \in Z \quad (2.4.1)$$

Действительно, по определению

$$b_k = \Phi^k \times 226.0, \quad a_{k-1} = \Phi^{k-1} \times 182.9$$

Следовательно

$$\frac{b_k}{a_{k-1}} = \frac{\Phi^k \times 226.0}{\Phi^{k-1} \times 182.9} = \Phi \times \frac{226.0}{182.9} \approx 1.618 \times 1.236 = 1.999848 \approx 2$$

Равенство практически точное и для реального использования формулу (2.4.1) можно принять.

Отметим, что по построению автора величина 226 изначально выбиралась как $(182.9 : \Phi) \times 2 \approx 226,08$. Удвоение вытекало из ранних теоретических рассуждений: высота человека с поднятой вверх рукой независимо от выбранного среднего роста вычислялась, как расстояние от пола до пупка, умноженное на два.

Возникает вопрос: зачем потребовалось две шкалы? Ведь Ле Корбюзье строил хорошую шкалу, куда должны были войти все необходимые размеры. Эрнст Нойферт [62, с. 44] дает по этому поводу такое объяснение. Поскольку модульные величины красного ряда «слишком велики для практического применения, он (Ле Корбюзье. – *Авт.*) дополнительно предложил так называемый «синий ряд», в основу которого положены 2,26 м (расстояние от подошвы до кончиков пальцев вытянутой руки) ...».

Отметим также, что Ле Корбюзье был не единственным, кто понимал необходимость учета пропорций человеческого тела. Так, например, Э. Нойферт [62] также рассматривал и учитывал параметры человека, находящегося в различных положениях.

Широкого распространения модулар не получил. Оказалось, что удобнее пользоваться метрической модульной системой, не используя иррациональные

коэффициенты. Более того, многие архитекторы, искусствоведы, дизайнеры отзывались о нем достаточно критически. Так, например, И. А. Бондаренко [7, с. 47] писал: «Модульёр оказался, как известно, практически бесполезной, но увлекательной, особенно для непрофессионалов декларацией». Однако ряд идей, содержащихся в нем, нашли свое применение.

Отметим ряд практически важных идей, содержащихся в «модулоре».

1) Модулор позволяет не только соблюдать архитектурные пропорции, но и обеспечивает повторение однотипных форм.

2) При сопряжении в жилых комнатах и на рабочих местах отдельных предметов мебели, оборудования и архитектурных деталей интерьера необходимо соблюдать антропоморфность их взаимных размеров, чтобы создавать ощущение комфорта для человека, находящегося в сконструированной среде.

3) При проектировании предметов одежды.

4) Возможно использование и других рядов модулора, построенных на основе другого среднего роста с некоторым округлением расчетных величин числового ряда. Корректировка отдельных значений числового ряда связана не только с вопросами технологии производства, но и с антропометрическими отличиями от идеальной фигуры.

В качестве иллюстрации к последним двум пунктам приведем некоторые выдержки из совместной научно-исследовательской работы [68], проводившейся сотрудниками Московского государственного университета дизайна и технологии и Казанского национального исследовательского технологического университета.

В этой работе [68], посвященной проектно-инновационной деятельности в дизайне костюма, рассмотрены данные сравнительных исследований регионального этнотипа женщин и мужчин мезоморфного типа республики Татарстан. Их средний рост составлял 165,1 см и 170,6 см соответственно.

(Мезоморфы – это атлетически сложенные люди, с сильным скелетом и тяжелыми костями. У них выраженные широкие плечи, мускулистое тело.)

С помощью четырехколонного бодисканера «VITUS XXL» были разработаны стереоскопические изображения поверхности тела, позволившие определить его пропорции для женщин и мужчин соответственно. (Бодисканер (3D сканер) – система трехмерного сканирования фигуры человека для получения наиболее полной информации о поверхности тела или манекена с последующим формированием трехмерной модели поверхности 3D манекена-аватара.) Затем по заданным значениям ростов были построены с помощью теории «Модулора» теоретические значения. Соотношения пропорций тел отличаются от эталонных (теоретических) для мужских фигур по отдельным позициям в пределах до $\pm 6,66\%$, а женских – до $\pm 3,35\%$. Но основная часть практически совпадала. Ниже мы воспроизводим части таблиц соотношений (см. таблицы 2.4.2 и 2.4.3).

Таблица 2.4.2 – Числовые ряды системы «Модуль» в метрической системе для женской фигуры мезоморфного типа

№	Красный ряд		Синий ряд	
	Эталон	Экспериментальные данные	Эталон	Экспериментальные данные
1	165,10	165,10	204,00	204,00
2	102,03	102,00	126,00	126,00
3	63,22	63,00	77,91	77,80
4	39,06	38,90	48,14	48,00
5	24,13	24,00	29,75	29,80
6	14,91	14,80	18,38	18,40

Таблица 2.4.3 – Числовые ряды системы «Модуль» в метрической системе для мужской фигуры мезоморфного типа

№	Красный ряд		Синий ряд	
	Эталон	Экспериментальные данные	Эталон	Экспериментальные данные
1	170,60	170,60	210,70	210,70
2	105,43	105,40	130,21	130,20
3	65,15	65,10	80,46	80,50
4	40,26	40,20	49,72	49,70
5	24,88	24,80	30,72	30,70
6	15,37	15,30	18,98	19,00

(Напомним, что в системе «Модуль» строка № 6 соответствует умножению роста на число $\Phi^{-5} \approx 0,146 \times 0,618 \approx 0,09$).

Не касаясь существа результатов, полученных в работе [68], отметим следующее. Приведенные в [68] результаты сравнительного анализа показывают, что теоретическая шкала «Модулора», построенного по среднему росту, в определённых случаях вполне соответствует фактическому положению дел. Однако, к сожалению, авторы работы [68] ничего не говорят о проведении статистического исследования: нет данных о репрезентативности выборки, о ее объеме и обстоятельствах проведения сбора данных.

ГЛАВА 3. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

В этой главе мы очень кратко и наглядно постараемся напомнить основные понятия математического анализа, которые нам понадобятся при изложении дальнейшего материала. Все эти понятия, кроме понятий предела, несобственного интеграла и рядов вы изучали в школе. Но, если математика не являлась тогда вашим любимым предметом, то при первом знакомстве с книгой эту главу можно вообще пропустить. Однако, если дальнейшее содержание вас заинтересует, и вы захотите получить не впечатление, а знание, то к этой главе можно вернуться позже.

§ 3.1. Предел числовой последовательности

Начнем с примера. Рассмотрим бесконечную последовательность чисел, задаваемых формулой:

$$a_n = \frac{n+1}{2n+1},$$

где n последовательно принимает значения $1, 2, 3, \dots$. То есть

$$a_1 = \frac{2}{3}, \quad a_2 = \frac{3}{5}, \quad a_3 = \frac{4}{7}, \quad \dots$$

При неограниченном возрастании номера n числа a_n становятся сколь угодно близкими к числу $\frac{1}{2}$. Действительно,

$$a_{100} = \frac{101}{201} \approx 0.5025;$$

$$a_{1000} = \frac{1001}{2001} \approx 0.50025;$$

$$a_{10000} = \frac{10001}{20001} \approx 0.500025;$$

...

Таким образом, о членах этой последовательности можно сказать, что они стремятся к числу $0,5 = \frac{1}{2}$, или что число $\frac{1}{2}$ является пределом такой последовательности, употребляя слово "предел" в общепринятом бытовом смысле.

Дадим математическое определение понятия предела. Рассмотрим бесконечную последовательность чисел $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$.

Определение 3.1.1. Число A называется *пределом последовательности* чисел $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такой номер N , что при всех $n > N$ будет выполняться неравенство:

$$|a_n - A| < \varepsilon \quad (3.1.1)$$

Тот факт, что число A является пределом последовательности чисел $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ обозначается следующим образом:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

Рассмотрим геометрический смысл введенного определения. Для этого на числовую ось нанесем числа $a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ и число A (см. рис. 3.1.1.):

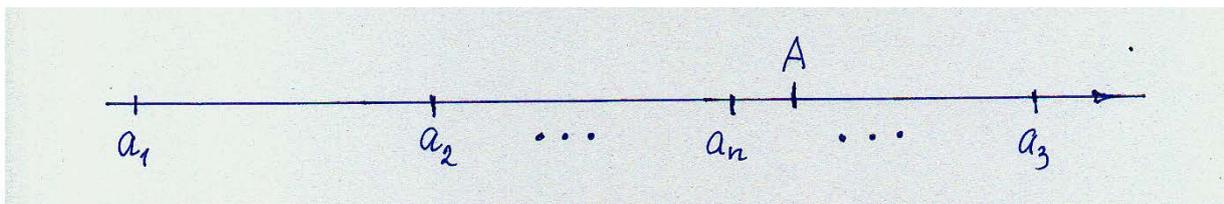


Рисунок – 3.1.1. На числовой оси отмечены числа $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ и число A

Неравенство (3.1.1) равносильно тому, что $-\varepsilon < a_n - A < \varepsilon$ или $A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$. (3.1.2)

С геометрической точки зрения неравенства (3.1.2) означают, что числа a_n принадлежат интервалу $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$, называемому также ε -окрестностью точки A (см. рис. 3.1.2).

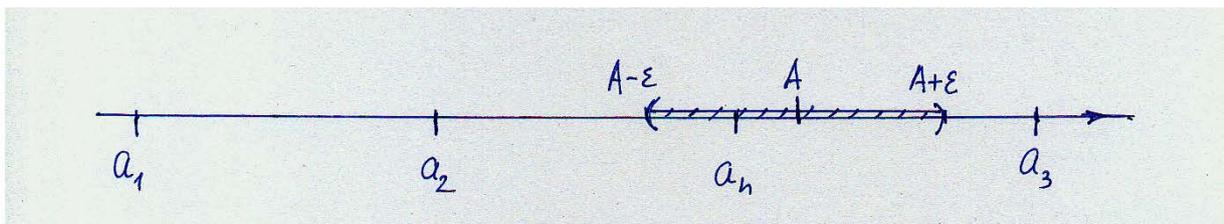


Рисунок 3.1.2 – На числовой оси отмечены числа $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$, число A и интервал $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$.

Следовательно, определение предела можно истолковать следующим образом. Число A является пределом последовательности чисел $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$, если для любой ε -окрестности точки A можно указать такой номер N , что при $n > N$ все точки a_n будут принадлежать этой ε -окрестности.

Рассмотренное выше определение предела позволяет уже не интуитивно, как это было в начале параграфа, а математически строго проверять, является ли данное число пределом последовательности или нет.

Пример 3.1.1. Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2}$

Доказательство. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$ и по нему найдем такое N , что при $n > N$ будет выполняться неравенство (3.1.1) для $a_n = \frac{n+1}{2n+1}$ и $A = \frac{1}{2}$.

Подставляя числа a_n и A в (3.1.1), получим:

$$\left| \frac{n+1}{2n+1} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon \quad (3.1.3)$$

Неравенство (3.1.3) равносильно тому, что

$$\frac{1}{2(2n+1)} < \varepsilon \quad \text{или} \quad n > \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\varepsilon} - 1 \right).$$

Следовательно, для выполнения (3.1.3) в качестве числа N достаточно взять любое целое число, большее чем $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\varepsilon} - 1 \right)$. Например, при $\varepsilon = 0,03$ можно взять $N = 8$.

Таким образом, мы указали способ, позволяющий по любому $\varepsilon > 0$ находить номер N , обеспечивающий выполнение при $n > N$ неравенства (3.1.3). Но тогда, в силу определения предела, получаем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2},$$

что и требовалось доказать.

Пример 3.1.2. Доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) = 1$$

Доказательство. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$ и по нему найдем такое N , что при $n > N$ будет выполняться неравенство (3.1.1) для $a_n = 1 - \frac{1}{2^n}$ и $A = 1$. Подставляя числа a_n и A в (3.1.1), получим:

$$\left| 1 - \frac{1}{2^n} - 1 \right| < \varepsilon \tag{3.1.4}$$

Неравенство (3.1.4) равносильно тому, что

$$\frac{1}{2^n} < \varepsilon \quad \text{или} \quad 2^n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Следовательно, для выполнения (3.1.4) в качестве числа N достаточно взять любое целое число, большее чем $\frac{1}{\varepsilon}$. Например, при $\varepsilon = 0,01$ можно взять $N = 7$.

Тогда при $n > N$ получим:

$$2^n > 2^7 = 128 > \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{0,01} = 100$$

Таким образом, мы указали способ, позволяющий по любому $\varepsilon > 0$ находить номер N , обеспечивающий выполнение при $n > N$ неравенства (3.1.4). Но тогда, в силу определения предела, получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) = 1,$$

что и требовалось доказать.

Следующие два примера показывают, что не каждая числовая последовательность имеет предел.

Пример 3.1.3. Если $a_n = (-1)^n$, то, изобразив члены последовательности на числовой оси, легко убедиться, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$ не существует, поскольку при возрастании n члены последовательности не стремятся ни к какому пределу, принимая попеременно значения то -1 , то $+1$.

Пример 3.1.4. Также не имеют предела последовательности с общими членами: $a_n = n^2$, $a_n = -n^2$, $a_n = (-1)^n n^2$. В каждом из этих случаев $|a_n|$ неограниченно возрастает, но, в отличие от примера 3.1.2, про такие последовательности говорят, что предел равен $+\infty$, $-\infty$ или ∞ , соответственно, и пишут:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (-n^2) = -\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n n^2 = \infty.$$

Задание

1. Сформулируйте определение предела последовательности.
2. Дайте геометрическое истолкование предела последовательности.
3. Докажите, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{3n} = \frac{1}{3}$.

§ 3.2. Предел функции

Пусть $|a| < +\infty$ и функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x = a$. При этом не требуется, чтобы она была определена в самой точке a . Например, функция

$$y = \frac{\sin x}{x}$$

определена в окрестности точки $a = 0$, но не определена для $a = 0$.

Определение 3.2.1. Число A называется *пределом* функции $y = f(x)$ при x , стремящемся к a , если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что для всех x , удовлетворяющих условию

$$0 < |x - a| < \delta \tag{3.2.1}$$

будет выполняться неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon \tag{3.2.2}$$

Тот факт, что число A является пределом функции $y = f(x)$ при x , стремящемся к a , записывается следующим образом:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \quad \text{или} \quad f(x) \rightarrow A \quad \text{при} \quad x \rightarrow a.$$

Рассмотрим геометрический смысл определения предела функции. Неравенство (3.2.1) равносильно тому, что

$$a - \delta < x < a + \delta, \quad x \neq a.$$

в то время как неравенство (3.2.2) равносильно выполнению неравенства

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon.$$

Таким образом, можно сказать, что число A является пределом функции $y = f(x)$ при x , стремящемся к a , если для любой ε -окрестности точки A ,

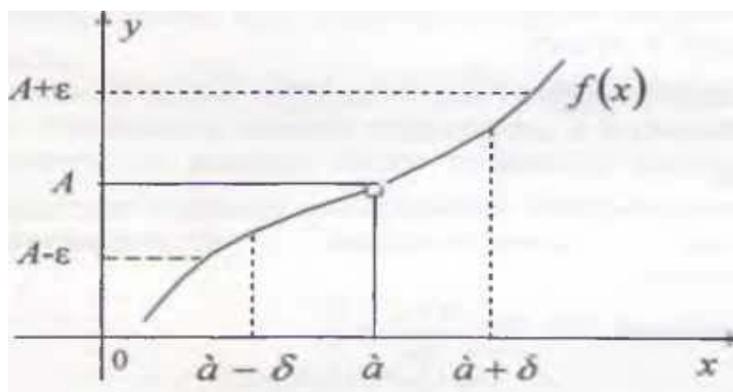


Рисунок 3.2.1 – Геометрическая иллюстрация определения предела

т. е. множества $(A - \sigma, A + \sigma)$, можно указать такую δ -окрестность точки a , что для всех точек x из этой δ -окрестности соответствующие значения функции лежат в ε -окрестности A (см. рис. 3.2.1).

Заменяем в определении предела функции условие (3.2.1) на $a < x < a + \delta$, не требуя при этом, чтобы функция $y = f(x)$ была определена при $x < a$. Будем называть число A в этом случае *пределом справа функции* $y = f(x)$ и обозначать этот предел так (см. рис. 3.2.2):

$$f(a + 0) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$$

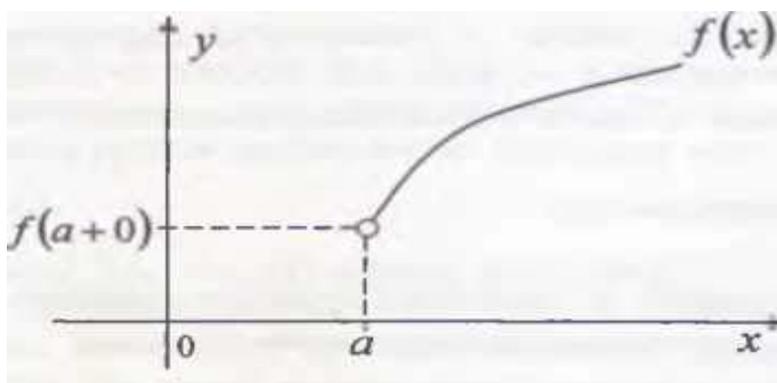


Рисунок 3.2.2 – Геометрическая иллюстрация определения предела справа

Аналогично определяется и обозначается *предел слева*.

Теорема 3.2.1. Если функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x = a$, то $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ существует тогда и только тогда, когда существуют и равны односторонние пределы.

Будем называть *простейшими* (или *основными*) элементарными функциями функции: x^a , $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\operatorname{arcsin} x$, $\operatorname{arccos} x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$, $\log_a x$ ($a > 1, a \neq 1$), a^x ($a > 0, a \neq 1$).

Теорема 3.2.2. Если $y = f(x)$ – простейшая элементарная функция и точка $x = a$ принадлежит ее области определения, то

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad , \quad (3.2.3)$$

причем, если точка $x = a$ лежит на границе области определения, то предел в (3.2.3) односторонний.

Теперь дадим определение предела в случае, когда аргумент x стремится к бесконечности.

Определение 3.2.2. Число A называется *пределом функции* $y = f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $M > 0$, что из условия $x > M$ будет следовать, что $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Для обозначения предела при стремлении аргумента к плюс бесконечности используется обозначение:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$$

С геометрической точки зрения число A является пределом функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$, если для любой ε -окрестности точки A можно указать такое число $M > 0$, что для любого x из интервала $(M; +\infty)$ соответствующее значение функции будет принадлежать этой ε -окрестности (см. рис. 3.2.3).

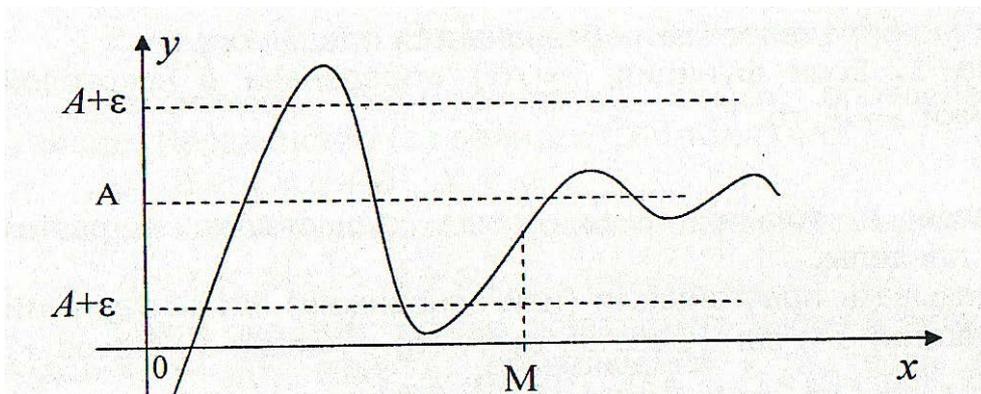


Рисунок 3.2.3 – Геометрическая иллюстрация определения предела при стремлении аргумента к плюс бесконечности

Аналогично определяется $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

Определение 3.2.3. Число A называется *пределом функции* $y = f(x)$ при $x \rightarrow \infty$, если

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$$

Теорема 3.2.3. Существует предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e,$$

где $e = 2,718\dots$

Число e используется в качестве основания в натуральных логарифмах. По определению:

$$\ln x = \log_e x$$

Задание

1. Выучите приведенные три определения.
2. Дайте определение предела функции слева и сделайте к нему иллюстрацию.
3. Дайте определение предела функции при стремлении аргумента к $-\infty$ и сделайте к нему иллюстрацию.
4. Запомните формулу, задающую число ϵ , а также приближенное значение этого числа.

§ 3.3. Непрерывность

Когда мы слышим слово непрерывная функция, на ум приходит функция, график которой представляет собой линию без разрывов. При первом, поверхностном знакомстве с курсом этим представлением можно и ограничиться. Но такого уровня недостаточно для последовательного и логически стройного изложения математического анализа и, конечно, для исчерпывающего доказательства каких-либо теорем. Так что при первоначальном знакомстве с курсом можно ограничиться представлением о непрерывной функции, как о функции, график которой представляет собой линию без разрывов. Но для более обстоятельного знакомства с курсом следует разобрать материал этого параграфа.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x = a$.

Определение 3.3.1. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной* в точке $x = a$, если

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Определение 3.3.2. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной справа (слева) в точке $x = a$, если

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a), \quad \left(\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a) \right).$$

Если функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x = a$, за исключением, быть может, самой точки $x = a$, и для нее не выполняется определение непрерывности в этой точке, то такая функция называется разрывной в точке $x = a$.

Рассмотрим примеры разрывных функций.

Пример 3.3.1. Функция $y = \frac{\sin x}{x}$ разрывна в точке $x = 0$, т.к. ее значение в этой точке не определено.

Пример 3.3.2. Функция $y = \sin \frac{1}{x}$ разрывна в точке $x = 0$ (см. рис. 3.3.1).

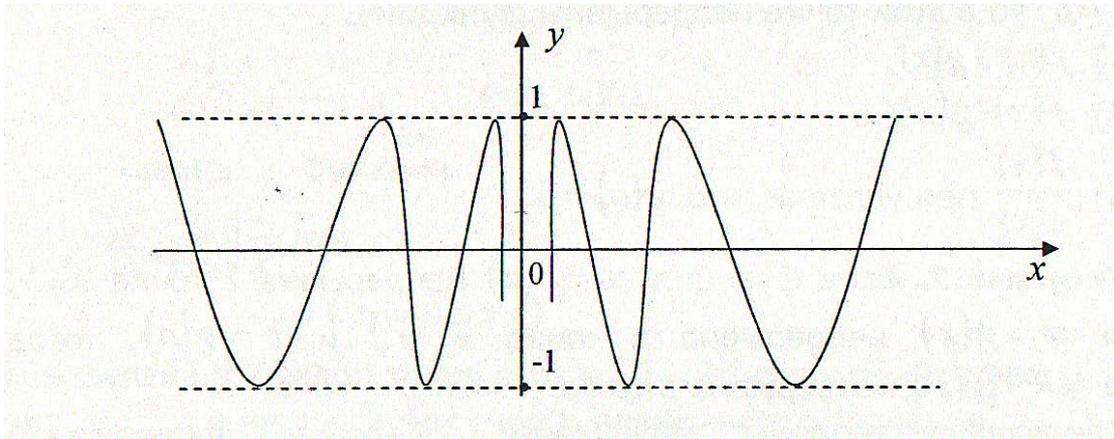


Рисунок 3.3.1 – График функции $y = \sin \frac{1}{x}$.

Пример 3.3.3. Функция

$$y = \begin{cases} 1 & \text{при } x < 2, \\ 3 & \text{при } x \geq 2 \end{cases}$$

разрывна (см. рис. 3.3.2) в точке $x = 2$.

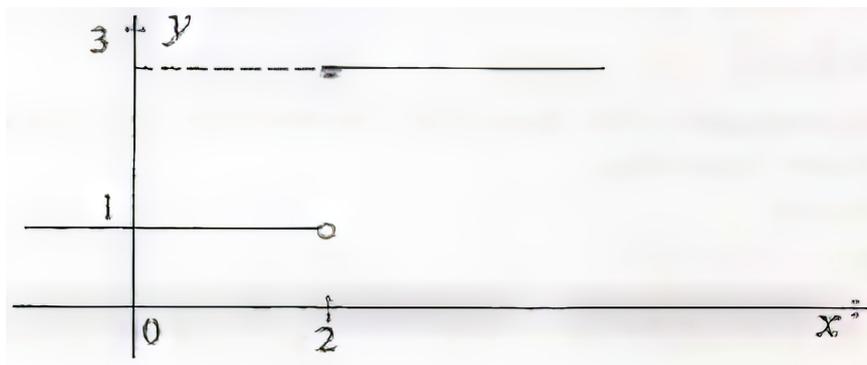


Рисунок 3.3.2 – График функции, разрывной в точке $x = 2$

Определение 3.3.3. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной* в интервале (α, β) , если она непрерывна в каждой точке $a \in (\alpha, \beta)$. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной на отрезке $[\alpha, \beta]$, если она непрерывна в интервале (α, β) , непрерывна в точке α справа и в точке β слева.

Теорема 3.3.1. Простейшие элементарные функции (x^n , $\sin x$, $\cos x$, $\ln x$, e^x и др.) непрерывны в своей области определения.

Теорема 3.3.2. Если функция $y = f(x)$ и $y = g(x)$ непрерывны в точке $x = a$, то в этой точке непрерывны функции:

- 1) $f(x) + g(x)$;
- 2) $f(x) \cdot g(x)$.

§ 3.4. Определение производной, ее физический и геометрический смысл

Этот и последующие параграфы 3.5 – 3.9 посвящены производным и дифференциалам. Как уже говорилось выше, при первоначальном знакомстве с книгой всю эту главу можно пропустить. Но, если в тексте далее будет встречаться термин дифференцируемая функция, то ни в коем случае не следует пугаться и паниковать и, если очень нужно, то представлять себе такую функцию, как функцию, у которой в каждой точке графика есть касательная. При этом на вычисление производных можно вообще не обращать внимание, поверив на слово авторам книги, что все подсчитано правильно.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x = a$. Предположим, что в процессе изменения переменная x после значения $x = a$ приняла новое значение $x = x_1$. Обозначим $\Delta x = x_1 - a$ и будем называть величину Δx приращением аргумента, а величину $\Delta y = f(x_1) - f(a)$ приращением функции. Тогда $x_1 = a + \Delta x$, $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$.

Определение 3.4.1. Если существует конечный предел отношения приращения функции Δy к вызвавшему его приращению аргумента Δx при $\Delta x \rightarrow 0$, то этот предел называется *производной* функции $y = f(x)$ в точке $x = a$ и обозначается: $y'(a), f'(a)$ или $\frac{df(a)}{dx}$. Таким образом,

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

или

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

Рассмотрим физический смысл производной. Пусть точка движется прямолинейно и $S(t)$ – путь, пройденный точкой за время t , тогда $V(t)$ – мгновенная скорость точки в момент времени $t = t_0$, определяемая как предел средней скорости:

$$V_{\text{ср.}} = \frac{\Delta S(t)}{\Delta t} = \frac{S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)}{\Delta t}$$

при $\Delta t \rightarrow 0$ равна: $V(t) = S'(t)$. Придавая величине $S(t)$ различный физический смысл, получим, что $S'(t)$ – это скорость изменения $S(t)$.

Рассмотрим геометрический смысл производной. Для этого (см. рис. 3.4.1.) отметим на графике функции $y = f(x)$ точки $M(a, f(a)), N(a + \Delta x, f(a + \Delta x))$, и будем называть прямую MN *секущей*. При изменении величины Δx точка N станет двигаться по графику, а секущая MN будет, меняя свое положение, поворачиваться относительно точки M , переходя в касательную к графику функции в точке M .

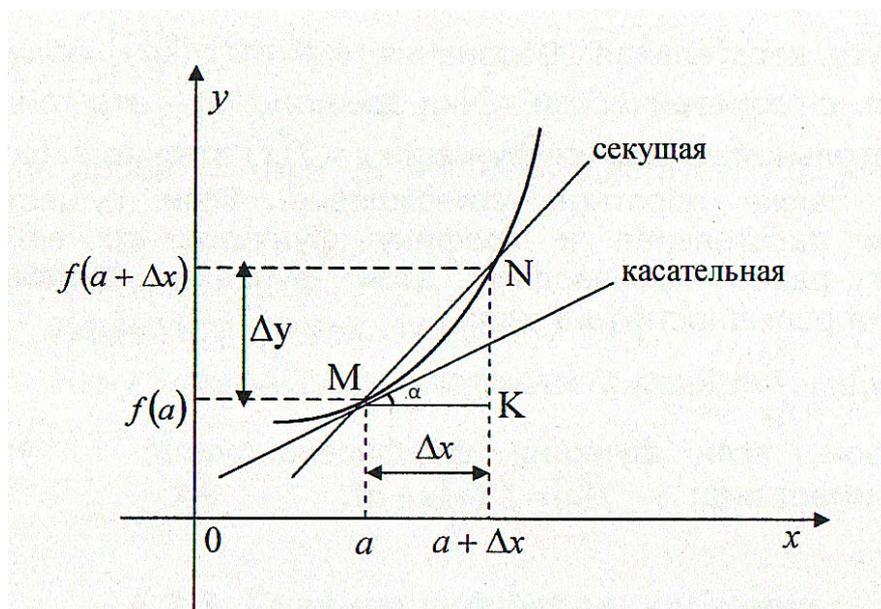


Рисунок 3.4.1 – Изображение касательной, секущей и угла α .

Определение 3.4.2. Если существует угол $\angle\alpha$ – предел изменения величины угла $\angle NMK$ при $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \angle NMK = \angle\alpha,$$

то прямая, проходящая через точку M и образующая с осью Ox угол α (см. рис. 3.4.1), называется *касательной к графику функции* $y = f(x)$ в точке M .

Таким образом, касательная к графику – это предельное положение секущей, когда $\Delta x \rightarrow 0$.

Можно доказать, что если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x = a$, то в точке $M(a, f(a))$ существует касательная к графику этой функции. Верно также и обратное утверждение. Если существует не вертикальная касательная к графику функции, то ее угловой коэффициент равен производной этой функции:

$$f'(a) = \operatorname{tg} \alpha.$$

Таким образом, если функция дифференцируема, то уравнение касательной имеет вид:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

Отметим, что множество дифференцируемых функций является частью множества непрерывных, но с ним не совпадает. Можно доказать, что если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x = a$, то она и непрерывна в этой точке. Но не всякая непрерывная функция дифференцируема. Так, например, функция $y = |x|$ непрерывна на всей оси, но не дифференцируема в точке $a = 0$, поскольку в точке $(0, 0)$ не существует касательной к графику этой функции.

Задание

1. Нарисуйте график функции $y = |x|$.
2. Визуально проверьте, что в точке $(0, 0)$ не существует касательной к графику функции $y = |x|$.

§ 3.5. Основные правила и формулы дифференцирования

Рассмотрим некоторые основные правила дифференцирования. Этому посвящены первые три теоремы параграфа.

Теорема 3.5.1. Если $y = C$, то $y' = 0$.

Доказательство. Выберем произвольную точку $x = a$. По условию в этой точке $y(a) = C$. Дадим аргументу приращение Δx . Так как $y(a + \Delta x) = C$, то $\Delta y = y(a + \Delta x) - y(a) = C - C = 0$ и, следовательно

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0.$$

Теорема 3.5.2. Если функция $u(x)$ дифференцируема и a – константа, то $\{a u(x)\}' = a u'(x)$.

Теорема 3.5.3. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы, тогда $\{u(x) + v(x)\}' = u'(x) + v'(x)$.

Теперь рассмотрим таблицу производных (или по-другому *формулы дифференцирования*) некоторых основных элементарных функций.

Теорема 3.5.4. Пусть $y = x^a$, где a – любое действительное число, тогда $y' = ax^{a-1}$.

Доказательство. Рассуждение приведем для частного случая $a = 2$, то есть для функции $y = x^2$. Дадим аргументу x приращение Δx , тогда функция $y(x)$ получит приращение:

$$\Delta y(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = (x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2) - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$$

и, следовательно,

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

Рассмотрим примеры.

Пример 3.5.1. Дано: $y = x$. Найти y' .

Решение. По условию $y = x$, то есть $y = x^1$. Следовательно, по теореме 3.5.1 получаем: $y' = 1 \times x^{1-1} = x^0 = 1$

Пример 3.5.2. Дано $y = \frac{1}{x}$. Найти y' .

Решение. Так как $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$, то по теореме 3.5.1:

$$y' = (-1) \times x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

Пример 3.5.3. Дано $y = \sqrt{x}$. Найти y' .

Решение. Так как $y = \sqrt{x} = x^{1/2}$, то по теореме 3.5.1:

$$y' = \frac{1}{2} \times x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Теорема 3.5.5. Справедливы следующие формулы:

1) $(\sin x)' = \cos x$;

2) $(\cos x)' = -\sin x$;

3) $(e^x)' = e^x$;

4) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$;

5) $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

Формулы дифференцирования, приведенные в теоремах 3.5.1 и 3.5.2, и правила дифференцирования, сформулированные в теоремах 3.5.3 – 3.5.5, следует знать наизусть.

Теперь мы рассмотрим несколько примеров применения правил и формул дифференцирования, содержащихся в приведённых выше теоремах, для вычисления производных функций, составленных из элементарных функций.

Пример 3.5.4. Найти $(2x^3 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 1)$.

Решение.

$$\left(2x^3 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 1\right)' = (2x^3)' + \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)' + (1)'$$

Так как

$$(2x^3)' = 2(x^3)' = 2 \times 3 x^{3-1} = 6 x^2;$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)' = \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)' = -\frac{1}{3} x^{-\frac{1}{3}-1} = -\frac{1}{3} x^{-\frac{4}{3}} = -\frac{1}{3x^{\frac{4}{3}}} = -\frac{1}{3x\sqrt[3]{x}};$$

и $(1)' = 0$, то:

$$\left(2x^3 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 1\right)' = 6x^2 - \frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}.$$

Пример 3.5.5. Найти $f'(\frac{\pi}{4})$, если $f(x) = 3 - 2 \sin x + 4 \cos x$.

Решение. По теоремам 3.5.1 и 3.5.5 получаем:

$$f'(x) = 0 - 2 \cos x - 4 \sin x,$$

откуда

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2 \cos \frac{\pi}{4} - 4 \sin \frac{\pi}{4} = -2 \frac{\sqrt{2}}{2} - 4 \frac{\sqrt{2}}{2} = -3\sqrt{2}$$

В некоторых случаях независимая переменная обозначается не буквой x , а какой-либо другой. Например, пройденный путь S – это функция времени t , т.е. $S = S(t)$; стоимость проданного товара N – это функция массы m , т.е. $N = N(m)$.

Задание. Найдите производные функций:

1. $5 - 3x^2$;

$$2. \frac{8}{\sqrt[4]{x}} - 5 \ln x;$$

$$3. 2 \operatorname{arctg} x + 4 \frac{1}{\sqrt{x}};$$

$$4. 7e^x + 3 \cos x - \sqrt{2}.$$

$$\text{Ответ: } 1) -6x; \quad 2) -\frac{2}{x^4\sqrt{x}} - \frac{5}{x}; \quad 3) \frac{2}{1+x^2} - \frac{2}{x\sqrt{x}}; \quad 4) 7e^x - \sin x.$$

§ 3.6. Неопределённый интеграл

Основным понятием интегрального исчисления является *интеграл* (неопределённый и определённый). Это понятие используется при вычислении площадей, объемов и других встречающихся в приложениях величин, которые возникают в различных процессах "суммирования". Знак \int – это растянутая в вертикальном направлении латинская буква S, первая буква в латинском слове "sum" (сумма). Многие обозначения, относящиеся к понятию интеграла, были впервые введены еще Лейбницем, и в том или ином виде сохранились до наших дней.

Пусть функция $y = f(x)$ задана и непрерывна на интервале (a, b) .

Определение 3.6.1 Функция $F(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$ на интервале (a, b) , если

$$F'(x) = f(x)$$

для всех $x \in (a, b)$.

Из этого определения следует, что и всякая функция $F(x) + C$, где C – произвольная постоянная, также является первообразной функции $f(x)$.

Пример 3.6.1. Пусть $f(x) = 3x^2$ и $(a, b) = (-\infty, +\infty)$. Тогда первообразными этой функции на интервале $(-\infty, +\infty)$ являются, например:

а) $F(x) = x^3$;

б) $F(x) = x^3 + 2$;

в) $F(x) = x^3 - 10$.

Определение 3.6.2. *Неопределённым интегралом* функции $f(x)$ называется множество всех ее первообразных. Это множество обозначается символом:

$$\int f(x) dx$$

Теорема 3.6.1. Если функция $F(x)$ является на интервале (a, b) первообразной функции $f(x)$, то множество всех первообразных функции $f(x)$ на этом интервале имеет вид:

$$F(x) + C,$$

где C – произвольная постоянная.

Если известна какая-либо первообразная $F(x)$ функции $f(x)$, то по теореме 3.6.1 получаем равенство:

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

где C – произвольная постоянная.

Операция нахождения первообразной называется *интегрированием*. Интегрирование является операцией, в известном смысле обратной дифференцированию. Функция называется *интегрируемой*, если у неё есть первообразная.

Во всех справочниках по высшей математике приводятся таблицы первообразных наиболее часто встречающихся функций. Мы ограничимся первообразными только некоторых из этих функций.

Таблица неопределённых интегралов.

$$1) \int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1$$

$$2) \int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$3) \int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$4) \int e^x dx = e^x + C;$$

$$5) \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C;$$

$$6) \int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C.$$

Рассмотрим некоторые свойства неопределённых интегралов.

Свойство 1. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int cf(x) dx = c \int f(x) dx$$

Свойство 2. Неопределённый интеграл от алгебраической суммы функций равен сумме интегралов от этих функций:

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

Доказательство этих формул совсем просто: надо продифференцировать правую часть каждого из этих соотношений и убедиться, что результат дифференцирования совпадает с подынтегральной функцией слева.

Пример 3.6.2. Найти интеграл

$$\int [4x^3 + 2x - 3] dx.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \int [4x^3 + 2x - 3] dx &= \int 4x^3 dx + \int 2x dx - \int 3 dx = \\ &= 4 \int x^3 dx + 2 \int x dx - 3 \int dx = x^4 + x^2 - 3x + C. \end{aligned}$$

Пример 3.6.3. Найти интеграл

$$\int \left[2 \sin x - 5 \cos x + \frac{4}{x} - \frac{3}{1+x^2} \right] dx.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \int \left[2 \sin x - 5 \cos x + \frac{4}{x} - \frac{3}{1+x^2} \right] dx &= 2 \int \sin x dx - 5 \int \cos x dx + 4 \int \frac{1}{x} dx - \\ &- 3 \int \frac{1}{1+x^2} dx = -2 \cos x - 5 \sin x + 4 \ln |x| - 3 \operatorname{arctg} x + C \end{aligned}$$

Пример 3.6.4. Найти интеграл

$$\int \left[-\frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2} - 5 \right] dx.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \int \left[-\frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2} - 5 \right] dx &= -2 \int x^{-3} dx - \int x^{-2} dx - 5 \int dx = \\ &= x^{-2} + x^{-1} - 5x + C = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - 5x + C \end{aligned}$$

§ 3.7. Определённый интеграл и его геометрический смысл

Пусть на промежутке $[a, b]$ дана неотрицательная непрерывная функция $f(x)$ (см. рис. 3.7.1). Рассмотрим фигуру, ограниченную графиком этой функции, осью Ox и прямыми $x = a, x = b$. Такая фигура называется *криволинейной трапецией, ограниченной графиком функции $f(x)$* .

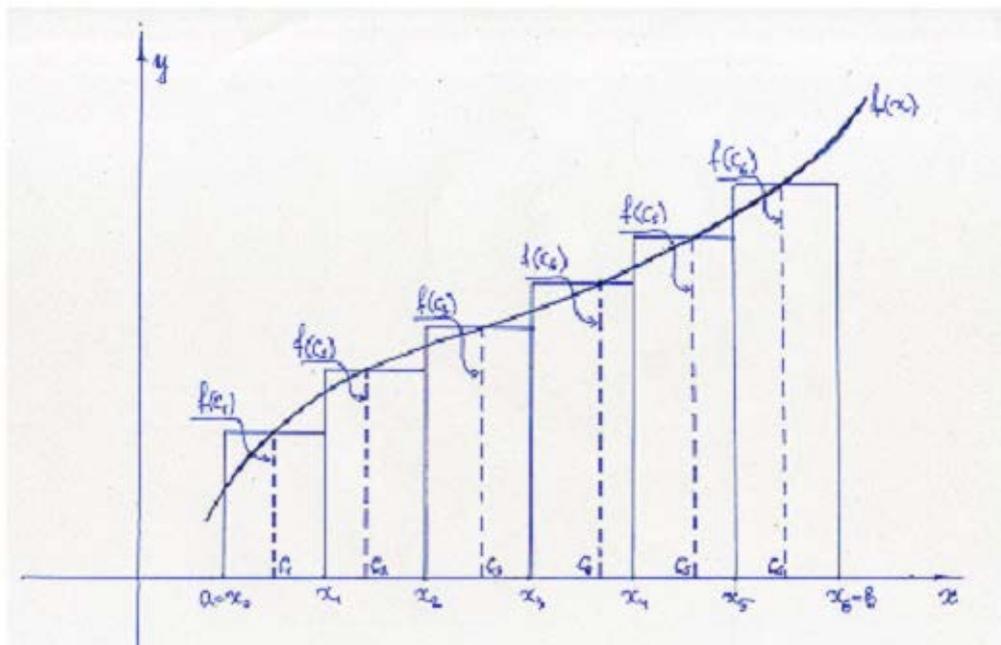


Рисунок 3.7.1 – Случай $n = 6$. Криволинейная трапеция и ступенчатая фигура

Требуется найти площадь S этой трапеции. Для этого разобьем промежуток $[a, b]$ произвольным образом точками $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ на n частей, считая $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ и проведем через них вертикальные прямые

$x = x_k$, где $k = 1, 2, \dots, n$. Тогда рассматриваемая криволинейная трапеция разобьется на n частичных трапеций, построенных на частичных промежутках $[x_{k-1}, x_k]$, ($k = 1, 2, \dots, n$). Выберем на каждом из частичных промежутков $[x_{k-1}, x_k]$ по произвольной точке c_k , вычислим значения $f(c_k)$ функции $f(x)$ в этих точках и введем обозначения $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Легко видеть, что каждое из произведений $f(c_1)\Delta x_1, f(c_2)\Delta x_2, \dots, f(c_n)\Delta x_n$ равно площади прямоугольника, опирающегося, соответственно, на частичные промежутки $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ и имеющего высоты $f(c_1), f(c_2), \dots, f(c_n)$. Сумма

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(c_k)\Delta x_k$$

равна площади ступенчатой (заштрихованной) фигуры, составленной из указанных прямоугольников. При неограниченном увеличении числа точек дробления промежутка $[a, b]$ на частичные промежутки и притом так, чтобы длина самого большого частичного промежутка стремилась к нулю, естественно считать, что величина S_n будет стремиться к S независимо от способа разбиения промежутка $[a, b]$ на частичные промежутки и от выбора точек c_1, c_2, \dots, c_n так, что искомая площадь криволинейной трапеции равна пределу

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(c_k)\Delta x_k$$

Решение многих практических задач (определение массы стержня переменной плотности, определение работы силы при прямолинейном движении точки и др.) сводится к вычислению таких пределов. Это обусловило введение понятия *определенного интеграла*, одного из фундаментальных понятий математики. Перейдем к его определению, отвлекаясь от конкретного содержания задачи.

Пусть на конечном замкнутом промежутке $[a, b]$, где $a < b$, определена ограниченная функция $f(x)$. Проведем пять операций:

1) разобьем промежутки $[a, b]$ произвольным образом на n частей точками $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, следующими друг за другом так, что $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ (для удобства записи точки a и b обозначены соответственно через x_0 и x_n и введем обозначения $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ ($k = 1, 2, \dots, n$). Назовем *рангом (шагом) дробления* число $\lambda = \max_k \Delta x_k$;

2) в каждом частичном промежутке $[x_{k-1}, x_k]$, ($k = 1, 2, \dots, n$) выберем произвольно по точке c_k ;

3) вычислим значения $f(c_1), f(c_2), \dots, f(c_n)$ функции $f(x)$ в выбранных точках;

4) составим сумму:

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(c_k)\Delta x_k,$$

которую будем называть *интегральной суммой* функции $f(x)$ на промежутке $[a, b]$, отвечающей данному разбиению промежутка $[a, b]$ на n частей и данному выбору точек c_k ;

5) вычислим предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty, \lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k$$

Если существует конечный предел, который не зависит ни от способа разбиения промежутка $[a, b]$ на части, ни от выбора промежуточных точек \bar{x}_k , то он называется *определенным интегралом от функции $f(x)$ на промежутке $[a, b]$* и обозначается символом

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Таким образом, по определению

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty, \lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k$$

В обозначении определенного интеграла приняты следующие наименования: $f(x)$ – *подынтегральная функция*, $f(x)dx$ – *подынтегральное выражение*, x – *переменная интегрирования*, a – *нижний предел интегрирования*, b – *верхний предел интегрирования*. Промежуток $[a, b]$ называется *промежутком интегрирования*. Если для функции $f(x)$ существует интеграл по промежутку $[a, b]$, то ее называют *интегрируемой на этом промежутке*.

Теорема 3.7.1. (Теорема существования определенного интеграла). Если функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a, b]$ и непрерывна на нем всюду, кроме быть может конечного числа точек, то она интегрируема на этом отрезке.

Чтобы дать геометрическую интерпретацию определенному интегралу от непрерывной функции, принимающей положительные и отрицательные значения, достаточно площадям криволинейных трапеций, ограничиваемых графиком функции, приписывать знак, а именно: положительными считать площади тех трапеций, которые расположены над осью Ox , а отрицательными – под осью Ox .

Геометрический смысл определенного интеграла теперь можно сформулировать следующим образом: определенный интеграл от непрерывной функции равен алгебраической сумме площадей криволинейных трапеций, ограниченных графиком этой функции, осью абсцисс, а также прямыми $x = a$ и $x = b$, причем площади трапеций, расположенных над осью абсцисс, берутся со знаком плюс, а площади трапеций, расположенных под осью абсцисс, – со знаком минус.

Перейдем теперь к рассмотрению основных свойств определенного интеграла.

Свойство 1. Если функция $f(x)$ интегрируема на промежутке $[a, b]$ и c – некоторая постоянная, то функция $cf(x)$ также интегрируема на $[a, b]$, причем

$$\int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$$

Свойство 2. Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ интегрируемы на промежутке $[a, b]$, то их сумма $f_1(x) + f_2(x)$ также интегрируема на $[a, b]$, причем

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)] dx = \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx$$

Свойство 3. Если $a < c < b$ и функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то имеет место равенство:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Рассмотрим основной способ вычисления определенного интеграла, основанный на связи определенного интеграла от данной функции с ее неопределенным интегралом.

Теорема. (Основная теорема интегрального исчисления). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $F(x)$ – ее любая первообразная на этом отрезке, то имеет место равенство:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Эта формула называется *формулой Ньютона-Лейбница*.

Для удобства при вычислении определённого интеграла вводится обозначение

$$F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$$

Учитывая это, формулу Ньютона-Лейбница можно записать в виде:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Пример 3.7.1. Вычислить

$$\int_2^6 \frac{1}{x} dx$$

Решение. В этом примере подынтегральная функция $f(x) = \frac{1}{x}$. Одной из ее первообразных на отрезке $[2, 6]$ будет функция $F(x) = \ln x$. Тогда, по формуле Ньютона – Лейбница имеем:

$$\int_2^6 \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_2^6 = \ln 6 - \ln 2 = \ln \frac{6}{2} = \ln 3$$

Пример 3.7.2. Вычислить $\int_0^1 x^2 dx$

Решение. Функция $\frac{x^3}{3}$ является первообразной для x^2 на промежутке $[0, 1]$.

Следовательно, по формуле Ньютона – Лейбница получаем:

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{0}{3} = \frac{1}{3}$$

Пример 3.7.3. Вычислить $\int_0^\pi \cos x dx$

Решение. Функция $\sin x$ является первообразной для функции $\cos x$ на отрезке $[0, \pi]$. Тогда, по формуле Ньютона – Лейбница получаем:

$$\int_0^\pi \cos x dx = \sin x \Big|_0^\pi = \sin \pi - \sin 0 = 0 - 0 = 0$$

Пример 3.7.4. Вычислить $\int_{-1}^{+1} \frac{1}{1+x^2} dx$

Решение. Функция $\operatorname{arctg} x$ является первообразной для функции $1 / (1 + x^2)$ на отрезке $[-1, +1]$. Таким образом, по формуле Ньютона-Лейбница получаем:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x \Big|_{-1}^{+1} = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} (-1) = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

§ 3.8. Несобственный интеграл по бесконечному промежутку

Определение определённого интеграл (и, следовательно, важная формула Ньютона-Лейбница) существенным образом опиралось на то, что промежуток интегрирования $[a, b]$ был конечен. Но в главе 6 нам понадобится интегрирование по бесконечному промежутку. В настоящем параграфе разъясняется как это можно делать.

Пусть функция $f(x)$ ограничена на промежутке $[a, +\infty)$ и непрерывна на нём всюду, кроме конечного числа точек. Предел $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$ называется *несобственным интегралом от функции $f(x)$ по промежутку $[a, +\infty)$* и обозначается $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ Таким образом, по определению:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

Если предел существует и конечен, то говорят, что несобственный интеграл *сходится*, в противном случае он называется *расходящимся*.

Аналогично определяется несобственный интеграл по промежутку $(-\infty, b]$:

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$

Несобственный интеграл по промежутку $(-\infty, +\infty)$ определяется формулой:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx, \quad (3.8.1)$$

где c – произвольное число. В этом случае интеграл, стоящий слева, называется *сходящимся* только лишь в случае, когда сходятся оба интеграла справа. Так как подынтегральная функция ограничена на промежутке $(-\infty, +\infty)$ и непрерывна на нём всюду, кроме конечного числа точек, то можно доказать, что интеграл не

зависит от выбора точки c и можно полагать в (3.8.1) $c = 0$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{+\infty} f(x) dx$$

Теорема 3.8.1. Пусть функция $f(x)$ ограничена на промежутке $(-\infty, +\infty)$ и непрерывна на нем всюду, кроме конечного числа точек. Тогда для любых $a, b \in (-\infty, +\infty)$ выполняется равенство:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^b f(x) dx + \int_b^{+\infty} f(x) dx. \quad (3.8.2)$$

Отметим, что если непрерывная функция $f(x) \geq 0$ на промежутке $[a, +\infty)$ и интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ сходится, то он численно равен площади бесконечной криволинейной трапеции (см. рис. 3.8.1).



Рисунок 3.8.1 – Фигура, ограниченная сверху графиком функции $y = f(x)$, справа прямой $x = a$ и снизу осью Ox – это пример бесконечной криволинейной трапеции

Пример 3.8.1. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$1) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}; \quad 2) \int_{-\infty}^0 \cos x dx; \quad 3) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}; \quad 4) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$

Решение:

$$1) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b x^{-2} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} (-x^{-1})|_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{b} + 1\right) = 0 + 1 = 1, \text{ интеграл сходится.}$$

$$2) \int_{-\infty}^0 \cos x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \cos x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \sin x |_a^0 = \lim_{a \rightarrow -\infty} (0 - \sin a) = - \lim_{a \rightarrow -\infty} \sin a \text{ интеграл расходится, так как при } a \rightarrow -\infty \text{ предел } \lim_{a \rightarrow -\infty} \sin a \text{ не существует.}$$

$$3) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln x |_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\ln b - \ln 1) = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\ln b - 0) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln b = +\infty, \text{ интеграл расходится.}$$

$$4) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx =$$

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \arctg x \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\arctg b - \arctg 0) = \arctg(+\infty) = \frac{\pi}{2}. \text{ Следовательно,}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi.$$

§ 3.9. Ряды

Прежде чем приступать к формальным определениям, рассмотрим один геометрический пример. Возьмем (см. рис. 3.9.1) квадратный лист бумаги формата 1 см × 1 см. Его площадь, очевидно, равна 1 см.² Представим его в виде объединения частей (см. рис. 3.9.1): половина, четверть, осьмушка и т. д.

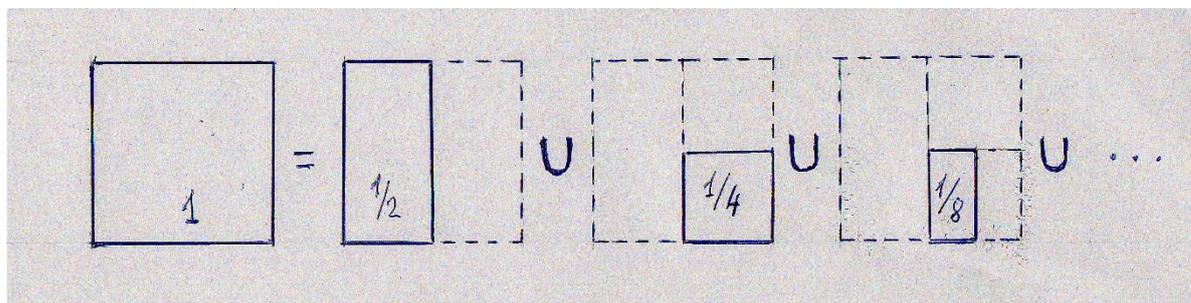


Рисунок 3.9.1 – Представление квадрата в виде объединения его частей, в каждой из которых указана ее площадь

Теперь сравним площади правой и левой частей. Они должны быть равны. Площадь левой части по условию равна единице, в то время как для того, чтобы найти площадь правой части, нужно сложить бесконечное количество чисел:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots \quad (3.9.1)$$

Но это невозможно осуществить, т. к. наша жизнь ограничена по времени. То есть выражение (3.9.1) лишено смысла. Получили логическое несоответствие. Выражение, стоящее в левой части равенства (3.9.2), имеет смысл, а правой – нет.

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots \quad (3.9.2)$$

Чтобы разрешить это логическое противоречие, в общем случае поступают следующим образом.

Рассмотрим числовую последовательность: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ (в нашем случае это числа: $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$).

Числовым рядом называется выражение вида:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n, \dots$$

или в сокращенной форме записи:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

т. е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n, \dots \quad (3.9.3)$$

В нашем примере это будет равенство:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

Перейдем к определению суммы ряда (3.9.3). Обозначим:

$$S_1 = a_1,$$

$$S_2 = a_1 + a_2,$$

.....

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n,$$

.....

Числа $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ называются *частичными суммами ряда* (3.9.3).

Определение 3.9.1. Если существует конечный предел частичных сумм:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n,$$

то ряд (3.9.3) называется *сходящимся*, а число S – его *суммой*.

В нашем случае:

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

Тогда (см. пример 3.1.2):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) = 1$$

Таким образом, мы заменили процесс бесконечного суммирования конечной по времени операцией вычисления предела числовой последовательности.

В теории рядов изучаются не только числовые ряды, но и функциональные.

Частным случаем функциональных рядов являются степенные ряды.

Степенным рядом называется выражение вида:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x^1 + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots + c_n x^n + \dots, \quad (3.9.4)$$

где $c_0, c_1, c_2, c_3, \dots, c_n, \dots$ – числа. Выберем произвольное число x_0 и подставим в формальное (т. е. пока ещё не имеющее реального смысла) выражение (3.9.4). Получим числовой ряд:

$$c_0 + c_1 x_0^1 + c_2 x_0^2 + c_3 x_0^3 + \dots + c_n x_0^n + \dots. \quad (3.9.5)$$

Если ряд (3.9.4) сходится в точке x_0 , то обозначим его сумму через $S(x_0)$.

Множество D_0 всех точек x_0 , в которых числовой ряд (3.9.5) сходится, называется *областью сходимости степенного ряда* (3.9.4). Таким образом, на множестве D_0 мы определили функцию:

$$S(x) = c_0 + c_1 x^1 + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots + c_n x^n + \dots,$$

которую будем называть *суммой степенного ряда* (3.9.4).

Теорема 3.9.1. Если интервал $(-R, R)$ лежит в области сходимости ряда (3.9.4), то в этом интервале степенной ряд можно почленно дифференцировать и при этом будет выполняться равенство:

$$\begin{aligned} \{S(x)\}' &= \{c_0\}' + \{c_1 x^1\}' + \{c_2 x^2\}' + \dots + \{c_n x^n\}' + \dots = \\ &= c_1 + 2c_2 x + \dots + n c_n x^{n-1} + \dots \end{aligned}$$

Теорема 3.9.2. Для любого $x \in (-\infty, +\infty)$ выполняется равенство:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + \dots, \quad (3.9.6)$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}x^{2n-1} + \dots \quad (3.9.7)$$

где обозначено $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$ ($n!$ – читается эн-факториал).

Эту теорему мы примем без доказательства, но проиллюстрируем справедливость второй формулы (3.9.7) числовым примером. Из школьного курса тригонометрии известно, что $\sin \frac{\pi}{6}$ (или что то же самое $\sin 30^\circ$) равен $\frac{1}{2}$.

Подставим число $\frac{\pi}{6}$ в формулу (3.9.7). Получим:

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^5 - \frac{1}{7!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^7 + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{2n-1} + \dots \quad (3.9.8)$$

Возьмем приближенное значение числа $\pi \approx 3,141593$. Тогда $\frac{\pi}{6} \approx 0,523599$.

Подставим полученное приближенное значение числа $\frac{\pi}{6}$ в правую часть ряда (3.9.7):

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^5 - \frac{1}{7!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^7 + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{2n-1} + \dots \approx \\ \approx 0,523599 - \frac{1}{3!}0,523599^3 + \frac{1}{5!}0,523599^5 - \frac{1}{7!}0,523599^7 + \Delta, \end{aligned}$$

где:

$$\frac{1}{3!}0,523599^3 = \frac{1}{6}0,14354776178 = 0,02392462696 \approx 0,023925$$

$$\frac{1}{5!}0,523599^5 = \frac{1}{120}0,03935446766 = 0,00032795389 \approx 0,000328$$

$$\frac{1}{7!}0,523599^7 = \frac{1}{5040}0,01078926 = 0,00000214072 \approx 0,000002$$

Суммируя, получаем:

$$\frac{\pi}{6} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^5 - \frac{1}{7!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^7 + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{2n-1} + \dots \approx$$

$$\approx 0,523599 - 0,023925 + 0,000328 - 0,000002 + \dots = 0,500000 + \dots = 0,5 + \dots$$

То есть

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \approx 0,5 + \dots$$

Приближенный характер полученного равенства объясняется двумя причинами. Во-первых, вместо числа $\frac{\pi}{6}$ мы взяли его приближенное значение; во-вторых, при подсчете правой части (3.9.8) были учтены только первые четыре слагаемые с округлением. Вычисление отброшенного пятого слагаемого $\frac{1}{9!}0,523599^9 = 8,15128808 \times 10^{-9} < 10^{-8}$ наводит на мысль, что отброшенные слагаемые по мере увеличения номера стремительно убывают. И это

действительно так. Существующие математические методы позволяют оценить отброшенную часть ряда. На самом деле

$$|\Delta| < 0.00000001.$$

Замечание. Разложения, аналогичные приведенным в теореме 3.9.2, установлены для многих функций, в том числе для основных элементарных. С помощью такого рода разложений и составляют знакомые нам таблицы значений синусов, косинусов, логарифмов и др. Такие разложения встроены в компьютеры и инженерные калькуляторы.

ГЛАВА 4. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

Теорию вероятностей обычно называют «наукой о случайном». С вопросами вероятностного характера человечество столкнулось еще в глубокой древности: это были азартные игры, страхование, обработка статистических данных. Так, например, игра в кости была известна еще в древнем Египте, а торговое страхование (точнее соглашение о совместном погашении убытков вследствие ограбления, кражи или пропажи) упоминается [75, с. 40] уже в эпоху царя Хаммурапи (ок. 1790 – 1753 до н. э.). В странах Персидского залива, в Финикии и Древней Греции практиковалось морское страхование от кораблекрушений и пиратов и др. Своего рода страхованием занимались даже чумаки (XIII – XVII века) [75, с. 40]. Что же касается начал статистики, то, как пишет Шейнин О. Б. в [89, с. 39]: «Ветхий завет сообщает об исчислении всего общества сынов израилевых, а точнее о подсчете всех, годных для войны. ... Попытка оценить население Китая была предпринята примерно в 2238 г. до н. э., а перепись касты воинов имела место в Египте не позже, чем в XVI в. до н. э.»

Но тогда никто не воспринимал все перечисленные вопросы как математические задачи. Азартные игры древних цивилизаций (Индия, Египет, Античный мир) только-только оторвались от ритуала гадания, страховое дело строилось на опыте и интуиции, а статистические данные поначалу просто принимались к сведению.

Занимались проблемой случайного и философы (Демокрит, Эпикур, Лукреций Кар, Аристотель, философы Индии, Конфуций [89, с. 14], Маймонид [89, с. 22], Фома Аквинский и др. [56, с. 42 – 43]), но дальше общих (хотя и тонких) умозаключений дело не продвинулось.

Как пишет Гнеденко Б. В. [24, с. 366]: «Сейчас уже трудно установить, кто впервые поставил вопрос, пусть и в несовершенной форме, о количественном измерении возможности появления случайного события. Ясно одно, что мало-мальски удовлетворительный ответ на этот вопрос потребовал значительных усилий ряда поколений выдающихся исследователей».

Главное, на наш взгляд, состоит в том, что потребовался иной, более высокий уровень абстрактного мышления, в рамках которого можно было бы ставить и решать вопрос о возможности реализации случайного.

В отличие от других математических дисциплин (алгебры, аналитической геометрии, математического анализа) у теории вероятностей не было предыстории, уходящей в глубь веков, а были лишь перечисленные выше предпосылки.

И вот к XV веку уже известными нам Л. Пачоли, Н. Тартальей и особенно Дж. Кардано решаются ряд задач, возникавших в практике азартных игр. Затем, в XVI и в XVII веках исследования в области азартных игр были продолжены в трудах Галилея, Паскаля, Ферма, Гюйгенса и др. Параллельно при этом в XVII веке начались обширные статистические исследования в Англии, что также потребовало каких-то математических рассуждений вероятностного характера.

Так что теория вероятностей возникла практически с нуля на протяжении двух-трех столетий и уже к 1713 году в сочинении Я. Бернулли появилось, как пишет Б. В. Гливенко [24, с. 387], понятие вероятности «... как числа, заключённого между 0 и 1 и равного отношению числа благоприятствующих событию шансов к числу всех возможных, ...хотя и в далеко не совершенной форме». И, что особенно важно, не только появилось, «но и широко использовалось». А в 1795 году Лаплас распространяет его (определение вероятности) на результаты экспериментов с конечным числом равновозможных исходов.

Так начиналась наука Теория Вероятностей. После этого, ввиду обширных приложений в вопросах демографии, биологии, статистической физике и многих других областях, она еще долгое время считалась чисто опытной наукой. Но к 1933 году А. Н. Колмогоровым (впоследствии академиком АН СССР) была создана общепринятая ныне аксиоматика теории вероятностей, что поставило теорию вероятностей в один ряд с другими математическими дисциплинами.

В наши дни теория вероятностей находит широкое применение во всех прикладных науках и, как мы убедимся в главе 8, даже в вопросах искусствознания.

§ 4.1. Случайные события. Основные понятия

В этом параграфе мы введем терминологию, которой будем пользоваться в дальнейшем. Эксперимент, в результате которого возможно наступление взаимно исключающих событий (например, при бросании монеты выпадение орла или решки), называется *случайным* или *стохастическим*. Важно подчеркнуть, что результат случайного эксперимента не может быть предсказан на основе применения законов естествознания.

Пусть производится некоторый стохастический эксперимент. Тогда:

1) всякое явление, которое может произойти или не произойти, называется *событием*;

2) событие называется *невозможным*, если оно не может произойти;

3) событие называется *достоверным*, если оно обязательно произойдёт;

4) события A и B называются *несовместными*, если они не могут произойти одновременно;

5) будем говорить, что события A_1, A_2, \dots, A_n образуют *полную группу*, если они попарно несовместны и одно из них (и только одно) обязательно произойдёт;

6) будем говорить, что событие A *благоприятствует* наступлению события B , если в результате наступления A произойдет событие B ; так, например, если при бросании игральной кости обозначить через A событие, состоящее в выпадении 4 очков, а через B – четного числа очков, то событие A благоприятствует наступлению события B ;

7) события A и B называются *равновероятными*, если при неограниченном повторении эксперимента нет основания полагать, что одно из них будет происходить чаще другого;

8) события A_1, A_2, \dots, A_n , образующие полную группу и равновозможные, называется *случаями, шансами* или *исходами*.

Приведенные выше формулировки не являются определениями в научном смысле. Это некая разновидность словаря. Действительно, говоря, что некоторые события A и B равновозможны, мы не можем на практике провести неограниченное количество испытаний. Мы можем это лишь предполагать, исходя из своего жизненного опыта и здравого смысла.

Или вот другой хрестоматийный пример, известный как «парадокс Бертрانا» и состоящий в следующем. При изучении теории вероятностей мы нередко будем сталкиваться с выражением, что некоторое действие было произведено «случайным образом». Казалось бы, что тут непонятного? Выбрать что-либо случайным образом означает выбрать так, чтобы ни у какого другого результата эксперимента не было никаких преимуществ перед другими результатами проводимого эксперимента. В связи с этим рассмотрим один парадокс, предложенный Жозефом Луи Бертраном (1822 – 1900) и названный впоследствии его именем.

Задача (Парадокс Бертрана, 1889 г.). В круге случайным образом проведена хорда. Какова вероятность, что ее длина меньше длины стороны правильного вписанного треугольника?

Все вроде бы тут ясно: есть круг, вписываем равносторонний треугольник, находим длину его стороны. Затем случайным образом проводим хорду и сравниваем ее длину с длиной стороны треугольника. Ну а дальше решаем (кто может, конечно) по правилам теории вероятностей поставленную задачу. Вроде бы для любого здравомыслящего человека здесь все ясно и понятно. К сожалению, все да не все. Задача имеет три разных решения с тремя разными ответами, и, что грустно, правильными. Оказывается, что выражение «случайным образом» в данной задаче нуждается в уточнении. С подробностями все желающие могут познакомиться в [77, с. 50] или в интернете, набрав в поисковике слова «Парадокс Бертрана». И, напоследок, успокоим наших читателей. У нас далее таких фокусов в тексте не будет, когда задача имеет несколько разных ответов, и все они верные.

§ 4.2. Классическое определение вероятности события

Рассмотрим **стохастический** эксперимент с конечным числом *исходов*, в результате которого может произойти некоторое событие A .

Определение 4.2.1. *Вероятностью* события A называется число, обозначаемое $P(A)$ и равное:

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где n – общее число случаев, а m – число случаев, благоприятствующих наступлению события A .

Еще раз подчеркнем, что случаи должны быть равновозможными и один из них и только один должен произойти в результате эксперимента.

Из определения следует, что:

$$0 \leq P(A) \leq 1. \quad (4.2.1)$$

Проиллюстрируем выполнение неравенств из (4.2.1). С этой целью рассмотрим следующие три примера.

Пример 4.2.1. В урне 8 белых шаров и 2 черных шара одинакового диаметра. Из урны, не глядя, случайным образом извлекают один шар. Какова вероятность, что он белый?

Решение. Обозначим через A событие, состоящее в том, что в результате опыта (вынимания шара) получили белый шар. В данной задаче общее число случаев $n = 8 + 2 = 10$, а число m случаев, благоприятствующих наступлению события A равно 8. Следовательно, по определению 5.2.1:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{8}{10} = 0,8 \in (0; 1).$$

Ответ: $P(A) = 0,8$.

Пример 4.2.2. В урне 10 белых шаров одинакового диаметра. Из урны, не глядя, случайным образом извлекают один шар. Какова вероятность, что он белый?

Решение. Обозначим через A событие, состоящее в том, что в результате опыта (вынимания шара) получили белый шар. В данной задаче общее число случаев $n = 10$, а число m случаев, благоприятствующих наступлению события A также равно 10. Следовательно, по определению 4.2.1:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{10}{10} = 1.$$

Ответ: $P(A) = 1$.

Пример 4.2.3. В урне 10 белых шаров одинакового диаметра. Из урны, не глядя, случайным образом извлекают один шар. Какова вероятность, что он черный?

Решение. Обозначим через A событие, состоящее в том, что в результате опыта (вынимания шара) получили черный шар. В данной задаче общее число случаев $n = 10$, а число m случаев, благоприятствующих наступлению события A также равно нулю. Следовательно, по определению 4.2.1:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{0}{10} = 0.$$

Ответ: $P(A) = 0$.

Рассуждения, проведенные в примерах 4.2.1 – 4.2.3, показывают, что для урн с шарами неравенство (4.2.1) выполняется. Можно показать, что оно выполняется и в случае произвольного эксперимента.

Символы для обозначения вероятности наступления события A по образцу $P(A)$ или $Pr(A)$ появились относительно недавно, учитывая, что вероятность изучалась веками. Это, как полагают (см., например, [77, с. 22]), связано с тем, что во многих европейских языках буква P является начальной буквой слова вероятность: *probability* – в английском, *probabilité* – во французском, *probabilità* – в итальянском, *probabilitas* – в латинском и т. д. Какой именно язык имел в виду Колмогоров, когда писал свою аксиоматику, науке неизвестно, но после его работ обозначение $P(A)$ стало общепринятым. Иногда, правда, в зарубежной литературе используется (см., например, формулы в [106, с. 10]), предложенное Феллером обозначение $Pr\{A\}$.

Теперь рассмотрим несколько задач на классическое определение вероятности. Секей [77, с. 10] пишет, что «по мнению Карла Пирсона, в математике нет другого такого раздела, в котором столь же легко допустить ошибку, как в теории вероятностей».

Следующая задача как раз и иллюстрирует этот тезис Пирсона. В 1846 году В. Я. Буняковский издал первый в России и, по выражению Б. В. Гнеденко [26, с.102], «стоявший на уровне науки того времени», учебник по теории вероятностей. В нем он приводит и разбирает неверное решение, данное в статье «Герб и решётка» (Croix et pile) 4-го тома «Энциклопедии» (Encyclopédie, v. 4, 1754) выдающимся энциклопедистом Даламбером в задаче о бросаниях монеты [98, с. 144].

Задача 4.2.1 (см. [8, с. 7]). Какова вероятность выпадения орла при двукратном бросании монеты?

Предлагаем вам самостоятельно решить эту задачу.

Ответ: $p = 3 / 4$.

Выше уже упоминалось, что одним из источников возникновения теории вероятностей являлись задачи, возникавшие в практике азартных игр. Как пишет Секей [77, с. 25 – 26]: «История азартных игр начинается с древнейших времен. Они получили настолько широкое распространение, что некоторые государства и религии считали своим долгом азартные игры запретить. Фридрих II, император Священной Римской империи, в 1232 г. запретил игру в кости. ... Луи IX, король Франции, в 1235 г. издал закон, по которому игровые кости нельзя было даже изготавливать. В еврейском Талмуде игроков считали ворами, преследовала игроков и христианская церковь.»

И далее [77, с. 12 – 13]: «Игра в кости была самой популярной азартной игрой до конца средних веков. Само слово «азарт» также относится к игре в кости, так как оно происходит от арабского слова «alzar», переводимого как «игральная кость». Карточные игры стали популярны в Европе лишь в XIV веке, в то время как игра в кости пользовалась успехом ещё в Древнем Египте во времена 1-й династии (1-я династия – это примерно XXX век до н. э.) и позднее в Греции, а также в Римской Империи. (Согласно греческой легенде, игру в кости предложил Паламед для развлечения греческих солдат, скучающих в ожидании битвы при Трое. Павсаний, писатель, живший во II веке, упоминает написанную в V веке до нашей эры картину Полигнота, на которой изображены Паламед и Ферсит, играющие в кости.)».

Задача 4.2.2. Брошена обычная игральная кость. Какова вероятность, что выпадет не менее пяти очков?

Решение. Обозначим через A событие, состоящее в том, что в результате опыта (броска игральной кости) выпало не менее пяти очков. В данной задаче общее число случаев $n = 6$, а число m случаев, благоприятствующих наступлению события A , равно 2, так как нас устраивает любой результат броска из числа: 5 или 6 очков. Следовательно, по определению 4.2.1:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Ответ: $p = \frac{1}{3}$.

Задача 4.2.3. Брошены две игральные кости. Какова вероятность, что сумма выпавших очков равна шести?

Ответ: $p = \frac{5}{36}$.

Как пишет Секей [1, с. 26], «среди современных азартных игр наиболее распространены, несомненно, карточные игры. ... В Европу они, видимо, попали через Венецию во время крестовых походов в XIII веке ... Согласно китайской энциклопедии XVII века игры, похожие на карточные, были известны в Китае уже в 1120 г. до н. э. ... Флорентийский указ 1376 г. запрещал карточную игру «наибби». Согласно рукописи 1377 г., хранящейся в Британском музее, приблизительно в это время карточные игры стали популярны в Швейцарии. ... С того времени число популярных карточных игр достигло нескольких сотен, но возросло также и число шулеров. Этот факт отражает знаменитая картина Караваджо «Карточные шулеры», написанная в 1593 г.»

Задача 4.2.4. Из колоды карт в 36 листов случайным образом вынимают две карты. Какова вероятность, что они обе – тузы?

Ответ: $p = \frac{1}{105}$.

Задание

1. Что вы знаете о творчестве Полигнота?
2. Кто такие Паламед (*Παλαμήδης*) и Ферсит (он же Терсит, точнее *Θερσίτης*)?
3. Кто такой Караваджо и чем же он так знаменит, что цитируется сюжет его картины, а не полицейские сводки?

§ 4.3. Статистическое определение вероятности события

Классическое определение вероятности события, к сожалению, не всегда применимо на практике. Например, вас интересует вероятность брака при производстве поршней для мотоциклетных двигателей или вероятность безаварийной работы холодильников в течение гарантийного срока, выпускаемых данным заводом. Во всех этих случаях у нас нет полной группы равновозможных событий. Однако можно ставить вопрос о том, что наудачу выбранный поршень исправен, а холодильник отработает гарантийный срок без ремонта. Для такого рода вероятностных вопросов используется статистическое определение вероятности события. В настоящем параграфе мы и рассмотрим это понятие.

Предположим, что в результате какого-либо стохастического эксперимента может произойти некоторое событие A . Будем предполагать, что этот эксперимент может быть неоднократно повторен. Например, бросание монеты (событие A – выпадение орла), игрального кубика (событие A – выпадение шести очков), выстрел из ружья по мишени (событие A – попадание в мишень), проверка поршня отделом технического контроля (событие A – поршень бракованный) и др.

Пусть произведено n испытаний, в результате которых обнаружилось, что событие A наступило ровно k раз. Число

$$w = \frac{k}{n} \quad (4.3.1)$$

называется *относительной частотой (или частотью)* наступления события A в n испытаниях.

Посмотрим, что происходит с относительными частотами при неограниченном увеличении числа испытаний n . Для этого возьмем эксперимент с бросанием монеты. Такой эксперимент разобран в монографии Г. Крамера [50, с. 163], а его результат для 400 бросаний монеты изображен на рисунке 4.3.1, показывающем изменение относительной частоты $\frac{k}{n}$ выпадения орла.

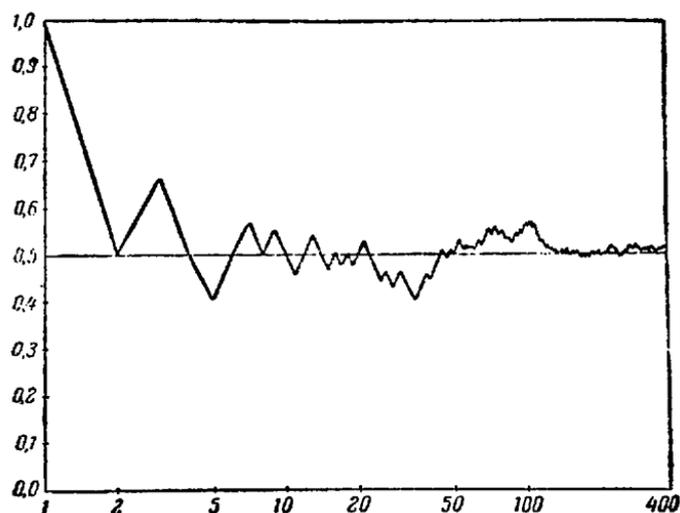


Рисунок 4.3.1 – Частота выпадения «орла» в процессе 400 бросаний монеты

Из графика видно, что частота при небольшом количестве испытаний сильно колеблется, но далее, с ростом числа испытаний n амплитуда колебаний начинает стабилизироваться и возникает впечатление, что при неограниченном росте числа испытаний n относительная частота стремится к числу $\frac{1}{2}$, или очень близкому к нему, поскольку любая монета чуть-чуть не симметрична. Т. е. наблюдается (точнее, возникает впечатление, что наблюдается) так называемая *устойчивость частоты*.

Проводились опыты не только с монетами. Так, например, Л. Е. Майстров в своей монографии [56, с. 99] упоминает об эксперименте, который в 1846 году проводил Кетле. Он из урны, содержащей 20 белых и 20 черных шаров, вынимал с возвращением шар 4096 раз. В результате оказалось, что частота появления белого шара равнялась 0,504, а черного 0,496 соответственно.

В качестве еще одной иллюстрации рассмотрим ставший уже практически хрестоматийным пример из монографии Г. Крамера [50, с. 484] распределения новорожденных по полу. Это официальные данные шведской статистики за 1935 год (см. рис. 4.3.2).

Месяцы Пол ребенка	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Итого
	Мальчики	3743	3550	4017	4173	4117	3944	3964	3797	3712	3512	3392	
Девочки	3537	3407	3866	3711	3775	3665	3621	3596	3491	3391	3160	3371	42591
Общее число	7280	6957	7883	7884	7892	7609	7585	7393	7203	6903	6552	7132	88273

Рисунок 4.3.2 – Распределение пола детей, родившихся в Швеции в 1935 году

Найдем относительные частоты рождения мальчиков по месяцам

1	2	3	4	5	6
0, 51415	0, 51028	0, 50958	0, 52930	0, 52167	0, 51833

7	8	9	10	11	12
0, 52261	0, 52714	0, 51534	0, 50876	0, 51770	0, 52734

и сравним их с относительной частотой рождения мальчиков по итоговой сумме за год:

$$w = \frac{45682}{88273} = 0.51751$$

(При взгляде на эти цифры, не покидает чувство, что кто-то там сверху внимательно наблюдает за тем, чем они там внизу занимаются и по мере сил поправляет результаты экспериментов, чтобы не портить статистику).

Здесь мы фактически имеем 12 выборок из генеральной совокупности, образованной множеством всех новорожденных в Швеции за 1935-й год и наблюдаем некую концентрацию относительных частот около среднего за год значения, $p = 0.51751$.

Теория вероятностей рассматривает только такие стохастические эксперименты, в которых при увеличении числа испытаний происходит стабилизация относительных частот, т. е. наблюдается устойчивость частот. Имеются и многочисленные примеры из практики, демонстрирующие стабилизацию относительных частот при большом числе наблюдений. Например, процент заболевших гриппом в период эпидемии, летальность очередного штамма коронавируса, процент брака при серийном изготовлении некоторой детали, процент попаданий в мишень для конкретного стрелка и т. п.

Но, как писал В. Н. Тутубалин [81, с. 98], «За 200 лет, прошедших со времен Лапласа и Гаусса, наука не добилась продвижения в фундаментальном вопросе – когда возникает статистическая устойчивость. Узнать, так обстоит дело или нет, мы можем только из эксперимента ...».

Как пишет Г. Крамер [50, с. 164], предположение о стабилизации относительных частот, конечно, «... не может быть ни доказано, ни опровергнуто фактическими опытами, так как мы никогда не можем осуществить бесконечную последовательность экспериментов». И далее [50, с. 164 – 165], «Описанное выше замечательное свойство частот впервые было замечено в области азартных игр, простейшим частным случаем которых служит ... пример с бросанием монеты. ... Позднее такого же рода устойчивость была обнаружена для частот, связанных с демографическими данными и на этом была основана статистическая теория народонаселения. Область применения статистических методов постепенно расширялась, и в настоящее время можно считать эмпирически установленным, что «устойчивость длинного ряда» частот есть общая характеристика случайных экспериментов, производящихся при неизменных условиях.

В некоторых случаях, особенно тогда, когда наблюдению подвергаются совокупности людей (или других биологических особей), статистическую устойчивость часто интерпретируют, рассматривая такие совокупности, как выборки из некоторой очень обширной или даже бесконечной генеральной совокупности».

Перейдем непосредственно к определению статистической вероятности. Рассмотрим последовательность

$$w_{n_1} = \frac{k_1}{n_1}, w_{n_2} = \frac{k_2}{n_2}, \dots, w_{n_m} = \frac{k_m}{n_m}, \dots$$

относительных частот наступления события A в $n_1, n_2, \dots, n_m, \dots$ испытаниях соответственно. Изобразим (см. рис. 4.3.3) эти частоты $w_{n_1}, w_{n_2}, \dots, w_{n_m}, \dots$ точками на числовой оси. Эти точки будут на оси скапливаться около некоторой точки, которую мы обозначим через $P^*(A)$.

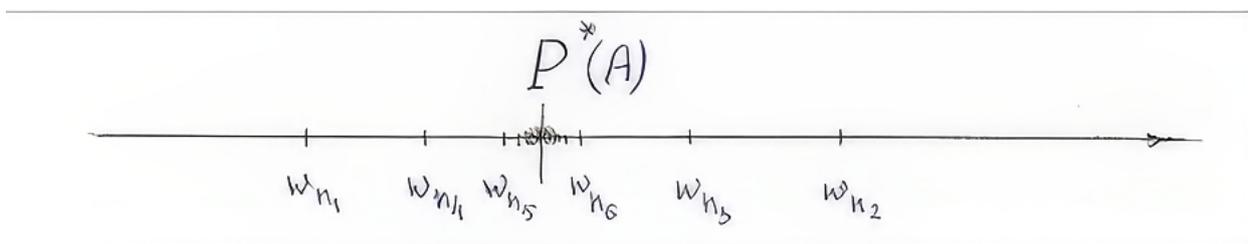


Рисунок 4.3.3 – Числовая ось с нанесенными на ней относительными частотами. Вертикальным отрезком выделена точка сгущения относительных частот. Она обозначена символом $P^*(A)$

Определение 4.3.1. *Статистической вероятностью* события A называется число $P^*(A)$, около которого группируются, накапливаются, концентрируются относительные частоты.

Определение прямо скажем – так себе. К такому определению сразу возникают вопросы. Ведь накапливаться и концентрироваться – эти слова в некоторых случаях имеют разный смысл. То же самое можно сказать и о паре группируются и накапливаются.

Есть и другое определение, не на много лучшее.

Определение 4.3.2. *Статистической вероятностью* события A называется число $P^*(A)$, к которому стремятся относительные частоты при неограниченном увеличении числа испытаний n .

Сразу возникает вопрос: в каком смысле стремится? Это в смысле определения предела или это что-то другое? Оба определения – какая-то «литературщина», не позволяющая делать однозначные логические выводы, так как сами исходные понятия какие-то расплывчатые.

Так как определения 4.3.1 и 4.3.2 не позволяют практически определить на оси такую точку $P^*(A)$, то в качестве статистической вероятности на практике обычно берут значение относительной частоты, соответствующей наибольшему числу испытаний.

Даже, если принять эти «мутные фразы» (определение 4.3.1 и определение 4.3.2) за нормальные определения, то сразу же к введенному понятию «статистическая вероятность» возникают четыре вопроса.

1. Всегда ли (для любого ли повторяющегося эксперимента) существует число $P^*(A)$?

2. Единственно ли значение $P^*(A)$ в случае, когда оно существует?

3. Если вероятность можно вычислить, используя классическое определение вероятности (как, например, при бросании монеты), то равна ли она статистической: $P(A) = P^*(A)$?

4. Как, в каком смысле последовательность относительных частот стремится к пределу, поскольку теоретически могут быть самые невозможные случаи.

Итак, ответы на первый и второй вопросы – утвердительные и основываются на гипотезе о стабилизации последовательности относительных частот, $w_n = \frac{k}{n}$.

Что же касается равенства классической и статистической вероятности, то, как пишет Н. Ш. Кремер [51, с. 22], «Факт приближения относительной частоты ... события к его вероятности при увеличении числа испытаний, сводящихся к схеме случаев, подтверждается многочисленными массовыми экспериментами ...». В подобном же духе высказываются и многие авторитетные авторы, например: Ю. Д. Максимов [57, с. 36 – 37], Е. С. Вентцель [10, с. 31] и Б. В. Гнеденко [25, с. 44] и др.

Перейдем к четвертому. Так как в теории вероятностей все не так просто, то начнем с примера. Рассмотрим эксперимент с бросанием монеты. Обозначим через событие, состоящее в выпадении орла при бросании монеты.

Вероятность выпадения орла по классическому определению равна: $P(A) = \frac{1}{2}$.

Попробуем найти статистическую вероятность этого события A . Будем

мысленно бросать монету и фиксировать относительные частоты выпадения орла.

Бросим монету один раз и предположим, что выпал орел. Это вполне возможно, и при этом в соответствии с обозначениями из (5.3.1): $n = 1$, $k = 1$ и $w_1 = \frac{k}{n} = \frac{1}{1} = 1$.

Бросим монету два раза и предположим, что оба раза выпал орел. Такое событие также возможно, и в соответствии с обозначениями из (5.3.1): $n = 2$, $k = 2$ и $w_2 = \frac{k}{n} = \frac{2}{2} = 1$.

Бросим монету десять раз и предположим, что все десять раз выпал орел, тогда в соответствии с обозначениями из (5.3.1): $n = 10$, $k = 10$ и $w_{10} = \frac{k}{n} = \frac{10}{10} = 1$. Наш жизненный опыт подсказывает, что такой случай возможен, хотя и достаточно редок.

Бросим монету сто раз и предположим, что все сто раз выпал орел, тогда в соответствии с обозначениями из (5.3.1): $n = 100$, $k = 100$ и $w_{100} = \frac{k}{n} = \frac{100}{100} = 1$. Наш жизненный опыт подсказывает, что такой случай просто невероятен, хотя теоретически и возможен.

Продолжая подобные предположения о постоянном выпадении орла и дальше, мы получим, что относительные частоты постоянны и равны единице, их предел будет равен единице, т. е. вроде бы $P^*(A) = 1$. Но такая конструкция, такая последовательность испытаний, когда 100 % результатов испытаний просто невероятны, надо каким-то образом не учитывать при нахождении числа $P^*(A)$. Также нас не устроит и 99 % нереальных результатов, получающихся, когда массы орлов появится только один процент решек. Такую ситуацию тоже надо каким-то образом не учитывать при нахождении числа $P^*(A)$. И т. п.

Это и было сделано Я. Бернулли в работе 1713 года. Суть его теоремы, вошедшей впоследствии в группу теорем под общим названием «Закон больших чисел», состоит в следующем. Согласно теореме Бернулли, какой бы величиной $\varepsilon > 0$ (например, $\varepsilon = 0,01$) мы не задались, с ростом n вероятность отклонения частоты $w_n = \frac{k}{n}$ от числа $P(A)$ более, чем на ε (более, чем на 0,01) будет стремиться к нулю. Или в сокращённой записи:

$$P \left\{ \left| \frac{k}{n} - P(A) \right| > \varepsilon \right\} \rightarrow 0 \quad \left(P \left\{ \left| \frac{k}{n} - P(A) \right| > 0,01 \right\} \rightarrow 0 \right) \text{ при } n \rightarrow \infty$$

Итак, ответ на четвертый вопрос следующий. Мы не можем гарантировать, что стремление относительных частот $w_n = \frac{k}{n}$ к статистической вероятности $P^*(A)$ события A происходит в смысле определения предела числовой последовательности, которое было дано в § 3.1. Так по поводу статистической вероятности Г. Крамер [50, с. 170] поясняет: «Всякий раз, когда мы говорим, что вероятность события E в эксперименте G равна $P^*(E)$ (обозначение. – Авт.), точный смысл этого утверждения заключается просто в следующем:

практически несомненно, что частота события E в длинном ряду повторений эксперимента G будет приблизительно равной $P^*(E)$. Это утверждение будет называться также частотной интерпретацией вероятности $P^*(E)$ ».

Значение теоремы Бернулли состоит, в частности, в том, что она связывает статистические наблюдения и теорию вероятностей.

Как отмечается в [98, т. 3 стр. 131]: «Современники Я. Бернулли понимали его закон больших чисел, как теорему, позволившую обосновать проводившиеся с XVII в. вероятностные расчеты в демографии».

Что же касается истории, то, как пишет Б. В. Гнеденко [24, с. 49], классическое и статистическое определения вероятности были впервые четко сформулированы Я. Бернулли.

Замечание 4.3.1. В качестве примеров, показывающих, что с увеличением количества испытаний относительная частота выпадения «орла» стремится к своему предельному значению $\frac{1}{2}$, иногда приводят результаты экспериментов графа де Бюффона, Огастеса де Моргана, У. С. Джевонса и В. И. Романовского. Однако, как было установлено Г. И. Фалиным [82 – 86], результаты этих экспериментов на самом деле нельзя было интерпретировать, как статистику по бросанию монеты. Строго говоря задачи, которые решали перечисленные выше авторы, не только по форме, но и по существу отличались от задачи по бросанию монеты. Короче, было очень похоже, но не то. Подробное исследование поведения относительных частот в эксперименте, который можно назвать экспериментом по бросанию идеальной монеты, было проведено Феллером [88, гл. III] (см. также Фалин [87]).

Что же касается результата Пирсона, который при 24000 бросаний получил относительную частоту 0,5005, то, как следует из монографии Феллера [88, гл. III], просто надо было вовремя остановить эксперимент. Более того, он мог при определенном числе испытаний и вовсе получить результат $w = 0,5$. Такой результат соответствует ничьей, а существование ничьих, в принципе, не может никого удивлять.

Теперь остановимся на одном обстоятельстве, тесно связанном с последовательностью испытаний. Всем известно такое понятие, как удача, везение. Практика профессиональных картежников и художественная литература изобилуют описаниями этого явления. Вот, например, как об этом пишет классик детективного жанра Э. С. Гарднер [21, с. 121]: «Профессиональные игроки говорили мне, что многие проигрывают, потому что у них кишка тонка поставить на кон все, когда они выигрывают, и не хватает осторожности, когда они в проигрыше. Игроки говорят, что удача приходит волнами». Однако, удачу или в простонародье «пруху», решительно, отрицают упертые преподаватели теории вероятностей, снисходительно объясняющие всем сомневающимся, что у монеты нет памяти. И поэтому при, например, игре в орлянку орел выпадает самым что ни на есть случайным образом. А если вы поверили в какую-то удачу, то вы полный идиот и только врожденная интеллигентность педагога не позволяет ему все это вам растолковать в подробностях и с красочными эпитетами.

Следуя Феллеру [88, гл. III], рассмотрим результаты игры в орлянку неких Петра и Павла, причем сразу же подчеркнем, что речь идет не об апостолах, все персонажи вымышлены, а любые совпадения с реальными людьми и фактами являются случайными. Монета предполагается идеальной, так что вероятность выпадения орла считается равной 0,5.

Возьмем любого из игроков, например, Петра. Обычно полагают, пишет Феллер в [88, с. 83], «... что при достаточно длинной серии бросаний правильной монеты Петр будет в выигрыше около половины всего времени. Это, однако, совершенно неверно. Если монету бросать 20 000 раз, то приблизительно в 88 раз более вероятно, что Петр будет находиться в выигрыше после каждого испытания, чем он будет находиться в выигрыше после 10 000 испытаний. Вообще, лидерство в игре меняется более редко, чем подсказывает интуиция. Как бы длинны ни были серии бросаний, самое вероятное число смен лидерства есть 0, точно так же одна смена лидерства более вероятна, чем две, чем три и т. д. Короче говоря, если бы результаты достаточно длинных игр с бросанием монеты описывал современный адвокат или психолог, он бы классифицировал большинство монет, как неправильные».

И далее в [88, с. 97 – 98]: «Интуиция подсказывает нам, что если Петр и Павел производят бросания правильной монеты достаточно долгое время $2n$, то число ничьих (моментов времени, когда суммарный выигрыш один и тот же у обоих игроков) должно быть приблизительно пропорционально $2n$. Но это не так. В действительности число ничьих возрастает по вероятности лишь как $(2n)^{1/2}$, т. е. с увеличением продолжительности игры относительное число ничьих быстро убывает ... Пусть монета бросается 10 000 раз. С вероятностью $\frac{1}{2}$ произойдет не более 68 возвращений в точку $x = 0$, из которых только половина соответствует действительному изменению лидерства».

Как тут не вспомнить о кладезе народной мудрости – пословицах и поговорках, говорящих о волнообразных колебаниях успеха / неуспеха:

- 1) пришла беда – открывай ворота;
- 2) деньги к деньгам;
- 3) не жили богато, нечего и начинать;
- 4) беда не приходит одна;
- 5) не за то отец сына бил, что играл, а за то, что отыгрывался.

Одним словом, Бог (то бишь *vox populi*) не Тимошка – видит немножко.

Ну, а как же все-таки в свете вышесказанного у монеты с памятью? Неужели, правда? Нет, спешим мы успокоить ошарашенного читателя. Теорема Бернулли действительно утверждает, что при большом числе испытаний с вероятностью близкой к единице выполняется приближенное равенство:

$$\frac{\text{число выпадений орла}}{\text{число выпадений решки}} \approx 1$$

Но это не означает, что число выпадений орла мало отличается от количества выпадений решки. Например, при больших значениях числа n выполняется приближенное равенство:

$$\frac{n - \sqrt{n}}{n} = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \approx 1$$

Но числа $n - \sqrt{n}$ и n не являются мало отличающимися. Разность между ними с ростом n стремится к бесконечности. Для случая бросания монеты можно доказать [77, с. 42], что при увеличении числа испытаний:

$$\ln(\text{число выпадений орла}) - \ln(\text{число выпадений решки}) \rightarrow 0$$

Замечание 4.3.2. На протяжении этого параграфа мы неоднократно говорили, что при большом числе испытаний относительная частота приближённо равна вероятности. А какая же точность этой оценки? В обычном понимании слова «точность» – ответ, конечно, невозможен, но, оказывается, что его можно дать в вероятностном смысле. Об этом мы узнаем в § 6.4.

Замечание 4.3.3. Авторы [2, с.175] пишут следующее. «В физической литературе до сих пор господствует убеждение, что с ростом испытаний (длины выборки) N в силу центральной предельной теоремы^{*)} относительная частота стремится к своему пределу, который и представляет собой эмпирическую вероятность. Между тем эксперименты сплошь и рядом свидетельствуют о том, что при больших N рассеяние данных не уменьшается, а начиная с некоторого значения N_0 , наоборот, увеличивается. ... Если не гнаться за точностью формулировок, то при $N > N_0$ становится заметной систематическая ошибка, обусловленная тем, что в базовой гипотезе не был учтен какой-либо существенный фактор, который на первых порах, при малом объеме выборки, давал незначительный вклад, а затем, по мере накопления данных, становился все более заметным.

Таким образом, если модель явления не включает какой-то существенный систематический фактор, то увеличение объема выборки вовсе не обязательно влечет за собой уменьшение рассеяния».

Заключение. Несмотря на все перечисленные выше сложности и противоречия, практические задачи надо как-то решать и, следовательно, как-то определять статистическую вероятность. Поэтому, подводя итог, еще раз повторим, что *статистической вероятностью называется точка сгущения относительных частот, а ее приближенное значение равно относительной частоте, вычисленной при наибольшем числе испытаний.*

§ 4.4. Геометрическое определение вероятности события

Рассмотрим область (линейную, плоскую, пространственную) конечной меры (соответственно – длины, площади или объема). Обозначим ее Ω и для наглядности изобразим на плоскости в виде прямоугольника (см. рис. 4.4.1).

*) О содержании центральной предельной теоремы будет сказано в замечании 4.5.1 из § 4.5.

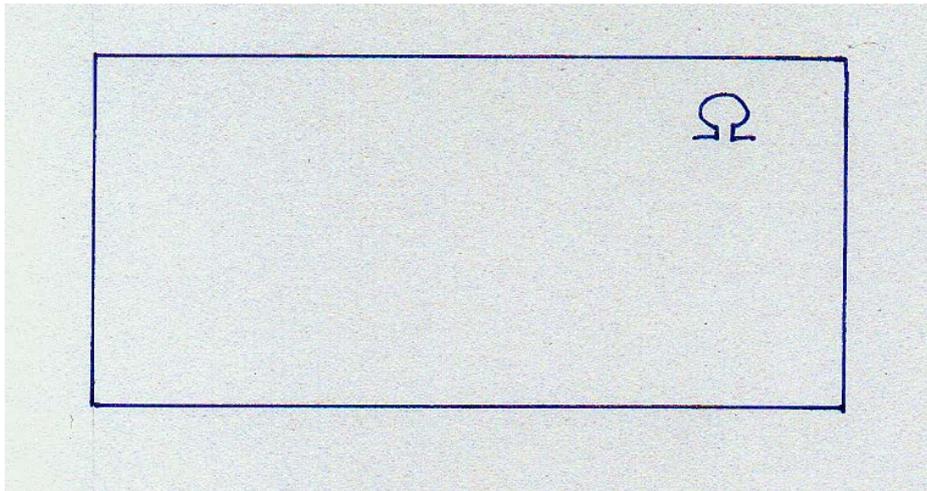


Рисунок 4.4.1 – Область Ω

Определение 4.4.1. Будем говорить, что точка *случайным образом брошена в Ω* , если выполнены следующие условия:

1) не существует области $\Omega_0 \subset \Omega$, в которую точка при бросании не могла бы попасть;

2) для любых двух областей $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \Omega$ одинаковой меры (длины, площади или объема), но, возможно, не одинаковой формы нет оснований полагать, что при неограниченном количестве бросаний точки в область Ω в одну из этих областей она будет попадать чаще, чем в другую.

Пример 4.4.1. Представьте пылинку, которая случайным образом брошена на прямоугольную поверхность. А теперь еще и еще, и еще много раз. То, что в результате получится вы сможете увидеть, если посмотрите на верх своего платяного шкафа. Очаровательно ровный и толстый слой пыли как раз и будет визуализацией, а точнее материализацией, большого числа случайным образом брошенных пылинок.

Пусть область $A \subset \Omega$ (см. рис. 4.4.2).

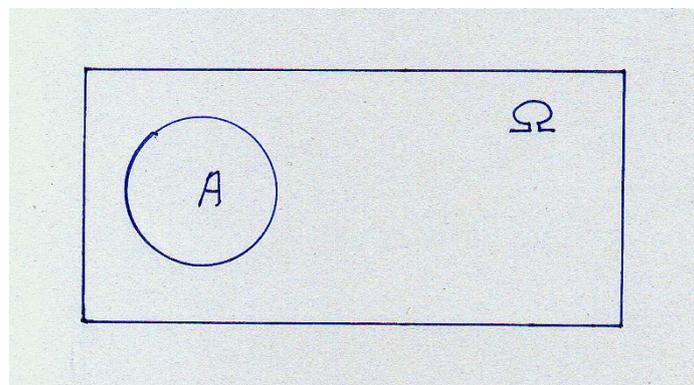


Рисунок 4.4.2 – Область $A \subset \Omega$.

Обозначим через A событие, состоящее в том, что точка, случайным образом брошенная в Ω , попадет при этом в область A .

Определение 4.4.2. (Геометрическое определение вероятности события).
Вероятностью события A называется число, обозначаемое $P(A)$ и равное

$$P(A) = \frac{\text{мера } A}{\text{мера } \Omega},$$

где, как указывалось выше, мера – это соответственно, длина площадь или объём.

Покажем на примере как применяется геометрическое определение вероятности.

Задача 4.4.1. Круг радиуса r разделен (см. рис. 4.4.3) на 4 одинаковых сектора. Один сектор заштрихован. В круг случайным образом брошена точка. Какова вероятность, что она попадет при этом в заштрихованный сектор?

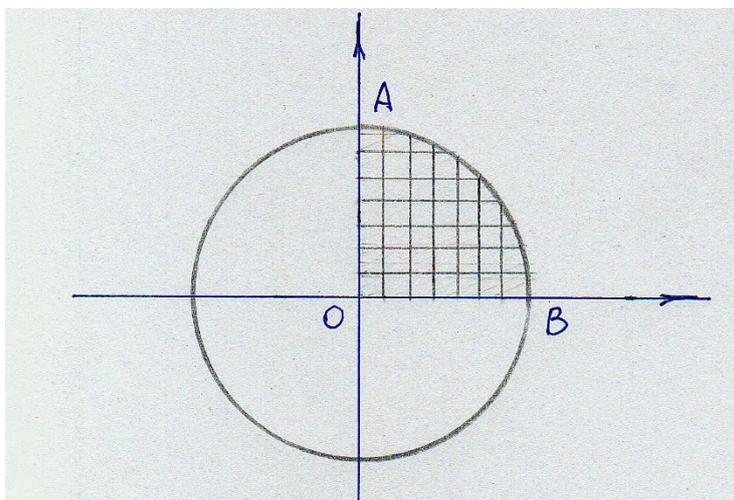


Рисунок 4.4.3 – Круг радиуса r и заштрихованный сектор AOB

Решение. Обозначим через A – событие, состоящее в том, что точка, случайным образом брошенная в круг, попадет при этом в заштрихованный сектор AOB . Тогда, так как площадь круга равна πr^2 , а площадь сектора AOB равна $\frac{1}{4}$ площади круга, то по геометрическому определению вероятности получаем:

$$P(A) = \frac{\text{мера } A}{\text{мера } \Omega} = \frac{\text{площадь сектора } AOB}{\text{площадь круга}} = \frac{\frac{1}{4} \pi r^2}{\pi r^2} = \frac{1}{4}$$

Ответ: $P(A) = \frac{1}{4}$.

Замечание 4.4.1. Геометрическое определение вероятности наглядно демонстрирует тот факт, что, если вероятность события равна нулю, то не обязательно, что это событие невозможное. Действительно, если A – точка в множестве Ω и событие A состоит в том, что точка (другая), случайным образом брошенная в Ω , попала при этом в A , то вероятность события A по определению геометрической вероятности равна:

$$P(A) = \frac{\text{мера } A}{\text{мера } \Omega} = \frac{\text{площадь } A}{\text{площадь } \Omega} = \frac{0}{\text{площадь } \Omega} = 0$$

Но считать невозможным такое событие, разумеется, нельзя.

В следующем параграфе мы рассмотрим более содержательный пример, в полной мере иллюстрирующий возможности геометрического подхода к решению вероятностных задач.

В заключение параграфа добавим, что [97, с. 96] геометрические вероятности применялись уже в XVII веке. Далее, серьезный шаг в развитие геометрических вероятностей был сделан [24, с. 390 – 394] в XVIII – XIV веках. И [24, с. 394] «В XX веке интерес к геометрическим вероятностям не ослабел, а вырос, поскольку помимо чисто математического интереса они приобрели и серьезное прикладное значение в физике, биологии, медицине, инженерном деле и пр.»

§ 4.5. Задача о встрече

Задача 4.5.1. Двое друзей договорились о встрече в период от 12.00 до 13.00 включительно с условием ожидать друг друга не более 15 минут в рамках указанного временного интервала. Т. е. не ранее 12.00 пришел один, ждет 15 минут (но не более, чем до 13.00) и, если другой не пришел, то первый уходит. Так же и второй. Какова вероятность, что встреча состоится?

Решение. Воспользуемся геометрическим определением вероятности. Обозначим через x время прихода первого в минутах, отсчитывая время после 12 часов, а через y – время прихода второго (также в минутах и также отсчитывая время после 12 часов). Рассмотрим на плоскости декартову систему координат и изобразим в ней (см. рис. 4.5.1) квадрат формата 60×60 . Тогда точку (x, y) можно интерпретировать, как точку, случайно брошенную в квадрат 60×60 , поскольку $x \in [0, 60]$ и $y \in [0, 60]$. В качестве единиц масштаба взяты минуты. Согласно условию, встреча состоится, если точка (x, y) лежит в квадрате, а ее координаты удовлетворяют неравенству:

$$|y - x| \leq 15 \quad (15 \text{ минут}).$$

Найдем на плоскости часть квадрата, точки которой удовлетворяют этому требованию. Раскрыв знак модуля, получаем:

$$-15 \leq y - x \leq 15$$

или

$$x - 15 \leq y \leq x + 15. \quad (4.5.1)$$

Построим прямые $y = x - 15$ и $y = x + 15$. Следовательно, так как ордината каждой интересующей нас точки удовлетворяет неравенству (4.5.1), то сама точка располагается в заштрихованной части квадрата, изображенной на рисунке 4.5.1.

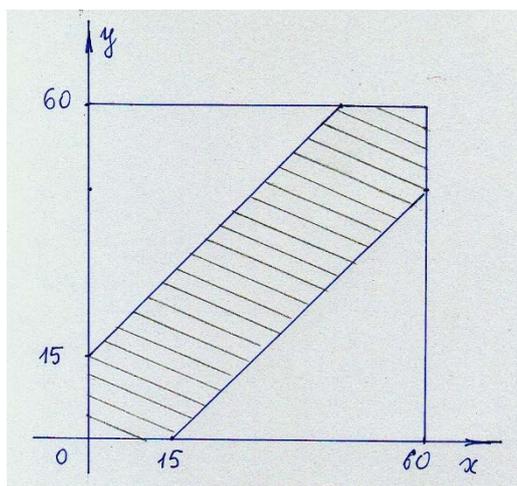


Рисунок 4.5.1 – Координаты точек из заштрихованной части квадрата удовлетворяют неравенству (4.5.1)

Теперь для нахождения искомой вероятности нужно найти отношение площади заштрихованной части квадрата ко всей площади квадрата. Для этого заметим, что, если соединить две незаштрихованные части, то получится квадрат со стороной длины $60 - 15 = 45$. Следовательно, по определению геометрической вероятности получаем:

$$P(A) = \frac{60^2 - (60-15)^2}{60^2} = 1 - \left(\frac{45}{60}\right)^2 = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{16} = 0,4375.$$

Ответ: $P(A) = 0,4375$.

Отметим, что полученный ответ многим представляется неожиданным, так как на первый взгляд по тексту задачи кажется, что вероятность встречи если и не ноль, то очень мала. Но против математики не возразишь.

Замечание 4.5.1. Нельзя не согласиться с тем, что условие задачи, точнее сценарий встречи, отдает некоторой альтернативной одаренностью? Но такая формулировка, кочующая из учебника в учебник, досталась нам из недавнего советского прошлого. (Впрочем, есть один альтернативный вариант со швартовкой кораблей). В первоисточнике [113, с. 242 – 243] задача ставилась так: «A and B are going to a garden party ... What is the chance that they are there together?» Ну, а поскольку в те советские времена «наши люди» на «a garden party» не ходили и случайно там «together» не оказывались, то персонажам из условия задачи пришлось пойти другим путём и попытаться встретиться столь оригинальным и, мы бы даже сказали, новаторским способом.

§ 4.6. Замечание об аксиоматическом определении вероятности события и об аксиоматике теории вероятностей

Как мы уже говорили выше, теория вероятностей как наука зародилась на рубеже 17 и 18 веков. С ее помощью на протяжении 18-го, 19-го веков решались важные практические задачи, о некоторых из которых мы будем говорить далее,

но ясного понимания о том, что же такое вероятность события, не было даже у корифеев науки своего времени. Так, например [97, с. 208]: «Даже такой математик, как Борель (1871 – 1956. Президент Парижской академии наук с 1934. – *Прим. авт.*), довольно расплывчато представлял себе предмет и метод теории вероятностей, и само понятие вероятности. ... Неточность, непонимание и путаница относительно вероятностных и статистических методов существовали достаточно долго».

Да вы и сами могли заметить: мы изучили три разных подхода к определению центрального понятия всей науки – определению вероятности события. Какое же из них правильное? А если все они правильные, то где доказательство их равносильности и в рамках какой теории его следует проводить? Одним словом, даже у нас возникли вопросы, не говоря уже о математиках. У профессионалов вопросы возникали, а вот ответы, к сожалению, нет. Спасти положение могла только аксиоматизация, которая превратила бы набор наглядных, интуитивных вероятностных представлений и подходов к решению практических задач в единую цельную теорию, тесно связанную с остальной математикой. (Вспомните (см. § 1.4), как аксиоматика «Начал» Евклида превратила геометрию в точную для своего времени науку).

И вот после ряда попыток известных ученых такая аксиоматическая теория была построена в 1929 – 1933 годах советским математиком Андреем Николаевичем Колмогоровым (впоследствии академиком). В настоящее время она считается общепринятой. Познакомиться с основными понятиями аксиоматического подхода можно по любому вузовскому учебнику, например [24, гл.1, § 6].

Мы не будем изучать аксиоматику, т. к. для этого необходимо получить опыт решения задач, хотя бы в рамках, изложенных в настоящей книге наглядно-интуитивных понятий теории вероятностей, познакомиться с азами теории множеств, математической логики и теории меры. Наша задача скромнее – овладеть терминологией теории вероятностей и математической статистики, для того чтобы можно было понимать результаты решения прикладных задач, которые будут разобраны в главе 7.

§ 4.7. Вероятность произведения двух событий

Условной вероятностью называется вероятность наступления одного события в предположении, что произошло другое событие. Условная вероятность наступления события A в предположении, что произошло другое событие B обозначается следующим образом: $P(A/B)$. Также используются и другие обозначения: $P(A | B)$ или $P_B(A)$.

Пример 4.7.1. В урне 7 белых и 3 черных шара. Из урны случайным образом вынимают сначала один шар, а затем другой. Событие A состоит в том, что первым вынули белый шар, а событие B – в том, что вторым вынули черный шар. Если вынимание происходит с возвращением шара обратно в урну, то $P(A) = 0,7$ и $P(B) = 0,3$. Если же вынимание происходит без возвращения шара

обратно в урну, то $P(A) = 0,7$. Но вероятность наступления события B будет условной: $P(B/A) = 3/9 = 1/3$.

Определение 4.7.1 Произведением событий A и B называется третье событие, обозначаемое AB и состоящее в одновременном наступлении событий A и B .

Теорема 4.7.1. Пусть $P(A)$ и $P(B) \neq 0$, тогда вероятность произведения двух событий A и B равна произведению вероятности наступления одного из них на условную вероятность другого:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B).$$

Доказательство. Для доказательства воспользуемся геометрическим определением вероятности события. Рассмотрим на плоскости множество Ω и два его подмножества A и B (см. рис. 4.7.1) положительной меры (длины, площади или объема).

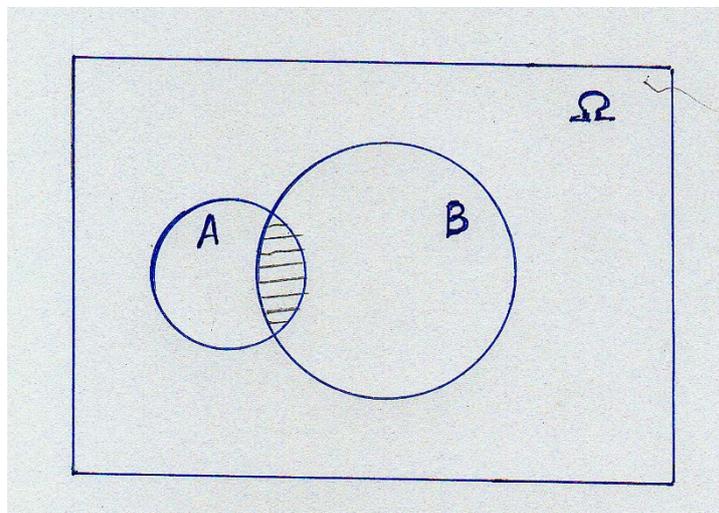


Рисунок 4.7.1 – Множество Ω и два его подмножества A и B положительной меры, пересекающиеся по заштрихованной части, обозначаемой $A \cap B$

Обозначим через A событие, состоящее в том, что точка, случайным образом брошенная в Ω , попала при этом в множество A и через B – что попала в множество B . Тогда событие AB , состоящее в одновременном наступлении событий A и B , заключается в том, что точка, случайным образом брошенная в Ω , попала в пересечение множеств A и B , т. е. в множество $A \cap B$. Следовательно,

$$P(AB) = \frac{\text{мера } A \cap B}{\text{мера } \Omega} = \frac{\text{мера } A \cap B}{\text{мера } A} \cdot \frac{\text{мера } A}{\text{мера } \Omega} = \frac{\text{площадь } A \cap B}{\text{площадь } A} \cdot \frac{\text{площадь } A}{\text{площадь } \Omega} = P(A) \cdot P(B/A),$$

поскольку условная вероятность $P(B/A)$ предполагает, что точка, которая была случайным образом брошена в множество A , попала при этом и в множество B . Но это возможно только в том случае, когда при бросании она попала также и в множество $A \cap B$. По определению вероятности:

$$P(B/A) = \frac{\text{площадь } A \cap B}{\text{площадь } A}.$$

Здесь роль множества Ω играет множество A .

Рассмотрим примеры.

Пример 4.7.2. В урне 7 белых и 3 черных шара. Из урны случайным образом вынимают сначала один шар, а затем другой. Какова вероятность вынуть подряд два белых шара, при условии, что первый вынутый шар обратно в урну не вернули?

Решение. Пусть событие A состоит в том, что первым вынули белый шар, а событие B – в том, что вторым вынули также белый шар. Если вынимание происходит без возвращения шара обратно в урну, то $P(A) = 7 / 10$. Но вероятность наступления события B будет условной: $P(B/A) = 6 / 9 = 2/3$. Следовательно, по теореме 4.7.1:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = \frac{7}{10} \cdot \frac{2}{3} = \frac{7}{15}$$

Ответ: $P = \frac{7}{15}$

Пример 4.7.3. В коробке 30 внешне одинаковых шоколадных конфет. Из них 10 жележных, а остальные с помадкой. Девочка съела подряд две конфеты. Какова вероятность, что они обе с помадкой?

Ответ: $P = \frac{20}{30} \cdot \frac{19}{29}$

Определение 4.7.2. События A и B называются *независимыми*, если вероятность одного из них не зависит от того, что произошло другое событие или нет.

Пример 4.7.4. Монету бросили два раза. Событие A состоит в том, что в первый раз выпал орел. Событие B состоит в том, что во второй раз тоже выпал орел. Так как у монеты нет памяти, то эти события независимы и $P(A) = P(B) = 1/2$.

Теорема 4.7.2. Вероятность произведения двух независимых событий A и B равна произведению вероятности наступления одного из них на вероятность наступления другого:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

Проверим справедливость этого утверждения на примере.

Пример 4.7.5. Имеется две урны с шарами. В первой урне 3 белых шара и 2 черных, а во второй – 4 синих и 3 красных. Из каждой урны вынули по шару. Какова вероятность, что вынули белый и синий шары.

Решение. Решим эту задачу, используя сначала классическое определение вероятности события. Найдем число всевозможных исходов. В первой урне всего 5 шаров, а во второй – 7. Занумеруем шары в каждой урне: в первой – от 1 до 5, а во второй – от 1 до 7 и рассмотрим множество пар (x, y) , где x – номер выбранного шара из первой урны, а y – из второй. Если взять один шар из первой урны, то ему соответствует 7 номеров шаров из второй урны. А так как в первой урне 5 шаров, то получаем $5 \times 7 = 35$ всевозможных пар (x, y) . Далее воспользуемся классическим определением вероятности. Всего случаев $n = 35$,

а число благоприятных случаев равно: $m = 3 \times 4 = 12$. Следовательно, $P = \frac{m}{n} = \frac{12}{35}$.

Теперь решим эту задачу, используя теорему о вероятности произведения событий. Обозначим через A событие, состоящее в том, что из первой урны вынули белый шар и через B событие, состоящее в том, что из второй урны вынули синий шар. Тогда согласно условию задачи $P(A) = \frac{3}{5}$ и $P(B) = \frac{4}{7}$. События A и B независимы. Следовательно, по теореме 5.7.2:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{7} = \frac{12}{35}.$$

Решим несколько задач на формулу «вероятность произведения».

Задача 4.7.1. Имеется игральная кость и правильная четырехгранная пирамидка (правильный тетраэдр), грани которой занумерованы числами от единицы до четырёх. Какова вероятность, что при бросании кубика и пирамидки выпадет 4 очка на кубике 3 на пирамидке?

Решение. Обозначим через A событие, состоящее в том, что при броске пирамидки выпало 3 очка и через B событие, состоящее в том, что при броске кубика выпало 4 очка. События A и B независимы, поэтому можно применить теорему 4.7.2. Так как $P(A) = \frac{1}{4}$ и $P(B) = \frac{1}{6}$, то:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{24}$$

Задача 4.7.2. Два спортсмена стреляют по мишени. Вероятность попадания первого 0,8, вероятность попадания второго 0,9. Какова вероятность, что при залпе они оба попадут в мишень?

Ответ: $P = 0,8 \cdot 0,9 = 0,72$.

Во время переписи в Китае, происходившей в 2238 г. до н. э., было установлено [77, с. 112], что количество родившихся мальчиков составляло половину всех новорожденных. Английский математик, врач и писатель Джон Арбутнот (1667 – 1735) в начале XVIII века обнаружил, опираясь на демографические данные за 82 года, что мальчиков ежегодно за период наблюдения рождалось больше, чем девочек. Этот нематематический факт заинтересовал Лапласа. Он [77, с. 112] в 1784 г. обнаружил, «что в нескольких различных районах доля родившихся мальчиков приблизительно равнялась $22 / 43$ ($\approx 0,5116$. – Прим. авт.), а в Париже это отношение было равно $25 / 49$ ($\approx 0,5102$. – Прим. авт.). Лаплас был заинтригован таким различием, но вскоре нашел для него разумное объяснение: в общее число родившихся в Париже включались также все подкидыши, а население пригородов предпочитало подкидывать младенцев одного пола. Когда Лаплас исключил подкидышей из общего числа родившихся, доля новорожденных мальчиков стала близкой к $22 / 43$ ». Подкидывать предпочитали [98, с. 149] девочек.

Задача 4.7.3. Какова вероятность, что в семье, где имеется двое детей оба мальчики, если считать, что вероятность рождения мальчика 0,51?

Ответ: 0,26.

§ 4.8. Вероятность суммы двух событий

Определение 4.8.1. Суммой событий A и B называется третье событие, обозначаемое $A + B$ и состоящее в наступлении хотя бы одного из событий A и B .

Теорема 4.8.1. Вероятность суммы двух событий A и B равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их произведения:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Доказательство. Для доказательства воспользуемся геометрическим определением вероятности события. Рассмотрим (см. рис. 4.8.1(a), 4.8.1(b)) на плоскости множество Ω и два его подмножества A и B :

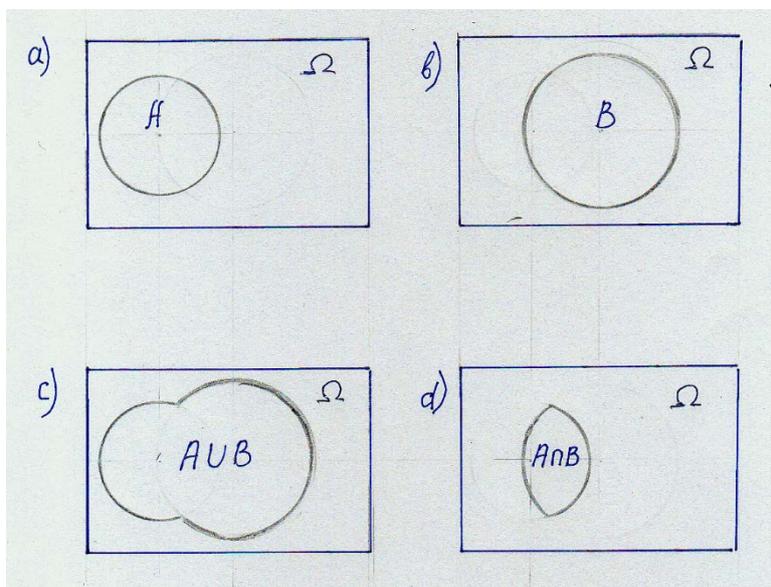


Рисунок 4.8.1(a) – множество A ; (b) – множество B ;
(c) – множество $A \cup B$; (d) – множество $A \cap B$

Обозначим через A событие, состоящее в том, что точка, случайным образом брошенная в Ω , попала множество A (см. рис. 4.8.1(a)) и через B – что попала в множество B (см. рис. 4.8.1(b)). Тогда событие $A + B$, состоящее в наступлении хотя бы одного из событий A и B , заключается в том, что точка, случайным образом брошенная в Ω , попала в объединение множеств A и B , т. е. в множество $A \cup B$ (см. рис. 4.8.1(c)). Следовательно, (см. рис. 4.8.1(d)):

$$\begin{aligned} P(A + B) &= \frac{\text{площадь } A \cup B}{\text{площадь } \Omega} = \\ &= \frac{\text{площадь } A}{\text{площадь } \Omega} + \frac{\text{площадь } B}{\text{площадь } \Omega} - \frac{\text{площадь } A \cap B}{\text{площадь } \Omega} = P(A) + P(B) - P(AB) \end{aligned}$$

Пример 4.8.1. Имеется две урны с шарами. В первой урне 3 белых шара и 2 черных, а во второй – 2 белых и 3 черных. Из каждой урны вынули по шару. Какова вероятность, что из этих двух шаров хотя бы один белый?

Решение. Пусть событие A состоит в том, что из первой урны вынули белый шар, а событие B – в том, что белый шар вынули из второй урны. Тогда $P(A) = \frac{3}{5}$, $P(B) = \frac{2}{5}$ и по формуле вероятности суммы получаем:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} - P(AB).$$

Так как события A и B независимы, то $P(AB) = P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{25}$.

Следовательно, $P(A + B) = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} - \frac{6}{25} = \frac{19}{25}$.

Ответ: $P = \frac{19}{25}$.

Пример 4.8.2. Два спортсмена стреляют по мишени. Вероятность попадания первого 0,8, вероятность попадания второго 0,9. Какова вероятность, что при залпе хотя бы один из них попадёт в мишень?

Ответ: $P = 0,8 + 0,9 - 0,8 \cdot 0,9 = 0,98$.

Следствие 4.8.1.1. Если события A и B несовместны, то:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Пример 4.8.3. Какова вероятность, что при бросании игрального кубика выпадет не более двух очков.

Решение. Пусть событие A состоит в том, что при бросании игрального кубика выпало одно очко и событие B состоит в том, что при бросании игрального кубика выпало два очка. Тогда событие, состоящее в том, что при бросании игрального кубика выпадет не более двух очков равносильно наступлению хотя бы одного из A и B , которые являются несовместными событиями. Следовательно, $P(A + B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

Ответ: $P = \frac{1}{3}$.

Определение 4.8.2. Событием противоположным событию A называется событие, обозначаемое \bar{A} и состоящее в не наступлении события A .

Теорема 4.8.2. Вероятность наступления события противоположного событию A равна:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

Доказательство. Для доказательства воспользуемся геометрическим определением вероятности события. Рассмотрим на плоскости множество Ω и его подмножество A (см. рис. 4.8.2).

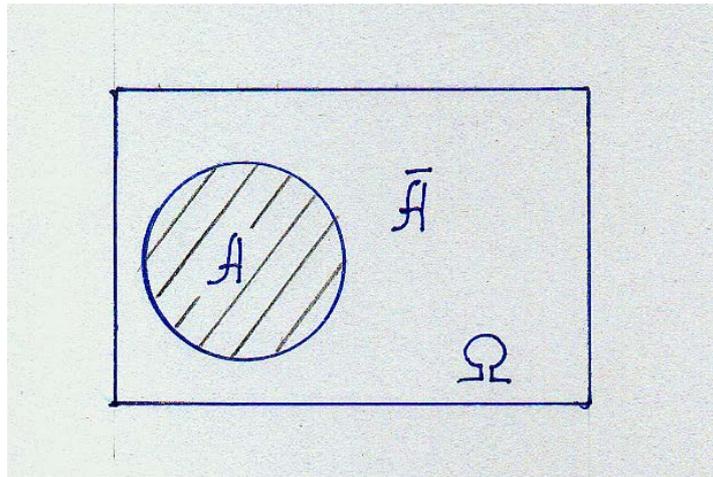


Рисунок 4.8.2 – Множество A заштриховано

Обозначим через A событие, состоящее в том, что точка, случайным образом брошенная в Ω , попала в множество A . Тогда событие \bar{A} будет состоять в том, что точка случайным образом брошенная в Ω попала в не заштрихованную область, т. е. в множество обозначаемое \bar{A} (см. рис. 4.8.2).

Обозначим через Ω событие, состоящее в том, что точка, случайным образом брошенная в Ω , попала в множество Ω . Тогда Ω обозначает достоверное событие. Следовательно, из равенства для множеств $A \cup \bar{A} = \Omega$ получаем равенство для событий: $A + \bar{A} = \Omega$. Так как события A и \bar{A} несовместны, то: $1 = P(\Omega) = P(A + \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$, откуда и следует утверждение теоремы.

Используя формулу для вероятности противоположного события, дадим второе, более простое решение задачи 4.8.1. Ещё раз запишем ее условие.

Задача 4.8.1. Имеется две урны с шарами. В первой урне 3 белых шара и 2 черных, а во второй – 2 белых и 3 черных. Из каждой урны вынули по шару. Какова вероятность, что из этих двух шаров хотя бы один белый?

Решение. Пусть, как и выше, событие A состоит в том, что из первой урны вынули белый шар, а событие B – в том, что белый шар вынули из второй урны. Тогда $P(A) = \frac{3}{5}$, $P(B) = \frac{2}{5}$. Обозначим через C событие, состоящее в том, что из двух выбранных шаров хотя бы один белый. Тогда событие \bar{C} состоит в том, что в выбранной паре нет ни одного белого, т. е. оба чёрные. Это означает, что $\bar{C} = \bar{A}\bar{B}$. По теореме 4.8.1 и теореме 4.8.2 получаем:

$$P(\bar{C}) = P(\bar{A}\bar{B}) = P(\bar{A})P(\bar{B}) = [1 - P(A)][1 - P(B)] = \left[1 - \frac{3}{5}\right]\left[1 - \frac{2}{5}\right] = \frac{6}{25}$$

ГЛАВА 5. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

В этой главе мы будем рассматривать новые объекты – случайные величины, т. е. такие величины, которые в результате эксперимента принимают какие-либо числовые значения, и причем заранее неизвестно какие. Например, число студентов, пришедших на лекцию; вес последнего из опоздавших на эту лекцию; сумма баллов, набранных конкретной учебной группой за сессию и т. п.

Систематическое и целенаправленное изучение случайных величин началось в XIX веке. При этом само понятие случайной величины длительное время даже не было определено. Первоначальными объектами изучения в теории случайных величин (на самом деле никакой теории поначалу и не было) являлись результаты измерений и ошибок наблюдений. Это работы Лапласа, Гаусса, Пуассона и др. И как полагают [49, с. 200], именно Пуассон в работах первой половины XIX века «...впервые сделал попытку оторвать понятие случайной величины от задач теории ошибок измерений и рассматривать случайную величину как общее понятие... Он начал говорить о «некоторой вещи», которая способна принимать значения a_1, a_2, \dots, a_n с соответствующими вероятностями. ... несколько раньше он сделал попытку ... в таком же роде рассматривать и непрерывные случайные величины, а также их функции распределения. Следует, однако, заметить, что его теория случайных величин, в сущности, ничем не отличалась от того, чем владели и пользовались его предшественники и современники, кроме упомянутой попытки ввести специальное наименование для фактически используемого понятия».

Большой вклад в создание и развитие теории случайных величин внесли отечественные ученые мирового уровня: П. Л. Чебышев, А. А. Марков, А. М. Ляпунов, А. Н. Колмогоров и др.

§ 5.1. Случайные величины. Основные понятия

Одним из основных понятий теории вероятности является понятие случайной величины. Рассмотрим некоторые примеры случайных величин:

Например, мы кидаем игральный кубик. В этом случае может выпасть от одного до шести очков, при этом мы не знаем, сколько именно очков выпадет. Другой пример: температура на улице. Естественно, это случайная величина и сказать точно, что сегодня в 12:00 температура воздуха будет ровно 15 градусов не может никто.

Под случайной величиной называется такая величина, которая в результате опыта может принимать различные значения, причем заранее неизвестно, какое именно значение она примет.

Можно говорить только о вероятности, с которой случайная величина принимает каждое конкретное значение.

Определение 5.1.1(а). *Дискретной* называется такая случайная величина, которая может принимать только отдельные изолированные значения.

Существует и другое также распространенное определение.

Определение 5.1.1(б). *Дискретной* называется такая случайная величина, множество возможных значений которой образует конечную или бесконечную последовательность чисел, т. е. конечно или счетно. Другими словами, дискретная случайная величина – это величина, значения которой можно перенумеровать.

Первый пример из приведенных выше как раз является примером дискретной случайной величины.

Определение 5.1.2. *Непрерывная случайная величина* – это такая величина, значения которой заполняют целиком некоторый промежуток числовой оси или всю числовую ось.

Второй пример из приведённых выше как раз является непрерывной случайной величиной.

Определение 5.1.3. *Функцией распределения случайной величины* называют функцию $F(x)$, определяющую вероятность того, что случайная величина X в результате испытания примет значение, меньшее чем x . Сокращенно это записывается так:

$$F(x) = P\{X < x\}$$

Геометрически это равенство можно истолковать следующим образом: $F(x)$ – есть вероятность того, что случайная величина примет значение, которое располагается на числовой оси левее точки x .

Иногда вместо термина «функция распределения» используется термин «интегральная функция».

Эта формула является важнейшей в курсе. Кроме того, что она широко используется в вычислениях; формула связывает теорию вероятностей случайных событий и теорию случайных величин в одно единое целое.

Любое соотношение, позволяющее определить функцию распределения случайной величины, называется *законом распределения* этой случайной величины.

Случайные величины принято обозначать большими латинскими буквами X, Y, Z , а их возможные значения – маленькими латинскими буквами x, y, z соответственно.

Закон распределения дискретной случайной величины

Закон распределения дискретной случайной величины может быть задан в виде таблицы, в первой строке которой стоят возможные значения случайной величины – x_i , а во второй – их вероятности p_i . Таблица имеет конечное число столбцов, если число возможных значений s в конечно (например, s в. это выпавшее число очков при бросании игральной кости).

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

Если же число возможных значений с. в. бесконечно, то таблица содержит бесконечное число столбцов (например, с. в. это число бросаний игральной кости до первого выпадения шести очков).

X	x_1	x_2	...	x_n	...
P	p_1	p_2	...	p_n	...

Закон распределения дискретной случайной величины, заданный таблицей, содержит полную информацию об этой величине. Недостатком же является малая информативность таблицы. Если таблица состоит из 3 – 4 столбца, то все нормально. Если же у случайной величины значения насчитывают несколько сотен, то невозможно таблицу окинуть взглядом и оценить информацию; тогда пользуются другими понятиями.

Одним из важнейших понятий, применимых как непрерывным, так и дискретным случайным величинам, является введенная выше функция распределения.

Свойства функции распределения

Свойство 1. Значения функции распределения принадлежат интервалу $[0;1]$, причем:

$$F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$$

Свойство 2. Функция $F(x)$ определена на всей числовой прямой и является неубывающей функцией.

Свойство 3. $F(x)$ является кусочно-непрерывной функцией с конечным или счётным числом разрывов.

Свойство 4. $F(x)$ в точках разрыва непрерывна слева, т. е., если $x = x_0$ точка разрыва, то существует значение $F(x_0)$ и:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} F(x) = \lim_{x \rightarrow x_0, x < x_0} F(x) = F(x_0)$$

Для непрерывной случайной величины график может выглядеть так (см. рис. 5.1.1):

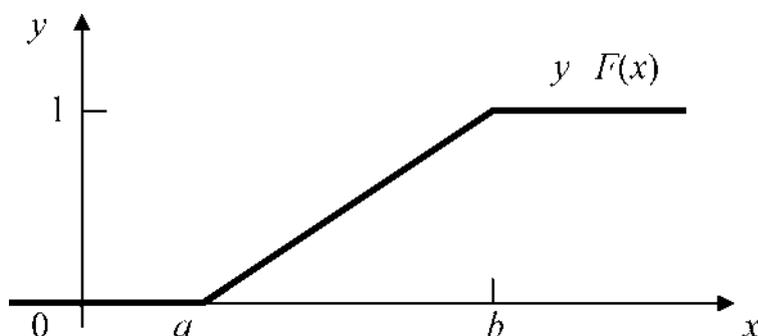


Рисунок 5.1.1 – Возможный вид графика функции распределения

Заметим, что для непрерывной случайной величины функция распределения всегда непрерывна.

Следующим важным понятием является плотность распределения вероятностей или плотность вероятности (или дифференциальная функция).

Определение 5.1.2. Плотностью распределения вероятностей (или просто плотностью распределения) непрерывной случайной величины X называют функцию $f(x)$ – первую производную от функции распределения $F(x)$:

$$F'(x) = f(x)$$

Плотность распределения рассматривают только для непрерывных случайных величин.

Свойства плотности распределения

Основными свойствами являются два:

Свойство 1. Плотность распределения – неотрицательная функция:
 $f(x) \geq 0$.

Свойство 2. Несобственный интеграл от плотности распределения в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ равен 1

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

Первое свойство следует из определения функции распределения.

Второе свойство говорит о том, что площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком плотности, всегда равна единице.

Кроме того, есть еще два важных факта.

Свойство 3. Вероятность попадания в заданный интервал вычисляется по формуле:

$$P\{a < X < b\} = \int_a^b f(x) dx$$

Если вспомнить геометрический смысл определенного интеграла, то это равенство означает следующее. Вероятность того, что в результате эксперимента непрерывная с. в. X примет значение из интервала (a, b) численно равна (см. рис. 5.1.2) площади криволинейной трапеции $a a' b' b$.

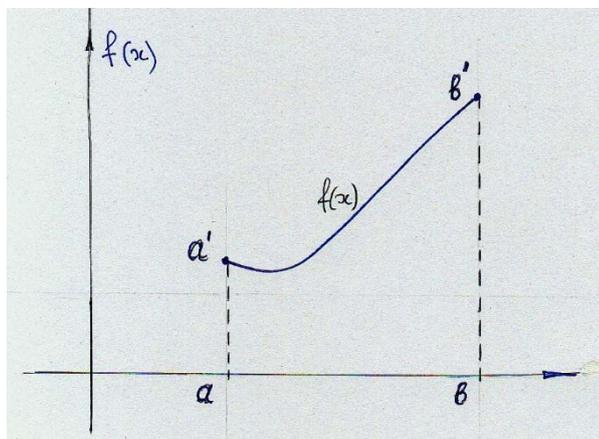


Рисунок 5.1.2 – Криволинейная трапеция $a a' b' b$

Свойство 4. Для непрерывной случайной величины выполняются равенства:

$$P\{a \leq X \leq b\} = P\{a < X \leq b\} = P\{a \leq X < b\} = P\{a < X < b\}$$

В случае, когда по плотности необходимо вычислить функцию распределения, это делается путем вычисления интеграла:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

Так как плотность распределения $f(x)$ однозначно определяет функцию распределения $F(x)$, то ее часто называют законом распределения непрерывной случайной величины.

§ 5.2. Дискретные случайные величины

Согласно определению, случайная величина называется дискретной, если она принимает конечное или счетное множество значений. *Закон распределения (или ряд распределения)* дискретной с. в. X может быть задан таблицей вида:

X	x_1	x_2	...	x_n	...
P	p_1	p_2	...	p_n	...

Первая строка таблицы содержит возможные значения с. в. X , а вторая – вероятности, с которыми эти значения с. в. X принимает. Ниже показано, как, зная таблицу, построить функцию распределения с. в. X .

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 5.2.1. Вероятности, входящие в закон распределения дискретной случайной величины, удовлетворяют условию:

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n + \dots = 1$$

Эту теорему мы примем без доказательства.

Теперь изучим вид функции распределения дискретной случайной величины. Для этого сначала рассмотрим все на примере.

Пример 5.2.1. Построить функцию распределения дискретной случайной величины, заданной следующим законом распределения.

X	-1	2
P	0,6	0,4

Решение. Выберем произвольную точку, например, $x = -2$ и найдем $F(-2)$. По определению

$$F(-2) = P\{X < -2\}$$

Читается так. Вероятность того, что в результате эксперимента с. в. X примет значение меньше, чем -2 . Согласно таблице, задающей закон распределения, с. в. X не может принимать значения меньше единицы. Т. е. вероятность принять такое значение равна нулю: $F(-2) = 0$. Аналогичное утверждение справедливо для любого $x < -1$ (см. рис. 5.2.1.)

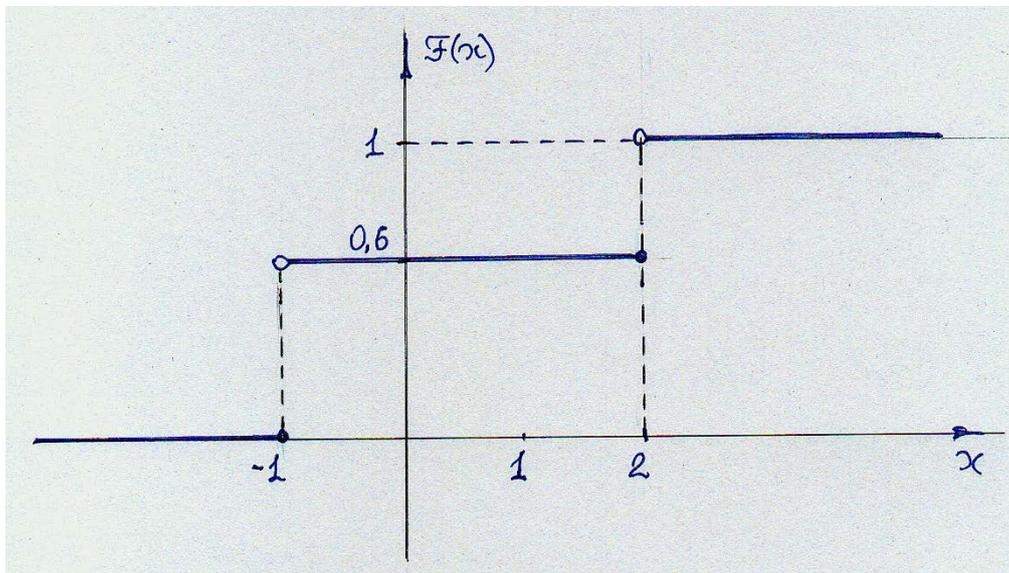


Рисунок 5.2.1 – График функции распределения

Теперь предположим, что $x = -1$ и найдем $F(-1)$. По определению

$$F(-1) = P\{X < -1\}$$

Согласно таблице, задающей закон распределения, с. в. X не может принимать значения меньше единицы. Т. е. вероятность принять такое значение равна нулю: $F(-1) = 0$. Теперь предположим, что, например, $x = 0$ и найдем $F(0)$. По определению $F(0) = P\{X < 0\}$

Согласно таблице, задающей закон распределения, с. в. X может принимать значения меньше, чем ноль. Это значение $x = -1$. Его случайная величина принимает с вероятностью $p = 0,6$. Следовательно, $F(0) = 0,6$. Аналогичное утверждение справедливо для любого $x \in (-1, 2]$. Теперь рассмотрим случай, когда $x > 2$. Пусть, например, $x=3$. По определению

$$F(3) = P\{X < 3\}$$

Согласно таблице, задающей закон распределения, с. в. X может принимать значения меньше трех. Это значение $x = -1$, принимаемое с вероятностью $p = 0,6$, и значение $x = 2$, принимаемое с вероятностью $p = 0,4$. Выражение $P\{X < 3\}$ означает, вероятность того, что в результате эксперимента с. в. X приняла значение меньше, чем три. Т. е. произошло хотя бы одно из двух событий: А – в результате эксперимента с. в. X приняла значение $x = -1$ и Б – в результате эксперимента с. в. X приняла значение $x = 2$. События А и Б несовместные, т. е. $p(AB) = 0$. Согласно закону распределения: $p(A) = 0,6$ и $p(B) = 0,4$. Нас интересует вероятность наступления хотя бы одного из событий

А и Б, т. е. вероятность суммы событий. По теореме о вероятности суммы получаем:

$$p(A + B) = p(A) + p(B) - p(AB) = 0,6 + 0,4 = 1$$

Аналогичное утверждение справедливо для любого $x > 2$. В итоге получаем график, изображенный на рисунке 5.2.1.

Таким же образом доказывается, что для дискретной случайной величины, принимающей конечное число различных значений, функция распределения является ступенчатой. Например, для дискретной случайной величины, заданной законом распределения функция распределения имеет вид (см. рис. 5.2.2):

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

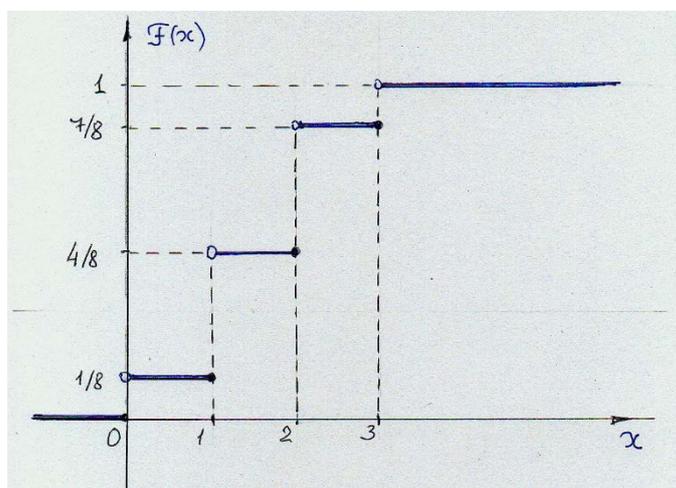


Рисунок 5.2.2 – График функции распределения. Для наглядности масштабы на осях взяты разными

Числовые характеристики дискретных случайных величин

Рассмотрим дискретную с. в. X , заданную законом распределения вида:

X	x_1	x_2	...	x_n	...
P	p_1	p_2	...	p_n	...

Определение 5.2.1. Математическим ожиданием (или средним значением) дискретной с. в. X называется число, обозначаемое $M(X)$ и равное:

$$M(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_k p_k + \dots \quad (5.2.1)$$

Выражение (5.2.1) представляет собой сумму бесконечного числа слагаемых, что с формальной точки зрения лишено смысла. Но математика изучает подобные абстракции (см. § 3.9).

Определение 5.2.2. Дисперсией дискретной с. в. X называется число, обозначаемое $D(X)$ и равное:

$$D(X) = \sum_{k=1}^{\infty} [x_k - M(X)]^2 p_k = [x_1 - M(X)]^2 p_1 + [x_2 - M(X)]^2 p_2 + \dots + [x_k - M(X)]^2 p_k + \dots \quad (5.2.2)$$

Определение 5.2.3. Средним квадратическим отклонением дискретной с. в. X называется число, обозначаемое $\sigma(X)$ и равное:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Рассмотрим пример.

Задача 5.2.1. Бригада рабочих, состоящая из трех человек, изготавливает браслеты. Каждый стандартный браслет состоит из 10 звеньев. Но иногда получаются и бракованные. Бракованный браслет содержит 9 или 11 звеньев. Количество звеньев в браслете, изготовленном каждым рабочим, является случайной величиной. Иначе брака вообще не было бы. Эта случайная величина является дискретной. Обозначим:

X_1 – случайная величина «число звеньев в браслете, изготовленном первым рабочим»;

X_2 – случайная величина «число звеньев в браслете, изготовленном вторым рабочим»;

X_3 – случайная величина «число звеньев в браслете, изготовленном третьим рабочим».

По итогам некоторого периода работы для каждого рабочего набралась статистика по качеству выработки. Это позволило для каждого рабочего записать закон распределения соответствующей с. в. X_k $1 \leq k \leq 3$.

Для первого рабочего получилось следующее.

X_1	9	10	11
P	0,1	0,8	0,1

Первая строка – количество звеньев в браслете. Вторая строка – вероятность того, что изготовленный браслет содержит такое количество звеньев. Подлинную вероятность брака мы знать не можем. Вместо нее мы ставим относительную частоту брака, найденную за какой-либо период работы, и приближенно считаем ее вероятностью. Таким образом, по данным второй строки этой таблицы получается, что *в среднем* из каждых 10 изготовленных браслетов один содержит 9 звеньев, 8 браслетов нормальные и один содержит

11 звеньев. Определим числовые характеристики дискретной случайной величины X_1 . По формулам получаем:

$$M(X_1) = \sum_{k=1}^3 x_k p_k = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 = 9 \times 0.1 + 10 \times 0.8 + 11 \times 0.1 = 10,$$

$$D(X_1) = \sum_{k=1}^3 [x_k - M(X_1)]^2 p_k = [x_1 - M(X_1)]^2 p_1 + [x_2 - M(X_1)]^2 p_2 + [x_3 - M(X_1)]^2 p_3 = [9 - 10]^2 \times 0.1 + [10 - 10]^2 \times 0.8 + [11 - 10]^2 \times 0.1 = 0.2$$

Для второго рабочего получилось следующее.

X_2	9	10	11
P	0,4	0,2	0,4

У этого бракодела *в среднем* из каждых 10 изготовленных браслетов четыре содержат по 9 звеньев, 2 браслета нормальные и четыре содержит по 11 звеньев. Определим числовые характеристики дискретной случайной величины X_2 . По формулам получаем: $M(X_2) = 10$, $D(X_2) = 0,8$.

Сравнение результатов этих двух примеров подтверждает следующее. Дисперсия характеризует степень разброса значений, принимаемых случайной величиной относительно ее математического ожидания. *Чем больше разброс, тем больше дисперсия и наоборот.*

Теперь рассмотрим итоги работы третьего рабочего.

X_3	9	10	11
P	0,1	0,7	0,2

Найдем математическое ожидание и дисперсию. Вычисления дают следующие результаты: $M(X_2) = 10,1$ и $D(X_2) = 0,25$.

Этот пример показывает, что математическое ожидание (или среднее значение) дискретной с. в. X не обязательно совпадает с одним из ее возможных значений.

Замечание 5.2.1. В ряде практически важных случаях закон распределения случайной величины определяется через числовые характеристики. Эти числовые характеристики, как мы увидим далее в главе 6, могут быть приближённо найдены из эксперимента.

Определение 5.2.4. *Модой* дискретной с. в. X называется наиболее вероятное её значение по сравнению с соседними. Оно обозначается $Mo(X)$.

В первом примере $Mo(X_1) = 10$, в третьем также $Mo(X_3) = 10$. Во втором случае мод две: $Mo_1(X_2) = 9$, $Mo_2(X_2) = 11$. Такое распределение называется бимодальным (в общем случае – полимодальным).

Задание

1. Какой вероятностный смысл имеют понятия: математическое ожидание, дисперсия, мода и медиана?
2. Дискретная с. в. X задана законом распределения:

X	-3	0	1	4
P	0,2	0,4	0,2	0,1

Найти: математическое ожидание, дисперсию и моду.

§ 5.3. Примеры распределений дискретных случайных величин

Рассмотрим примеры законов распределений дискретных случайных величин.

А) *Геометрическое распределение.* Его мы рассмотрим в целях иллюстрации некоторых введенных понятий и более к нему возвращаться не будем.

Определение 5.3.1. Будем говорить, что дискретная с. в. X распределена по *геометрическому закону* (имеет *геометрическое распределение*) с параметром $p > 0$, если ее закон распределения имеет вид:

X	1	2	3	...	k	...
P	p	qp	q^2p	...	$q^{k-1}p$...

где $q = 1 - p$.

Найдем математическое ожидание и дисперсию. Но сначала проверим, что определение корректно в том смысле, что для таблицы, задающей закон распределения, выполнена теорема 5.2.1. Действительно, складывая вероятности из второй строки таблицы, получаем:

$$\begin{aligned}
 p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_k + \dots &= p + qp + q^2p + \dots + q^{k-1}p + \dots = \\
 &= p(1 + q + q^2 + \dots + q^{k-1} + \dots) = p \frac{1}{1-q} = \frac{p}{p} = 1.
 \end{aligned}$$

Теперь найдем математическое ожидание. По формуле (5.2.1) и теореме 3.9.1 имеем:

$$\begin{aligned}
 M(X) &= \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_k p_k + \dots = \\
 &= 1 \times p_1 + 2 \times p_2 + \dots + k \times p_k + \dots = p + 2 qp + 3 q^2p + \dots + k q^{k-1}p + \dots = \\
 &= p(1 + 2q + 3q^2 + \dots + kq^{k-1} + \dots) = p(q + q^2 + q^3 \dots + q^k + \dots)' =
 \end{aligned}$$

$$= p \left(\frac{q}{1-q} \right)' = p \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p} \quad (5.3.1)$$

Аналогично, воспользовавшись формулой (5.2.2), можно доказать, что

$$D(X) = \frac{q}{p^2}.$$

Примером дискретной с. в. X , распределенной по геометрическому закону, является с. в. X – число бросаний игральной кости до первого появления шестерки. В этом случае $p = 1/6$ и закон распределения имеет вид:

X	1	2	3	...	k	...
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$	$\left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6}$...	$\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{6}$...

Найдем среднее число бросаний игральной кости до первого появления шестерки. Среднее значение – это математическое ожидание. По формуле (5.3.1) получаем:

$$M(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{1/6} = 6.$$

Итак, в среднем, при шести бросаниях игральной кости появится одна шестерка. Но это в среднем! И как мы знаем из § 4.3 и из жизненного опыта, может быть сколь угодно длинная серия бросков, вообще не содержащая шестерок.

Б) *Распределение Пуассона.*

Определение 5.3.2. Будем говорить, что дискретная с. в. X распределена по закону Пуассона с параметром $\lambda > 0$, если ее закон распределения имеет вид:

X	0	1	2	3	...	k	...
P	$e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda}{1!} e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^3}{3!} e^{-\lambda}$...	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$...

Прежде всего отметим, что определение корректно, т. е. что для так определенного закона распределения выполняется теорема 5.2.1. Действительно, в силу теоремы 3.9.2 и определения 5.3.2 получаем:

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_k + \dots &= e^{-\lambda} + \frac{\lambda}{1!} e^{-\lambda} + \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} + \dots + \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} + \dots = \\ &= e^{-\lambda} \cdot \left(1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \dots + \frac{\lambda^k}{k!} + \dots \right) = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1 \end{aligned}$$

Примем без доказательства утверждение о том, что $M(X) = \lambda$. Т. о., зная математическое ожидание (среднее значение) случайной величины, распределенной по закону Пуассона, мы можем полностью восстановить все вероятности.

Рассмотрим пример, показывающий, что теория может удивительным образом соответствовать практике. Этот пример взят из исследований

Борткевича В. И. (Ladislaus von Bortkiewicz, 1868 – 1931), основанный на статистических материалах Пруссии [71, с. 92].

Мы все знаем, что у женщины может родиться двойня. Таких мамочек мы неоднократно встречали на улице со специальной коляской; у некоторых даже есть знакомые семьи, где родилась двойня. Мы все также знаем, что у женщины может родиться тройня. Это встречается гораздо реже и не все в своей жизни тройню видели. Значительно более редкое явление – рождение четверни. Так вот Борткевич исследовал статистику этого явления, основываясь на материалах регистраций на протяжении 69 лет рождений четверней в Пруссии. Он задался параметром λ – среднее число четверней, родившихся в год и, предположив, что имеет место распределение Пуассона составил теоретическое распределение. Данные приведены в таблице 5.3.1. Всего за 69 лет было 109 случаев рождения четверней, поэтому в год в среднем рождалось $109 / 69 \approx 1,6$ четверней. Взяв $\lambda = 1.6$, Борткевич построил таблицу, содержащую фактические и теоретические результаты (см. табл. 5.3.1).

Таблица 5.3.1 – По материалам регистрации рождений в Пруссии за 69 лет рождение четверней наблюдалось в количествах, указанных в первой строке таблицы. Учету подлежат количества не менее пяти (это теоретическое требование). Поэтому последние четыре цифры во второй строке просуммированы и вместо них в третьей записана их сумма. То же самое сделано для пятой и шестой строк. Все, что нужно было знать Пуассону для написания теоретического распределения, это число λ – среднее число рождений четверней в год

1	Количество четверней в год	0	1	2	3	4	5	6	7
2	Сколько раз такое количество наблюдалось	14	24	17	9	2	2	1	0
3	Итого	14	24	17	9	5			
4	Теоретическая вероятность $p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	0,202	0,323	0,258	0,138	0,055	0,018	0,005	0,001
5	Теоретическая частота $np_k = 69 p_k$	13,9	22,3	17,8	9,5	3,795	1,242	0,345	0,069
6	Теоретическое количество	13,9	22,3	17,8	9,5	5,5			

Сравнение третьей и шестой строк показывает очень близкие значения. Подробнее об этом мы поговорим в § 6.5.

§ 5.4. Непрерывные случайные величины

Как уже отмечалось выше в § 5.1, непрерывная с. в. – это случайная величина, возможные значения которой целиком заполняют некоторый интервал. Там же давалось и определение плотности распределения.

Строго говоря, те случайные величины, с которыми мы имеем дело на практике, являются дискретными. Например, вес куска мяса в магазине измеряется с точностью до грамма или рост человека при медосмотре в сантиметрах. Но введение представления о том, что эти случайные величины являются непрерывными, существенно упрощает рассуждения, так как позволяет применять в работе с ними методы математического анализа.

Определение 5.4.1. *Плотностью распределения вероятностей* непрерывной случайной величины X называют функцию $f(x)$ – первую производную от функции распределения $F(x)$:

$$F'(x) = f(x)$$

Плотность распределения рассматривают только для непрерывных случайных величин.

Для непрерывных случайных величин определяются числовые характеристики, вероятностный смысл которых такой же, как и у дискретных.

Рассмотрим непрерывную с. в. X , заданную плотностью распределения $f(x)$.

Определение 5.4.2. *Математическим ожиданием (или средним значением)* непрерывной с. в. X называется число, обозначаемое $M(X)$ и равное:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \quad (5.4.1)$$

Определение 5.4.3. *Дисперсией* непрерывной с. в. X называется число, обозначаемое $D(X)$ и равное:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - M(X)]^2 f(x) dx$$

На практике для вычисления дисперсии используется формула более удобная, которая получается путем преобразований из формулы, заданной в определении:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - [M(X)]^2 \quad (5.4.2)$$

В формулах (5.4.1) и (5.4.2) молчаливо предполагается, что интегралы существуют или, как говорят (см. § 3.7), сходятся.

Определение 5.4.4. *Средним квадратическим отклонением* непрерывной с. в. X называется число, обозначаемое $\sigma(X)$ и равное:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Вероятностный смысл этих понятий такой же, как и в дискретном случае.

Определение 5.4.5. *Модой* непрерывной с. в. X называется точка максимума ее плотности $f(x)$. Мода обозначается символом $Mo(X)$. Как и в

дискретном случае, если мода единственна, то распределение называется унимодальным, а если не единственна, то полимодальным (см. рис. 5.4.1).

Определение 5.4.6. Медианой непрерывной с. в. X называется такая точка c (см. рис. 5.4.1), для которой выполняются равенства:

$$P\{X < c\} = P\{X > c\} = \frac{1}{2}.$$

Т. е. медиана – это такая точка c , для которой равновероятны события, состоящие в том, что в результате испытания с. в. X примет значение левее c или правее c . С геометрической точки зрения вертикаль, проходящая через медиану, делит площадь криволинейной трапеции пополам. Медиана с. в. X обозначается символом $Me(X)$.

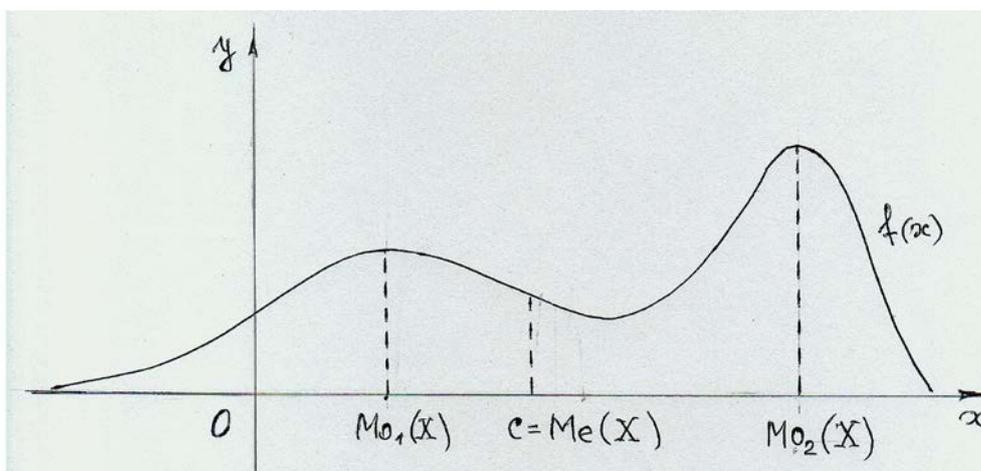


Рисунок 5.4.1 – График плотности $f(x)$ бимодальной непрерывной с. в. X .
Отмечены медиана $Me(X)$ и две моды: $Mo_1(X)$, $Mo_2(X)$

Пример 5.4.1. Непрерывная случайная величина задана функцией распределения.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in (-\infty, 0); \\ x^2, & \text{если } x \in [0, 1]; \\ 1, & \text{если } x \in (0, +\infty). \end{cases}$$

Найти:

- а) построить график функции распределения;
- б) плотность распределения и построить ее график;
- в) математическое ожидание;
- г) дисперсию;
- д) моду;
- е) медиану.

Решение. а) Строим график функции распределения. Он совпадает (см. рис. 5.4.2) с осью OX на множестве $(-\infty, 0)$, является участком графика параболы $y = x^2$, когда $x \in [0, 1]$ и, если $x \in (0, +\infty)$, то $F(x) \equiv 1$.

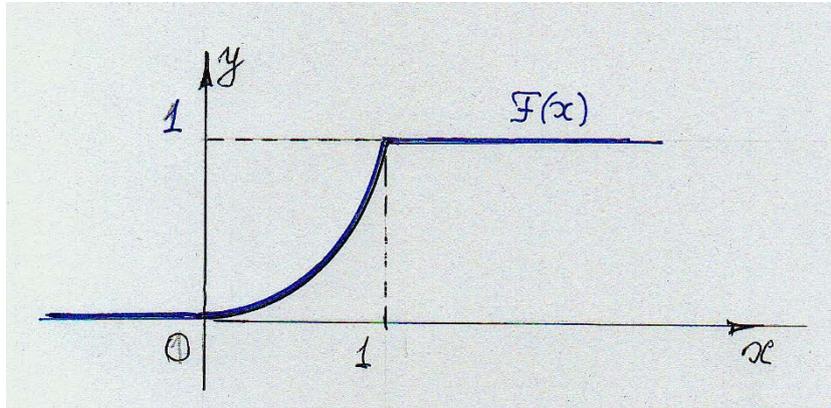


Рисунок 5.4.2 – График функции $F(x)$

б) Вычисляем производную на каждом интервале по отдельности. Получаем:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in (-\infty, 0); \\ 2x, & \text{если } x \in [0, 1]; \\ 0, & \text{если } x \in (0, +\infty). \end{cases}$$

Строим график плотности распределения (см. рис. 5.4.3).

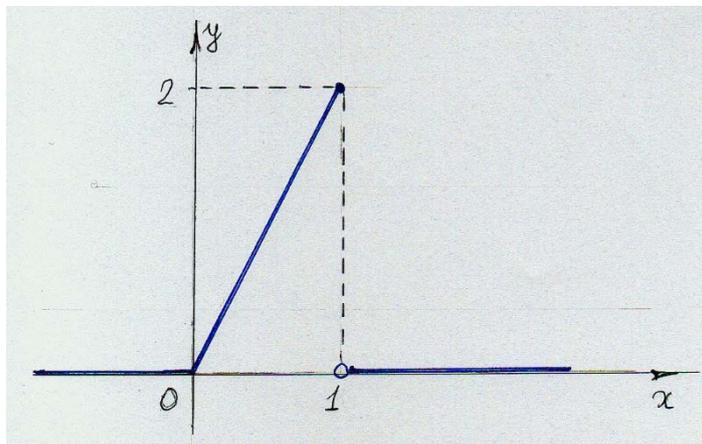


Рисунок 5.4.3 – График функции $f(x)$

в) Найдем математическое ожидание. По формуле (5.4.1), теореме 3.8.1, свойствам интеграла и формуле Ньютона-Лейбница получаем:

$$\begin{aligned} M(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{-\infty}^0 x f(x) dx + \int_0^1 x f(x) dx + \int_1^{+\infty} x f(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^0 x \cdot 0 dx + \int_0^1 x \cdot 2x dx + \int_1^{+\infty} x \cdot 0 dx = 0 + 2 \int_0^1 x^2 dx + 0 = 2 \frac{x^{2+1}}{2+1} \Big|_0^1 = \end{aligned}$$

$$= 2 \frac{1^{2+1}}{2+1} - 2 \frac{0^{2+1}}{2+1} = \frac{2}{3}$$

г) Найдем дисперсию. По формуле (5.4.2), теореме 3.8.1, свойствам интеграла и формуле Ньютона-Лейбница получаем:

$$\begin{aligned} D(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - M(X)^2 = 0 + \int_0^{+1} x^2 f(x) dx + 0 - M(X)^2 = \\ &= \int_0^{+1} x^2 2x dx - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 2 \int_0^1 x^3 dx - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 2 \frac{x^{3+1}}{3+1} \Big|_0^1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 2 \times \frac{1}{4} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18} \end{aligned}$$

д) Найдем моду. Из графика функции $f(x)$, изображенного на рисунке 5.4.3, видно, что мода единственна и что $Mo(X) = 1$.

е) Найдем медиану. По определению медиана это такая точка c , что

$$P\{-\infty < X < c\} = P\{c < X < +\infty\} = \frac{1}{2}$$

Так как по третьему свойству плотности распределения

$$P\{a < X < b\} = \int_a^b f(x) dx,$$

то:

$$P\{-\infty < X < c\} = \int_{-\infty}^c f(x) dx = \frac{1}{2}, \quad P\{c < X < +\infty\} = \int_c^{+\infty} f(x) dx = \frac{1}{2}.$$

Далее точку c можно найти аналитически, но там опять вычисления будут проводиться с интегралами. Поэтому мы пойдем другим, более простым путем. В третьем свойстве плотности распределения говорилось, что вероятность численно равна площади фигуры, расположенной под графиком функции $y = f(x)$. График функции $y = f(x)$ изображен на рисунке 5.4.3. Следовательно, наша задача сводится к тому, что надо найти такую точку c , которая (см. рис. 5.4.4) делит вертикальной прямой cc' площадь треугольника Oaa' пополам. Такая задача нам вполне по силам.

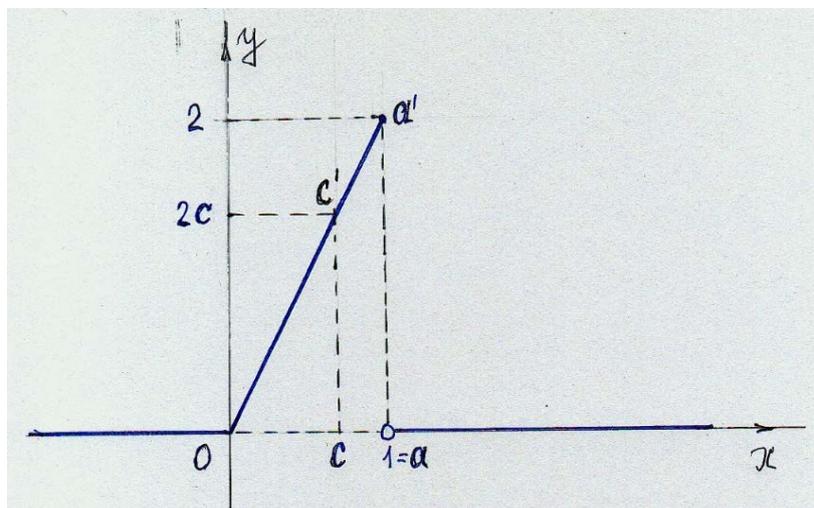


Рисунок 5.4.4 – Точка c – медиана с. в. X

Действительно, по условию (см. рис. 5.5.4) должно выполняться равенство:

$$S_{\Delta O c c'} = \frac{1}{2} S_{\Delta O a a'},$$

где $cc' = 2c$ и $aa' = 2$. Тогда: $S_{\Delta O c c'} = \frac{1}{2} \times Oc \times cc' = \frac{1}{2} \times c \times 2c = c^2$ и $S_{\Delta O a a'} = \frac{1}{2} \times Oa \times aa' = \frac{1}{2} \times 1 \times 2 = 1$. Следовательно, $c^2 = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$, откуда получаем, что $c = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,705$. Таким образом, $Me(X) = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,705$.

§ 5.5. Примеры законов распределения непрерывных случайных величин

В этом параграфе мы рассмотрим два непрерывных распределения: равномерное и нормальное. Равномерное мы разберем в учебных целях, а вот нормальное нами будет неоднократно использоваться в дальнейшем.

А) *Равномерное распределение.*

Определение 5.5.1. Будем говорить, что с. в. X подчинена *равномерному закону распределения* (распределена равномерно в интервале $[a, b]$) с параметрами a и b , $a < b$, если плотность распределения $f(x)$ имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in (-\infty, a); \\ \frac{1}{b-a}, & \text{если } x \in [a, b]; \\ 0, & \text{если } x \in (b, +\infty). \end{cases}$$

График плотности изображен на рисунке 5.5.1.

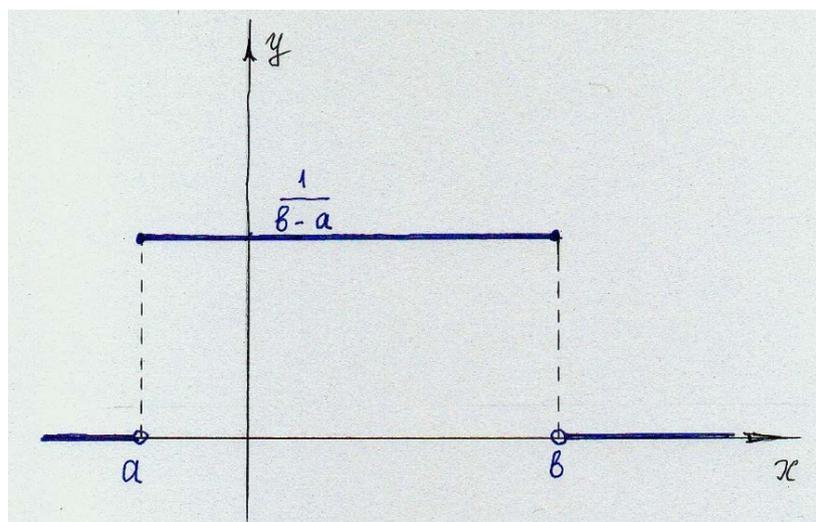


Рисунок 5.5.1 – График плотности равномерного распределения с параметрами: a и b , $a < b$

Теорема 5.5.1. Если с. в. X распределена равномерно на отрезке $[a, b]$, то:

$$M(X) = \frac{a+b}{2}; D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Примерами случайных величин, имеющих равномерное распределение, являются: время ожидания трамвая, курсирующего с постоянным интервалом движения; ошибка числа при округлении и др.

Пример 5.5.1. Автобус ходит с интервалом 6 минут. Пассажир подходит к остановке в произвольное время, в часы движения автобуса. Каково среднее время ожидания автобуса? Дайте ответ двумя способами:

- а) исходя из здравого смысла;
- б) на основании теоремы 5.5.1.

Ответ: 3 минуты.

Б) *Нормальный закон (нормальное распределение).*

Определение 5.5.2. Будем говорить, что с. в. X подчинена *нормальному* закону распределения с параметрами m и $\sigma > 0$, если плотность распределения имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad (5.5.1)$$

График плотности изображен на рисунке 5.5.2.

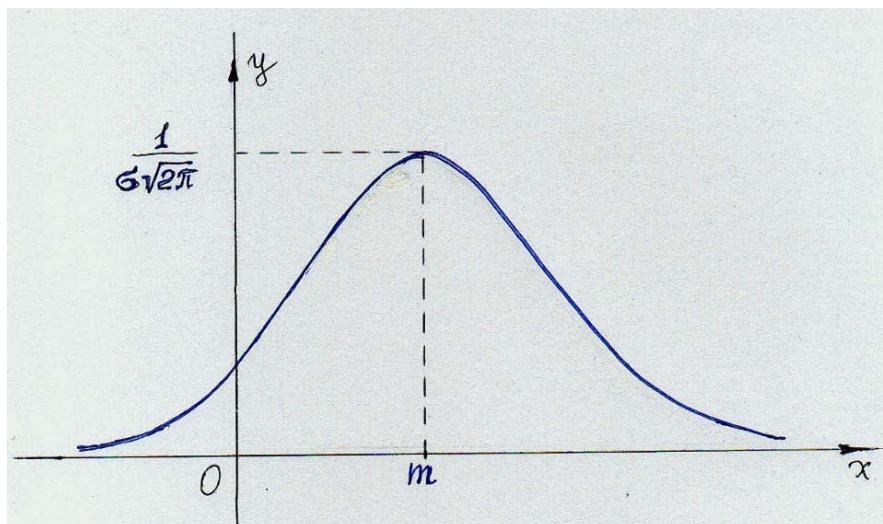


Рисунок 5.5.2 – График плотности нормального распределения с параметрами m и $\sigma > 0$

Теорема 5.5.2. Если с. в. X распределена нормально с параметрами m и $\sigma > 0$, то:

$$M(X) = m; D(X) = \sigma^2.$$

Примерами случайных величин, имеющих нормальное распределение, являются: величина отклонения пули от центра мишени до точки попадания в

мишень; величина отклонения размеров и веса детали от проектной при массовом производстве; вес картофеля определенного сорта, выращенного на своем огороде; размеры и вес рыбы какой-либо породы, выращенной в пруду и др.

Замечание 5.5.1. О центральной предельной теореме. Центральная предельная теорема – это общее название для группы теорем о связи закона распределения суммы большого числа случайных величин и нормального распределения. Главная особенность нормального распределения, отличающая его от всех других распределений, состоит в том, что оно является предельным законом, к которому приближается суммарное воздействие большого количества различных случайных величин. Это утверждение составляет суть центральной предельной теоремы, объясняющей почему в природе нормальное распределение встречается так часто.

Поясним это на примере. Время ожидания поезда метро для каждого пассажира является случайной величиной, распределенной равномерно. Возьмем группу пассажиров, которые зашли в метро, например, в период с 15.00 до 15.10.

Пусть их количество – 70 человек. Можно полагать, что для каждого пассажира параметры равномерного распределения будут одни и те же. Каждый из пассажиров будет ожидать свой поезд некоторое время. Рассмотрим суммарное время ожидания всеми этими пассажирами в указанный период. Так вот, оказывается, что это суммарное время будет случайной величиной, распределенной по закону, близкому к нормальному.

Говоря о суммарном воздействии случайных величин, Секей пишет [77, с. 49] следующее: «Следует подчеркнуть, что в природе такие «композиции» из случайных величин не всегда образованы их суммой, поэтому изучение поведения других функций очень важно. Пуанкаре как-то заметил с сарказмом, что все верят в универсальность нормального распределения: физики верят потому, что думают, что математики доказали его логическую необходимость, а математики верят, так как считают, что физики доказали это лабораторными экспериментами».

Теперь рассмотрим вопрос о вычислении вероятности попадания нормально распределенной случайной величины X в заданный интервал $[a, b]$. Согласно третьему свойству плотности распределения:

$$P\{a < X < b\} = \int_a^b f(x)dx,$$

Так как функция $f(x)$ – это плотность нормально распределенной с. в., то согласно (5.5.1):

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

После подстановки получаем:

$$P\{a < X < b\} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx \quad (5.5.2)$$

Полученное выражение можно упростить. Обозначим:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

Функция $\Phi(x)$ называется функцией Лапласа. Она является нечетной, т. е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. Для вычисления ее значений можно воспользоваться онлайн калькулятором или таблицей. Используя эту функцию, формулу (5.5.2) можно преобразовать к виду:

$$P\{a < X < b\} = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right) \quad (5.5.3)$$

Пример 5.5.1. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормально распределённой с. в. X соответственно равны 16 и 4. Найти вероятность того, что в результате испытания с. в. X примет значение из интервала (12, 24).

Решение. Воспользуемся формулой (5.5.3). В нашем случае $a = 12$, $b = 24$ и $m = 16$. Подставим эти значения в формулу (5.5.3). Получим, используя нечетность функции $\Phi(x)$:

$$P\{12 < X < 24\} = \Phi\left(\frac{24-16}{4}\right) - \Phi\left(\frac{12-16}{4}\right) = \Phi(2) - \Phi(-1) = \Phi(2) + \Phi(1).$$

Воспользовавшись, например, таблицей из [29, с. 326 – 327], находим, что $\Phi(1) = 0,3413$ и $\Phi(2) = 0,4772$. Окончательно получаем:

$$P\{12 < X < 24\} = 0,4772 + 0,3413 = 0,8185$$

Ответ: 0,8185.

В заключение параграфа установим одно соотношение, известное, как правило трех сигм.

Задача 5.5.1. Найти вероятность того, что нормально распределенная с. в. X с параметрами m и $\sigma > 0$ в результате испытания примет значение из интервала $(m - 3\sigma, m + 3\sigma)$.

Решение. Воспользуемся формулой (5.5.3). Получим при $a = m - 3\sigma$ и $b = m + 3\sigma$:

$$\begin{aligned} P\{a < X < b\} &= P\{m - 3\sigma < X < m + 3\sigma\} = \Phi\left(\frac{m+3\sigma-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{m-3\sigma-m}{\sigma}\right) = \\ &= \Phi(3) - \Phi(-3) = \Phi(3) + \Phi(3) = 2\Phi(3). \end{aligned}$$

По таблице [29, с. 327], находим, что $\Phi(3) = 0,49865$. Следовательно,

$$P\{m - 3\sigma < X < m + 3\sigma\} = 2 \times 0,49865 = 0,9973.$$

Ответ: $P\{m - 3\sigma < X < m + 3\sigma\} = 0,9973$.

Итак, мы получили, что в результате испытания нормально распределенная с. в. X с вероятностью 99,73 % примет значение из интервала $(m - 3\sigma, m + 3\sigma)$. То есть практически все возможные значения нормально распределенной с. в. X лежат в интервал $(m - 3\sigma, m + 3\sigma)$. Этот факт называется правилом трех сигм. Он имеет широкое практическое применение.

ГЛАВА 6. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

При слове «статистика» в головах читателей обычно всплывает крылатая фраза: «Существуют три вида лжи: ложь, наглая ложь и статистика». Авторство этому высказыванию приписывалось многим людям: Марку Твену, Дизраэли и другим, как людям известным, так не очень (см., например, [32, с. 509]). Ну, а сколько раз это цитировалось, так и не счесть. На тему злодеяния статистики стали обильно высказываться, начиная с конца XIX века. Дело в том, что примерно к середине XIX века началось активное использование статистического аппарата в практике [49, с. 184 – 185, 239 – 240] и, соответственно, появились первые цветочки, а затем и ягодки, на которые так живо откликнулось общественное мнение.

Но мы надеемся, что после внимательного ознакомления с содержанием этой и следующей глав вы сможете, как выразился Секей [77, с. 76], «хорошо разбираться в статистических нелепостях, видеть пользу и необходимость статистических выводов, а также извлекать наиболее важную информацию из данных».

Слово «статистика» происходит от латинского слова «status», которое переводится как «состояние» (в смысле – положение, в котором кто-нибудь или что-нибудь находится, например, быть в состоянии вражды с кем-нибудь; состояние погоды). И первоначально, когда статистика, как наука, еще только зарождалась, слово «статистика» связывалось с характеристикой состояния государства.

В настоящее время слово «статистика», с одной стороны, понимается как «собранные и классифицированные данные». С другой стороны, под словом «статистика» понимается наука, занимающаяся изучением методов сбора и обработки информации. Сюда входят отраслевые статистики: социальная, медицинская, демографическая и др. Под математической статистикой понимается наука, занимающаяся изучением методов сбора и обработки информации (т. е. результатов наблюдений), с целью построения математической модели наблюдаемой случайной величины (здесь модель – это условно говоря не железка, а формула).

Основные задачи математической статистики состоят в следующем.

1. Оценка вероятности по частоте. Например, вы бросаете игральный кубик и при этом не знаете – стандартный он или нет. Бросив его, скажем, 600 раз и получив при этом 98 раз выпадение шести очков, надо оценить (указать границы) подлинной вероятности выпадения шестерки для этого кубика.

2. Выдвижение гипотезы о законе распределения. Это иногда можно сделать исходя из физических соображений, опыта или вида гистограммы. Например, вас интересует закон распределения числа неисправных автобусов в день в автопредприятиях вашего города. Теория говорит, что это может быть распределение Пуассона.

3. Определение неизвестных параметров распределения. Предположим, что в предыдущем пункте была выдвинута гипотеза о

нормальном распределении наблюдаемой случайной величины. Формула для плотности (посмотрите § 5.5) содержит два параметра: математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение. Теперь, зная результаты наблюдений, нужно указать приближенное значение этих параметров.

4. Проверка статистических гипотез. Итак, в пунктах (2) и (3) мы нашли приближенный закон распределения наблюдаемой случайной величины. Опираясь на этот приближенный закон, можно построить (спрогнозировать) теоретическое поведение случайной величины. Возникает вопрос: не ошиблись ли мы в пункте (2) со своими гипотезами, не противоречат ли реальные результаты наблюдений нашим теоретическим прогнозам? То есть нужно проверить на соответствие результатам наблюдений выдвинутые статистические гипотезы.

5. Оценка зависимости между случайными величинами. Предположим, что вы изучаете две случайные величины: рост и вес мужчин-эскимосов Аляски в возрастной группе 20 – 25 лет. Ясно, что какая-то зависимость существует. Так же понятно, что она не будет выражаться точной формулой. Но, оказывается, можно написать (и в этом состоит решение проблемы) приближенную формулу.

6. Существуют и другие задачи.

Сбором и обработкой статистических данных люди начали заниматься с незапамятных времен (просто в силу массового бескультурья и повальной неграмотности они даже и не подозревали, что собирали и обрабатывали статистические данные). Эти данные были необходимы для установления величины налога и / или для информации о численности войска, которое можно собрать на случай войны. Так, например [77, с. 74 – 75]: «В Китае учет населения проводился более четырех тысяч лет назад. Согласно Библии, Моисей также подсчитывал всех мужчин своего народа старше 20 лет. ... Четвертая книга Моисея (Числа) содержит множество других результатов подсчета людей ... точно известно, что согласно результатам учета населения, Рим был первым городом с населением более миллиона жителей. Первый английский статистический документ «Книга судного дня», написанный в XI веке, также возник в связи с потребностями армии и налогообложения. ... Статистика стала наукой лишь в XVII веке. Ее основоположниками являются Джон Граунт (1620 – 1674) и сэр Уильям Петти (1623 – 1687). В книге Граунта «Естественные и политические наблюдения, сделанные над бюллетенями смертности» (1662 г.) исследовались вопросы народонаселения. ... В работе Петти «Политическая арифметика», опубликованной в 1689 г. после смерти автора, Англия, Голландия и Франция сравниваются по их населению, торговле и судоходству. Термин «политическая арифметика» можно считать предвестником слова «статистика». С развитием капитализма статистическими данными стали интересоваться не только государственные деятели, но и капиталисты. Для обработки данных использовались все более сложные математические методы, при этом увеличивалась и выгода от их применения, например, в страховом деле».

Отметим, что Граунт и Петти в своих трудах не использовали теорию вероятностей, но понятия и методы, применявшиеся ими, были с ней тесно связаны. Эта связь стала очевидной только после трудов Я. Бернулли.

В середине XIX века в работах бельгийского ученого Л. А. Ж. Кетле появляется интересный персонаж – «среднестатистический человек». С ним мы подробнее познакомимся в главе 7. Часто приходится слышим такие слова, как средняя зарплата, средний рост, среднестатистическое потребление чего-либо и т. п. Обычно это используется как синоним чего-то типичного. Но это происходит либо от непонимания, либо с целью сознательно заморочить голову собеседнику.

Дело в том, что помимо понятия «среднестатистический», или по-другому среднее арифметическое, необходимо учитывать понятие «медиана» (см. § 5.4), то есть такое значение, что половина всех данных меньше, чем медиана, а половина – больше. Если в стране очень много бедных и несколько очень богатых людей, то средний доход на человека мало, о чем говорит, а вот медиана сразу выявит это неравенство.

Исследования Кетле о среднем человеке вызвали споры в научных кругах.

Так известный математик Ж. Бертран писал [49, с. 210] следующее: «В тело среднего человека бельгийский автор вложил среднюю душу». И далее, средний человек «лишен страстей и пороков, он ни безумен, ни мудр, ни невежда, ни ученый ... (он) зауряден во всем. После того как он съедает в течение тридцати восьми лет средний паек здорового солдата, ему положено умереть не от старости, а от средней болезни, которую обнаруживает в нем статистика».

Добавим, что перечисленное Ж. Бертраном является далеко не самым прискорбным. Дело в том, что, например, средний рост не соответствует среднему весу и т. д. Но для нас средний человек интересен (об этом далее в § 7.4) словами Сэра Джошуа Рейнольдса, одного из ведущих британских художников 18-го века, основателя и первого президента Королевской академии художеств в Лондоне, который сказал [77, с. 123], «что в среднем (т. е. в занимающем среднее положение. – *Прим. авт.*) источник прекрасного».

Это все были цветочки. А вот и обещанные ягодки. Как выяснилось, творческое сопоставление результатов наблюдений между случайными величинами привело к поистине сенсационным открытиям в науке. Так, например, ученые математически, или, как это говорится, «на цифрах», доказали [77, с. 93], что имеется зависимость «между числом гнезд аистов и числом младенцев»; что в Англии и Уэльсе обнаружилась связь между числом радиослушателей и числом «сумасшедших и умственно отсталых людей» и что рост в среднем человека зависит от вероисповедания, поскольку «при движении от Шотландии к Сицилии» явно прослеживается зависимость между долей католического населения и средним ростом – по мере увеличения процента католиков наблюдается уменьшение среднего роста. И т. д.

Заканчивая это краткое введение, отметим, что рождение математической статистики, как самостоятельной математической дисциплины произошло в 20 – 30-х годах XX столетия. И что сегодня математическая статистика является

бурно развивающимся разделом математики, результаты которого находят своё применение во многих прикладных вопросах.

Задание

Как вы думаете, нет ли ошибок в рассуждениях ученых про аистов, сумасшедших и католиков?

§ 6.1. Основные понятия математической статистики

Перейдем к собственно понятиям математической статистики. Как и в § 4.1, определения будут носить по большей части описательный характер, что позволит лучше понять смысл новых терминов.

Итак, пусть мы изучаем некоторую случайную величину X – вес курицы из некоторой конкретной птицефабрики.

Генеральной совокупностью называется множество всех возможных значений наблюдаемой (изучаемой) случайной величины X , относительно которой предполагается делать выводы.

Например, если вы хозяин этой птицефабрики и хотите знать, сколько продадите мяса, то генеральной совокупностью будет множество (перечень) весов всех птиц вашей фабрики. Естественно, гоняться по отдельности за каждой курицей и взвешивать ее, при условии, что птиц на фабрике десятки, а то и сотни тысяч, совершенно невыполнимая задача. Так никто не делает. Поэтому переходим к следующему понятию.

Выборочной совокупностью (выборкой) называется множество всех наблюдавшихся значений (в нашем примере значений весов тех куриц, которых поймали и взвесили) из всей генеральной совокупности. (В учебной литературе иногда используется пикантный, на наш взгляд, и очень неудачный термин «наблюдённых»).

Это часть генеральной совокупности, отобранная специальным методом и предназначенная для характеристики всей генеральной совокупности. Например, на той же птицефабрике достаточно взвесить не всех, а только часть птиц, чтобы иметь представление об общем весе товара. Элементы выборки обозначаются маленькими латинскими буквами с индексами $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$.

Здесь сразу начинаются проблемы. Во-первых, сколько выбрать? Во-вторых, как выбрать? Возьмешь мало, потеряешь информацию. Возьмешь много – сделаешь лишнюю работу, что тоже нехорошо. Опять-таки, как брать. Очевидно, что нельзя взять первый попавшийся загон, взвесить куриц и на этом остановиться, а вдруг их специально откармливают к взвешиванию, а остальным цыплятам корм не добавляют, или еще какие-то проблемы. Нужно птиц как-то выбирать равномерно по всей фабрике.

Для получения хороших оценок желаемой информации необходимо, чтобы выборка была *репрезентативной* (или *представительной*), т. е. достаточно полно представляла изучаемые особенности генеральной

совокупности. Условием репрезентативности выборки является соблюдение случайности отбора, то есть все объекты генеральной совокупности должны иметь равные вероятности попасть в выборку. Как добиться репрезентативности выборки, вопрос отдельный и очень непростой, мы его рассматривать не будем.

Далее, поймали, взвесили, получили набор чисел. Что с этим делать? Для начала надо хоть как-то поставить эти числа по порядку. Итак, переходим к следующему понятию.

Вариационным рядом (frequency table) называется упорядоченный по величине ряд чисел выборки. Как правило, распределяют от меньшего значения к большему. Числа вариационного ряда называются *вариантами*.

Объем выборки – общее число элементов выборки.

Пример 6.1.1. Рассмотрим выборку:

5, 8, 1, 1, 3, 2, 1, 0, 5, 1, 3, 1, 1, 1, 0, 8, 0, 1, 0, 0

Вариационный ряд для этой выборки выглядит следующим образом:

0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 3, 5, 5, 8, 8

Выборка содержит 20 элементов, следовательно, объем выборки равен 20. Обычно объем выборки обозначают маленькой латинской буквой n . Записывают: $n=20$. В нашем случае вариационный ряд содержит 6 различных элементов, так как некоторые элементы повторяются несколько раз.

Частота (или *абсолютная частота*) показывает, сколько раз данное значение повторяется в выборке. Например, в примере 6.1.1 частота единицы равна 8, а частота восьмерки равна 2.

Возникает вопрос: 8 это много или мало? Если выборка объема 20, то достаточно много. Почти половина. Если же объем выборки, скажем, 200, то частота 8 – это как-то маловато. Чтобы отличать первую ситуацию от второй, вводят последующие понятия.

Относительная частота (или *частость*) получается из абсолютной, если ее поделить на объем выборки. Здесь уже все ясно, $\frac{8}{20} > \frac{8}{200}$. Частоту будем обозначать n_i , а относительную частоту через $w_i = \frac{n_i}{n}$.

Перечень вариантов и соответствующих им частот или называется *статистическим распределением выборки*, или *статистическим рядом*. Записывается статистический ряд в виде таблицы с частотами или относительными частотами:

x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_m
n_i	n_1	n_2	n_3	...	n_m

x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_m
w_i	w_1	w_2	w_3	...	w_m

Здесь m – количество различных элементов вариационного ряда, $m \leq n$. Числа n_i – показывающие сколько раз встречаются значения x_i в ряду наблюдений. Перечень значений x_i и соответствующих им частот или частостей называется статистическим распределением выборки или статистическим рядом.

В нашем примере 6.1.1 получаем:

x_i	0	1	2	3	5	8
n_i	5	8	1	2	2	2

x_i	0	1	2	3	5	8
w_i	5/20	8/20	1/20	2/20	2/20	2/20

Пример 6.1.2. Дана выборка: 1, 3, 3, 1, 5, 3, 1, 1, 2, 5. Найти объем выборки. Составить: вариационный ряд и статистический ряд частот и относительных частот.

Решение. Объем выборки $n = 10$. Вариационный ряд: 1, 1, 1, 1, 2, 3, 3, 3, 5, 5. Статистический ряд для нашего примера 6.1.2:

x_i	1	2	3	5
n_i	4	1	3	2

или

x_i	1	2	3	5
p_i	4/10	1/10	3/10	2/10

где $p_i = \frac{n_i}{n}$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Ранее, в § 5.1 (определение 5.1.3) было введено понятие функции распределения. Будем называть ее *теоретической* функцией распределения. Теперь вводится новое понятие – эмпирическая функция распределения.

Эмпирической (или *статистической*) *функцией распределения* называется функция $F_n(x)$, такая, что для каждого x значение функции в этой точке равно относительной частоте события, полученной по данной выборке, и состоящей в том, что в результате эксперимента с. в. X примет значение меньше, чем x , т. е.

$$F_n(x) = \frac{n_x}{n},$$

где n – объем выборки, n_x – число наблюдавшихся значений, меньших чем x .

Эмпирическая функция распределения, как об этом будет сказано ниже, – это приближение теоретической функции распределения, построенное с помощью выборки.

Пример 6.1.3. Построить эмпирическую функцию распределения по статистическому распределению выборки из примера 6.1.2:

x_i	1	2	3	5
p_i	4/10	1/10	3/10	2/10

Решение. Рассуждения напоминают построение функции распределения дискретной с. в., которое проводилось при решении примера 5.3.1.

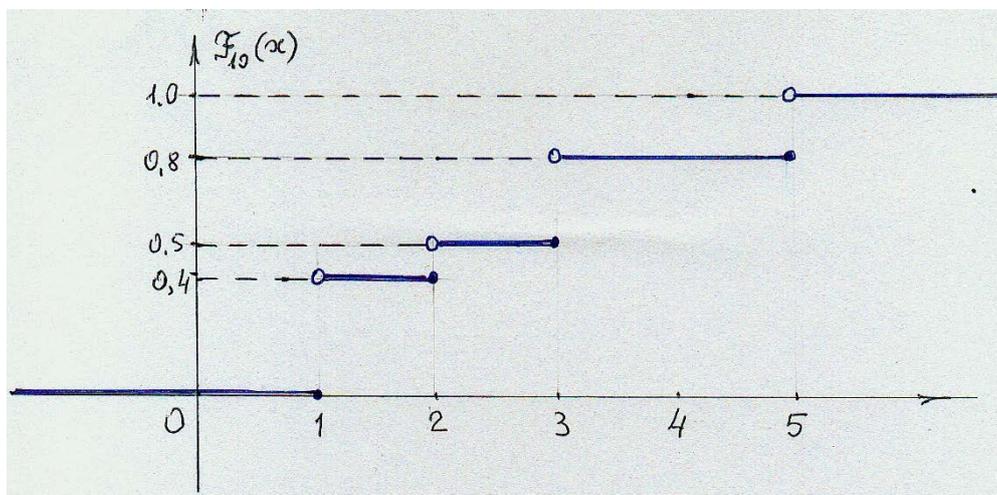


Рисунок 6.1.1 – График эмпирической функции распределения.
Для наглядности масштаб на осях выбран разным

Выберем (см. рис. 6.1.1) произвольную точку, например, $x = -2$ и найдем $F(-2)$. Объем выборки $n = 10$. По определению эмпирической функции распределения $F_n(x)$ получаем, что

$$F_{10}(-2) = \frac{n_{-2}}{10} = 0,$$

так как, согласно таблице, задающей закон распределения, левее точки $x = 1$ случайная величина никаких значений не принимала, т. е. $n_{-2} = 0$. То же самое можно сказать про любое значение аргумента $x \in (-\infty, 1)$. Теперь предположим, что $x = 1$ и найдем $F_{10}(1)$. По определению $F_{10}(1)$ равно относительной частоте события, состоящего в том, что случайная величина приняла значение меньше, чем $x = 1$. Но этого не было, т. е. $n_1 = 0$ и, следовательно, $F_{10}(1)$.

Теперь предположим, что $x \in (1, 2)$. Пусть, например, $x = 1,5$ и найдем $F_{10}(1,5)$. Согласно определению,

$$F_{10}(1,5) = \frac{n_{1,5}}{10},$$

где $n_{1,5}$ – число наблюдений, меньших чем 1,5. Таких наблюдений было 4. Следовательно, $F_{10}(1,5) = \frac{4}{10} = 0,4$. Теперь предположим, что $x = 2$ и найдем $F_{10}(2)$. По определению $F_{10}(2)$ равно относительной частоте события, состоящего в том, что случайная величина приняла значение меньшее, чем $x = 2$. Но это было только при $x = 1$, то есть $n_2 = 4$ и, следовательно, $F_{10}(2) = 0,4$.

Теперь предположим, что $x \in (2, 3)$. Пусть, например, $x = 2,5$. Найдем $F_{10}(2,5)$. Согласно определению,

$$F_{10}(2,5) = \frac{n_{2,5}}{10},$$

где $n_{2,5}$ – число наблюдений, меньших чем 2,5. Таких наблюдений было $4 + 1 = 5$. Следовательно, $F_{10}(2,5) = 0,5$. Теперь предположим, что $x = 3$ и найдем $F_{10}(3)$. По определению $F_{10}(3)$ равно относительной частоте события, состоящего в том, что случайная величина приняла значение меньшее, чем $x = 3$. Но это было при $x = 1$ и $x = 2$ т. е. $n_3 = 5$ и, следовательно, $F_{10}(3) = 0,5$.

Рассуждая далее аналогичным образом, получаем, что $F_{10}(x) = 0,4 + 0,1 + 0,3 = 0,8$, если $x \in (3, 4]$ и $F_{10}(x) = 1$, если $x \in (4, +\infty)$. Окончательный график изображен на рисунке 6.1.1.

Для чего же нужно построение функции $F_n(x)$? Оказывается (это было установлено советским математиком В. И. Гливленко и итальянским Ф. П. Кантелли), что при неограниченном увеличении объема выборки n функции $F_n(x)$ стремятся к $F(x)$, а графики функций $F_n(x)$ все точнее и точнее приближают график функции $F(x)$. (Это общий смысл их теоремы. Для точной же формулировки теоремы Гливленко – Кантелли необходимо введение новых дополнительных математических понятий, а потом формулировку все равно пришлось бы переводить на русский популярный).

Задание

Дана выборка: -1, 4, 0, -1, -1, 0, 2, 2, 0, 0. Найти:

- объем выборки;
- вариационный ряд;
- статистический ряд частот;
- статистический ряд относительных частот;
- построить эмпирическую функцию распределения.

§ 6.2. Числовые характеристики статистического ряда

Пусть дан статистический ряд

x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_m
n_i	n_1	n_2	n_3	...	n_m

Выборочным средним (обозначается \bar{x}) называется среднее арифметическое всех значений выборки:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^m x_i n_i}{n} = \sum_{i=1}^m x_i w_i \quad (6.2.1)$$

В примере 6.1.1 из предыдущего § 6.1 был построен статистический ряд:

x_i	0	1	2	3	5	8
n_i	5/20	8/20	1/20	2/20	2/20	2/20

Тогда для выборки из примера 6.1.1 получаем:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^6 x_i n_i}{20} = \sum_{i=1}^6 x_i w_i = 0 \times \frac{5}{20} + 1 \times \frac{8}{20} + 2 \times \frac{1}{20} + 3 \times \frac{2}{20} + 5 \times \frac{2}{20} + 8 \times \frac{2}{20} = \frac{42}{20} = 2.1$$

Выборочной дисперсией (обозначается $D_{\text{выб}}$) называется среднее арифметическое квадратов отклонений значений выборки от выборочной средней \bar{x} , т. е.

$$D_{\text{выб}} = \frac{\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2 n_i}{n} = \sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2 w_i$$

В нашем примере 6.1.1:

$$\begin{aligned} D_{\text{выб}} &= (0 - 2,1)^2 \times \frac{5}{20} + (1 - 2,1)^2 \times \frac{8}{20} + (2 - 2,1)^2 \times \frac{1}{20} + (3 - 2,1)^2 \times \frac{2}{20} + \\ &+ (5 - 2,1)^2 \times \frac{2}{20} + (8 - 2,1)^2 \times \frac{2}{20} = (2,1)^2 \times \frac{5}{20} + (1,1)^2 \times \frac{8}{20} + (0,1)^2 \times \frac{1}{20} + \\ &+ (0,9)^2 \times \frac{2}{20} + (2,9)^2 \times \frac{2}{20} + (5,9)^2 \times \frac{2}{20} = 4,41 \times \frac{5}{20} + 1,21 \times \frac{8}{20} + 0,01 \times \frac{1}{20} + \\ &+ 0,81 \times \frac{2}{20} + 8,41 \times \frac{2}{20} + 34,81 \times \frac{2}{20} = (22,05 + 9,68 + 0,01 + 1,62 + 16,82 + \\ &+ 69,62) / 20 = 110,12 / 20 = 5,506 \end{aligned}$$

Как и раньше, можно использовать для вычисления более простую форму:

$$D_{\text{выб}} = \sum_{i=1}^m (x_i)^2 w_i - (\bar{x})^2, \quad (6.2.2)$$

где m – число различных значений случайной величины.

Помимо $D_{\text{выб}}$, для оценки дисперсии используют и так называемую *исправленную выборочную дисперсию* $D_{\text{испр}}$ или, используя другое обозначение, s^2 :

$$D_{\text{испр}} = s^2 = \frac{n}{n-1} D_{\text{выб}} = \frac{\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2 n_i}{n-1} \quad (6.2.3)$$

В нашем примере 6.1.1:

$$D_{\text{испр}} = \frac{20}{20-1} 5.506 = 5.795$$

Замечание 6.2.1. При больших значениях n коэффициент $\frac{n}{n-1}$ очень близок к единице, и можно считать, что обе формулы дают приблизительно одно значение: $D_{\text{выб}} \approx D_{\text{испр}}$. То же самое можно говорить и про исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение: $\sigma \approx \sqrt{s^2}$.

Мы в дальнейшем будем использовать обозначения: \bar{x} – для выборочного среднего, $D_{\text{выб}}$ – для выборочной дисперсии и s^2 – для исправленной выборочной дисперсии. (В учебной и научной литературе могут встречаться и другие обозначения.)

Теперь поговорим о том, откуда взялись две формулы для одного понятия. Результат конкретным образом зависит от данной выборки, для которой мы считаем \bar{x} или s^2 . Если возьмем другую выборку, то получим другие числа. Возникает вопрос, а какое число лучше. И еще один вопрос, а что мы вообще получаем в итоге. Отсюда возникает необходимость накладывать на наши оценки соответствие каким-либо свойствам, которые позволяют нам получать что-то более или менее вменяемое.

Доказано, что при неограниченном увеличении объема выборки выборочное среднее стремится к математическому ожиданию, а выборочная дисперсия – к дисперсии. Поэтому выборочное среднее можно использовать в качестве приближенного значения математического ожидания, а выборочную дисперсию – в качестве приближенного значения дисперсии.

Пример 6.2.2. Игральный кубик брошен 12 раз (реально проведенный эксперимент). Количество выпавших очков было последовательно записано: 4, 3, 2, 6, 4, 2, 1, 3, 4, 5, 6, 4. Пусть X – случайная величина «число выпавших очков при бросании кубика». По результатам наблюдений найти: объем выборки, вариационный ряд, статистический ряд, величину \bar{x} . Полученное значение выборочного среднего сравнить с мат. ожиданием.

Решение.

Выборка: 4, 3, 2, 6, 4, 2, 1, 3, 4, 5, 6, 4.

Объем выборки: 12.

Вариационный ряд: 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 6, 6.

Статистический ряд:

x_i	1	2	3	4	5	6
n_i	1	2	2	4	1	2

Найдем \bar{x}_B . По формуле (6.2.1) получаем:

$$\bar{x} = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^6 x_i n_i = \frac{1}{12} (1 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 2 + 4 \times 4 + 5 \times 1 + 6 \times 2) =$$

$$= 44 / 12 \approx 3,67.$$

Найдем математическое ожидание. Для этого запишем закон распределения с. в. X . Так как с. в. X может принимать только значения 1, 2, 3,

4, 5, 6 и каждое из них с одинаковой вероятностью, равной $1/6$, то закон распределения с. в. X имеет вид:

X	1	2	3	4	5	6
P	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$

По формуле математического ожидания получаем:

$$M(X) = \sum_{k=1}^6 x_k p_k = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_6 p_6 = 1 \times 1/6 + 2 \times 1/6 + 3 \times 1/6 + 4 \times 1/6 + 5 \times 1/6 + 6 \times 1/6 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) \times 1/6 = 21 \times 1/6 = 3,5$$

Итак, у нас есть формулы, дающие приближенные значения для математического ожидания и дисперсии, причем для дисперсии даже две. А может быть есть другие, более точные и более простые? В связи с этим вопросом рассмотрим немного теории.

Если вид закона распределения случайной величины известен (или мы можем обоснованно его предположить), то возникает задача оценки (нахождения) приближенного значения параметров распределения. Чтобы не говорить долго “мы берем то-то и такое-то”, договоримся, что у нас есть просто некоторый параметр θ (математическое ожидание, дисперсия и так далее). Буквой $\tilde{\theta}_n = \tilde{\theta}_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ будем обозначать оценку этого параметра, то есть конкретное число \bar{x} или s^2 , полученное с использованием конкретной выборки x_1, x_2, \dots, x_n . Т. е. оценка является случайной величиной, так как зависит от взятой выборки объема n , а число $\tilde{\theta}_n$ есть значение или, как говорят, реализация этой случайной величины.

Статистической (или *точечной*) *оценкой* $\tilde{\theta}_n$ параметра θ называют его приближенное значение, зависящее от данных выборки. Иногда статистическую оценку называют просто *статистикой*.

Оценка $\tilde{\theta}_n$ называется *несмещенной*, если $M(\tilde{\theta}_n) = \theta$. Если же $M(\tilde{\theta}_n) \neq \theta$, то оценка $\tilde{\theta}_n$ называется *смещенной*.

Если $M(\tilde{\theta}_n) \rightarrow \theta$, при $n \rightarrow \infty$, то оценка $\tilde{\theta}_n$ называется *асимптотически несмещенной*.

Оценка $\tilde{\theta}_n$ параметра θ называется *состоятельной*, если она сходится по вероятности к оцениваемому параметру, т. е., что для любого $\varepsilon > 0$ выполняется равенство:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\tilde{\theta}_n - \theta| < \varepsilon\} = 1 \quad (6.2.4)$$

Разберем содержание этой формулы. Выражение $P\{|\tilde{\theta}_n - \theta| < \varepsilon\}$ расшифровывается так: вероятность того, что величина $\tilde{\theta}_n - \theta$ по модулю меньше, чем число ε , или вероятность того, что случайная величина $\tilde{\theta}_n$ отклонится от числа θ менее, чем на ε . Теперь всё выражение (6.2.4) означает, что эта вероятность стремится к единице.

Переводя на русский язык, это означает следующее. Какое бы малое число ε мы ни взяли, вероятность того, что приближенное значение $\tilde{\theta}_n$ отклонится от числа θ меньше, чем на ε , стремится с ростом n к единице. Т. е. событие, состоящее в том, что приближенное значение $\tilde{\theta}_n$ отклонится от числа θ меньше, чем на ε , со временем станет событием практически достоверным. Или уж совсем упрощенно: со 100 % гарантией $\tilde{\theta}_n$ стремится к θ . (Но без абсолютной гарантии! Поясним этот логический кульбит. Например, двое играют в такую игру: один загадывает вещественное число, а другой его угадывает. Можно со 100 % гарантией утверждать, что не угадает, но гарантировать – нельзя.)

Свойство состоятельности *обязательно* для любого правила оценивания (несостоятельные оценки не используются, а вот смещённые используются).

Несмещенная оценка $\tilde{\theta}_n$ параметра θ называется *эффективной*, если она имеет наименьшую дисперсию среди всех возможных несмещенных оценок параметра θ , т. е. оценка $\tilde{\theta}_n$ эффективна, если ее разброс относительно математического ожидания меньше, чем у остальных.

Вернемся «к нашим баранам», то есть оценкам. Доказано, что состоятельной и несмещенной оценкой математического ожидания является \bar{x} . С дисперсией, к сожалению, все не так просто. Оценка $D_{\text{выб}}$ является самой простой и понятной, но смещенной. Поэтому и возникла исправленная выборочная дисперсия s^2 . Как уже говорилось, при больших объемах выборки дисперсии практически совпадают, поэтому исправленную выборочную дисперсию используют при небольших объемах выборки в 20 – 30 элементов.

Сравнивая практические результаты с теоретическими, замечаем, что экспериментальные характеристики отличаются от теоретических. Для того чтобы сделать разницу меньше, следует существенно увеличить объем выборки.

Задание

1. Ответьте на следующие вопросы.

а) К чему стремится выборочное среднее при увеличении объема выборки.

б) Напишите формулу для вычисления \bar{x}_B .

в) Чему приближенно равно математическое ожидание.

2. Дана выборка: 4, 3, 3, 6, 7, 7, 3, 5, 6, 5, 5, 4, 6, 3, 7, 6, 4, 5, 7, 4.

Найти: статистический ряд относительных частот, величину \bar{x} , $D_{\text{выб}}$ и $D_{\text{испр}} = s^2$.

§ 6.3. Интервальный (группированный) статистический ряд. Гистограмма

При большом объеме выборки анализ статистического ряда становится затруднительным, а то и вовсе невозможным, так как столбиков в таблице, задающей статистическое распределение выборки, может стать очень много. Например, если мы изучаем случайную величину – рост человека и измеряем его с точностью до миллиметра, то количество столбиков в таблице статистического ряда будет не на много меньше объема выборки. А объем выборки должен

измеряться по крайней мере сотнями наблюдений. Вообще подобные ситуации типичны для непрерывных случайных величин. Так вот, в случае большого объема выборки и многоэлементности статистического ряда поступают следующим образом.

Пусть объем выборки равен n . Запишем вариационный ряд: $x_{min} = x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq x_n = x_{max}$. Таким образом, весь интервал наблюдений составляет отрезок $[x_{min}, x_{max}]$. Разобьем этот интервал (см. рис. 6.3.1) на некоторое число k обычно равных по длине элементарных отрезков точками $a_0 = x_{min} < a_1 < a_2 < \dots < a_k = x_{max}$ и обозначим:

$$\Delta_1 = [a_0, a_1), \Delta_2 = [a_1, a_2), \dots \Delta_k = [a_{k-1}, a_k].$$

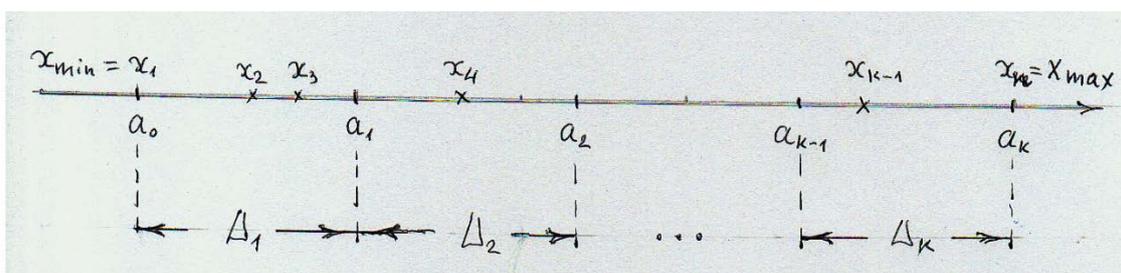


Рисунок 6.3.1 – Элементарные интервалы

Интервальным (или группированным) статистическим рядом называется совокупность элементарных интервалов и соответствующих им частот, т. е. чисел, показывающих сколько раз случайная величина реализовалась (приняла значение) в данном интервале.

Интервальный (группированный) статистический ряд изображается в виде таблицы, первая строка которой содержит интервалы Δ_i , вторая – соответствующие им частоты n_i и обычно добавляется третья строка с относительными частотами $w_i = \frac{n_i}{n}$, $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$. На рис. 6.3.2 представлен пример интервального статистического ряда.

Δ_i	Δ_1	Δ_2	...	Δ_k
n_i	n_1	n_2	...	n_k
w_i	w_1	w_2	...	w_k

Рисунок 6.3.2 – Пример интервального статистического ряда

Для выбора числа k – количества элементарных интервалов нет жестких правил, есть лишь различные рекомендации. Например, формула Стерджеса:

$$k = \frac{x_{max} - x_{min}}{1 + 1.322 \lg n}$$

При вычислении по этой формуле получается, как правило, число нецелое. Его округляют в том смысле, что берут рядом стоящее целое. Есть и другие формулы. Подробнее о практике выбора числа k мы поговорим в главе 7.

Статистическое распределение изображается графически в виде фигуры, называемой гистограммой.

Гистограммой частот (или *частостей*) называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длины h , а высоты равны отношению $\frac{n_i}{h}$ – плотности частоты или $\frac{n_i}{nh} = \frac{w_i}{h}$ – плотности относительной частоты. Так что площадь каждого прямоугольника, составляющего гистограмму частот, равна соответствующей частоте, а площадь каждого прямоугольника, составляющего гистограмму относительных частот, равна соответствующей относительной частоте. Тогда, очевидно, что вся площадь гистограммы частот равна объему выборки, а площадь гистограммы относительных частот равна единице. Напомним, что согласно свойству 5.1.2 площадь фигуры, ограниченной снизу осью OX , а сверху графиком плотности $f(x)$, равна единице. Как приблизительно выглядит гистограмма, показано на рисунке 6.3.2а ниже.

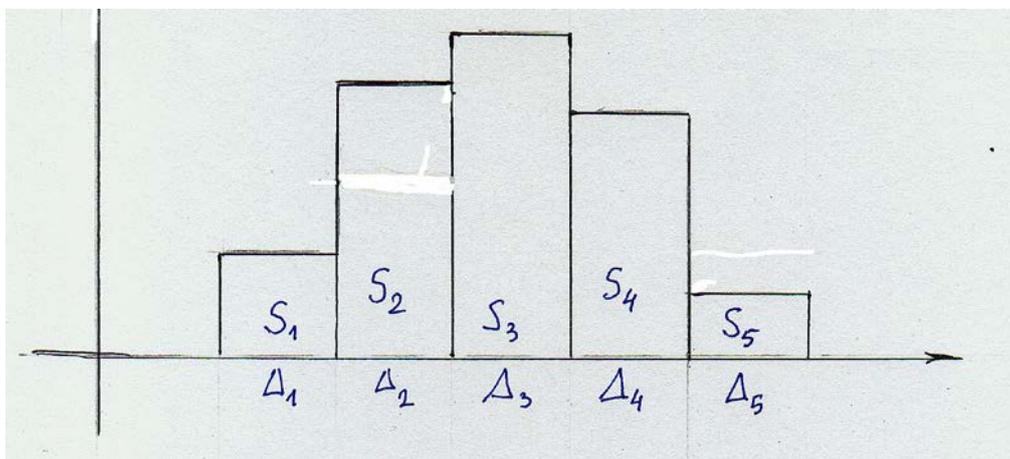


Рисунок 6.3.2а – Гистограмма. Случай $k = 5$

Обозначим через $f(x)$ функцию, график которой ограничивает гистограмму относительных частот сверху (см. рис. 6.3.2b).

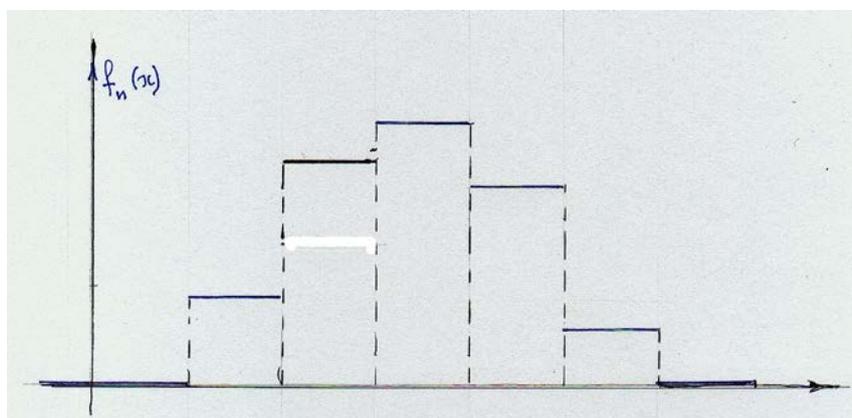


Рисунок 6.3.2b – График функции $f_5(x)$

Доказано, что при увеличении объема выборки этот ступенчатый график все точнее и точнее приближает график функции $f(x)$. См. рис. 6.3.2с.

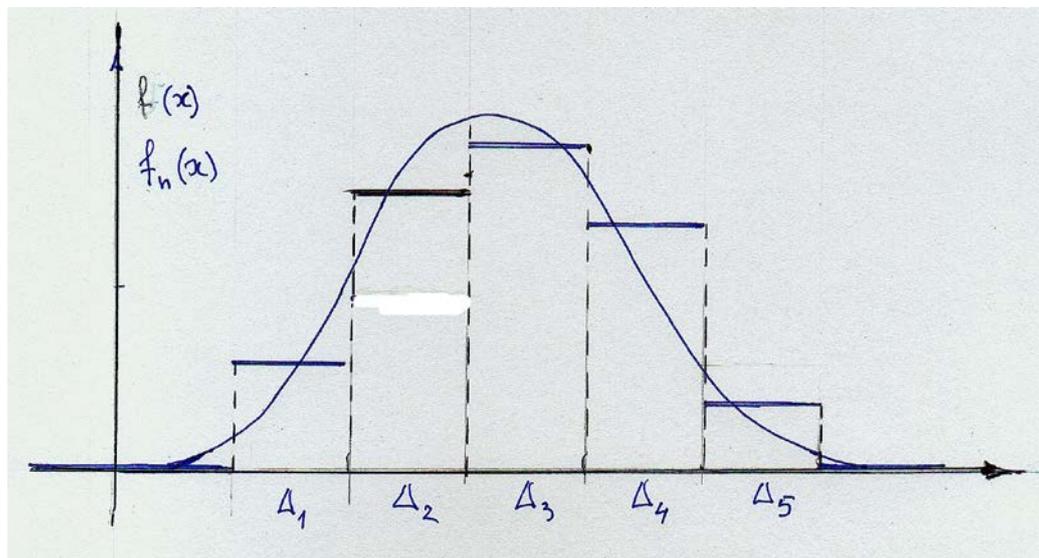


Рисунок 6.3.2 с – Графики функций $f_5(x)$ и $f(x)$

С практическим построением и использованием гистограмм мы столкнемся в главе 7.

Пример 6.3.1. Дана выборка объема $n = 100$, $x_{min} = 0$, $x_{max} = 16$. Найти по формуле Стерджеса число элементарных интервалов.

Решение. Найдем по формуле Стерджеса число элементарных интервалов:

$$k = \frac{x_{max} - x_{min}}{1 + 1.322 \lg n} = \frac{16 - 0}{1 + 1.322 \lg 100} = \frac{16}{1 + 1.322 \times 2} \approx \frac{16}{3.644} \approx 4.4$$

В качестве числа k возьмем 4. Можно также взять и число 5.

Пример 6.3.2. Дана выборка объема $n = 100$, $x_{min} = 0$, $x_{max} = 16$. Ее интервальный статистический ряд изображен на рисунке 6.3.3. Построить гистограмму относительных частот по заданному распределению выборки.

Δ_i	[0, 4)	[4, 8)	[8, 12)	[12, 16]
n_i	10	20	40	30
w_i	0.1	0.2	0.4	0.3

Рисунок 6.3.3 – Интервальный статистический ряд; объем выборки $n = 100$

Решение. Длина h каждого элементарного интервала Δ_i равна 4. Построим их на оси абсцисс (см. рис. 6.3.3). Далее над каждым элементарным интервалом Δ_i построим прямоугольник высотой $h_i = \frac{w_i}{\Delta_i} = \frac{w_i}{4}$. Вычислим эти высоты и для наглядности данные занесем в таблицу (см. рис. 6.3.4).

Δ_i	[0, 4)	[4, 8)	[8, 12)	[12, 16]
w_i	0.1	0.2	0.4	0.3
$h_i = \frac{w_i}{\Delta_i}$	0,025	0,05	0,1	0,075

Рисунок 6.3.4 – Интервальный статистический ряд со значениями высот прямоугольников

Построим прямоугольники. Образующая ими фигура (см. рис. 6.3.5) и есть искомая гистограмма.

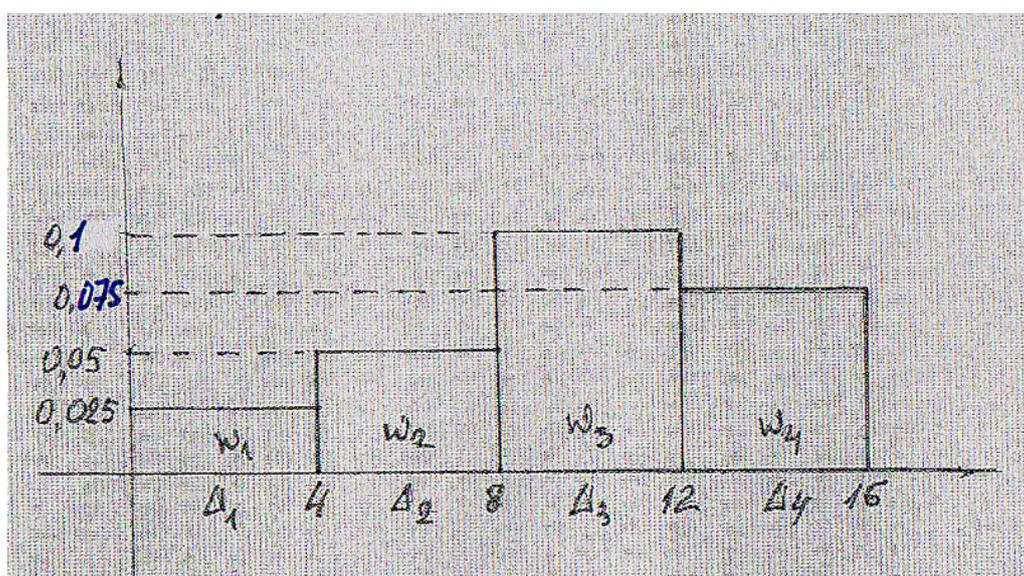


Рисунок 6.3.5 – Гистограмма относительных частот для распределения выборки из примера 6.3.1. Масштаб на оси ординат для наглядности изображения фигуры увеличен

Задание

Ответьте на следующие вопросы.

1. Что такое гистограмма.
2. К чему стремится гистограмма при увеличении объема выборки.

§ 6.4. Доверительный интервал

В предыдущем параграфе (§ 6.3) были даны формулы, позволявшие по выборке находить приближенные значения неизвестных параметров изучаемого распределения. Возникает вопрос о точности такой оценки. В обычной математике погрешность Δ не превосходит единицы последнего разряда в

десятичной записи приближенного значения числа. Например, возьмем различные приближенные значения числа $\sqrt{2}$:

1) $\sqrt{2} \approx 1,4$, тогда $\Delta = |\sqrt{2} - 1.4| < 0.1$;

2) $\sqrt{2} \approx 1,41$, тогда $\Delta = |\sqrt{2} - 1.41| < 0.01$;

и т. д. В теории вероятностей все не так. При оценке числа $M(X)$ – среднего веса курицы мы, взяв одну выборку в 100 голов, получим по формуле (6.2.1) одно значение \bar{x} , а взяв другую выборку, пусть также в 100 голов, получим наверняка другой результат. Какое же из них следует взять в качестве приближенного значения $M(X)$ и насколько оно отличается от истинного?

Для ответа на эти вопросы в статистике рассматривают так называемые доверительные интервалы. Введем необходимые понятия. Пусть $\tilde{\theta}$ точечная оценка.

Интервальной оценкой называется любой интервал (a, b) , который покрывает неизвестный оцениваемый параметр θ , т. е. такой интервал, что: $\theta \in (a, b)$.

Но взяв произвольный интервал (a, b) , мы не знаем: лежит ли в нем параметр θ . И вот тут нас выручает теория вероятностей.

Доверительной вероятностью называют такую вероятность γ , с которой интервал (a, b) накрывает оцениваемый параметр θ . Если говорить совсем просто и наглядно, то надежность γ это вероятность того, что мухобойка (a, b) прихлопнет муху θ . Полученный интервал (a, b) называется *доверительным интервалом* для данной доверительной вероятности γ .

Доверительную вероятность γ принято выбирать равной 0,9; 0,95; 0,99 или 0,999. В зависимости от области практического применения считается, что при таких значениях γ нахождение параметра θ в доверительном интервале $(\tilde{\theta} - \varepsilon, \tilde{\theta} + \varepsilon)$ является практически достоверным.

Уровнем значимости называется число $\alpha = 1 - \gamma$.

Теорема 6.4.1. Пусть с. в. X распределена нормально с известным средним квадратическим отклонением σ . По выборке объема n найдено выборочное среднее \bar{x} . Тогда с доверительной вероятностью γ неизвестное математическое ожидание $M(X)$ удовлетворяет неравенствам:

$$\bar{x} - t_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < M(X) < \bar{x} + t_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad (6.4.1)$$

где t_γ – число, удовлетворяющее равенству $2\Phi(t_\gamma) = \gamma$, а $\Phi(t)$ – функция Лапласа.

Пример 6.4.1. По выборке объема $n = 25$, извлеченной из нормальной генеральной совокупности с известным средним квадратическим отклонением $\sigma = 0.5$, найдена оценка математического ожидания $\bar{x} = 3,67$. Найти доверительный интервал для математического ожидания $M(X)$, соответствующий доверительной вероятности $\gamma = 0,90$.

Решение. По формуле (6.4.1) получаем:

$$M(X) \in \left(\bar{x} - t_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + t_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right). \quad (6.4.2)$$

Найдем число t_γ . По теореме 6.4.1: $2\Phi(t_\gamma) = 0,9$, т. е. $\Phi(t_\gamma) = 0,45$. Из таблицы значений функции Лапласа получаем, что тогда $t_\gamma = 1,66$. После подстановки всех данных в формулу (6.4.2) имеем:

$$M(X) \in \left(3,67 - 1,66 \frac{0,5}{\sqrt{25}}; 3,67 + 1,66 \frac{0,5}{\sqrt{25}} \right) \approx (3,67 - 0,17; 3,67 + 0,17) = (3,5; 3,84).$$

Ответ: (3,5; 3,84).

Далее, в главе 7 мы будем рассматривать произвольные генеральные совокупности. Но, как мы уже говорили, выборочная средняя \bar{x} является случайной величиной, так что согласно центральной предельной теореме (которую мы упомянули в замечании 5.5.1, но строго не формулировали) ее закон распределения при $n \rightarrow \infty$ неограниченно приближается к нормальному и уже при $n > 30 - 40$ его можно [51, с. 312] считать приближённо нормальным. В наших приложениях в главе 7 объемы выборок будут значительно превосходить значение 30.

На практике, обычно, среднее квадратическое отклонение σ неизвестно и может быть найдена только дисперсия выборочная $D_{\text{выб.}}$ (и, соответственно, выборочная исправленная s^2). В этом случае при большом объеме выборки (например, при $n > 30$) используется теорема.

Теорема 6.4.2. При большом объеме выборки (например, при $n > 30$) справедлива формула:

$$M(X) \in \left(\bar{x} - t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}; \bar{x} + t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} \right) \quad (6.4.3)$$

Так как в силу (6.2.3)

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_{\text{выб.}}$$

при большом объеме выборки (например, при $n > 30$) величина s практически равна числу $\sqrt{D_{\text{выб.}}}$, то этом случае на практике используется формула:

$$M(X) \in \left(\bar{x} - t_\gamma \frac{\sqrt{D_{\text{выб.}}}}{\sqrt{n}}; \bar{x} + t_\gamma \frac{\sqrt{D_{\text{выб.}}}}{\sqrt{n}} \right) \quad (6.4.4)$$

Пример 6.4.2. По выборке объема $n = 625$, извлеченной из генеральной совокупности с неизвестным средним квадратическим отклонением, найдены оценка математического ожидания $\bar{x} = 3,67$ и $D_{\text{выб.}} = 1,21$. Найти доверительный интервал для математического ожидания $M(X)$, соответствующий доверительной вероятности $\gamma = 0,95$.

Решение. Так как число $n = 625$ значительно больше, чем 30, то для решения задачи можно воспользоваться формулой (6.4.4).

$$M(X) \in \left(3,67 - t_\gamma \frac{\sqrt{D_{\text{выб.}}}}{\sqrt{625}}; 3,67 + t_\gamma \frac{\sqrt{D_{\text{выб.}}}}{\sqrt{625}} \right)$$

Найдем число $\sqrt{D_{\text{выб.}}}$. По формуле (6.2.1) из § 6.2 имеем $D_{\text{выб.}} = 1,21$. Следовательно, $\sqrt{D_{\text{выб.}}} = 1,1$. Далее, $2\Phi(t_\gamma) = 0,95$. По таблице значений функции Лапласа находим, что $t_\gamma = 1,96$. Окончательно получаем:

$$M(X) \in (3,67 - t_{\gamma} \frac{\sqrt{D_{\text{Выб}}}}{\sqrt{625}}; 3,67 + t_{\gamma} \frac{\sqrt{D_{\text{Выб}}}}{\sqrt{625}}) = (3,67 - 1,96 \frac{1,1}{25}; 3,67 + 1,96 \frac{1,1}{25}) \approx (3,67 - 0,086; 3,67 + 0,086) \approx (3,58; 3,76)$$

Ответ: $M(X) \in (3,58; 3,76)$.

Итак, глядя на формулу (6.4.3), а также практику ее применения (пример 6.4.2) начинаешь переполняться чувством глубокого удовлетворения: увеличивай число наблюдений и получишь сколь угодно точную оценку со сколь угодно высокой надежностью. Ведь в силу кучности результатов наблюдений величина $D_{\text{Выб}}$ будет мало меняться при увеличении объема выборки. Но, к сожалению, и здесь все не так просто. Как писал В. Н. Тутубалин [81, с. 98 – 99], доверительные интервалы «... иногда блестяще подтверждаются последующими более точными наблюдениями. ... Но чаще доверительные интервалы, встречаемые в ходе все более точных измерений той или иной величины, представляют восхитительную картину: они в самом деле укорачиваются, но никакой следующий не содержится ни в каком предыдущем, а лежит в несколько другом месте числовой оси».

Мы не комментируем эти досадные неприятности и отсылаем пытливого читателя к научной литературе.

§ 6.5. Понятие о статистической проверке гипотез

В § 5.3 мы рассмотрели исследование Борткевича по распределению четверней. Преобразуем итоговую таблицу 5.3.1 из § 5.3. Для этого в таблице с номерами разрядов добавим строку № 7, в которой будут содержаться разности $\Delta_i = n_i - n p_i$, т. е. разности между наблюдаемым количеством четверней и теоретическим. Это изменения в таблице связаны с дальнейшим исследованием закона распределения.

Таблица 6.5.1 – Распределение количества четверней; всего четверней $n = 69$

0	Номер разряда i	1	2	3	4	5
1	Количество четверней в год	0	1	2	3	≥ 4
2	Сколько раз такое количество наблюдалось	14	24	17	9	5
3	Итого	14	24	17	9	5 = 2+2+1
4	Теоретическая вероятность	0,202	0,323	0,258	0,138	0,08 \approx $\approx 0,055+0,018+0,005+0,001$
5	Теоретическая частота $n p_i$	13,9	22,3	17,8	9,5	5,5 \approx 3,795 + 1,242 + 0,345 + 0,069
6	Теоретическое количество	13,9	22,3	17,8	9,5	5,5
7	$\Delta_i = n_i - n p_i$	0.1	1.7	- 0.8	- 0.5	- 0.5

Итак, согласно данным из таблицы 6.5.1, налицо явное расхождение между теорией и практикой. Конечно, между теорией и практикой вполне может быть расхождение. Но можно ли считать наблюдаемое отклонение естественным? Большое оно или маленькое? Достаточно ли оснований считать распределение пуассоновским? Тут мнения могут разделиться, хотя большинство наверняка сочтет расхождение несущественным. Ну, а что делать с меньшинством. Проще всего сказать, что они ... (ругательство) и ничего не понимают. Но так полемизировать нельзя, ведь мы же говорим о науке и, следовательно, нужно предъявить какие-то объективные критерии оценки, причем, желательно, чтобы они были применимы не только к оценке величины расхождения наблюдаемых и теоретических частот в задаче Борткевича, но и в других исследованиях.

Вот мы и подошли к разделу математической статистики, занимающемуся проверкой статистических гипотез. Какие же вопросы она изучает? Перечислим некоторые из них.

1. Проверка гипотезы о равенстве математических ожиданий. В § 7.2 теоремы доказываются с использованием сравнения средних значений.

2. Проверка гипотезы о равенстве дисперсий.

3. Проверка гипотезы о законе распределения генеральной совокупности.

4. Проверка гипотезы об однородности выборки. В § 7.1 будет ссылка на использование критерия Колмогорова-Смирнова

В настоящем параграфе мы рассмотрим критерий хи-квадрат, как наиболее широко распространенный в учебной литературе и удобный для проверки гипотезы в задаче Борткевича о распределении Пуассона.

Начнем с некоторых общих соображений и определений, на которых основаны критерии проверки статистических гипотез. Во-первых, определимся с понятием статистическая гипотеза. В самом начале у нас был невразумительный набор данных. Мы приблизительно оценили параметры возможного распределения и, построив гистограмму, даже посмотрели, как примерно выглядит график возможного закона распределения. Положим, глядя на гистограмму, нам кажется, что здесь имеет место нормальный закон распределения. И что? Как это проверить? Подобная задача называется проверкой статистических гипотез. Эта задача состоит в решении вопроса о том, должно ли на основании данной выборки быть принято или, напротив, отвергнуто некоторое предположение (гипотеза) относительно генеральной совокупности (случайной величины).

Задачи статистической проверки гипотез ставятся в следующем виде: относительно некоторой генеральной совокупности высказывается та или иная гипотеза H . Выдвинутая гипотеза может быть правильной или неправильной, поэтому возникает необходимость ее проверки. Из этой генеральной совокупности извлекается выборка. Требуется указать правило, при помощи которого можно было бы по выборке решить вопрос о том, следует ли отклонить гипотезу H или принять ее. Следует отметить, что статистическими методами гипотезу можно только опровергнуть или не опровергнуть, но не доказать.

Под *статистической гипотезой* (или просто *гипотезой*) понимают всякое высказывание (предположение) о генеральной совокупности, проверяемое по выборке.

Одну из гипотез выделяют в качестве *основной* (или *нулевой*) и обозначают H_0 , а другую, являющуюся ее логическим отрицанием, т. е. противоположную, выделяют в качестве *конкурирующей* (или *альтернативной*) гипотезы и обозначают H_1 . Например, предположение о том, что вес среднестатистической курицы распределен по нормальному закону мы берем в качестве основной гипотезы H_0 . При этом конкурирующих гипотез может быть несколько, в зависимости от задачи. Самая простая конкурирующая гипотеза H_1 состоит в том, что вес курицы распределен не по нормальному закону. Другой конкурирующей гипотезой может быть гипотеза о том, что вес курицы распределен по равномерному закону, и тому подобное. Имея две гипотезы H_0 и H_1 , надо на основе выборки принять либо основную гипотезу H_0 , либо конкурирующую H_1 .

Правило, по которому принимается решение принять или отклонить гипотезу H_0 (соответственно, отклонить или принять H_1), называется *статистическим критерием* (или просто *критерием*) проверки гипотезы H_0

При проверке гипотезы может быть принято неправильное решение, т. е. может быть допущена ошибка.

Ошибка первого рода состоит в том, что отвергается нулевая гипотеза H_0 , когда на самом деле она верна.

Вероятность ошибки 1-го рода называется *уровнем значимости критерия* и обозначается через α . Обычно для α используются стандартные значения, взятые из практики: 0,05; 0,01; 0,005; 0,001.

Так, применительно к торговле можно сказать, что α – риск поставщика, т. е. вероятность выбраковки всей партии изделий, хотя они и удовлетворяют стандарту, в юридической интерпретации – это вероятность осуждения невиновного.

Критерием согласия называют статистический критерий проверки гипотезы о предполагаемом законе неизвестного распределения. (Он используется для проверки согласия предполагаемого вида распределения с опытными данными на основании выборки.) Существуют различные критерии согласия: Пирсона, Колмогорова, Фишера, Смирнова и др.

Теперь поговорим о критериях. В основе большинства из них лежит следующий принцип (см., например, [57, с. 472; 51, с. 334]), часто называемый «принципом практической уверенности». Он состоит в следующем. Пусть планируется какой-нибудь эксперимент, в результате которого может произойти некоторое событие A . Предположим, что по каким-то соображениям выдвигается гипотеза (делается предположение) H , состоящая в том, что вероятность события A мала. Далее проводится сам эксперимент. Если в результате этого эксперимента сразу же наступает именно событие A , то согласно принципу практической уверенности гипотезу H следует отклонить (хотя на самом деле

она может быть и верна). Подчеркнем, что упомянутый эксперимент проводится однократно.

Обоснованность этого принципа базируется на практическом историческом опыте человечества, на здравом смысле и не подлежит математическому доказательству. Вот иллюстрация из практики справедливости принципа практической уверенности. Например, вы выдвинули гипотезу H о том, что вероятность отравиться шаурмой в палатке на рынке чрезвычайно мала. Поели и отравились. Может быть, вам просто не повезло и отравились только вы один, но здравый смысл подсказывает, что первоначальную гипотезу H следует отклонить.

Одним из таких критериев является критерий согласия Пирсона – наиболее часто употребляемый критерий для проверки простой гипотезы о законе распределения. Он называется критерием согласия χ^2 (читается хи-квадрат).

Разберем процедуру применения критерия χ^2 . Итак, у нас имеется выборка объема n . Строим вариационный ряд, а по нему, определив число k , статистический (или интервальный статистический) ряд (см. § 6.3). По нему или из каких-то иных соображений выдвигаем гипотезу о законе распределения, которую мы собираемся проверять по критерию χ^2 и оцениваем по выборке неизвестные параметры этого распределения. Т. о. у нас появляется гипотетический теоретический закон распределения. Зная закон распределения, можно найти вероятности попадания изучаемой с. в. в каждый из интервалов $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k$. Обозначим эти вероятности через p_1, p_2, \dots, p_n соответственно (см. табл. 6.5.2).

Таблица 6.5.2 – Элементарные интервалы, частоты и теоретические вероятности

Δ_i	Δ_1	Δ_2	...	Δ_k
n_i	n_1	n_2	...	n_k
p_i	p_1	p_2	...	p_k

Далее, выбираем уровень значимости α . Значение α задаем мы сами, исходя из условий конкретной задачи. К. Пирсон (1857 – 1936; английский математик, статистик, биолог, философ) предложил рассматривать величину

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - n p_i)^2}{n p_i} = \sum_{i=1}^k \frac{n_i^2}{n p_i} - n \quad (6.5.1)$$

Величина χ^2 зависит от выборки и, следовательно, является случайной величиной. Можно показать, что она вдобавок еще и непрерывная случайная величина, плотность которой задается формулой:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0 \\ C(k) x^{\frac{k}{2}-1} e^{-x/2}, & \text{если } x \geq 0 \end{cases},$$

где $C(k)$ – некоторая константа, зависящая от k . График плотности распределения случайной величины χ^2 при разных значениях k схематично изображен на рисунке 6.5.2.

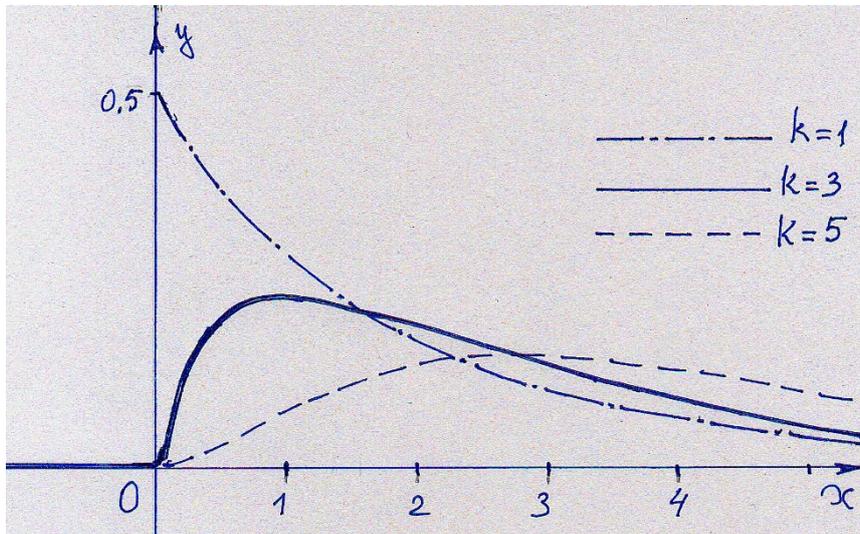


Рисунок 6.5.2 – Графики плотности распределение с. в. χ^2 при различных значениях числа k

Согласно теореме Пирсона, при $n \rightarrow \infty$ эта статистика (т. е. приближенное значение, зависящее от данных выборки) имеет в пределе χ^2 распределение с $m = k - 1 - r$ степенями свободы, где k – число групп (интервалов) выборки, r – число параметров предполагаемого распределения. В частности, если предполагаемое распределение нормально, то оценивают два параметра a и σ , поэтому число степеней свободы $m = k - 1 - 2 = k - 3$; если речь идет о распределении Пуассона, то оценивают один параметр λ и, следовательно, число степеней свободы $m = k - 1 - 1 = k - 2$. Подчеркнем, что график плотности распределения χ^2 не зависит от закона распределения изучаемой случайной величины, а зависит только от значения параметра m .

Итак, имеем предположительный закон распределения (Пуассона), уровень значимости α и число степеней свободы m . Далее берем любую книгу по теории вероятностей, открываем приложение и ищем там таблицу критических точек распределения χ^2 . В таблице для α и m находим значение критической точки $\chi_{кр.}^2$.

Проверка статистических гипотез

Для выполнения пункта 3) задания предыдущего примера проверим соответствие закона распределения полученной случайной величины $F^*(x)$ заданному закону распределения $F(x)$, используя критерий Пирсона.

Для этого определяется случайная величина,

$$\chi_{набл.}^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i},$$

где k – число значений случайной величины; n_i – число появлений значений случайной величины; p_i – теоретическая вероятность значения; n – объем моделируемой выборки (np_i – ожидаемое число появлений значения x_i при n реализациях случайной величины). Величина $\chi^2_{\text{набл.}}$ служит показателем того, насколько хорошо согласуются моделируемое и ожидаемое распределения.

Найдем величину $\chi^2_{\text{набл.}}$. Используя данные из таблицы 6.5.1, после подстановки в формулу (6.5.1) получаем:

Номер столбца i	1	2	3	4	5
Количество четверней в год	0	1	2	3	≥ 4
Итого	14	24	17	9	5
Теоретическая частота np_i	13,9	22,3	17,8	9,5	5,5
Теоретическое количество	13,9	22,3	17,8	9,5	5,5
$\Delta_i = n_i - np_i$	0,1	1,7	-0,8	-0,5	-0,5

$$\chi^2_{\text{набл.}} = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} = \frac{(n_1 - np_1)^2}{np_1} + \frac{(n_2 - np_2)^2}{np_2} + \frac{(n_3 - np_3)^2}{np_3} + \frac{(n_4 - np_4)^2}{np_4} + \frac{(n_5 - np_5)^2}{np_5} = \frac{(0,1)^2}{13,9} + \frac{(1,7)^2}{22,3} + \frac{(-0,8)^2}{17,8} + \frac{(-0,5)^2}{9,5} + \frac{(-0,5)^2}{5,5} \approx 0,000 + 0,130 + 0,036 + 0,026 + 0,045 = 0,237.$$

Зададимся уровнем значимости $\alpha = 0,05$ и числом степеней свободы $m = k - 2 = 5 - 2 = 3$. По таблице найдем величину $\chi^2_{\text{кр.}}$. Имеем: $\chi^2_{\text{кр.}} = 7,8$. Так как $\chi^2_{\text{набл.}} = 0,237 < 7,8 = \chi^2_{\text{кр.}}$, то нет оснований отвергать гипотезу о распределении Пуассона. Еще раз подчеркнем, что мы установили *только следующее*: имеющиеся статистические данные *не противоречат* гипотезе о распределении Пуассона. По-другому заключение (ответ) можно сформулировать так. Гипотезу о распределении Пуассона следует (можно) принять на уровне значимости $\alpha = 0,05$ или, что с вероятностью 95 % ($0,95 = 1 - \alpha$), имеет место распределение Пуассона.

ГЛАВА 7. ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ В ПРОМЫШЛЕННОМ ДИЗАЙНЕ

В этой главе мы расскажем о применении методов теории вероятностей и математической статистики в вопросах эстетики и антропометрии. Это применение можно условно разделить на две части. Первую часть составляют вопросы теории, а вторую – чисто практические приложения.

К теоретическим приложениям относится экспериментальная эстетика. Согласно статье из Интернета, «Экспериментальная эстетика (англ. *experimental aesthetics*) – это область психологии и эстетики, основанная Густавом Теодором Фехнером в 19 веке. ... В настоящее время психологи и нейробиологи определяют проблемное поле эстетики ..., считая его процессом восприятия, создания и оценки любых объектов, вызывающих сильное эмоциональное переживание. Это специализированная область ... эстетики, которая отличается использованием экспериментов для проверки теоретических положений».

Экспериментальная эстетика изучает взаимодействия человека с различными арт объектами, а именно, она занимается [112, с. 3]: «Изучением реакций человека на живопись, фильмы, литературные произведения, музыку, поэзию, театральные представления; изучением эстетического опыта, например: чувства прекрасного и ужасного, симпатии и антипатии; а также изучением ежедневного восприятия предметов окружающей среды, дизайнерских объектов, потребительских товаров и людей».

Итак, говоря упрощенно, экспериментальная эстетика, в частности, осуществляет экспериментальную проверку теоретических утверждений из области психологии и эстетики. Конечно, проникновение измерительных методик в эстетику может вызывать недоумение. *Однако, необходимо понимать, что талантливое дизайнерское решение – это не только результат творения, но и некоторое информационное сообщение, направленное потребителям.* А оно, как акт человеческого общения, вполне может и должно быть оценено статистически. Говоря о современном состоянии исследований в области экспериментальной эстетики, в [90] отмечается следующее. «Экспериментальная эстетика особенно интенсивно развивается в последнее десятилетие, и в ее развитии можно выделить два основных периода: ранний и современный. В ранних теориях ...отсутствуют объяснения возникновения негативных эмоций. Современные теории, напротив, объясняют происхождение как позитивных, так и негативных эстетических эмоций».

Первые два параграфа настоящей главы посвящены примерам эстетических измерений и начинается в § 7.1 с разбора знаменитого эксперимента Фехнера; в третьем параграфе рассмотрены некоторые общие вопросы математических методов описания антропометрических признаков в эргономике; четвертый параграф касается соотношения пропорций модулора с действительностью.

§ 7.1. Связь моды, медианы, золотого сечения и математического ожидания

Вскоре после появления работы Цейзинга [114] о золотом сечении возник вопрос о практической проверке самой идеи Цейзинга о глобальной роли этой пропорции. Как уже упоминалось в § 2.2, после своего появления этот тезис Цейзинга об особой эстетической роли золотого сечения нашел не только горячих сторонников. Стали появляться и критические замечания, которые активно продолжают высказываться и сегодня. В связи с этим и ввиду возможности объективной проверки, особое внимание привлекают исследования Густава Фехнера, появившиеся вскоре после работ Цейзинга.

В 1876 году Густав Фехнер опубликовал книгу «Введение в эстетику», в которой был описан (цитируется по сокращенному переводу [54, с. 326]) следующий эксперимент. «Для изучения предпочтений по отношению к форме было взято десять прямоугольных карточек из белого картона, равных по площади квадрату со стороной восемь сантиметров, но с различным соотношением сторон. ... Испытуемым (представителям различных общественных слоев, людям различного характера и разного возраста старше 16 лет) ставился вопрос: какие из прямоугольников при максимальном абстрагировании от их возможного применения являются наиболее, а какие наименее привлекательными?»

Было проведено 347 испытаний, в которых участвовали как мужчины, так и женщины. По итогам эксперимента Фехнер, в частности, пришел к выводу о том, что золотой прямоугольник имеет особую эстетическую привлекательность. В таблице, приведенной ниже, указаны форматы прямоугольников, предлагавшихся испытуемым. В других строках отмечены предпочтения. Дробные значения количеств предпочтений объясняются тем, что учитывались колебания при выборе «красивого» прямоугольника.

Таблица 7.1.1 – Результаты наблюдений Фехнера

x_i	1	5/6	4/5	3/4	20/29	2/3	21/34	13/23	1/2	2/5	сумма
муж. k_i	6,25	0,5	7,0	4,5	13,33	50,91	78,66	49,33	14,25	3,25	228
жен. m_i	4,0	0,33	0,0	4,0	13,5	20,5	42,65	20,21	11,83	2,0	119
всего n_i	10,25	0,83	7,0	8,5	26,83	71,41	121,31	69,54	26,08	5,25	347

Найдем выборочную среднюю:

$$\bar{x} = \frac{1}{347} \sum_{i=1}^{10} x_i n_i = \frac{1}{347} (1 \times 10,25 + 5/6 \times 0,83 + 4/5 \times 7,0 + 3/4 \times 8,5 + 20/29 \times 26,83 + 2/3 \times 71,41 + 21/34 \times 121,31 + 13/23 \times 69,54 + 1/2 \times 26,08 + 2/5 \times 119)$$

$$+ 2/5 \times 5,25) = \frac{1}{347} \times 218,3988 \approx 0,62939 \approx 0,63.$$

Далее, как видно их таблицы 7.1.1, вариационный ряд бимодален. Одна мода равна 1. Другая мода вариационного ряда равна $21/34 \approx 0,618$, поскольку сравнение с соседними частотами n_i показывает, что в точке $21/34$ наблюдается наибольшая частота.

Впоследствии, на протяжении двадцатого века эксперименты, ставящие своей целью выявить эстетическую роль золотого сечения, повторялись многими исследователями. В этих экспериментах, касавшихся прямоугольников, их рисовали, выбирали из заранее заготовленного набора прямоугольников, сравнивали парами и т. д. При этом приходили к разным, порой противоположным выводам. В основном гипотезу Фехнера опровергали, но были и те, кто с осторожностью высказывались в ее поддержку. Примечательно название одной из публикаций [105] от 1997 г.: «Золотое сечение – его последние похороны». Тем не менее публикации статей о золотом сечении продолжались (Рассел [110], 2000 г., Бенджефилд [99], 2010 г., Грин [103], 2012 г. и др.). Предлагались и различные объяснения механизма проявления особой роли золотого сечения.

Почему же золотое сечение привлекает такое внимание? Нисколько не отрицая справедливость многих критических замечаний (об этом см., например, в [72]), следует отметить наличие разнообразных практических проявлений этой или очень близких к ней пропорций как в гуманитарных, так и технических областях. Что же касается живописи, то общеизвестно (см., например [48 с. 69 – 72]), что композиции, построенные на основе (или с сознательным нарушением) золотой пропорции или пропорций, близких к ней, т. е. пропорций с коэффициентом пропорциональности 0,6, 0,62, или $5/8 = 0,625$, определенным образом влияют на эмоциональное восприятие сюжета картины.

Эти и многие другие примеры практического проявления пропорций, близких к золотой, и объясняют интерес к исследованиям Фехнера. Мы в [39] провели собственное исследование, целью которого было выяснить, какую роль играет золотое сечение в эстетических предпочтениях студентов вузов на примере изображения ими наиболее эстетически привлекательного прямоугольника. Кроме того, была сделана попытка охарактеризовать методами математической статистики золотое сечение.

1. Описание эксперимента. Эксперимент состоял в следующем. Каждому респонденту было предложено нарисовать на листе формата А4 прямоугольник такой, чтобы с его точки зрения он был «красив, соразмерен, приятен глазу». Если нарисованный прямоугольник не нравился респонденту, он мог его исправить. Далее, по каждому прямоугольнику вычислялась величина отношения меньшей стороны к большей, умножалась для удобства записи на 100 и рассматривалась случайная величина (далее с. в.) X – «высота горизонтально ориентированного прямоугольника, пропорционально соотношенного к высоте прямоугольника с основанием 100 мм». При этом не разрешалось использовать в работе в качестве линейки какие-либо предметы с цифровой шкалой. Это

делалось для того, чтобы лица, слышавшие про золотое сечение и эксперименты с прямоугольниками, не могли применить свои знания на практике.

В цитированном выше «Введении в эстетику» Фехнер писал, что в его эксперименте иногда «... имели место длительные колебания, и, когда испытуемые принимали решение, выбрав определенный прямоугольник, они затем при следующем опыте часто изменяли свое мнение или продолжали оставаться в нерешительности между двумя, тремя или даже четырьмя прямоугольниками». Дело в том, что высота прямоугольника, построенного респондентом и соотнесенная пропорционально к высоте прямоугольника с основанием длиной 1 дм (100 мм), является случайной величиной. При повторном построении она может принять значение отличное от предыдущего. Может также меняться и ориентация (вертикальная / горизонтальная). Мы для упрощения рассуждений будем предполагать, что высота прямоугольника, заявленная респондентом, – это на самом деле $M(X)$, то есть среднее значение его предпочтений.

Нас интересовали эстетические предпочтения юношей и девушек – студентов вузов. В целях наибольшей репрезентативности выборки к эксперименту, длившемуся на протяжении двух лет, были привлечены десять групп студентов разного уровня теоретической подготовки и обучавшихся в двух вузах: НИУ ВШЭ и СПбГУПТД ВШТЭ (бывш. СПбГТУРП).

Используя критерий Колмогорова-Смирнова на уровне значимости $\alpha = 0.05$, авторы проверили попарную однородность данных этих выборок. Другими словами, с вероятностью 95 % их можно было считать взятыми из одной генеральной совокупности.

Мы объединили их в одну выборку, объем которой составил: $n = 1138$. Такой объем выборки позволяет эффективно применять к обработке результатов наблюдений методы математической статистики. В таблице 7.1.2 приведен отрезок статистического ряда.

Таблица 7.1.2 – Часть статистического ряда

x_i	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65
n_i	19	31	42	36	23	17	20	43	16	18	22	22	33	16	29	25	33	28

2. Об оценках $M(X)$, $Me(X)$ и модах. Существуют различные рекомендации по выбору k – числа прямоугольников для построения гистограммы. При объеме выборки $n = 1138$ формула Стэрджеса [51, с. 265] дает $k = 11$, формула из [57, с. 417] дает значение $k = 18$. Как известно, подобные формулы не являются строгими правилами, а представляют собой лишь только рекомендации. Поэтому мы для приближенных оценок мод взяли несколько разных значений k : 14, 22 и 30. На рисунке 7.1.1 изображена гистограмма, полученная при делении интервала наблюдений на 30 частей. На рисунках 7.1.2

и 7.1.3 изображены гистограммы, полученные при делении интервала наблюдений на 22 и 30 частей соответственно.

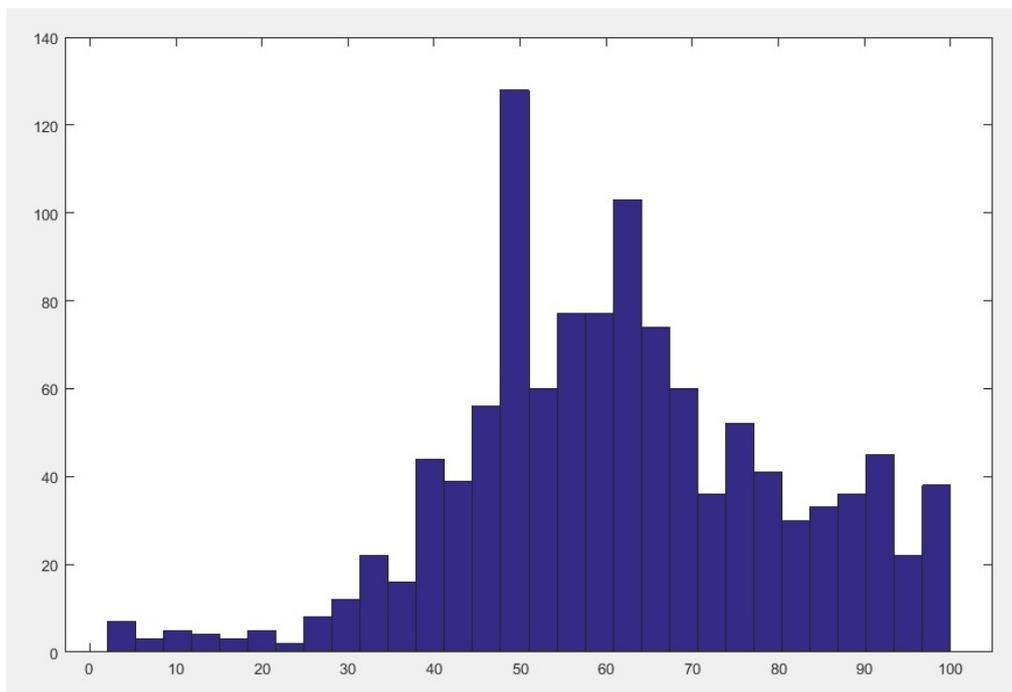


Рисунок 7.1.1 – Гистограмма, полученная при делении отрезка [2;100] на 30 частей

Как видно из гистограммы, изображенной на рисунке 7.1.1, выборка явно содержит аномальные результаты наблюдений. Трудно считать красивыми, соразмерными и радующими глаз прямоугольники с основанием 100 мм, а высотой, например, от четырех до, например, 10 – 15 миллиметров. Более того, мы даже не знаем, какие значения следует считать аномальными, а какие – не очень. Однако анализ, проведенный авторами в [39], показал, что при проверке достоверности утверждения Фехнера влиянием аномальных результатов наблюдений (без их конкретизации) можно пренебречь.

Далее для случайной величины X была получена выборочная средняя: $\bar{x} = 61,758348$. Задавшись уровнями значимости $\alpha = 0,1$, $\alpha = 0,05$, $\alpha = 0,01$, мы построили соответствующие доверительные интервалы для $M(X)$ – генерального математического ожидания случайной величины X :

$$\alpha = 0,1; \quad 60,836570 < M(X) < 62,680126;$$

$$\alpha = 0,05; \quad 60,659707 < M(X) < 62,856989;$$

$$\alpha = 0,01; \quad 60,313601 < M(X) < 63,203095.$$

Таким образом:

- 1) с вероятностью 90 % $M(X) \in (60,836570; 62,680126)$;
- 2) с вероятностью 95 % $M(X) \in (60,659707; 62,856989)$;
- 3) с вероятностью 99 % $M(X) \in (60,313601; 63,203095)$.

Рассмотрим вопрос об оценке генеральной медианы $Me(X)$. На основании данных вариационного ряда с. в. X мы установили, что med – выборочная оценка генеральной медианы $Me(X)$ равна 61. Используя для нахождения доверительного интервала для оценки генеральной медианы $Me(X)$ формулу из [37, с. 236], было установлено, что с вероятностью 95 % выполняется соотношение $Me(X) \in (60; 62)$ и с вероятностью 99 % – соотношение $Me \in (59; 62)$.

Теперь рассмотрим вопрос о модах. Вид гистограмм с. в. X , изображенных на рисунках 7.1.1 – 7.1.3 и полученных при делении отрезка $[2; 100]$ на разное число частей $k = 14, 22$ и 30 , показывает, что вариационный ряд с. в. X мультимодален.

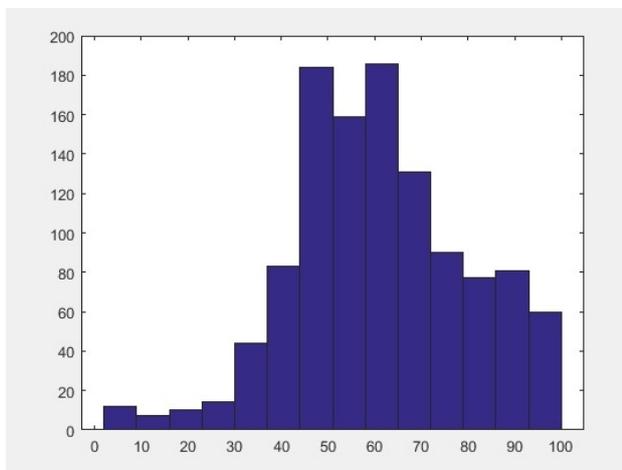


Рисунок 7.1.2 – Гистограмма, полученная при $k = 14$

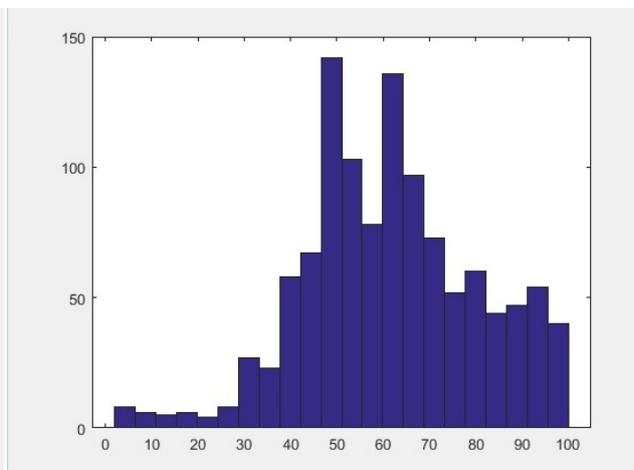


Рисунок 7.1.3 – Гистограмма, полученная при $k = 22$

Далее, применяя метод интерполяции (или, по другому, графический метод [51, с. 273-274]) получаем при $k = 14, 22$ и 30 следующие оценки мод:

- 1) если $k = 14$, то $Mo_1(X) = 50,58$ и $Mo_2(X) = 60,3$;
- 2) если $k = 22$, то $Mo_1(X) = 49,48$ и $Mo_2(X) = 62,58$;
- 3) если $k = 30$, то $Mo_1(X) = 49,72$ и $Mo_2(X) = 62,3$.

Как видно из гистограммы (см. рис. 7.1.1), предположительно имеется одна мода $Mo_1(X)$, расположенная около точки $i = 50$, и другая мода $Mo_2(X)$ – вблизи точки $i = 62$. Таким образом, $Mo_1(X)$ находится в окрестности точки $i = 50$, а $Mo_2(X)$ – в окрестности точки $i = 62$. Более определенный вывод на этом этапе исследования гистограммы сделать нельзя.

Таблица 7.1.3 – Часть статистического ряда с. в. X вблизи точки $i = 100$

i	...	93	94	95	96	97	98	99	100
n_i	...	14	9	11	2	6	9	14	19

Далее, внимательное изучение статистического ряда (см. таблицу 7.1.3)

обнаруживает, что для некоторых респондентов имеется определенная предпочтительность квадрата перед прямоугольниками других форматов.

Отметим, что локальную предпочтительность квадрата обнаружил в своем эксперименте еще Фехнер (см., например, [54, с. 328]). Позже эту предпочтительность, как наименее информативную, отмечали и другие авторы (см., например, [66, с. 62; 55, с. 32]). Ввиду недостатка статистического материала (см. табл. 7.1.3) вопрос о существовании $Mo_3(X) = 100$ мы не рассматриваем.

Итак, нами установлено следующее.

1. В приведенной выше постановке задачи вывод Фехнера о наибольшей привлекательности золотого прямоугольника не подтверждается. А именно: эстетически значимой пропорцией является не только золотая пропорция, но и пропорция 1:2. Другими словами, наибольшей эстетической привлекательностью для респондентов пользуются два типа прямоугольников: половина квадрата и золотой прямоугольник.

2. Золотое число практически совпадает с математическим ожиданием (средним значением) и медианой с. в. X , поэтому на него проецируется (переходит) и вероятностный смысл этих числовых характеристик. Это позволяет утверждать, что в рамках сформулированной задачи установлены следующие новые свойства золотого сечения:

- золотая пропорция – это не только пропорция для сторон конкретного прямоугольника, но и величина, практически совпадающая с высотой среднего прямоугольника, большая сторона которого является основанием длины, – единица;
- при большом числе наблюдений золотое число практически поровну делит множество респондентов, при этом для одной половины более привлекательным представляется прямоугольник по высоте меньший, чем золотой, а для другой – больший, чем золотой.

(Как тут не вспомнить приведенные выше (стр. 114) слова Сэра Рейнольдса о том, «что в среднем источник прекрасного»).

3. Разнообразие выводов, подчас противоречащих друг другу, которые делали другие авторы по фехнеровской теме, объясняется тем, что они работали с малыми выборками – в несколько десятков респондентов. У нас же их 1138 человек. При изучении статистик по отдельным учебным группам (численностью 20 – 25 чел.) нам иногда приходилось наблюдать значительные колебания выборочной оценки математического ожидания $M(X)$.

§ 7.2. Точки эстетических предпочтений в эксперименте фехнеровского типа и их доверительные интервалы

В предыдущем параграфе (§ 7.1) авторы изучали случайную величину X – «высоту горизонтально ориентированного прямоугольника, пропорционально соотношенного к высоте прямоугольника с основанием 100 мм».

Помимо прочих результатов на основании визуального анализа гистограмм, построенных при делении отрезка $[2, 100]$ на 14, 22, и 30 частей (см.

рис. 7.1.1) с последующими стандартными геометрическими построениями (см., например, [51, с. 274]), был сделан предварительный вывод о наличии, вопреки утверждению Фехнера, мод с. в. X (т. е. наиболее эстетически привлекательных высот прямоугольников) вблизи точек $x = 50$ и $x = 62$.

Отмечалось, что описанная в [51, с. 274] оценка моды допустима лишь при большом числе реализаций с. в. X в окрестности изучаемой точки или на начальном этапе исследования в качестве грубой прикидки. В настоящей работе значимость различия высот прямоугольников будет устанавливаться методами математической статистики.

Несмотря на общее достаточно большое число испытаний $n = 1138$, в $\frac{1}{2}$ -окрестности каждой точки $i = 1, 2, \dots, 99$, зафиксировано сравнительно небольшое (см. вторую строку в табл. 7.2.1) число $n(i)$ реализаций с. в. X в $\frac{1}{2}$ -окрестности каждой точки i – в основном не более двух, трех десятков. Этого количества совершенно недостаточно для стандартной процедуры сравнения частот. Приведенные далее результаты установлены с помощью методов, разработанных авторами.

Таблица 7.2.1 – Значения $n(i)$ при различных $i \in \{46, 47, \dots, 71\}$

i	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
$n(i)$	23	14	19	31	42	36	23	17	20	43	16	18	22	22

i	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71
$n(i)$	33	16	29	25	33	28	20	26	23	11	26	18

В этом параграфе, используя методы математической статистики, мы установим, что вблизи высот 50 мм и 62 мм действительно находятся высоты эстетически наиболее привлекательных прямоугольников. Для каждой из таких высот мы укажем интервалы (называемые в математической статистике доверительными интервалами), в которых с большой вероятностью 90 – 95 % находятся искомые высоты. Вероятности указанной величины обычно используются в социологических (и разного рода других) исследованиях, как вполне достаточные для положительных заключений по рассматриваемым вопросам.

Сначала рассмотрим окрестность точки 50.

Теорема 7.2.1. Пусть $f(t)$ – плотность распределения с. в. X непрерывна при $t \in (0; 100)$. Тогда с вероятностью $\gamma_3 = 0,9565$ существует по крайней мере одна точка $t_0 \in (45,5; 54,5)$, в которой функция $f(t)$ на отрезке $[46,5; 54,5]$ имеет максимум.

Замечание 7.2.1. Исходя из практического смысла рассматриваемой задачи о рисовании прямоугольника, естественно полагать, что в окрестности точки $t = 50$ мм находится только одна мода, т. е. точка максимума функции $f(t)$. Поэтому из теоремы 7.2.1 следует, что с вероятностью 95 % интервал

$(50 - 4,5; 50 + 4,5)$ содержит точку Mo_1 . Отметим, что вероятность 95 % обычно используется в психологии, социологии и многих других как технических, так и гуманитарных дисциплинах в качестве стандартного веского аргумента, подтверждающего достоверность рассматриваемого утверждения. Также необходимо отметить, что в отличие от оценки моды, сделанных авторами в работе [39], предлагаемая оценка установлена с определенной «точностью». В следующей теореме 7.2.2 устанавливается доверительный интервал для второй моды.

Теорема 7.2.2. Пусть $f(t)$ – плотность распределения с. в. X – непрерывна при $t \in (0; 100)$. Тогда с вероятностью $\gamma = 85\%$ существует по крайней мере одна точка $t_0 \in (57 - \frac{1}{2} - 1; 68 + \frac{1}{2} + 1)$, в которой функция $f(t)$ на отрезке $[55,5; 69,5]$ имеет максимум.

Замечание 7.2.2. Как и в случае теоремы 7.2.1 (смотри замечание 7.2.1), исходя из практического смысла, естественно полагать, что в интервале $(62,5 - 7; 62,5 + 7) = (55,5; 69,5)$, т. е. интервала длиной 14 мм, находится только одна мода. Из таблицы 7.2.1 видно, что если рассматривать более широкий интервал, чем интервал $(55,5; 69,5)$, то вероятность нахождения в нем моды станет больше. Сравнительно большая величина полученного в теореме 7.2.2 доверительного интервала объясняется двумя факторами:

- 1) слабой выпуклостью графика $f(x)$ при $x > 55$;
- 2) недостаточным числом наблюдавшихся значений с. в. X при $x \in (55 \text{ мм}; 70 \text{ мм})$.

Доверительные интервалы, полученные вышеуказанным способом, можно уменьшить, увеличив объем выборки (т. е. число наблюдений n).

Теперь покажем, что золотой прямоугольник не является самым красивым, соразмерным и приятным для глаз.

Для выяснения главного вопроса – о значении золотого сечения в эстетических предпочтениях здесь мы сравним вероятности реализации с. в. X в окрестности точки $i = 50$, соответствующей величине высоты прямоугольника с соотношением сторон 0,5: 1 и в окрестности точки $i = 62$, примерно соответствующей величине высоты прямоугольника с «золотым» соотношением сторон.

Таблица 7.2.2 – Количество наблюдений с. в. X для различных интервалов одинаковой длины

№	Интервал	Количество наблюдений с. в. X	Интервал	Количество наблюдений с. в. X
1	$(50 - 0,5; 50 + 0,5)$	42	$(62 - 0,5; 62 + 0,5)$	29
2	$(50 - 1,0; 50 + 1,0)$	109	$(62 - 1,0; 62 + 1,0)$	70
3	$(50 - 1,5; 50 + 1,5)$	151	$(62 - 1,5; 62 + 1,5)$	136
4	$(50 - 2,0; 50 + 2,0)$	182	$(62 - 2,0; 62 + 2,0)$	186
5	$(50 - 2,5; 50 + 2,5)$	225	$(62 - 2,5; 62 + 2,5)$	228

Теорема 7.2.3. Так как (см. табл. 7.2.2, строка № 3) количество реализаций с. в. X в интервале $(50 - 1.5; 50 + 1.5)$ равно 151, а в интервале $(62 - 1.5; 62 + 1.5)$ равно 136, то на уровне значимости $\alpha = 0,05$ гипотеза о равенстве вероятностей $P\left\{50 - 2\frac{1}{2} < X < 50 + 2\frac{1}{2}\right\}$ и $P\left\{62 - 2\frac{1}{2} < X < 62 + 2\frac{1}{2}\right\}$ не противоречит результатам наблюдений.

Замечание 7.2.3. Используя данные наблюдений, приведённые в таблице 7.2.2, можно проверить, что аналогичные утверждения справедливы для интервалов из строк № 4 и № 5.

Итак, установлено следующее.

1. На основе предложенного авторами метода практического построения доверительных интервалов подтверждены выводы, изложенные ими в предыдущей работе, о наличии по крайней мере двух эстетически значимых высот прямоугольников (помимо квадрата).

2. Подтверждено утверждение Фехнера о том, что «золотой» или близкий к нему прямоугольник является эстетически привлекательным для респондентов.

3. Построены доверительные интервалы, в которых с высокой степенью вероятности содержатся моды с. в. X (т. е. высоты наиболее эстетически привлекательных прямоугольников): $Mo_1 \in (50 - 4.5; 50 + 4.5)$ с вероятностью 95 % и $Mo_2 \in (62,5 - 7; 62,5 + 7)$ с вероятностью 85 %.

При этом установлено, что $Mo_2 \in (62,5 - 7; 100)$ с вероятностью 93,8 %. Сравнительно большая величина второго интервала и вероятность менее 90 % для второй моды объясняются слабой выпуклостью графика плотности с. в. X в окрестности золотого числа и недостаточным количеством реализаций с. в. X в малой окрестности золотого числа.

4. Показано, что вопреки утверждениям Фехнера окрестность золотого сечения не является особенно привлекательной для выбора высоты «красивого, соразмерного и приятного для глаз» прямоугольника. Установлено, что, если рассматриваются окрестности радиуса больше, чем 1,5 мм, то вероятности выбора высоты из окрестности точки 50 мм и точки 62 мм не имеют значимых различий, т. е. с высокой долей вероятности могут считаться равными.

§ 7.3. Примеры применения теории вероятностей и математической статистики в эргономике

Ранее мы уже познакомились с курсом эргономики (см. пособия [41], [42]). В этом параграфе мы рассмотрим, как в эргономике используется аппарат теории вероятностей и математической статистики.

Как известно (см., например [42, с. 4]): «определение эргономики, принятое в 2010 г. Международной ассоциацией эргономики (IEA), звучит так: «Научная дисциплина, изучающая взаимодействие человека и других элементов системы, а также сфера деятельности по применению теории, принципов, данных и методов этой науки для обеспечения благополучия человека и оптимизации общей производительности системы». Поэтому при дизайн-

проектировании учитываются следующие требования: антропометрия, физиология, охрана труда, инженерная эргономика (человек – среда), экология: природные условия, синтетическая среда». Ниже приведена таблица, взятая из [42, с. 5], в которой представлены направления исследований науки «эргономика».

Таблица 7.3.1 – Основные направления исследований в эргономике

Антропометрия	Вариантность измерений
	Статические размеры
	Динамические размеры
Физиологи	Сенсорные процессы
	Моторные процессы
Охрана труда	Техника безопасности
	Гигиена труда
	Противопожарная безопасность
Инженерная эргономика	Человек – среда
	Человек – машина
	Человек – коллектив
Экология	Природные и синтетические условия
	Синтетическая среда

Из таблицы 7.3.1 видно, что большая часть направлений исследований либо занимается какими-то измерениями, либо в своей деятельности на них основывается.

В этом параграфе мы остановимся подробнее на антропометрии. Как известно [76, с. 59 – 60], «главная и основная цель – в идеальном случае спроектировать машину, обеспечивающую работу 100 % предполагаемого обслуживающего контингента. По существующим стандартам в инженерной практике считается, что уровень эргономической проработки новой техники достигается для 98, 95 и, в крайнем случае, 90 % планируемого контингента. В этом случае машина считается доработанной. ... Гарантией оптимального взаимодействия между человеком и окружающей средой являются установленные необходимые размеры тела человека, используемые для оптимизации рабочего места и рабочей среды в процессе технологического проектирования». Методика и данные измерений этих размеров дана в действующих ГОСТах Р ИСО, которые есть в интернете:

1. ГОСТ Р ИСО 7250-1-2013 Национальный Стандарт Российской Федерации. Эргономика. Основные антропометрические измерения для технического проектирования. Часть 1. Определения и основные антропометрические точки.

Вот пример описания измерения из этого ГОСТа.

4.1.2 Рост (высота человека)

Описание: расстояние по вертикали от пола до наивысшей точки головы (темя) (см. рис. 7.3.1).

Метод: обследуемый стоит строго прямо, ноги вместе. Голова ориентирована во Франкфуртской плоскости.

Средство измерений: антропометр.

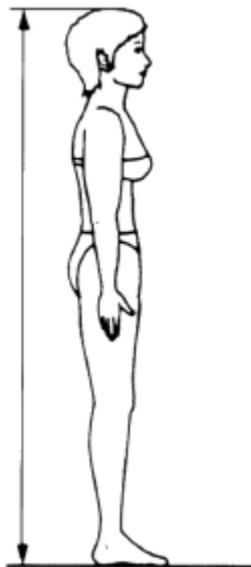


Рисунок 7.3.1 – Рост

2. ГОСТ Р 56620.2 – 2015 / ISO / TR 7250-2:2010 Национальный Стандарт Российской Федерации. Эргономика. Основные антропометрические измерения для технического проектирования. Часть 2. Статистические данные национальных совокупностей. Дата введения – 2016 – 12 – 01.

3. ГОСТ Р ИСО 7250 – 3 – 2019 Эргономика. Основные антропометрические измерения для технического проектирования. Часть 1. Часть 3. Международные и региональные данные для использования в стандартах на продукцию.

При проектировании оборудования, организации рабочих мест персонала первостепенный практический интерес представляют такие антропометрические параметры человека, как, например: рост, зона досягаемости руки, расстояние от плеча до локтя, расстояние от локтя до оси схвата кистью, высота глаз над уровнем пола и др. На основании многочисленных статистических исследований принято считать, что антропометрические характеристики – это непрерывные случайные величины, распределенные по нормальному закону.

Эти и многие другие антропометрические характеристики имеются в виде статистических таблиц, в которых обычно указаны математическое ожидание и дисперсия каждой характеристики, а также наименьшая величина характеристики, исключая 5 % снизу, и наибольшая, исключая 5 % сверху. Иногда в таблицах вместо слова процент используется термин перцентиль (или перцентиль или процентиль), (n -й перцентиль – это такое значение, которое наблюдаемая случайная величина не превосходит с вероятностью $n\%$). В

антропометрических измерениях особое значение имеют перцентили 1, 5, 50, 95 и 99.

В качестве иллюстрации понятия перцентиль рассмотрим (см. рис. 7.3.2) фрагмент таблицы 8 из [76, с. 56].

Наименование признака	Значения признаков мужчин, мм			
	5-й перцентиль	95-й перцентиль	M	σ
Длина: тела (рост)	1 614	1 831	1 723	66,2

Рисунок 7.3.2 – Фрагмент таблицы 8 из [76, с. 56], содержащий данные о росте русских мужчин (возраст 18 – 21 год), основанные на измерениях 1990-х гг.

Цифра 1614 из второго столбца означает, что 5 % измеренных мужчин имеют рост 1614 мм и ниже, рост всех остальных измеренных мужчин – выше; цифра 1831 из третьего столбца означает, что рост 95 % мужчин рассматриваемого возраста имеют рост 1831 мм и ниже, а 5 % имеют рост – выше. Цифра 1723 – это среднее значение роста (выборочное среднее), а число 66,2 из пятого столбца показывает выборочное среднее квадратическое отклонение.

Такое построение таблицы удобно для практического использования. Дело в том, что среднестатистические данные не всегда используются при проектировании. Так, например, если умывальник в проектируемом помещении установить на высоте исходя из среднестатистического роста человека, то он окажется неудобным и высоким для людей небольшого роста. Если же речь идет о дверном проеме, то его размер также не следует подстраивать под человека среднего роста – он будет удобен для людей высокого роста. Практика проектирования показала, что из различных по величине значений антропометрических признаков чаще используются, соответствующие 5-му и 95-му перцентилем, а не только 50-му. С этим и связано введение их в таблицы наравне со средними значениями.

Покажем на примере данных из рисунка 7.3.2, как эти значения можно получить, зная соответствующее среднее и дисперсию.

В главе 5 в § 5.5 изучалось нормальное распределение. Там была дана формула (5.5.3), согласно которой вероятность того, что нормально распределенная с. в. X примет значение из интервала $(a; b)$ вычисляется по формуле:

$$P\{a < X < b\} = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x)$ – функция Лапласа.

Пример 7.3.1. Пользуясь значением среднего роста из таблицы на рис. 7.3.2, найти 5-й перцентиль.

Решение. Согласно определению, 5-й перцентиль – это такой рост, что процент мужчин, чей рост меньше или равен ему, составляет 5 %. Обозначим такой рост через x . С вероятностной точки зрения это означает, что вероятность, при которой рост случайным образом выбранного мужчины не превосходит x ,

равна 0,05. Обозначим через X непрерывную случайную величину – рост мужчины. Тогда в терминах теории вероятностей наша задача состоит в том, чтобы найти такое число x , при котором выполняется равенство:

$$P\{0 < X \leq x\} = 0,05.$$

Напомним, что левая часть этого равенства читается так: вероятность того, что в результате эксперимента с. в. X примет значение из интервала $(0; x]$. Также напомним, что для непрерывных случайных величин вероятности попасть в интервалы $(0; x)$ и $(0; x]$ одинаковы, т. е.

$$P\{0 < X < x\} = P\{0 < X \leq x\}.$$

Итак, воспользуемся формулой (5.5.3), подставив в нее данные из условия примера: $a = 0$, $b = x$, $m = 1723$ и $\sigma = 66,2$. Получим:

$$P\{0 < X < x\} = \Phi\left(\frac{x-1723}{66,2}\right) - \Phi\left(\frac{0-1723}{66,2}\right) = 0,05,$$

где в силу нечетности функции $\Phi(x)$,

$$\Phi\left(\frac{0-1723}{66,2}\right) = \Phi\left(-\frac{1723}{66,2}\right) = -\Phi(26,027).$$

Из таблицы значений функции $\Phi(x)$ находим (см., например [29, с. 236 – 237]), что $\Phi(26,027) = 0,5$. Таким образом, задача свелась к тому, чтобы найти число x , удовлетворяющее равенству:

$$\Phi\left(\frac{x-1723}{66,2}\right) + 0,5 = 0,05,$$

или в силу нечетности функции $\Phi(x)$

$$\Phi\left(\frac{1723-x}{66,2}\right) = 0,45.$$

Из таблицы также находим, что $\Phi(t) = 0,45$ при $t = 1,645$. Следовательно, $\frac{1723-x}{66,2} = 1,645$, откуда получаем: $1723 - x = 108,9$; $1723 - 108,9 = x$. Т. е. $x = 1614$.

Пример 7.3.2. Пользуясь значением среднего роста из таблицы (на рис. 7.3.2), найти 95-й перцентиль.

Решение. Рассуждения аналогичны тем, которые применялись при решении примера 7.3.1. Итак, согласно определению, 95-й перцентиль – это такой рост, что процент мужчин, чей рост меньше или равен ему, составляет 95 %. Обозначим такой рост через x . С вероятностной точки зрения это означает, что вероятность, при которой рост случайным образом выбранного мужчины не превосходит x , равна 0,95. Обозначим через X непрерывную случайную величину – рост мужчины. Тогда в терминах теории вероятностей наша задача состоит в том, чтобы найти такое число x , при котором выполняется равенство:

$$P\{0 < X \leq x\} = 0,95.$$

Вспользуемся формулой (5.5.3), подставив в нее данные из условия примера: $a = 0, b = x, m = 1723$ и $\sigma = 66,2$. Получим:

$$P\{0 < X < x\} = \Phi\left(\frac{x-1723}{66,2}\right) - \Phi\left(\frac{0-1723}{66,2}\right) = 0,95.$$

Таким образом, задача свелась к тому, чтобы найти число x , удовлетворяющее равенству:

$$\Phi\left(\frac{x-1723}{66,2}\right) + 0,5 = 0,95,$$

или

$$\Phi\left(\frac{x-1723}{66,2}\right) = 0,45,$$

Из таблицы [29, с. 236 – 237] находим, что $\Phi(t) = 0,45$ при $t = 1,645$. Следовательно,

$$\frac{x-1723}{66,2} = 1,645,$$

откуда получаем: $x - 1723 = 108,9$; $1723 + 108,9 = x$. Т. е. $x = 1831,9$.

Расхождение с табличным значением 1831 связано с тем, что данные таблицы из рисунка 7.3.1, на которых основаны наши расчеты, сами являются округленными.

Замечание 7.3.1. Понятно, что невозможно издать таблицы перцентилей, пригодные на все случаи жизни. Однако способом, продемонстрированным в примерах 7.3.1 и 7.3.2, можно в необходимых случаях составить требуемую таблицу самостоятельно.

Отметим [76, с. 66], что: «при расчете параметров рабочего места, в частности, не рекомендуется:

- 1) рассчитывать параметры рабочего места только на основе среднеарифметических значений антропометрических признаков (или 50-го перцентиля);
- 2) пользоваться антропометрическими данными 15 – 20-летней давности;
- 3) пользоваться источниками информации, где не указаны год их получения, возраст и национальность контингента обследуемых людей, численность группы».

Вообще статистика антропометрических признаков изучена достаточно подробно. Так, например [111], содержит подробнейшие данные людей по различным возрастам, начиная от одного года. На рисунке 7.3.3 представлена иллюстрация из [111] с параметрами для разных перцентилей.

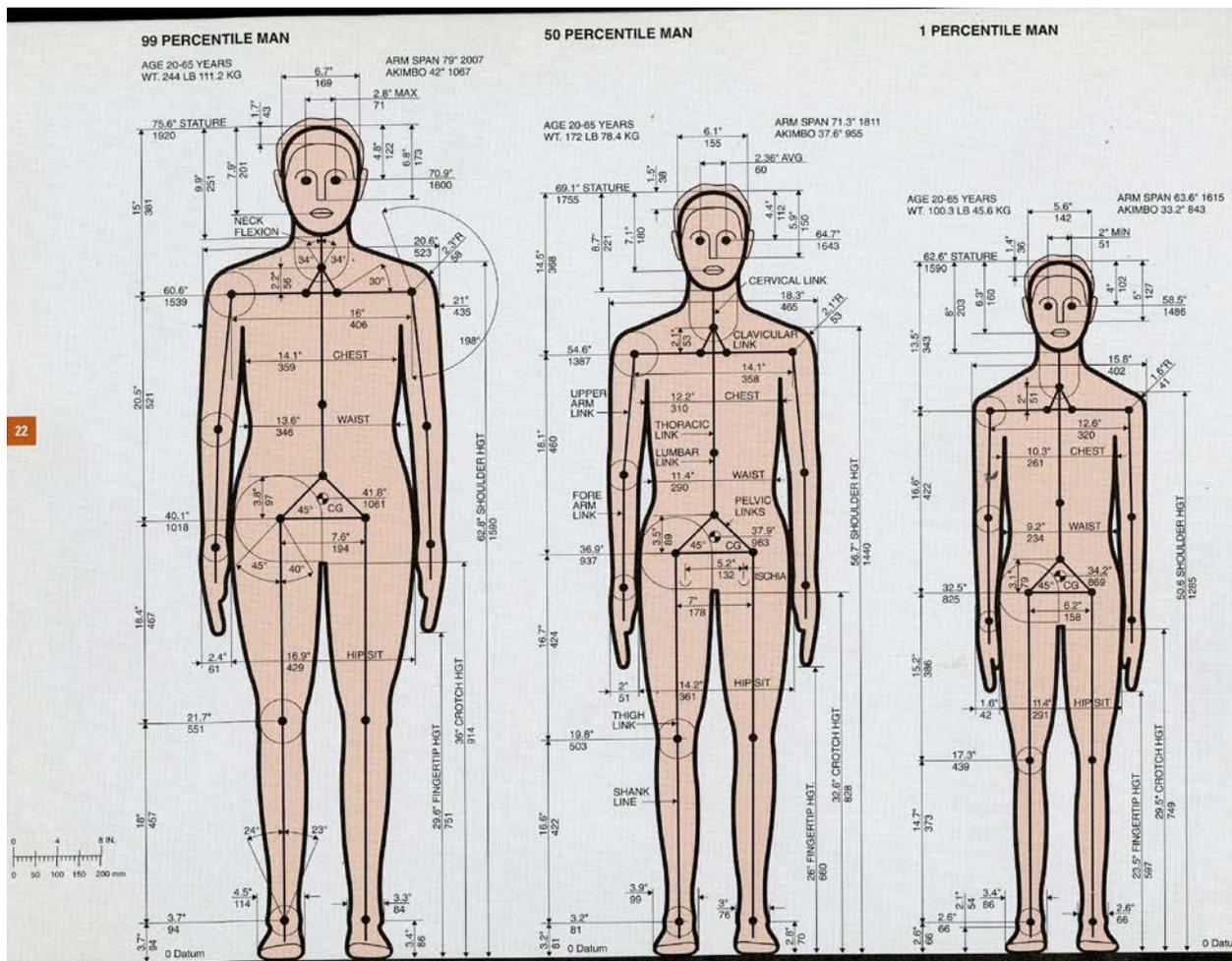


Рисунок 7.3.3 – Параметры мужчины фронтальный вид: 99-й перцентиль, 50-й перцентиль и 1-й перцентиль

Теперь покажем, что проектирование оборудования под параметры «среднего» человека не всегда оправдано. Для этого, пользуясь формулой (7.3.1), сначала установим, что:

$$P\{X < m\} = P\{X > m\} = \frac{1}{2} \quad (7.3.1)$$

Формула $P\{X < m\}$ читается следующим образом. Вероятность того, что в результате испытания случайная величина X примет значение меньше чем m . Применительно к нашей конкретной ситуации эта формула принимает следующий смысл: вероятность того, что рост наудачу выбранного человека меньше, чем m – средний рост. Найдем эту вероятность. Воспользуемся формулой (5.5.3), полагая $b = m$ и $a = -\infty$. Используя таблицу [29, с. 236 – 237] значений функции $\Phi(x)$, получаем в силу нечетности этой функции, что:

$$\begin{aligned} P\{X < m\} &= P\{-\infty < X < m\} = \Phi\left(\frac{m-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-\infty-m}{\sigma}\right) = \Phi(0) - \Phi(-\infty) = \\ &= 0 + \Phi(\infty) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Аналогично устанавливается справедливость второго неравенства:

$$P\{X > m\} = \frac{1}{2}$$

Установленная нами формула (7.3.1) показывает, что, условно говоря, половина обследуемого населения имеет параметры человека ростом ниже среднего, а половина – выше среднего. Это и означает, что проектирование оборудования под параметры «среднего» человека не всегда оправдано. Действительно, если, например, высота потолка проектируемой кабины автомобиля, самолета или длина спального места в поезде будет комфортна для человека среднего роста, то для той половины населения, которая выше среднего роста, они в лучшем случае будут вызывать неудобство при использовании и т. д.

Теперь поговорим о «среднестатистическом» человеке. Согласно рубрикации (т. е. подразделению) длины тела человека, предложенной [65, с.7] в начале XX века известным немецким антропологом Рудольфом Мартином (1864 – 1925), имеется категория «средний», с которой соседствуют категории «ниже среднего» и «выше среднего». Эти три категории по терминологии некоторых авторов (см., например [65]) объединяются понятием «широкой» нормы вариации длины тела. В числовом выражении они охватывают интервал, примерно равный интервалу $(m - \sigma; m + \sigma)$. За последнее столетие рубрикация Мартина в цифровой части неоднократно подвергалась уточнениям и корректировке (см., например [65]), обсуждению которой мы не будем касаться. Но в целом у всех авторов речь шла примерно об интервале $(m - \sigma; m + \sigma)$. Для нас он будет важен, как определение понятия «средний в широком смысле» или для краткости просто «средний», и который мы будем применять к остальным антропометрическим признакам.

Выберем какой-нибудь антропометрический признак (например, рост) и найдем процент населения, входящий в группу «средний в широком смысле». Имеем:

$$P\{m - \sigma < X < m + \sigma\} = \Phi\left(\frac{m + \sigma - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{m - \sigma - m}{\sigma}\right) = 2\Phi(1) = 2 \times 0,34134 = 0,68268.$$

Таблицы антропометрических признаков содержат несколько десятков различных измеряемых параметров. Вероятность того, что некто «средний» будет удовлетворять одновременно всем этим требованиям есть вероятность одновременного выполнения всех требований к антропометрическим признакам, т. е. вероятность произведения событий. По теореме о вероятности произведения (см. § 4.7, теорема 4.7.2) она равна произведению вероятностей этих событий. Следовательно, если взять, например, 15 антропометрических признаков, то вероятность того, что некто «средний» будет им удовлетворять равна:

$$P = 0,68268^{15} \approx 0,0033.$$

Т. е. в среднем 3 – 4 человека из каждой тысячи. А сколько параметров мы еще не учли! Таким образом, среднестатистический человек – он как бы и есть, поскольку проходит по статистическим сводкам, но его как бы и нет, поскольку его никто не видел живьем. И это реальная проблема «среднестатистического»

человека. Вот представьте себе: вы утром просыпаетесь, шевелите руками, ногами и приходите к выводу, что вы есть. А подходите к зеркалу и понимаете, что вас нет. Каково это? По документам вы есть, и вы сами знаете, что вы есть, но живьем-то вас нет. Ну, что-то вроде персонажа из Герберта Уэллса.

Теперь поговорим о количестве одновременно востребованных независимых антропометрических признаков. Если мы допускаем (разрешаем), что при использовании созданного нами оборудования будут задействованы несколько количественных антропометрических признаков (рост, ширина плеч и т. д. из интервалов (5 %; 95 %)), то каждому из них будут удовлетворять 90 % населения. Для двух признаков одновременно – это $0,9 \times 0,9 = 0,81$; для трех получаем значение $0,9 \times 0,9 \times 0,9 = 0,729$. А для четырех эта цифра становится равной $0,9 \times 0,9 \times 0,9 \times 0,9 = 0,6561$. То есть из каждой сотни работников вашей аппаратурой смогут управлять в среднем только 65 – 66 человек. Этот пример призван наглядно показать, что крайне нежелательно увеличивать в одном объекте количество одновременно независимо используемых количественных антропометрических характеристик работников.

Далее для иллюстрации применения методов теории вероятностей и математической статистики в вопросах использования антропометрических данных мы воспользуемся материалами из [20, с. 440 – 445]. Для упражнений мы возьмем [20, с. 442 – 445] антропометрические данные, полученные в 1966 году при обмерах населения города Москвы – мужчин и женщин в возрасте от 20 до 59 лет (см. рис. 7.3.4 – 7.3.7). Для практического применения они являются устаревшими, но для нас они очень удобны ввиду наглядности в подаче материала.

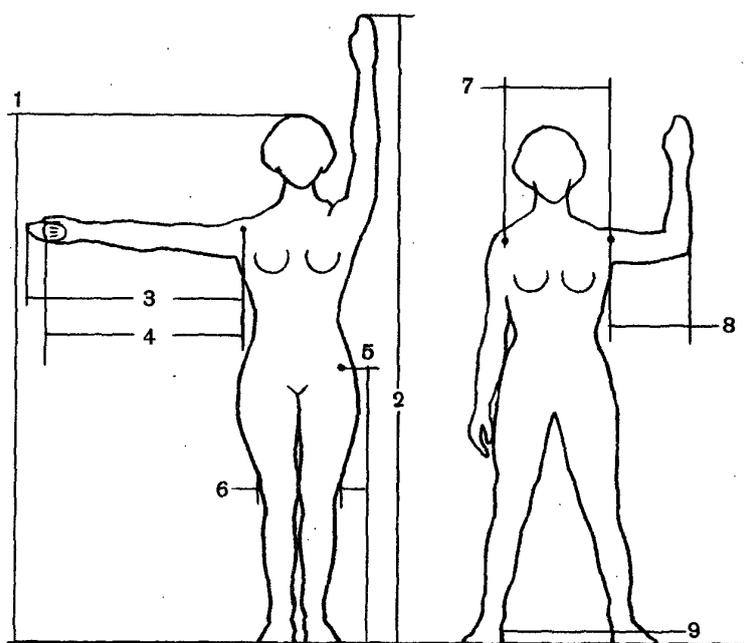


Рисунок 7.3.4 – Измеряемые параметры у женщин

Измеряемая величина	средний, М	среднеквадратическое отклонение, σ
1. Рост	1567	57
2. Зона вертикальной досягаемости	1981	76
3. Длина руки, вытянутой в сторону	661	30
4. Зона боковой досягаемости (от плечевой точки)	568	26
5. Длина ноги	835	41
6. Ширина колен	226	18
7. Ширина плеч	349	16
8. Длина плеча	302	16
9. Ширина расстановки ног	726	72

Рисунок 7.3.5 – Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение параметров, определенных рисунком 7.3.4

Пример 7.3.3. Пользуясь статистическими данными таблицы, приведенной на рисунке 7.3.4, установить какой процент женщин имеет следующие антропометрические параметры:

- 1) рост в интервале (1550; 1600);
- 2) зона вертикальной досягаемости в интервале (1900; 1950);
- 3) длина руки, вытянутой в сторону, в интервале (650; 700);
- 4) зона боковой досягаемости (от плечевой точки) в интервале (500; 550);
- 5) длина ноги в интервале (800; 850);
- 6) ширина колен в интервале (200; 250);
- 7) ширина плеч в интервале (350; 400);
- 8) длина плеча в интервале (290; 350);
- 9) ширина расстановки ног в интервале (700; 750).

Решение.

Приведем решение первого задания, в котором рост женщины должен находиться в интервале (1550; 1600). Воспользуемся формулой (5.5.3):

$$P\{a < X < b\} = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x)$ – функция Лапласа. В нашем случае: $m = 1567$, $\sigma = 57$, $b = 1600$, $a = 1550$. Подставляя в формулу и используя таблицу значений функции Лапласа [29, с. 236 – 237], получаем с учетом нечетности функции $\Phi(x)$:

$$\begin{aligned} P\{1550 < X < 1600\} &= \Phi\left(\frac{1600-1567}{57}\right) - \Phi\left(\frac{1550-1567}{57}\right) = \\ &= \Phi\left(\frac{1600-1567}{57}\right) - \Phi\left(\frac{1550-1567}{57}\right) \approx \Phi(0,58) - \Phi(-0,29) = \Phi(0,58) + \Phi(0,29) = \\ &= 0,219 + 0,1141 = 0,3331. \end{aligned}$$

Остальные задания решаются аналогично.

Замечание. На основании теоремы о вероятности произведения можно сделать вывод о том, что вероятность того, что женщина имеет параметры, указанные в интервалах из заданий 1 – 9 равна произведению вероятностей из этих заданий.

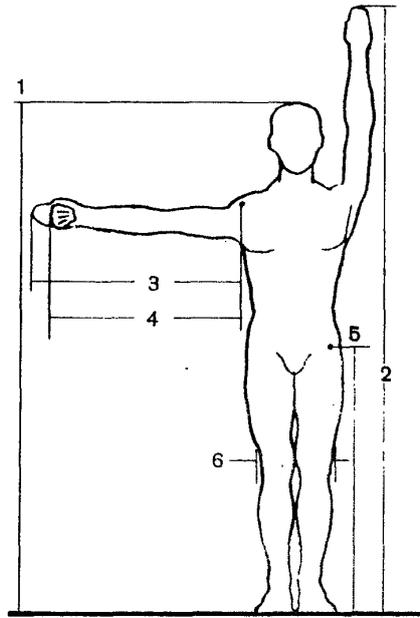


Рисунок 7.3.6 – Измеряемые параметры у мужчин

Измеряемая величина	средний, М	среднеквадратическое отклонение, σ
1. Рост	1680	58
2. Зона вертикальной досягаемости	2140	84
3. Длина руки, вытянутой в сторону	723	33
4. Зона боковой досягаемости (от плечевой точки)	622	30
5. Длина ноги	900	43
6. Ширина колен	230	18
7. Ширина плеч	380	18
8. Длина плеча	327	17
9. Ширина расстановки ног	830	72

Рисунок 7.3.7 – Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение параметров, определенных рисунком 7.3.6

Задание

1. Выполните остальные задания из примера 7.3.3.
2. Нарисуйте в масштабе фигуру женщины, чьи антропометрические параметры удовлетворяют требованиям, которые указаны в заданиях 1 – 5 из примера 3.
3. Пользуясь данными таблицы из рисунка 7.3.7, установите с помощью формулы (5.5.3), какой процент мужчин имеет антропометрические параметры, указанные в примере 7.3.3.
4. Нарисуйте в масштабе фигуру мужчины, чьи антропометрические параметры удовлетворяют требованиям, которые указаны в заданиях 1 – 5 из задания 3.

§ 7.4. Антропометрические данные и пропорции модулора

Ранее, в § 2.4 мы уже познакомились с модулором Ле Корбюзье. В этом параграфе мы, используя данные антропометрических измерений и методы теории вероятностей и математической статистики, проверим достоверность идеи французского архитектора.

Напомним некоторые необходимые нам в этом параграфе основные пропорции теории Ле Корбюзье. На рисунке 7.4.1 схематично показаны типичные положения тела человека в различных жизненных ситуациях.

Красный ряд (рис. 7.4.1): человек стоит, стоит опершись локтями о стойку; сидит в кресле, опершись о подлокотники; сидит на стуле; сидит на низкой скамеечке.

Синий ряд (рис. 7.4.1): человек стоит; стоит, вытянув руку вверх; стоит, опершись плечом; стоит, опустив руки вниз и касаясь при этом руками стола.

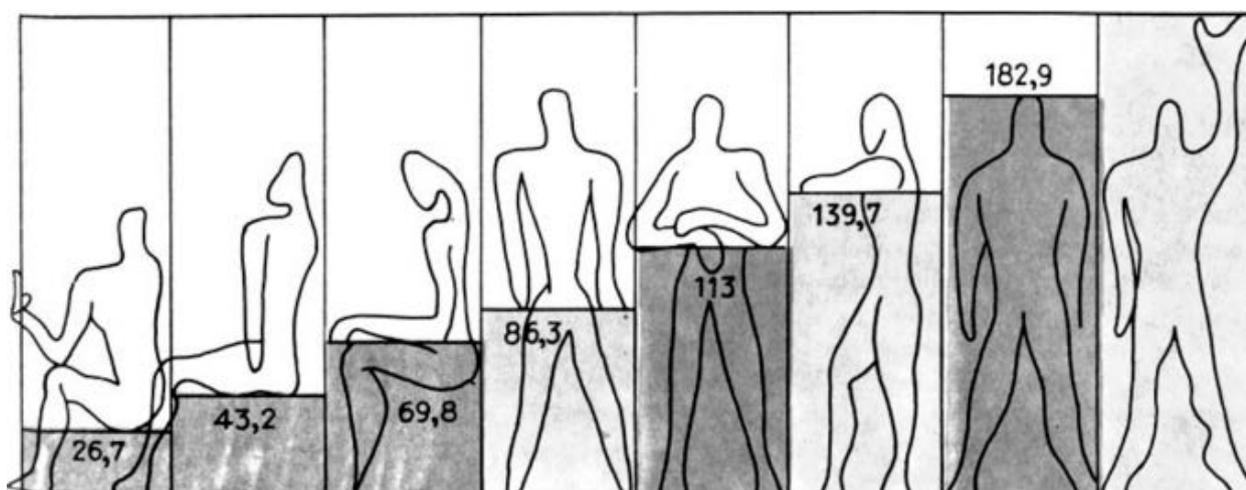


Рисунок 7.4.1 – Система пропорций Ле Корбюзье. Красный ряд на нашем рисунке составлен из фигур, частично или полностью закрашенных более темным цветом. Синий ряд – составлен из частично или полностью закрашенных менее темным цветом

Как уже отмечалось в § 2.4, между элементами синего и красного рядов имеется простая связь. Оказывается, что практически выполняется равенство: $b_k = 2a_{k-1}$, $k \in Z$. В частности, $b_0 = 2a_{-1}$

В качестве материала для исследования мы возьмем [20, с. 442 – 445] некоторые из антропометрических данных, полученных в 1966 году при обмерах населения города Москвы – мужчин и женщин в возрасте от 20 до 59 лет (см. рис. 7.4.2 – 7.4.5). Для практического применения они являются устаревшими, но для нас они очень удобны ввиду наглядности в подаче материала, позволяющей однозначно и узнаваемо сопоставлять некоторые из них с изображениями Ле Корбюзье (см. рис. 7.4.1).

Сначала рассмотрим антропометрические данные мужчин (см. рис. 7.4.2 и 7.4.3) и таблицу 7.4.1.

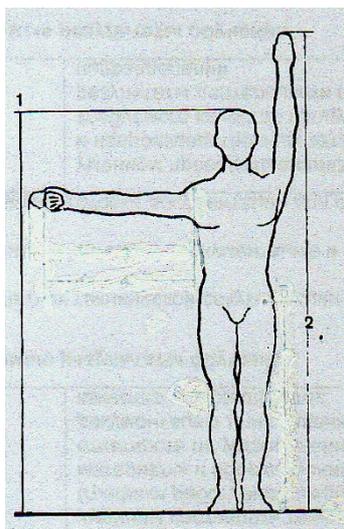


Рисунок 7.4.2 – Измеряемые параметры у мужчин: 1. Рост; 2. Зона вертикальной досягаемости

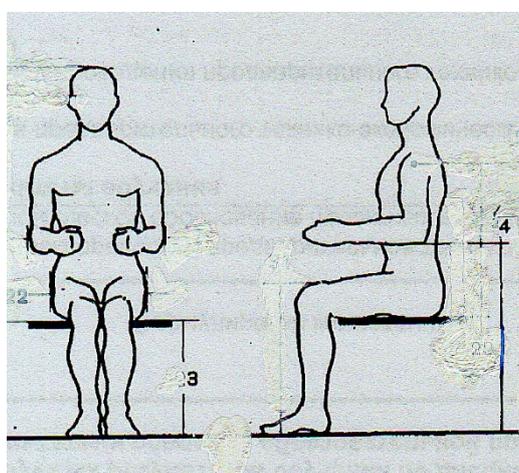


Рисунок 7.4.3 – Измеряемые параметры у мужчин: 3. Рост сидя. Высота сиденья; 4. Рост сидя. Высота локтя над полом

Таблица 7.4.1 – Математическое ожидание M , среднее квадратическое отклонение σ некоторых параметров, определенных рисунками 7.4.2 и 7.4.3.

Номер на рисунке и измеряемая величина	Математическое ожидание M	Среднеквадратическое отклонение σ
1. Рост	1680	58
2. Зона вертикальной досягаемости	2140	84
3. Рост сидя. Высота сиденья	422	22
4. Рост сидя. Высота локтя над полом	654	33

Пусть Y – мужчина, средний рост которого равен 1680, а все антропометрические признаки находятся в соответствии с пропорциями модулора, одним словом, Y – красавец. Затем сравним значения антропометрических признаков нашего красавчика Y с фактически

наблюдаемыми (то есть теми, которые приведены в таблице 7.4.2) и проанализируем возможные расхождения.

Построим вспомогательную таблицу 7.4.2, содержащую наблюдаемые (табличные) значения и теоретические значения для красного и синего рядов, построенные для Y в соответствии с системой пропорционирования – модулом, примененной к среднему росту, указанному в таблице 7.4.2.

Таблица 7.4.2 – Наблюдаемые антропометрические признаки, их выборочные значения и теоретические значения модулора в миллиметрах

Номер на рисунке и измеряемая величина	Наблюдаемое значение $M_{набл.}$	$\sigma_{набл.}$	Модулор. Значения для Y		
			Красный ряд	Синий ряд	Значение $M_{теор.}$
1. Рост	1680	58	1680		1680
2. Зона вертикальной досягаемости	2140	84		2076	2076
3. Рост сидя. Высота сиденья	422	22	397		397
4. Рост сидя. Высота локтя над полом	654	33	642		642

1. Рост. Наблюдаемое значение среднего роста является отправной точкой теоретического построения – первым числом красного ряда. Он равен 1680.

2. Зона вертикальной досягаемости. Это значение вычисляется по формуле:

$$\text{зона вертикальной досягаемости} = (\text{рост} \times \Phi^{-1}) \times 2,$$

где $\Phi^{-1} = \varphi$ – это золотое число. Вычисления дают: $1680 \times \Phi^{-1} \times 2 = 2076$.

3. Рост сидя. Высота сиденья. По правилу модулора она вычисляется с помощью формулы:

$$\text{высота сиденья} = \text{рост} \times \Phi^{-3}.$$

В результате вычислений получаем, что высота сиденья равна: $1680 \times \Phi^{-3} = 397$.

4. Рост сидя. Высота локтя над полом. Эта величина вычисляется по формуле:

$$\text{высота локтя над полом} = \text{рост} \times \Phi^{-2}.$$

Вычисления дают значение: $1680 \times \Phi^{-2} = 642$.

В предыдущем параграфе мы определили «среднестатистического» мужчину, как человека, чьи антропометрические характеристики находились в интервале $(m - \sigma; m + \sigma)$. В этом смысле нашего Y можно отнести к «среднестатистическим» мужчинам, поскольку:

а) величина параметра «Зона вертикальной досягаемости», равная 2076, лежит в интервале $(m - \sigma; m + \sigma) = (2140 - 84; 2140 + 84) = (2056; 2224)$;

б) величина параметра «Рост сидя. Высота сиденья», равная 397, почти лежит в интервале $(m - \sigma; m + \sigma) = (422 - 22; 422 + 22) = (400; 444)$;

в) величина параметра «Рост сидя. Высота локтя над полом», равная 642, лежит в интервале $(m - \sigma; m + \sigma) = (654 - 33; 654 + 33) = (621; 687)$.

Обозначим символом $M_{\text{теор.}}$ теоретическую величину признака и положим $\Delta M = M_{\text{теор.}} - M_{\text{набл.}}$. В нижеследующей таблице 7.4.3 приведены сравнительные данные по наблюдаемым антропометрическим параметрам и их теоретическим значениям. Налицо заметные расхождения во второй и третьей позициях.

Таблица 7.4.3 – Наблюдаемые антропометрические параметры и их теоретические значения. Сравнительные данные

Номер на рисунке и измеряемая величина	Наблюдаемое значение $M_{\text{набл.}}$	Модулар. Теоретическое значение. $M_{\text{теор.}}$	ΔM	$\left \frac{\Delta M}{M_{\text{теор.}}} \right $
1. Рост	1680	1680	0	0
2. Зона вертикальной досягаемости	2140	2076	- 64	0,031 или 3,1 %
3. Рост сидя. Высота сиденья	422	397	-25	0,063 или 6,3 %
4. Рост сидя. Высота локтя над полом	654	642	-12	0,019 или 1,9 %

Возникает вопрос: имеем ли мы дело с системой пропорциональности, лежащей в основе модулора? С целью ответа на этот вопрос найдем коэффициент пропорциональности для каждого положения тела, изображенного на рисунке 7.4.2.

а) Величина параметра «Зона вертикальной досягаемости» в соответствии с пропорциональным строем модулора вычисляется по формуле:

$$\text{зона вертикальной досягаемости} = (\text{рост} \times \varphi) \times 2.$$

Обозначим через ψ_1 коэффициент пропорциональности, соответствующий нашим данным (см. таблицу 7.4.2). Тогда должно выполняться равенство:

$$2140 = (1680 \times \psi_1) \times 2.$$

Таким образом, $\psi_1 = (2140 / 2) / 1680 \approx 0,637$.

б) Параметр «Рост сидя. Высота локтя над полом». Эта величина в соответствии с пропорциями модулора вычисляется по формуле:

$$\text{высота локтя над полом} = \text{рост} \times \varphi^2.$$

Обозначим через ψ_2 коэффициент пропорциональности, соответствующий нашим данным (см. таблицу 7.4.2). Тогда должно выполняться равенство:

$$654 = 1680 \times \psi_2^2.$$

Следовательно, $\psi_2 = \sqrt{654 / 1680} \approx 0,624$.

в) Параметр «Рост сидя. Высота сиденья». Эта величина в соответствии с правилом модулора вычисляется по формуле:

$$\text{высота локтя над полом} = \text{рост} \times \varphi^3.$$

Обозначим через ψ_3 коэффициент пропорциональности, соответствующий нашим данным (см. таблицу 7.4.2). Тогда должно выполняться равенство:

$$422 = 1680 \times \text{рост} \times \psi_3^3.$$

Т. е. $\psi_3 = \sqrt[3]{422/1680} \approx \sqrt[3]{0.25119} \approx 0.631$.

Таким образом, вместо числа $\varphi \approx 0,618$ мы для «среднего» мужчины москвича получили следующие коэффициенты пропорциональности: $\psi_1 \approx 0,637$, $\psi_2 \approx 0,624$ и $\psi_3 \approx 0,631$. Говоря о композиции, построенной по золотому сечению, обычно имеют в виду приближенные значения числа φ такие, как 0,6 или 0,62, или 0,625. В нашем случае два из трех коэффициентов заметно отличаются от числа φ . Мы не комментируем значимость имеющихся отличий, оставляя это право за профессионалами-дизайнерами, художниками и другими представителями творческой элиты. Кое-кто точно бы не одобрил такое отклонение от высоких канонов прекрасного. Мы же, со своей стороны, лишь отметим, что если очень нужно, то имеющиеся отличия вполне можно считать несущественными.

В качестве данных для задания на самостоятельную работу рассмотрим антропометрические данные женщин (см. рис. 7.4.4 и 7.4.5) и таблицу 7.4.4, взятые из [1, с. 444 – 445].

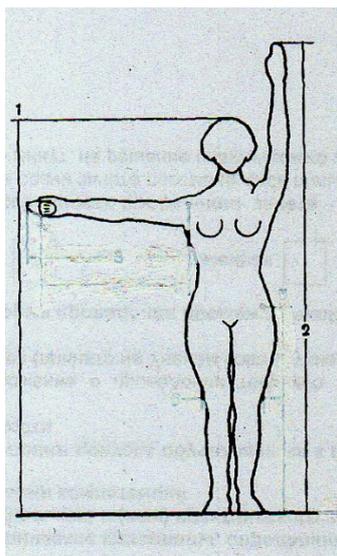


Рисунок 7.4.4 – Измеряемые параметры у женщин: 1. Рост; 2. Зона вертикальной досягаемости

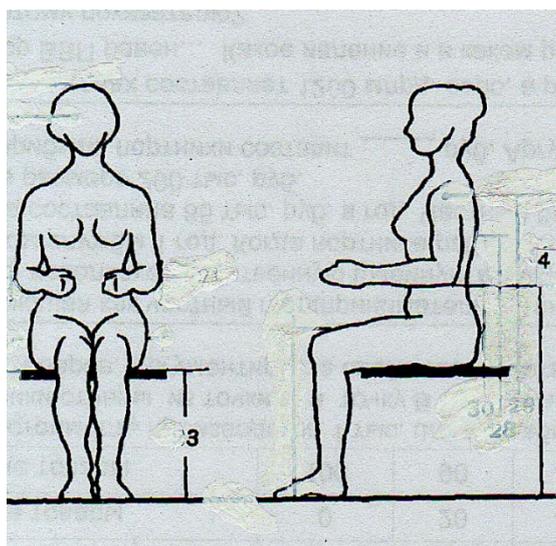


Рисунок 7.4.5 – Измеряемые параметры у женщин: 3. Рост сидя. Высота сиденья; 4. Рост сидя. Высота локтя над полом

Таблица 7.4.4 – Математическое ожидание M и среднее квадратическое отклонение σ параметров, которые определены рисунками 7.4.4 и 7.4.5

Номер на рисунке и измеряемая величина	Среднее M	Среднее квадратическое отклонение σ
1. Рост	1567	57
2. Зона вертикальной досягаемости	1981	76
3. Рост сидя. Высота сиденья	370	22
4. Рост сидя. Высота локтя над полом	605	35

Задание

1. Пользуясь данными таблицы 7.4.4, проверьте, можно ли отнести женщину с теоретическими пропорциями, определяемые модулом, к «среднестатистическим» женщинам?
2. Пользуясь данными таблицы 7.4.4, оцените коэффициенты пропорциональности ψ_1 , ψ_2 и ψ_3 .

ГЛАВА 8. ФРАКТАЛЫ

Вам наверняка приходилось слышать слово фрактал, видеть красивые картинки, такие как, например, эти (см. рис. 8.0.1):



Рисунок 8.0.1 – Фрактальные картины

Вы также наверняка восхищались горными пейзажами, вроде изображенного на рисунке 8.0.2:



Рисунок 8.0.2 – Фрактальный пейзаж

Этот пейзаж создан компьютером. Возможно, приходилось видеть и фантастические вземные миры (см., например, https://youtu.be/LTCmr_GSBSc). Помимо плоских фрактальных изображений (картинок) строят также 3D фрактальные пейзажи и анимацию (ее раздел – динамическая живопись). Например, видео «Зима и лето»: <https://www.liveinternet.ru/community/1726655/post158030906/>.

Самое интересное, то, что все эти изображения не есть продукт дизайнерской мысли, а содержат в основании своем так называемые фракталы. По сути – математические формулы (подробнее об этом пойдет речь чуть ниже). Существуют и дизайнерские приложения фракталов. Возможность применения фрактальных изображений в этой области (т. е. в дизайне) подтверждается исследованиями по воздействию созерцания фрактальных изображений на эмоциональное состояние человека. Нашлось место фракталам и в серьезной музыке. О фракталах в музыке Д. Лигети можно посмотреть, например, пройдя по ссылке: <http://opentextnn.ru/old/music/epoch%20/XX/index.html?id=3333>. Приложений в технике мы в этой книге касаться не будем.

Что же означает слово фрактал, которое мы уже неоднократно упомянули? Согласно Интернету, «фрактал (лат. fractus – дробленный, сломанный, разбитый) – множество, обладающее свойством самоподобия (объект, в точности или приближенно совпадающий с частью себя самого, то есть целое имеет ту же форму, что и одна или более частей) ...». В математике дается формальное определение фрактала. Мы рассмотрим его позже.

В этой главе мы разберем лишь некоторые вопросы, связанные с фракталами: фракталы в комплексной динамике, рекурсивные фракталы, математическое определение фрактала, фрактальные ландшафты и поговорим о фракталах в искусстве. Для этого нам потребуются некоторые познания в математике. И начнем это знакомство с комплексных чисел.

§ 8.1. Комплексные числа

В 1494 году уже известный нам Лука Пачоли издал книгу «Сумма арифметики», содержащую все, что на тот момент было известно по арифметике, алгебре и тригонометрии. Помимо прочего в ней утверждалось, что решение уравнений

$$x^3 + mx = n \text{ и } x^3 + n = mx, \text{ где } m, n > 0,$$

невозможно при тогдашнем состоянии науки. Некоторые математики того времени даже полагали, что кубическое уравнение

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \tag{8.1.1}$$

при произвольных коэффициентах a, b и c вообще решить невозможно. Однако так не думал профессор математики болонского университета Сципион дель Ферро (1465 – 1526). Он нашел метод решения уравнения:

$$x^3 + mx^2 = n, \text{ где } m, n > 0. \quad (8.1.2)$$

Этот метод он сообщил своему зятю и, кроме него, своему ученику Антонио Марио Фиоре, который решил использовать полученный алгоритм для побед в практиковавшихся тогда математических поединках. И вот один такой поединок состоялся 12 февраля 1535 года. Противником Фиоре был некий Никколо Фонтанá по прозвищу Тарталья (заика). Это прозвище он получил из-за нарушения речи, наступившего вследствие ранения, полученного в детстве.

За неделю до поединка Тарталья сумел найти метод решения уравнений вида (8.1.2) и стал победителем. Далее этот метод обманом выманил у Тартальи Джироламо Кардано и опубликовал в своей книге, упомянув, правда [96, с. 292], что автор метода Тарталья. В своей книге Кардано также указал метод решения уравнения вида (8.1.1) и привел метод решения уравнения четвертой степени:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \quad (8.1.3)$$

установленный его учеником Феррари. Теперь формула для нахождения решения уравнения (8.1.1) называется формулой Кардано. Некоторые (см., например, [6, с. 148] или [36, с. 92]) мотивируют это тем, что Кардано явился автором первой публикации, в которой была установлена формула.

В 1572 году итальянский математик Рафаэль Бомбелли в своей книге «Алгебра» рассмотрел уравнение:

$$x^3 = 15x + 4$$

Это уравнение, очевидно, имеет корень $x = 4$. Действительно, после подстановки в уравнение получаем:

$$4^3 = 15 \times 4 + 4$$

или

$$64 = 60 + 4$$

Однако, если воспользоваться формулой Кардано (т. е. формулой Тартальи), то получается следующее выражение:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Но такого числа не существует, так как не существует числа $\sqrt{-121}$. Другой на месте Бомбелли, наверное бы, растерялся, но только не наш герой. Заметив, что $121 = 11^2$, он решил действовать, не обращая внимания на такие мелочи, как не имеющие смысла (не существующие) выражения. В современных обозначениях его вычисления выглядят следующим образом. Обозначим $i^2 = -1$, тогда:

$$\sqrt{-121} = \sqrt{-1 \times 121} = \sqrt{-1} \sqrt{121} = 11i$$

Так действовать нельзя, ведь такие правила применимы только к тем выражениям, которые существуют. Но что значит нельзя, когда очень нужно. И Бомбелли идет дальше. Теперь у него:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = \sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i}$$

Далее, так как

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

то с учетом равенства $i^2 = -1$ имеем равенство:

$$\begin{aligned} (2 + i)^3 &= 2^3 + 3 \times 2^2 i + 3 \times 2 i^2 + i^3 = 8 + 12i - 6 + i^2 \times i = \\ &= 2 + 12i - i = 2 + 11i. \end{aligned}$$

Аналогично получаем, что $(2 - i)^3 = 2 - 11i$. Следовательно,

$$x = \sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i} = \sqrt[3]{(2 + i)^3} + \sqrt[3]{(2 - i)^3} = 2 + 11i + 2 - 11i = 4$$

Итак, нарушив кое-где правила, Бомбелли получил нужный результат. Кроме того, в своей «Алгебре» он привел и правила арифметических действий с этими несуществующими числами.

Впоследствии выражения вида $a + bi$, где a и b вещественные числа, а $i^2 = -1$, стали называть мнимыми числами, i – мнимой единицей. Также наряду с термином мнимые числа стали использовать название комплексные числа, а выражение $a + bi$ называть алгебраической формой комплексного числа.

Конечно, методы Бомбелли шокировали прогрессивную общественность. Так, например, Лейбниц писал о мнимых числах [36, с. 94]: «Дух божий нашел тончайшую отдушину в этом чуде анализа, уроде из мира идей, двойственной сущности, находящейся между бытием и небытием, которую мы называем мнимыми числами». Но поскольку других способов решения кубических уравнений не было и идей тоже, то приходилось мужественно терпеть происходящее.

Итак, подытожив сказанное выше, дадим следующее определение комплексного числа.

Определение 8.1.1. Комплексным числом называется выражение вида $a + bi$, где a и b вещественные числа, а $i^2 = -1$; сложение и умножение комплексных чисел производятся как с обычными алгебраическими выражениями с учётом равенства $i^2 = -1$ и соотношений $0 + bi = bi$, $a + 0i = a$.

Число a называется вещественной частью, а число b – мнимой частью комплексного числа $a + bi$. Обозначения: $a = \operatorname{Re}\{a + bi\}$, $b = \operatorname{Im}\{a + bi\}$. Символ i называется мнимой единицей.

Пример 8.1.1. Дано: $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = 4 + 5i$. Найти числа $w_1 = 5z_1 + 3z_2$ и $w_2 = z_1 z_2$.

Решение. По определению суммы комплексных чисел получаем:

$$w_1 = 5z_1 + 3z_2 = 5(2 - 3i) + 3(4 + 5i) = 10 - 15i + 12 + 15i = 22 + 0i = 22.$$

$$w_2 = z_1z_2 = (2 - 3i)(4 + 5i) = 2 \times 4 + 2 \times 5i - 3i \times 4 - 3i \times 5i = 8 + 10i - 12i + 15i^2 = 8 - 2i - 15(-1) = 23 - 2i.$$

Тем временем наступил XVIII век. Математики пошли дальше и стали уже рассматривать не только комплексные числа, но и комплексные переменные и решать задачи, имеющие практическое применение. Тут уже окончательно деваться стало некуда. Комплексные числа решительно требовали разъяснения. И вот на рубеже XVIII и XIX веков было предложено [36, с. 94] (независимо Гаусс – в 1797 г., Вессель – в 1799 г. и Арган – в 1806 г.) рассматривать комплексное число $x + yi$ в виде точки (см. рис. 8.1.1) на плоскости с координатами (x, y) . Такая плоскость называется комплексной плоскостью. Это снимало все вопросы: сложение и умножение стало возможным рассматривать как действие, при котором двум точкам на плоскости (x_1, y_1) и (x_2, y_2) , соответствующим комплексным числам, $x_1 + y_1i$ и $x_2 + y_2i$ по определённым выше правилам сопоставлялась третья точка, изображающая их сумму или произведение.

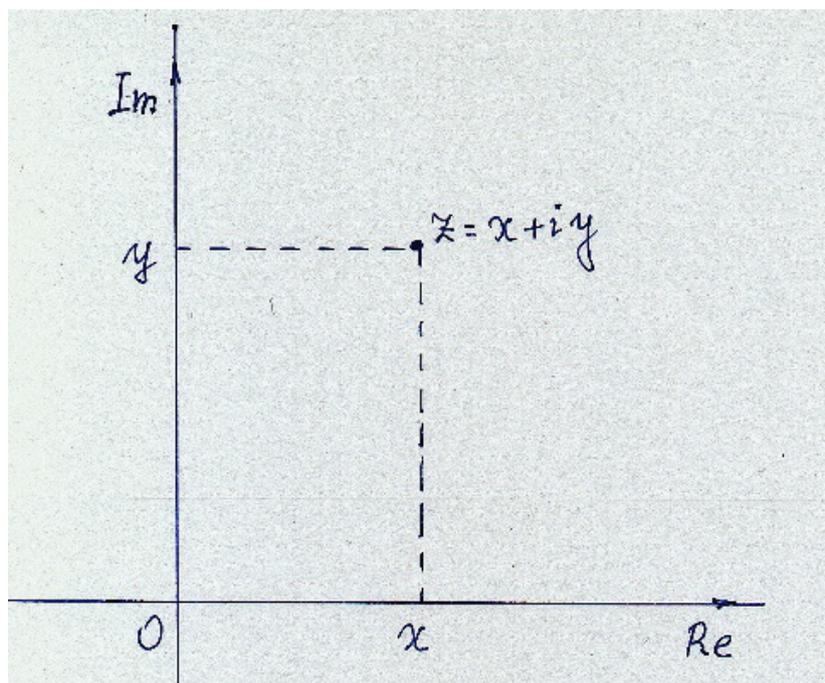


Рисунок 8.1.1 – Изображение на комплексной плоскости числа $x + iy$

Задание

Дано: $z_1 = 4 + i$, $z_2 = 2 - 5i$. Постройте на комплексной плоскости эти точки.

Найдите числа $w_1 = z_1 - 3z_2$ и $w_2 = z_1z_2$.

Ответ: $w_1 = -2 + 16i$; $w_2 = 13 - 18i$.

§ 8.2. Тригонометрическая форма комплексного числа. Умножение комплексных чисел в тригонометрической форме и возведение в степень

Рассмотрим комплексное число $z = a + bi$ и его геометрическое изображение (см. рис. 8.2.1). Величина $\sqrt{a^2 + b^2}$ называется модулем комплексного числа z и обозначается $|z|$.

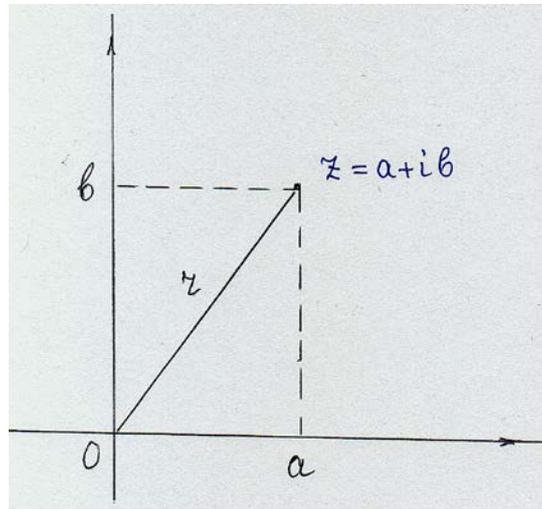


Рисунок 8.2.1 – Изображение комплексного числа $z = a + bi$

Таким образом, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. С геометрической точки зрения $|z|$ равен длине отрезка Oz . Угол между осью Ox и отрезком Oz называется аргументом комплексного числа z и обозначается $Arg z$. Угол считается положительным при отсчёте против часовой стрелки и отрицательным при отсчете по часовой стрелке. Главным значением аргумента называется угол $\alpha \in (-\pi; \pi]$ и обозначается $arg z$. Таким образом, $Arg z = arg z + 2\pi n, n \in Z$.

Обозначим $r = |z|$. Тогда, как видно из рисунка 8.2.1,

$$a = r \cos \alpha, \quad b = r \sin \alpha$$

Откуда получаем, что

$$z = a + ib = r (\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

Выражение вида $z = r (\cos \alpha + i \sin \alpha)$ называется тригонометрической формой комплексного числа z .

Рассмотрим, как записывается произведение комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме.

Теорема 8.2.1. Пусть $z_1 = r_1 (\cos \alpha_1 + i \sin \alpha_1)$ и $z_2 = r_2 (\cos \alpha_2 + i \sin \alpha_2)$. Тогда:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos (\alpha_1 + \alpha_2) + i \sin (\alpha_1 + \alpha_2)] \quad (8.2.1)$$

Доказательство. По правилу умножения комплексных чисел получаем, что

$$z_1 z_2 = r_1 (\cos \alpha_1 + i \sin \alpha_1) r_2 (\cos \alpha_2 + i \sin \alpha_2) = r_1 r_2 [\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + i \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 + i \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 + i^2 \sin \alpha_1 \sin \alpha_2] =$$

$$= r_1 r_2 [(\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_2) + i(\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 + \sin \alpha_1 \cos \alpha_2)]$$

Из тригонометрии известно, что:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta.$$

Тогда: $z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i \sin(\alpha_1 + \alpha_2)]$

Теорема 8.2.2. Пусть $z = r(\cos\alpha + i \sin\alpha)$, тогда для любого натурального n выполняется равенство:

$$z^n = r^n(\cos n\alpha + i \sin n\alpha). \quad (8.2.2)$$

Доказательство справедливости теоремы 8.2.2 в общем случае проводится методом математической индукции. Но мы, чтобы не перегружать изложение излишними подробностями, ограничимся проверкой выполнения равенства (8.2.2) при $n = 2$, $n = 3$ и $n = 4$. Уверенности в том, что теорема верна в этих случаях, вполне достаточно для наших дальнейших рассуждений.

Итак, пусть $n = 2$. Тогда по формуле (8.2.1) получаем:

$$z^2 = z \times z = r(\cos\alpha + i \sin\alpha) \times r(\cos\alpha + i \sin\alpha) = r^2(\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha).$$

Если $n = 3$, то опять-таки по формуле (8.2.1):

$$\begin{aligned} z^3 &= z^2 \times z = r^2(\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha) \times r(\cos\alpha + i \sin\alpha) = \\ &= r^3(\cos 3\alpha + i \sin 3\alpha). \end{aligned}$$

И, аналогично, при $n = 4$ имеем:

$$\begin{aligned} z^4 &= z^3 \times z = r^3(\cos 3\alpha + i \sin 3\alpha) \times r(\cos\alpha + i \sin\alpha) = \\ &= r^4(\cos 4\alpha + i \sin 4\alpha). \end{aligned}$$

Что и требовалось подтвердить.

На рисунке 8.2.2 схематично изображены степени числа $z = r(\cos\alpha + i \sin\alpha)$.

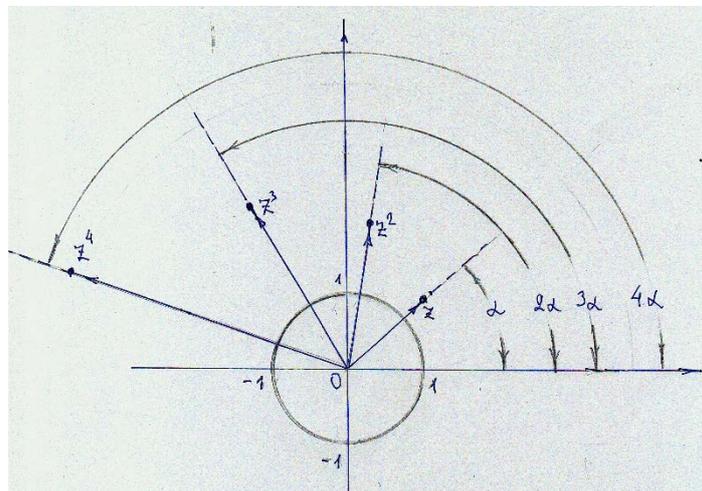


Рисунок 8.2.2 – Число z и его степени: z^2 , z^3 и z^4

Отметим, что, переходя от алгебраической формы записи комплексных чисел к тригонометрической, мы фактически заменяем действия с абстрактными точками $a + bi$ на действия с конкретными точками плоскости. Тем самым пропадает всякая мистика, связанная с ролью комплексных чисел.

Теперь рассмотрим преобразование комплексной плоскости под действием отображения, задаваемого функцией $F(z) = z^2 + c$, где c какое-нибудь фиксированное комплексное число.

Сначала рассмотрим самый простой случай, когда $c = 0$, т. е. случай, когда $F(z) = z^2$. Для этого посмотрим, что делается с точками плоскости при таком преобразовании.

Пусть $z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ произвольная точка комплексной плоскости. Возможны три случая: $r > 1$, $r = 1$ и $r < 1$.

Если $r > 1$, то (см. рис. 8.2.3) точка $z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ лежит вне круга радиуса единица. При преобразовании $F(z) = z^2$ точка z переходит в точку z^2 и получаем согласно теореме 8.2.2, что

$$F(z) = r^2(\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha), |F(z)| = r^2 > |z| = r.$$

Таким образом, модуль числа $F(z)$, полученного при преобразовании точки z под действием отображения $F(z) = z^2$ стал равным r^2 и, следовательно, увеличился, а аргумент, т. е. угол удвоился. А так как точка z была выбрана произвольно, то можно сделать вывод, что все точки, лежащие вне единичного круга, «разбегаются» от него.

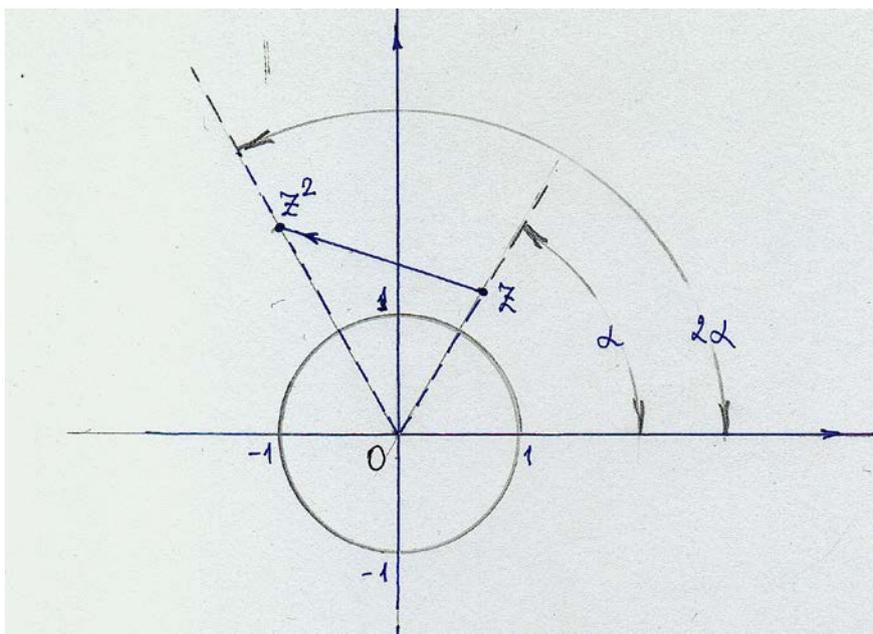


Рисунок 8.2.3 – Случай $|z| > 1$

Если $r = 1$, то (см. рис. 8.2.4) точка $z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ лежит на окружности радиуса единица. При преобразовании $F(z) = z^2$ получаем согласно теореме 8.2.2, что

$$F(z) = r^2(\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha) = \cos 2\alpha + i \sin 2\alpha, |F(z)| = 1.$$

Таким образом, модуль числа $F(z)$, полученного при преобразовании точки z под действием отображения $F(z) = z^2$ остался равным единице, а аргумент, т. е. угол удвоился. А так как точка z была выбрана на окружности

произвольно, то можно сделать вывод, что все точки, лежащие на единичном круге, на нем и остаются. Окружность переходит в себя.

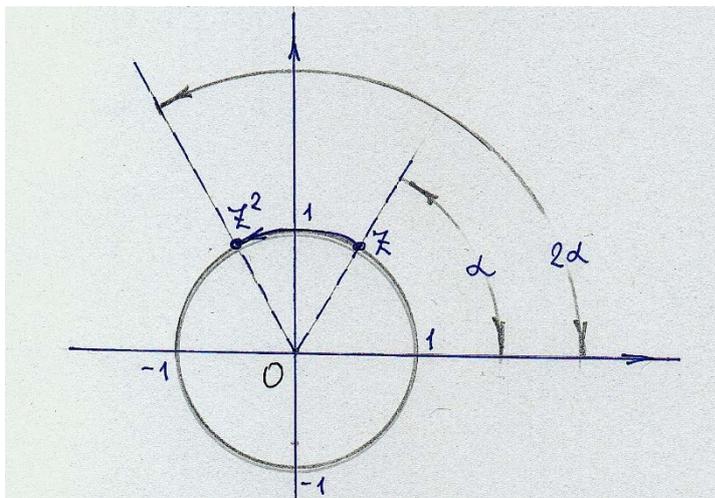


Рисунок 8.2.4 – Случай $|z| = 1$

Если $r < 1$, то (см. рис. 8.2.5) точка $z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ лежит внутри круга радиуса единица. При преобразовании $F(z) = z^2$ получаем согласно теореме 8.2.2, что

$$F(z) = r^2(\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha), |F(z)| = r^2 < |z| = r$$

Таким образом, модуль числа $F(z)$, полученного при преобразовании точки z под действием отображения $F(z) = z^2$ стал равным r^2 и, следовательно, уменьшился, а аргумент, т. е. угол удвоился. А так как точка z была выбрана произвольно, то можно сделать вывод, что все точки, лежащие внутри единичного круга, в нем и остаются. Отталкиваясь от единичной окружности, они «сбегают» к нулю.

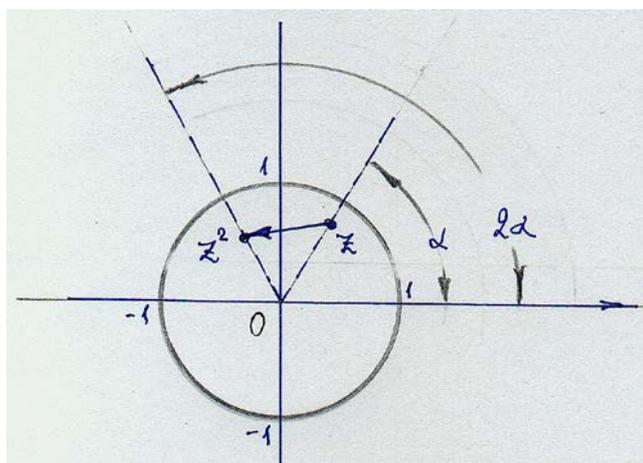


Рисунок 8.2.5 – Случай $|z| < 1$

В нашем случае граница между разбегающимися и сбегающимися точками имеет очень простой вид – это окружность. Ситуация кардинально усложняется, если $F(z) = z^2 + c$, где $c \neq 0$. Тогда граница имеет очень сложный вид. Такие множества были исследованы французскими математиками Гастоном Жюлиа (1893 – 1978) и Пьером Фату (1878 – 1929). В их честь множества, составляющие границу между разбегающимися и сбегающимися точками называли множествами Жюлиа-Фату. Они (множества Жюлиа-Фату) имеют очень сложную структуру.

Для построения фрактальной картинки существуют различные принципы. В следующем параграфе мы рассмотрим схему, основанную на «принципе выхода» («time escape» в англоязычной литературе) и увидим в этой схеме роль множеств Жюлиа-Фату.

Задание

1. В декартовой системе координат нарисуйте окружность радиуса единица (возьмите масштаб 1 единица = 2 клетки). Постройте точку

$$z_0 = \frac{3}{2} (\cos 30^\circ + \sin 30^\circ) \text{ и по ней постройте на рисунке точки } z_0^2 \text{ и } z_0^3.$$

2. В декартовой системе координат нарисуйте окружность радиуса единица (возьмите масштаб 1 единица = 2 клетки). Постройте точку

$$z_0 = (\cos 45^\circ + \sin 45^\circ) \text{ и по ней постройте на рисунке точки } z_0^2, z_0^3 \text{ и } z_0^4.$$

3. В декартовой системе координат нарисуйте окружность радиуса единица (возьмите масштаб 1 единица = 4 клетки). Постройте точку

$$z_0 = \frac{3}{4} (\cos 60^\circ + \sin 60^\circ) \text{ и по ней постройте на рисунке точки } z_0^2 \text{ и } z_0^3.$$

§ 8.3. Множества Жюлиа и множества Мандельброта

Г. Жюлиа и П. Фату положили начало изучению свойств многократных преобразований комплексной плоскости в себя под действием некоторых функций, в нашем случае мы рассмотрели функции $F(z) = z^2$. Они изучали более общий случай: $F(z) = z^2 + c$, где $c \neq 0$.

Пусть преобразование комплексной плоскости $F(z)$ задаётся многочленом (т. е. $F(z) = c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + \dots + c_{n-1} z + c_n$). Заполненным множеством Жюлиа называется множество тех точек комплексной плоскости, которые не стремятся к бесконечности (не разбегаются) при многократном применении этого преобразования. В нашем случае (см. рис. 8.3.1) это круг радиуса единица.

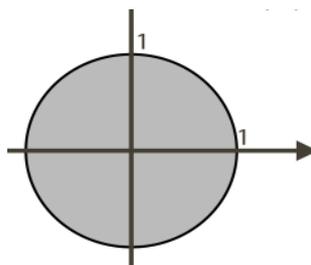


Рисунок 8.3.1 – Заполненное множество Жюлиа для отображения $F(z) = z^2$

Более сложный пример (см. рис. 8.3.2) приведен в Интернете в статье «Множество Жюлиа»:

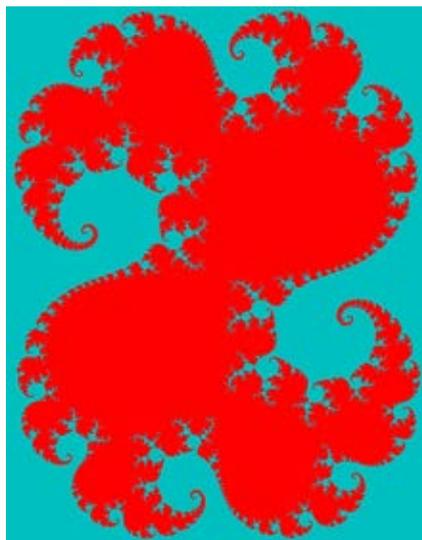


Рисунок 8.3.2 – Заполненное множество Жюлиа для отображения $F(z) = z^2 + 0,28 + 0,0113i$

Множеством Жюлиа в случае, когда $F(z)$ многочлен, называется граница заполненного множества. В нашем случае это окружность. Множество Жюлиа обозначается $J(F)$. Из сказанного выше очевидно следует, что $J(F)$ переходит в себя при преобразовании комплексной плоскости под действием отображения $F(z)$.

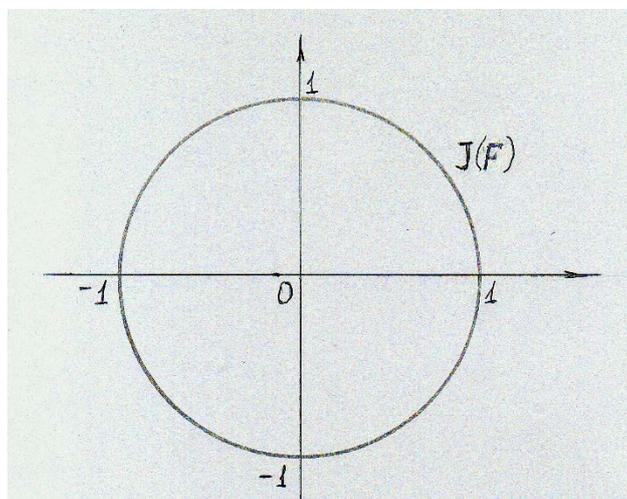


Рисунок 8.3.3 – Множество Жюлиа для отображения $F(z) = z^2$. Это окружность радиуса единица. Оно обозначено $J(F)$

В случае, когда $F(z) = z^2 + c$, где $c \neq 0$, строение множества Жюлиа может быть очень сложным. Вот пример (см. рис. 8.3.4) такого множества.

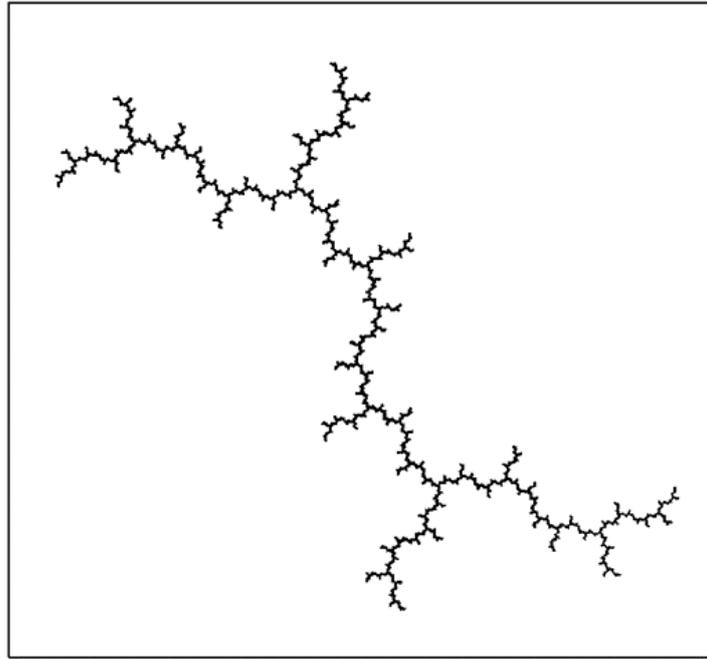


Рисунок 8.3.4 – Множество Жюлиа для отображения $F(z) = z^2 + i$. Оно называется [59, с. 58] «дендрит». (Дендрит – это древовидно разветвляющийся отросток нервной клетки)

Покажем на примере схему метода построения фрактала, основанную на принципе «времени выхода» («time escape» в англоязычной литературе). Рассмотрим преобразование плоскости под действием отображения $F(z) = z^2$. Выделим на экране монитора круг большого радиуса. В качестве примера возьмем $R = 81$, применим к плоскости преобразования $F(z) = z^2$ и найдем множество точек круга $R = 81$, которые в результате применения этого преобразования покинут круг. Так как для любой точки круга можно записать в виде $z = |z| (\cos \alpha + i \sin \alpha)$, то согласно теореме 8.2.2 $F(z) = |z|^2 (\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha)$ и, следовательно, $|F(z)| = |z|^2$. Таким образом, при преобразовании комплексной плоскости под действием отображения $F(z) = z^2$ из круга $R = 81$ «убегут» только те точки (см. рис. 8.3.5), которые лежат в кольце $9 < |z| \leq 81$. Окрасим эти точки в синий цвет.

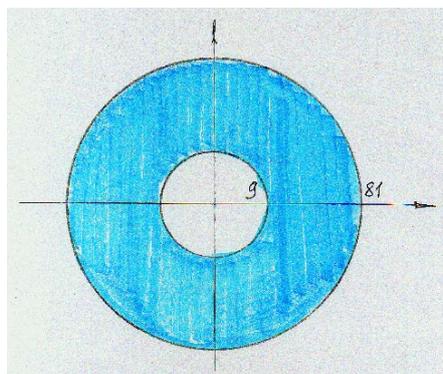


Рисунок 8.3.5 – Кольцо $9 < |z| \leq 81$, окрашенное в синий цвет

Далее, в большом круге радиуса $R = 81$ найдем те точки, которые покинут его при двукратном преобразовании комплексной плоскости под действием отображения $F(z) = z^2$. Двукратное преобразование плоскости согласно теореме 8.2.2 задаётся отображением $F(z) = (z^2)^2 = z^4 = |z|^4(\cos 4\alpha + i \sin 4\alpha)$ и, следовательно, $|F(z)| = |z|^4$. Таким образом, при преобразовании комплексной плоскости под действием отображения $F(z) = z^4$ из круга радиуса $R = 81$ «убегут» только те точки (см. рис. 8.3.6), которые лежат в кольце $3 < |z| \leq 9$. Окрасим эти точки (см. рис. 8.3.6) в красный цвет.

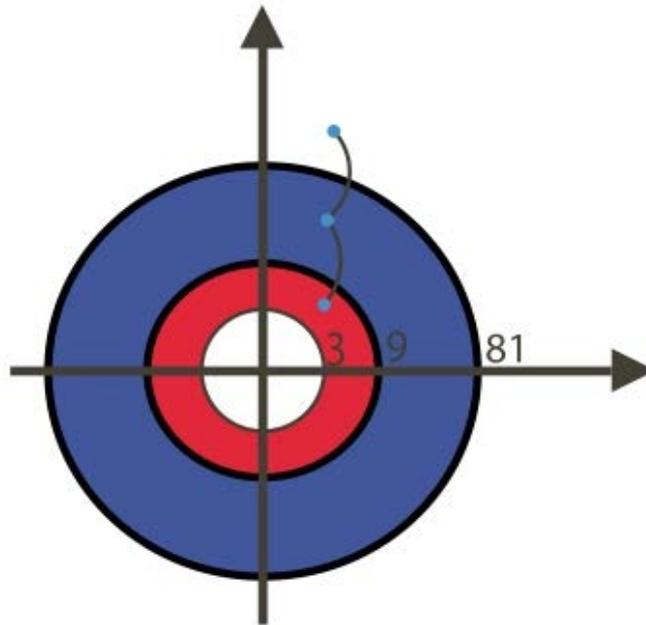


Рисунок 8.3.6 – Кольцо $9 < |z| \leq 81$, окрашенное в синий цвет, и кольцо $3 < |z| \leq 9$, окрашенное в красный цвет

Далее, в большом круге радиуса $R = 81$ найдем те точки, которые покинут его при трехкратном преобразовании комплексной плоскости под действием отображения $F(z) = z^3$. Трехкратное преобразование плоскости, согласно теореме 8.2.2, задается отображением $F(z) = z^6 = |z|^6(\cos 8\alpha + i \sin 8\alpha)$ и, следовательно, $|F(z)| = |z|^6$. Таким образом, при преобразовании комплексной плоскости под действием отображения $F(z) = z^6$ из круга радиуса $R = 81$ «убегут» только те точки (см. рис. 8.3.7), которые лежат в кольце $\sqrt{3} \approx 1,7 < |z| \leq 3$. Окрасим эти точки в зеленый цвет. На рисунке 8.3.7 изображен сектор круга радиуса $R = 81$, с выделенными на нем частями колец синего, красного и зеленого цветов.

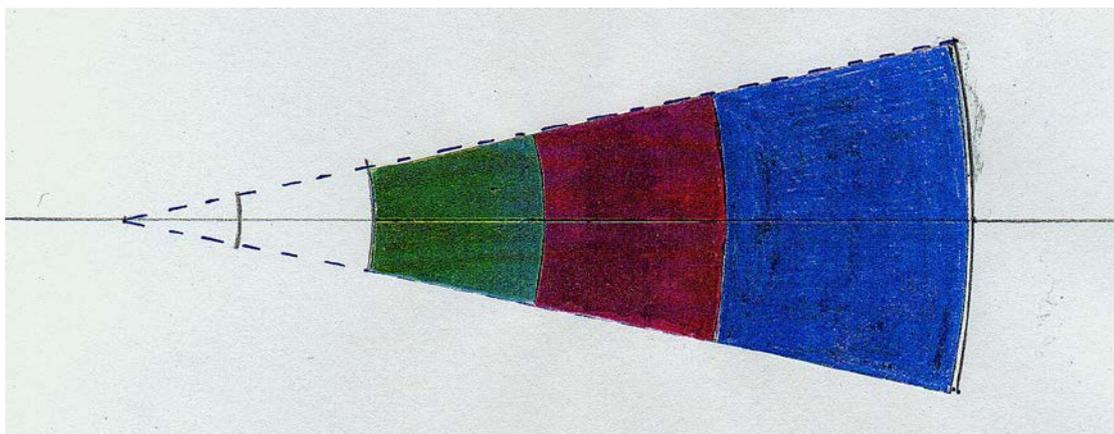


Рисунок 8.3.7 – Сектор круга радиуса $R = 81$, с выделенными на нем частями окрашенных колец зеленого, красного и синего цветов

Далее, в большом круге радиуса $R = 81$ найдем те точки, которые покинут его при четырехкратном преобразовании комплексной плоскости под действием отображения $F(z) = z^2$. Четырехкратное преобразование плоскости, согласно теореме 8.2.2, задается отображением $F(z) = z^8 = |z|^8(\cos 16\alpha + i \sin 16\alpha)$ и, следовательно, $|F(z)| = |z|^8$. Таким образом, при преобразовании комплексной плоскости под действием отображения $F(z) = z^8$ из круга радиуса $R = 81$ «убегут» только те точки (см. рис. 8.3.8), которые лежат в кольце $\sqrt[4]{3} \approx 1,316 < |z| \leq \sqrt{3} \approx 1,732$. Окрасим эти точки в желтый цвет. На рисунке 8.3.8 изображен сектор круга радиуса $R = 81$, с выделенными на нем частями колец синего, красного, зеленого и желтого цветов.

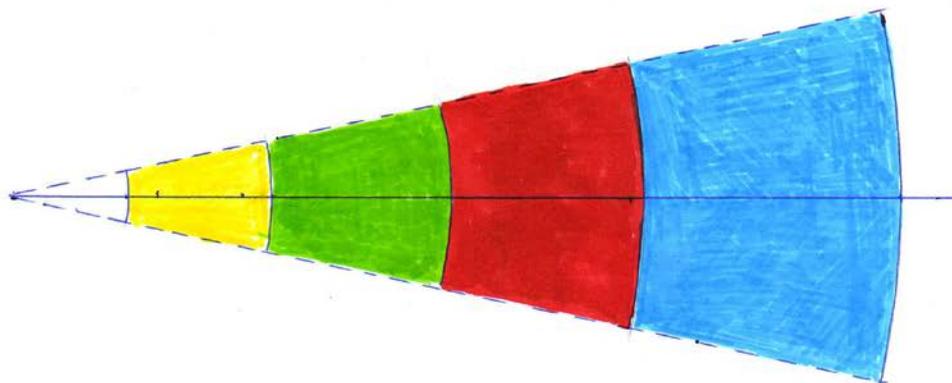


Рисунок 8.3.8 – Сектор круга радиуса $R = 81$, с выделенными на нем частями окрашенных колец желтого, зеленого, красного и синего цветов

Получили несколько колец разных цветов, образованных по принципу, который и называется принципом «времени выхода». Эти цветные кольца содержат внутри себя круг радиуса $\sqrt[4]{3}$, который содержит внутри себя заполненное множество Жюлиа для отображения $F(z) = z^2$, т. е. круг радиуса единица. Теперь если взять функцию $F(z) = z^2 + c$, где $c \neq 0$ и взять много

цветов и столько же шагов, то на экране монитора получается картинка, вроде той, что изображена на рисунке 8.3.9, взятом из Википедии (статья «фрактал», статья «множество Жюлиа»).

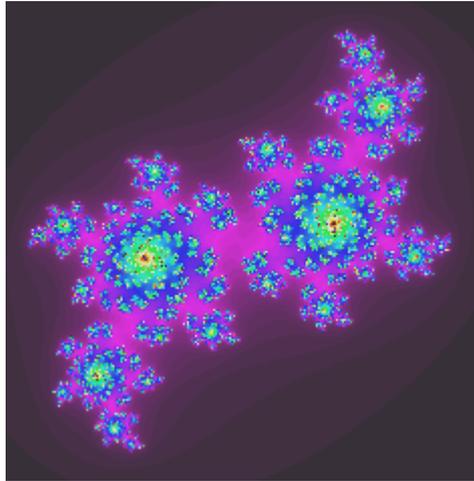


Рисунок 8.3.9 – Пример визуализации фрактала, порожденного отображением $F(z) = z^2 + c$ при некотором $c \neq 0$

В своих исследованиях Жюлиа и Фату установили, что множество Жюлиа имеет сложную структуру, но осуществить его визуализацию стало возможным лишь с появлением мощных компьютеров.

Также отметим, что для построения фракталов можно использовать не только рассмотренную выше функцию $F(z) = z^2 + c$, но и другие функции.

Вот некоторые примеры (см. рис. 8.3.10 – 8.3.11).

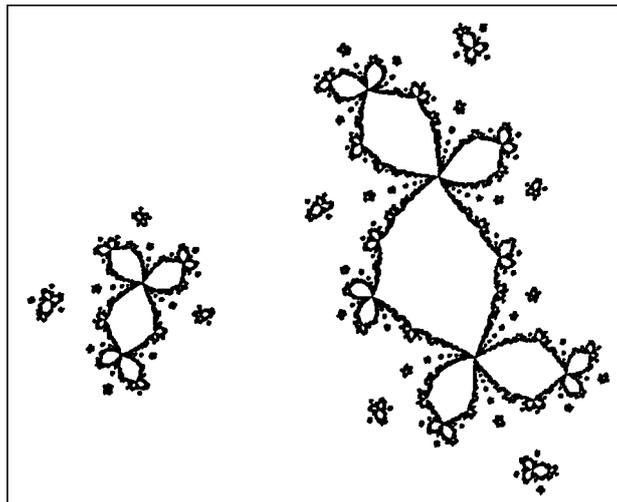


Рисунок 8.3.10 – Множество Жюлиа кубического полинома $F(z) = z^3 - 0.48z + (0.706260 + 0.502896i)$, называемое [59, с. 68] «семья кролика»

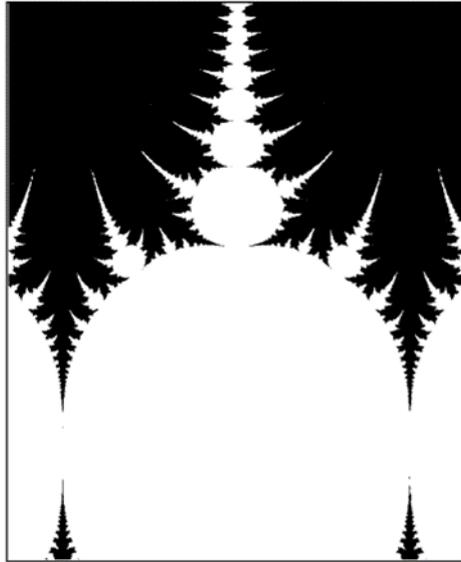


Рисунок 8.3.11 – Черным закрашено множество Жюлиа отображения $F(z) = \sin z$ ([59, с. 87]). Изображена область $[-0.5; \pi + 0.5] \times [-1; 4]$

В интернете имеются компьютерные программы для построения фракталов.

Вновь вернемся к функции $F(z) = z^2 + c$, $c = p + iq$, но только теперь будем рассматривать преобразование плоскости параметров $c = p + iq$ при фиксированном $z = 0$. Выберем произвольное комплексное число $c_0 = p_0 + iq_0$ и положим:

$$c_1 = 0^2 + c_0 = c_0;$$

$$c_2 = c_1^2 + c_0 = c_0^2 + c_0;$$

$$c_3 = c_2^2 + c_0 = (c_0^2 + c_0)^2 + c_0;$$

.....

$$c_{k+1} = c_k^2 + c_0;$$

.....

Получится бесконечная последовательность точек: $c_0, c_1, c_2, c_3, \dots, c_n, \dots$. Можно доказать, что при данном отображении $F(z) = z^2 + c$, $c = p + iq$ последовательность, построенная указанным выше способом, для каждого числа $c = p + iq$ будет либо ограниченной, либо ее точки будут со временем уходить на бесконечность.

Множеством Мандельброта (Б. Мандельброт, 1924 – 2010) называется множество тех точек $c = p + iq$ комплексной плоскости, которые не «убегут» в бесконечность при неограниченном повторении описанной выше процедуры преобразования.

Основываясь на принципе выхода, мы можем визуализировать то множество точек, которые не убегают на бесконечность. Границы этого множества (см. рис. 8.3.12) имеют сложную структуру. Особенность ее такова, что, если ее разглядывать как бы под микроскопом, она будет примерно повторять сама себя при все большем и большем увеличении.

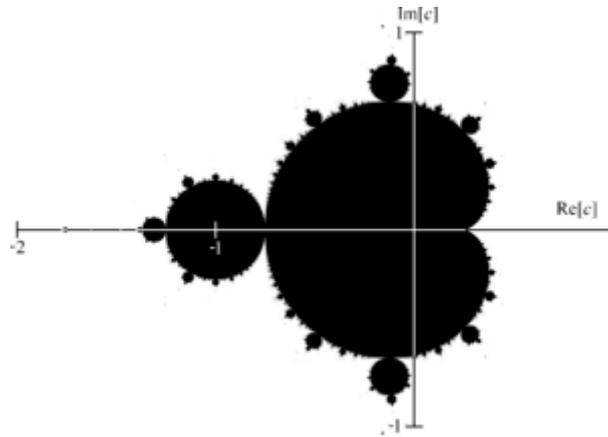


Рисунок 8.3.12 – Черным цветом изображено множество Мандельброта

Начало изучению множества Мандельброта было положено Фату в 1905 году, а Бенуа Мандельброт был первым, кто использовал компьютер для построения визуализации множества. Как уже упоминалось выше, граница множества Мандельброта имеет очень сложную структуру и к настоящему времени построены многочисленные ее визуализации. Вот (см. рис. 8.3.13) фрагмент границы множества Мандельброта в цветном варианте (взято из Интернета, статья «Множество Мандельброта»).

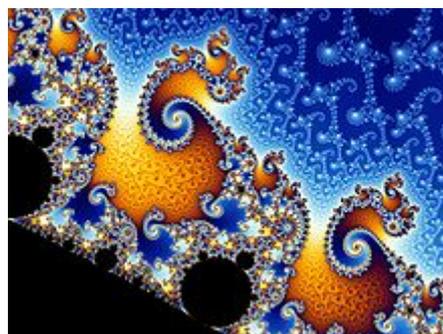


Рисунок 8.3.13 – Пример визуализации границы множества Мандельброта

Обычно под «Множеством Мандельброта» понимается множество, описанное выше, но можно строить такие множества и для других функций, например, вместо $F(z) = z^2 + c$ взять отображение $F(z) = z^3 + c$.

Отметим также, что на основе использования гиперкомплексных чисел, являющихся обобщением комплексных, создан трехмерный аналог множества Мандельброта (см. рис. 8.3.14, взято из Интернета, статья «Оболочка Мандельброта»).



Рисунок 8.3.14 – Трехмерный фрактал, являющийся аналогом множества Мандельброта

Говоря о фракталах, мы упустили один важный для нас вопрос: является ли фрактал произведением искусства? Для ответа на этот вопрос надо определиться с понятием искусства. Но каков бы ни был ответ на этот вопрос, согласимся, что для построения красивой фрактальной картинки необходимо мастерство программиста, удачный подбор формулы и тонкое чувство цвета.

В заключение параграфа отметим, что помимо принципа «времени выхода» имеются и другие приемы визуализации.

§ 8.4. Определение фрактала

Во введении к этой главе мы кратко упомянули о том, что такое фрактал. В настоящем параграфе мы подробно остановимся на определении этого понятия.

Говоря упрощенно, фрактал – это объект со сложной структурой; при увеличении под микроскопом каждого его участка сложность все нарастает и нарастает, причем самоподобие при этом необязательно. К фракталам также относят фигуры, сложность строения которых нарастает лишь до определенного предела увеличения.

На сегодняшний день нельзя определено сказать, что мы имеем четкое определение фракталов, относящиеся ко всем областям применения этого термина, исключение, пожалуй, составляет только математика. При этом общепринятым является подход к определению фрактала с помощью перечисления свойств и случаев соотнесения какого-то объекта к числу фракталов.

Интернет дает следующее определение фрактала. «Фрактáл (лат. fractus – дробленный, сломанный, разбитый) – множество, обладающее свойством

самоподобия (объект, в точности или приближенно совпадающий с частью себя самого, то есть целое имеет ту же форму, что и одна или более частей). В математике под фракталами понимают множества точек в евклидовом пространстве, имеющие дробную метрическую размерность (в смысле Минковского или Хаусдорфа) ... Самоподобные фигуры, повторяющиеся конечное число раз, называются предфракталами». Далее авторы статьи пишут следующее. «Слово «фрактал» употребляется не только в качестве математического термина. Фракталом может называться предмет, обладающий, по крайней мере, одним из указанных ниже свойств:

- Обладает нетривиальной структурой на всех масштабах. В этом отличие от регулярных фигур (таких как окружность, эллипс, график гладкой функции): если рассмотреть небольшой фрагмент регулярной фигуры в очень крупном масштабе, то он будет похож на фрагмент прямой. Для фрактала увеличение масштаба не ведет к упрощению структуры, то есть на всех шкалах можно увидеть одинаково сложную картину.

- Является самоподобным или приближенно самоподобным.

- Обладает дробной метрической размерностью или метрической размерностью, превосходящей топологическую. Многие объекты в природе обладают свойствами фрактала, например: побережья, облака, кроны деревьев, снежинки, система кровообращения, альвеолы».

В качестве примера предфрактала в живописи обычно предлагают картину «Лицо войны» Сальвадора Дали. (Как господин Журден, не подозревал, что говорит прозой, так, вероятно, и Дали не знал, что создал предфрактал).

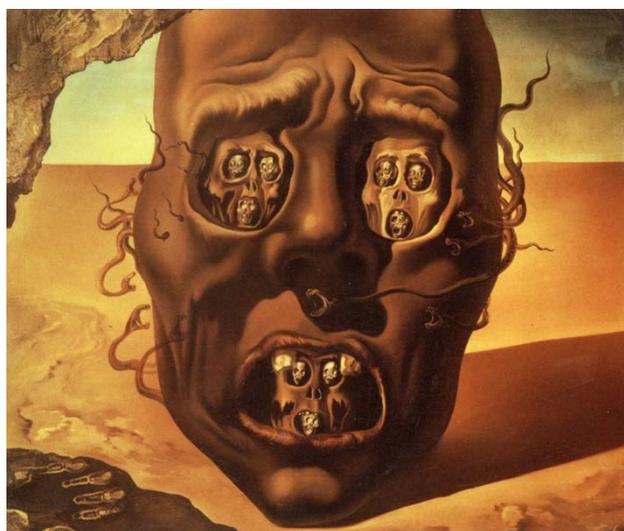


Рисунок 8.4.1 – Сальвадор Дали. «Лицо войны», 1940 – 1941 гг.

Отметим, что по распространенному мнению – требование иметь размерность, превосходящую топологическую, несколько сужает класс изучаемых объектов, исключая, например, «Канторово множество». Существуют и другие варианты определения фрактала. Но, по мнению Кеннета Фальконера (см. [100, с. 4]) – автора широко известной монографии, посвященной фракталам, «...к определению фрактала следует относиться так же,

как биолог относится к определению жизни. Нет жесткого определения, а просто список свойств, характерных для живого существа, таких как способность размножаться, двигаться или существовать в какой-то степени независимо от окружающей среды. ... Точно так же, по-видимому, лучше всего рассматривать фрактал как множество, обладающее свойствами, подобными перечисленным ниже, а не искать точное определение, которое почти наверняка исключит некоторые интересные случаи. С точки зрения математика, в таком подходе нет ничего плохого.»

Далее, согласно Харалмпосу Сайтису [60, с. 51 – 52], «фракталы обычно получаются следующими тремя методами:

1. Фракталы, получаемые с помощью алгоритма времени убегания: определяются рекуррентными (т. е. последовательными преобразованиями) отношениями в каждой точке пространства.
2. Системы итерируемых функций: существует фиксированное правило геометрического замещения.
3. Случайные фракталы: генерируются в результате стохастических (т. е. случайных), а не детерминированных процессов.

Фракталы могут быть также классифицированы в зависимости от степени самоподобия. Выделяют три типа самоподобных фракталов, которые приведены ниже в прямом соответствии с методами генерации, представленными выше:

1. Квазиподобие: фрактал оказывается приблизительно (но не точно) идентичным в разных масштабах. Квазиподобные фракталы содержат маленькие копии всего фрактала в искаженной и вырожденной форме. Это слабая форма самоподобия.
2. Точное самоподобие: фрактал оказывается идентичным в разных масштабах. Это самый строгий тип самоподобия.
3. Статистическое самоподобие: фрактал имеет численные или статистические параметры, которые сохраняются во всех масштабах».

Но все становится значительно проще, если речь идет о математическом определении фрактала. Так, говоря о математическом определении фрактала, Мандельброт считал фракталами в математическом смысле те множества точек Евклидова пространства, которые имеют дробную размерность Минковского большую, чем размерность самого Евклидова пространства. (Г. Минковский 1864 – 1909 гг.) Позднее в математике под фракталами стали понимать множество точек евклидова пространства, имеющее дробную размерность Минковского не обязательно большую, чем размерность самого пространства.

Но как понимать слова «дробная размерность»? Мы знаем, что находимся в трехмерном пространстве. Объекты, изображенные на картине, находятся в пространстве двух измерений; ребро куба – предмет одномерный, а сам куб трехмерен. Тут все ясно. Но, оказывается, что существуют объекты, свойства которых не позволяют отнести их к объектам одно- двух- или трехмерным. К ним относятся, например, Канторово множество и снежинка Коха, которые мы изучим ниже.

Следуя [100, с. 41 – 42], введем определение размерности Минковского и проиллюстрируем его примерами. Пусть M множество на прямой (плоскости в пространстве). Покроем его малыми отрезками (квадратами, кубами одинакового размера) и пусть $\varepsilon > 0$ – это длина каждого такого малого элементарного отрезка (сторона квадрата, ребро куба). Обозначим через N_ε – наименьшее число таких элементарных отрезков (квадратов, кубов одинакового размера), покрывающее множество M . Рассмотрим дробь

$$\frac{\ln N_\varepsilon(M)}{-\ln \varepsilon}$$

и воспользуемся определением 3.2.1 предела функции.

Определение 8.4.1. Размерностью Минковского множества M называется число

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N_\varepsilon(M)}{-\ln \varepsilon}$$

Другими словами, размерностью Минковского, множества M называется число, к которому стремится дробь

$$\frac{\ln N_\varepsilon(M)}{-\ln \varepsilon}$$

при ε , стремящемся к 0.

Поясним это определение на примерах, а заодно и проверим, что в случае отрезка и прямоугольника эта новая размерность совпадает с обычной размерностью.

1. Пусть M – это отрезок $[0;1]$. Найдём его размерность Минковского. Для этого выберем произвольное малое $\varepsilon > 0$ и покроем наш отрезок $[0;1]$ маленькими (элементарными) отрезками длины ε . Покрытие элементарными отрезками будем осуществлять экономно, укладывая их вплотную, т. е. так, чтобы пересечения осуществлялись не более, чем по концевым точкам. Это обеспечит минимальное число отрезков, образующих покрытие. В процессе покрытия могут возникнуть два случая.

А) Элементарные отрезки целое число раз уложатся в нашем отрезке $[0;1]$. Например (см. рис. 8.4.1а), при $\varepsilon = 0,25$.

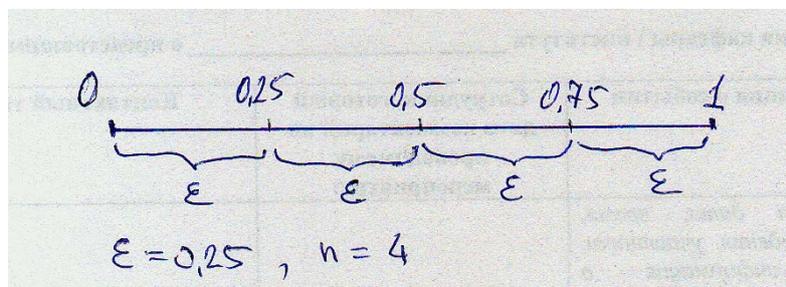


Рисунок 8.4.1а – Элементарный отрезок длины 0,25 четыре раза укладывается в отрезок $[0;1]$

Б) Целое число элементарных отрезков не образуют отрезок $[0;1]$. Например (см. рис. 8.4.1б), при $\varepsilon = 0,23$.

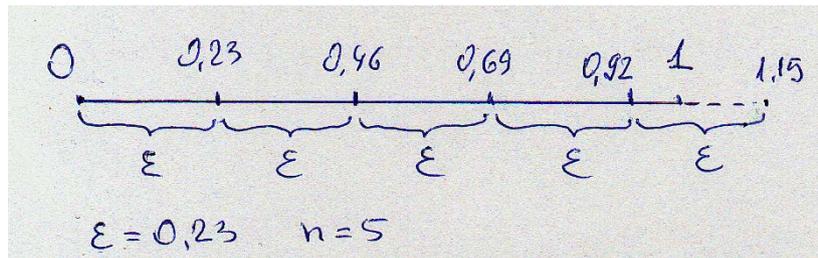


Рисунок 8.4.1б – Элементарный отрезок длины 0,23 четыре раза укладывается в отрезке $[0;1]$, но целиком его не покрывает, зато уже пять таких элементарных отрезков содержат наш отрезок $[0;1]$

Сначала рассмотрим первый случай. Так как элементарный отрезок длины ε целое число раз укладывается в отрезке $[0;1]$, то можно указать такое натуральное число n , что будет выполняться равенство $n\varepsilon = 1$. (В примере на рисунке 8.4.1а число n равнялось четырем). Следовательно, $\varepsilon = \frac{1}{n}$. Составим дробь:

$$\frac{\ln N_\varepsilon(M)}{-\ln \varepsilon}$$

В нашем случае она равна:

$$\frac{\ln N_\varepsilon(M)}{-\ln \varepsilon} = \frac{\ln n}{-\ln \frac{1}{n}} = \frac{\ln n}{-\ln \frac{1}{n}} = \frac{\ln n}{\ln n} = 1,$$

поскольку $\ln \frac{1}{n} = \ln 1 - \ln n = 0 - \ln n = -\ln n$.

Теперь рассмотрим второй случай. В этом случае по заданному $\varepsilon > 0$ всегда можно указать такое натуральное число n , что будет выполняться неравенство $n\varepsilon < 1 < (n+1)\varepsilon$. В примере, показанном на рисунке 8.4.1б, число n равно четырем. Число n по условию было выбрано так, что n элементарных отрезков не покрывали наш отрезок $[0;1]$, а $n+1$ перекрывали (как на рис. 8.4.1б). Следовательно, $N_\varepsilon(M) = n+1$ – это наименьшее число отрезков покрытия и при этом для числа ε – длины элементарного отрезка должны выполняться неравенства:

$$n\varepsilon < 1 \quad \text{и} \quad (n+1)\varepsilon > 1$$

или

$$\frac{1}{n+1} < \varepsilon < \frac{1}{n}. \quad (8.4.1)$$

После логарифмирования получаем:

$$\ln \frac{1}{n+1} < \ln \varepsilon < \ln \frac{1}{n}, \quad \ln 1 - \ln(n+1) < \ln \varepsilon < \ln 1 - \ln n, \quad \ln 1 = 0, \\ -\ln(n+1) < \ln \varepsilon < -\ln n$$

или

$$\ln(n + 1) > -\ln \varepsilon > \ln n$$

Следовательно, для дроби $\frac{\ln N_\varepsilon(M)}{-\ln \varepsilon} = \frac{\ln(n+1)}{-\ln \varepsilon}$ выполняются неравенства:

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n+1)} < \frac{\ln N_\varepsilon(M)}{-\ln \varepsilon} = \frac{\ln(n+1)}{-\ln \varepsilon} < \frac{\ln(n+1)}{\ln n},$$

или

$$1 < \frac{\ln(n+1)}{-\ln \varepsilon} < \frac{\ln(n+1)}{\ln n}. \quad (8.4.2)$$

Из неравенств (8.4.1) видно, что величина ε стремится к нулю тогда и только тогда, когда n стремится к бесконечности. В этом случае ясно (и это можно строго доказать математически), что дробь $\frac{\ln(n+1)}{\ln n}$ стремится к единице. Но тогда из неравенства (8.4.2) мы получаем, что при неограниченном росте n дробь $\frac{\ln(n+1)}{-\ln \varepsilon}$ стремится к единице или, что равносильно, дробь $\frac{\ln N_\varepsilon(M)}{-\ln \varepsilon}$ стремится к единице.

Таким образом, на основании рассмотрения случаев (А) и (Б) мы получаем, что определению размерности Минковского, размерность Минковского отрезка $[0;1]$ равна единице.

2. Пусть теперь M – это прямоугольник высоты 1 и ширины 2. Найдем его размерность Минковского. Для этого выберем произвольное малое $\varepsilon > 0$ и покроем наш прямоугольник формата 1×2 маленькими (элементарными) квадратами со сторонами длины ε . Покрывание элементарными квадратами будем осуществлять экономно, укладывая их впритык, т. е. так, чтобы пересечения осуществлялись не более, чем по угловым точкам или сторонам. Это обеспечит минимальное число квадратов, образующих покрытие. В процессе покрытия могут возникнуть два случая.

А) Элементарные квадраты целое число раз уложатся в нашем прямоугольнике формата 1×2 . Например (см. рис. 8.4.2а), при $\varepsilon = 0,5$.

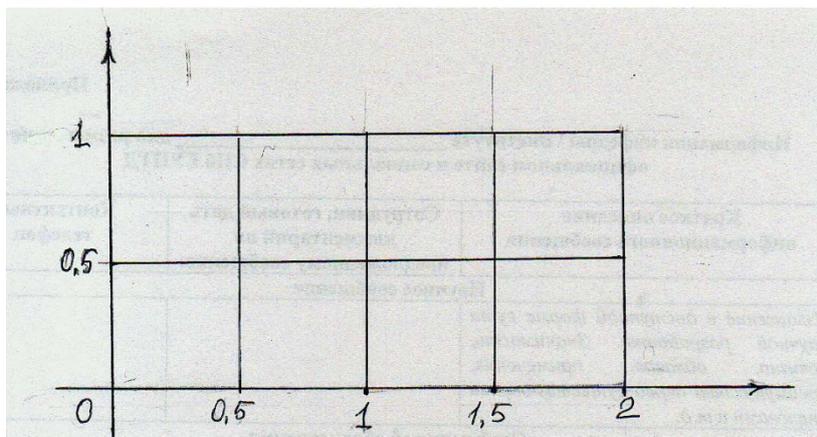


Рисунок 8.4.2а – Элементарные квадраты с сторонами длины 0,5 восемь раз укладывается в прямоугольнике формата 1×2

Б) Целое число элементарных квадратиков не образуют прямоугольник формата 1×2 . Например (см. рис. 8.4.2б), при $\varepsilon = 0,45$. Найдем размерность Минковского нашего прямоугольника.

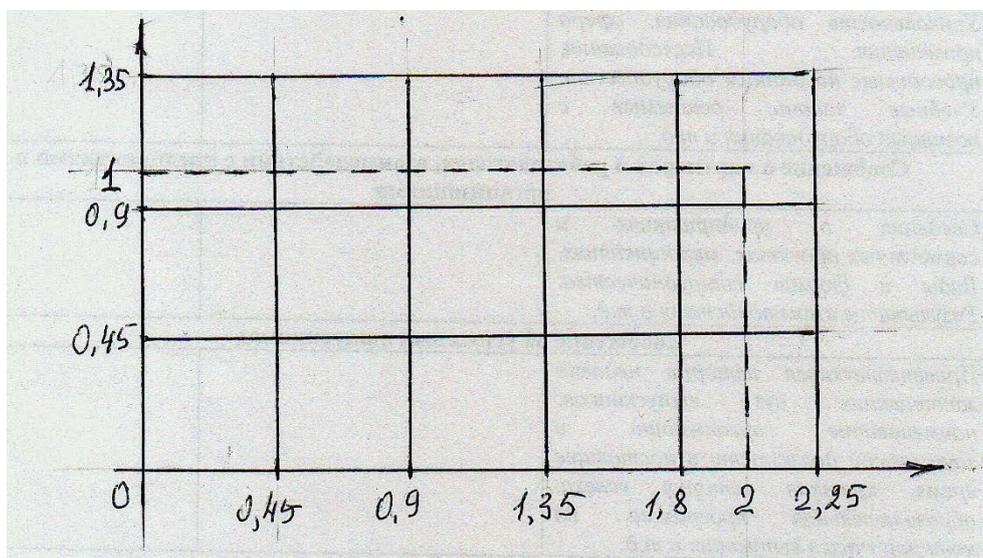


Рисунок 8.4.2б – Элементарные квадраты с сторонами длины 0,45 восемь раз укладывается в прямоугольнике формата 1×2 , но целиком его не покрывает, зато уже 15 таких элементарных квадратов содержат наш прямоугольник формата 1×2

Сначала ограничимся рассмотрением случая (А). Так как элементарные квадраты со сторонами длины ε целое число раз укладывается в прямоугольнике формата 1×2 , то можно указать такое натуральное число n , что будет выполняться равенство $n\varepsilon = 1$. В примере на рисунке 8.4.2а число n равнялось двум. Следовательно, $\varepsilon = \frac{1}{n}$. Составим дробь:

$$\frac{\ln N_\varepsilon(M)}{-\ln \varepsilon}$$

В общем случае число элементарных квадратиков $N\varepsilon = n \times 2n = 2n^2$. Длина стороны элементарного квадратика равна $\varepsilon = \frac{1}{n}$. По определению, размерностью Минковского множества M называется число, к которому стремится дробь

$$\frac{\ln N_\varepsilon(M)}{-\ln \varepsilon}$$

при ε стремящемся к 0. Следовательно,

$$\frac{\ln N_\varepsilon}{-\ln \varepsilon} = \frac{\ln 2n^2}{-\ln \frac{1}{n}} = \frac{\ln 2n^2}{-(\ln 1 - \ln n)} = \frac{\ln 2 + \ln n^2}{\ln n} = \frac{\ln 2 + 2 \ln n}{\ln n} = \frac{\ln 2}{\ln n} + 2 \quad (8.4.3)$$

Если $\varepsilon = \frac{1}{n}$ стремится к нулю, то n стремится к бесконечности и $\ln n$ также стремится к бесконечности. Следовательно, дробь $\frac{\ln 2}{\ln n}$ стремится к нулю. Но тогда из равенства (8.4.3) получаем, что дробь $\frac{\ln N_\varepsilon}{-\ln \varepsilon}$ стремится к числу 2. Можно доказать, что и в случае (Б) дробь $\frac{\ln N_\varepsilon}{-\ln \varepsilon}$ также будет стремиться к числу 2. Таким образом, при произвольном способе стремления к нулю числа ε дробь $\frac{\ln N_\varepsilon}{-\ln \varepsilon}$ стремится к числу 2. А по определению размерности Минковского это означает, что размерность Минковского прямоугольника формата 1×2 равна 2, что и совпадает с нашим представлением о размерности этого объекта.

3. Размерность канторова множества. (Георг Кантор 1845 – 1918 гг.)

По определению канторова множество – это множество, которое строится следующим образом. Возьмем отрезок $[0;1]$ (см. рис. 8.4.3):

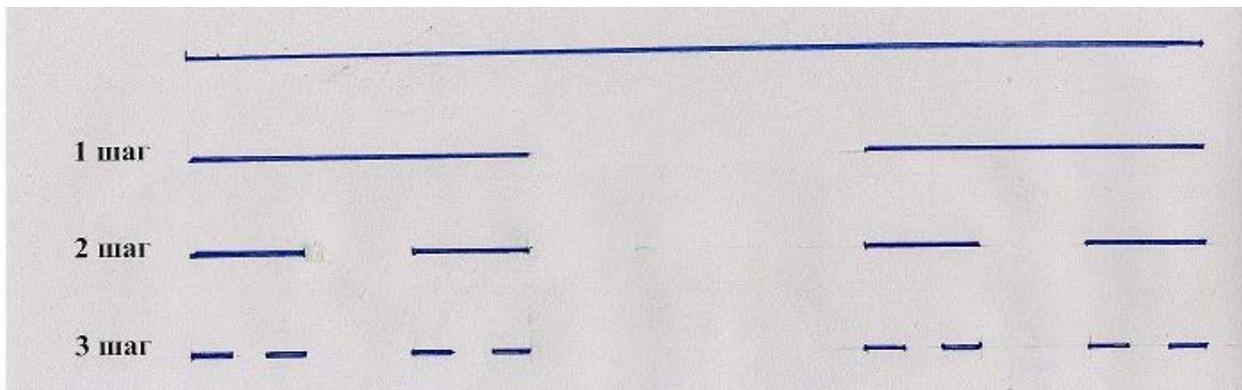


Рисунок 8.4.3 – Последовательные шаги построения канторова множеств

1 шаг. Удаляем из этого отрезка $[0;1]$ среднюю треть.

2 шаг. Из каждой оставшейся трети удаляем среднюю треть.

3 шаг. Из каждого отрезка 2-го шага удаляем среднюю треть.

И так далее, удаляем на каждом шаге среднюю треть из каждого отрезка, полученного на предыдущем шаге.

Найдем размерность Минковского канторова множества. Сначала рассмотрим случай, когда число ε из определения размерности Минковского при стремлении к нулю принимает только значения: $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots, \frac{1}{3^n}, \dots$

Пойдем по отмеченным шагам построения.

1-й шаг построения. Возьмем $\varepsilon = \frac{1}{3}$, тогда для наименьшего покрытия надо взять $N_\varepsilon(M) = 2$. Составим дробь $\frac{\ln N_\varepsilon(M)}{-\ln \varepsilon}$. Получаем:

$$\frac{\ln N_\varepsilon(M)}{-\ln \varepsilon} = \frac{\ln 2}{-\ln \frac{1}{3}} = \frac{\ln 2}{-(\ln 1 - \ln 3)} = \frac{\ln 2}{\ln 3}.$$

2-й шаг построения. Возьмем $\varepsilon = \frac{1}{3^2}$, тогда для наименьшего покрытия надо взять $N_\varepsilon(M) = 4$. Составим дробь $\frac{\ln N_\varepsilon(M)}{-\ln \varepsilon}$. Получаем:

$$\frac{\ln N_\varepsilon(M)}{-\ln \varepsilon} = \frac{\ln 4}{-\ln \frac{1}{3^2}} = \frac{2 \ln 2}{-(\ln 1 - 2 \ln 3)} = \frac{\ln 2}{\ln 3}.$$

3-й шаг построения. Возьмем $\varepsilon = \frac{1}{3^3}$, тогда для наименьшего покрытия надо взять $N_\varepsilon(M) = 8$. Составим дробь $\frac{\ln N_\varepsilon(M)}{-\ln \varepsilon}$. Получаем:

$$\frac{\ln N_\varepsilon(M)}{-\ln \varepsilon} = \frac{\ln 8}{-\ln \frac{1}{3^3}} = \frac{3 \ln 2}{-(\ln 1 - 3 \ln 3)} = \frac{\ln 2}{\ln 3}.$$

Ясно, что при дальнейших вычислениях мы на каждом шаге будем иметь в результате одно и то же число $\frac{\ln 2}{\ln 3}$. Вычислив по таблице логарифмы, получаем, что

$$\frac{\ln N_\varepsilon(M)}{-\ln \varepsilon} = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx \frac{0.6931}{1.0986} \approx 0.631 < 1.$$

Рассуждения в общем случае, т. е. при произвольном способе стремления ε к нулю несколько сложнее, но результат получается такой же. Мы не будем на этом останавливаться. Итак, размерность Минковского канторова множества равна:

$$\frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0.631 < 1.$$

Как видно из построения, канторово множество является фракталом на прямой, поскольку оно устроено самоподобным образом.

4. Снежинка Коха и ее размерность Минковского. Сначала опишем построение снежинки Коха, которую мы обозначим через M . Рассмотрим равносторонний треугольник, длина стороны которого равна единице (см. рис. 8.4.4). Тогда периметр этого треугольника будет равен трем.

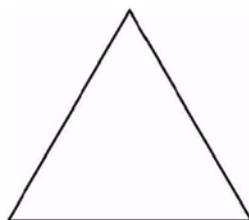


Рисунок 8.4.4 – Исходный равносторонний треугольник

1-й шаг. В каждой стороне удаляем среднюю $1/3$ часть и заменяем ее двумя сторонами, каждая из которых равна удаленному отрезку (см. рис. 8.4.5). Тогда длина стороны многоугольника $\varepsilon = \frac{1}{3}$, а число сторон $N_\varepsilon(M) = 12$. При этом длина всей линии равна $N_\varepsilon(M) \times \varepsilon = 12 \times \frac{1}{3} = 3 \times 4 \times \frac{1}{3} = 3 \times \frac{4}{3}$.

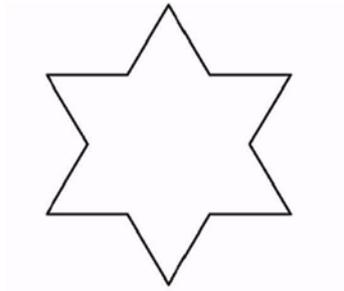


Рисунок 8.4.5 – Результат первого шага построения

2-й шаг. На каждом отрезке полученной стороны звезды удаляем среднюю $1/3$ часть и заменяем ее двумя сторонами, каждая из которых равна удаленному отрезку (см. рис. 8.4.6). Тогда длина стороны многоугольника $\varepsilon = \frac{1}{3^2}$, а число сторон $N_\varepsilon(M) = 48$. При этом длина всей линии равна $N_\varepsilon(M) \times \varepsilon = 48 \times \frac{1}{3^2} = 3 \times 4^2 \times \frac{1}{3^2} = 3 \times \frac{4^2}{3^2}$.

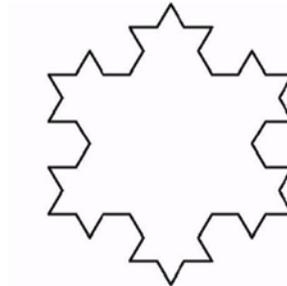


Рисунок 8.4.6 – Результат второго шага построения

3-й шаг. В каждой стороне многоугольника удаляем среднюю $1/3$ часть и заменяем ее двумя сторонами, каждая из которых равна удаленному отрезку (см. рис. 8.4.7). Тогда длина стороны многоугольника $\varepsilon = \frac{1}{3^3}$, а число сторон $N_\varepsilon(M) = 3 \times 4^3$. При этом длина всей линии равна $N_\varepsilon(M) \times \varepsilon = 3 \times 4^3 \times \frac{1}{3^3} = 3 \times 4^3 \times \frac{1}{3^3} = 3 \times \frac{4^3}{3^3}$.

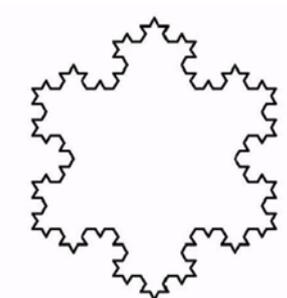


Рисунок 8.4.7 – Результат третьего шага построения

И так далее. На каждом шаге каждая сторона длины a заменяется на 4 стороны длины $\frac{a}{3}$. Таким образом, на n -ом шаге, очевидно, получаем, что длина стороны многоугольника $\varepsilon = \frac{1}{3^n}$, а число сторон $N_\varepsilon(M) = 3 \times 4^n$. При этом длина всей линии равна $N_\varepsilon(M) \times \varepsilon = 3 \times 4^n \times \frac{1}{3^n} = 3 \times \frac{4^n}{3^n} \rightarrow \infty$, когда $n \rightarrow \infty$. Итак, длина границы снежинки Коха равна бесконечности.

(Попутно мы получили неожиданный результат: имеется линия бесконечной длины, заключающаяся в ограниченной области и ограничивающая множество конечных размеров!)

Найдем размерность Минковского снежинки Коха. Сначала рассмотрим случай, когда число ε из определения размерности Минковского при стремлении к нулю принимает только значения: $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots, \frac{1}{3^n}, \dots$. Как и в случае канторова множества, пойдем по отмеченным шагам построения. Для произвольного шага с номером n составим дробь $\frac{\ln N_\varepsilon(M)}{-\ln \varepsilon}$. Получаем:

$$\frac{\ln N_\varepsilon(M)}{-\ln \varepsilon} = \frac{\ln 3 \times 4^n}{-\ln \frac{1}{3^n}} = \frac{\ln 3 + \ln 4^n}{-(\ln 1 - \ln 3^n)} = \frac{\ln 3 + n \ln 4}{n \ln 3} = \frac{\ln 3}{n \ln 3} + \frac{n \ln 4}{n \ln 3} = \frac{1}{n} + \frac{\ln 4}{\ln 3} \rightarrow \frac{\ln 4}{\ln 3},$$

когда $n \rightarrow \infty$. Рассуждения в общем случае, т. е. при произвольном способе стремления ε к нулю несколько сложнее, но результат получается такой же. Мы не будем на этом останавливаться. Итак, размерность Минковского снежинки Коха равна:

$$\frac{\ln 4}{\ln 3} \approx \frac{1.3863}{1.0986} \approx 1.262 > 1.$$

Как и в случае канторова множества, из построения видно, что снежинка Коха является фракталом, поскольку она устроена самоподобным образом.

§ 8.5. Фракталы и искусство

Конец 19-го – начало 20-го века ознаменовался появлением радикально нового мышления в искусстве. С этим вы познакомились при изучении истории искусств, а также в курсе культурологии. Это новое мышление было вызвано не только революционными социально-экономическими преобразованиями, но и научным и технологическим прогрессом.

Весь 20-й век прошел в искусстве под знаком поиска новых направлений и выразительных средств. Одним из таких направлений является возникшее в конце 20-го века «фрактальное искусство», или «фрактал-арт».

На сегодняшний день имеется большое число публикаций (книги, журнальные статьи, справочная литература, публицистика), касающихся темы фракталов и искусства. В этом новом направлении искусства следует различать объекты, созданные компьютером, и объекты, созданные вручную. О художественных достоинствах первых мы уже говорили ранее в § 8.3. А именно, отмечалось, что независимо от содержания, которое мы вкладываем в понятие «искусство», необходимо констатировать, что для построения красивой фрактальной картинки требуется проявить мастерство программиста, сделать удачный подбор формулы и продемонстрировать тонкое чувство цвета. И

объявить эту триаду только ремеслом весьма сложно. Но (см. [60, с. 120]): «... не все художники, которые называют себя фракталистами, используют информационные технологии. Фрактальное искусство не обязательно – компьютерное искусство». И такие художники-фракталисты, не использующие в своем творчестве информационные технологии, с нашей точки зрения представляют гораздо бóльший интерес, поскольку являются выразителями видения фрактальной картины мира. Причём такое внутреннее миропонимание проявилось у некоторых авторов задолго до оформления идей Мандельброта. К таковым художникам следует отнести, например, Джексона Поллака (1912 – 1956) – идеолога и лидера абстрактного экспрессионизма. Образец его творчества фрактального характера – картина «№ 5, 1948» представлен на рисунке 8.5.1. В 2006 году на аукционе «Сотбис» за эту картину была предложена сумма 140 млн долларов. (Источник – интернет-статья «Джексон Поллак».)

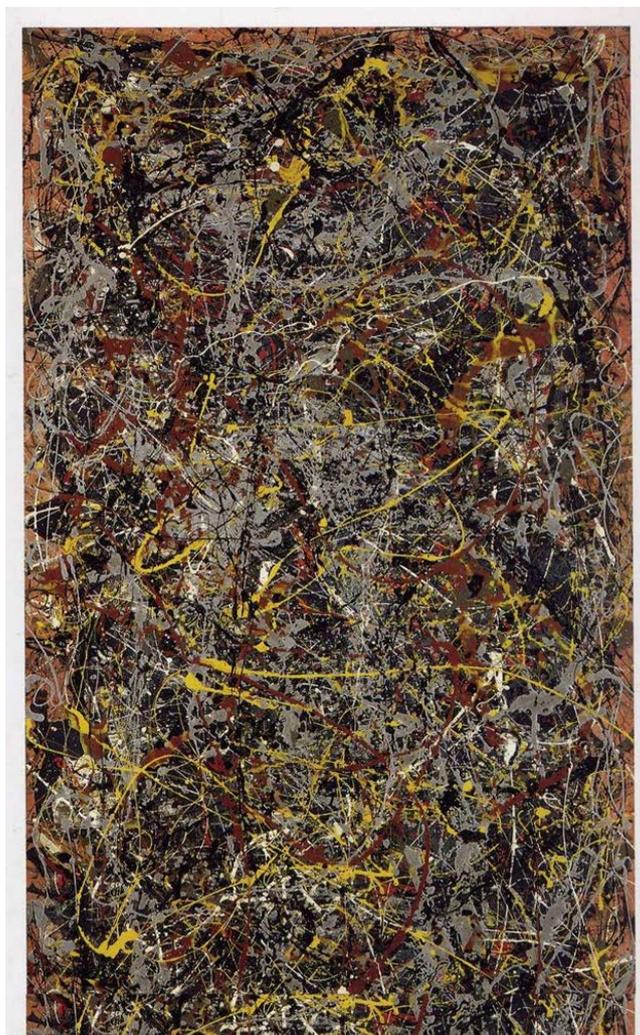


Рисунок 8.5.1 – Дж. Поллак. Картина «№ 5, 1948»

Ученые Ричард Тейлор, Адам П. Миколич и Дэвид Джонс исследовали работы Поллака и установили (см. [60, с. 88 – 101]) что абстрактные композиции,

созданные Поллаком, имеют вполне вычислимую фрактальную размерность. Ее величина колеблется для разных работ, написанных в разные периоды творчества. Так, например, его работы «Number 14; Gray» (Номер 14; Серый, рис. 8.5.2) (1948), «Autumn Rhythm (Number 30)» (Ритм осени, рис. 8.5.3) (1950) и «Blue Poles» (Синие шесты, рис. 8.5.4) (1952) имеют размерности [60, с. 98] 1,45; 1,67 и 1,72 соответственно.



Рисунок 8.5.2 – Number 14; Gray. 1948. Художественная галерея Йельского университета



Рисунок 8.5.3 – Autumn Rhythm (Number 30). Ритм осени. 1950. Стиль: живопись действия. Метрополитен-музей



Рисунок 8.5.4 – Blue Poles. (Синие (столбы) шесты). Первоначальное название «Number 11, 1952» Стиль: абстрактный экспрессионизм. Национальная галерея Австралии

Как утверждает Интернет-статья «Синие столбы», оценки текущей стоимости этой картины варьируются в большом диапазоне: от \$ 100 миллионов до \$ 350 миллионов. С такими оценками согласны далеко не все.

Говоря о фрактальном искусстве, отметим, что, как пишет Евин И. А. [33, с. 56], «люди отдают эстетическое предпочтение фракталам с размерностью от 1,3 до 1,5, независимо от их происхождения. Также установлено (см. [60, с. 98]), что значения фрактальной размерности, для природных фрактальных объектов «такие как береговые линии и молнии, составляют 1,23 и 1,3».

Завершая разговор о Поллаке, который, напомним, интересовал нас, как художник-фракталист в определенный период своего творчества, успокоим читателей – они не одиноки в оценке работ этого гения. Но, как подметил господин Широков, завораживающая депрессия, сквозящая в полотнах Поллака, не может оставить их без внимания.

К числу художников, чьи работы демонстрируют фрактальное видение мира часто относят: Маурица Эшера (1898 – 1972), Франтишека Купку (1871 – 1957), Микалоюса Чюрлёниса (1875 – 1911) и др. Следует все же отметить, что работы Эшера более известны, как примеры визуализации неевклидовой геометрии. Что же касается Купки, то [91] его полотна «... представляются особенно близкими к фракталам. Его живопись – не просто результат абстрагирования от природы. Так же, как и Кандинский, используя абстрактные, не связанные ни с какими предметами формы, Купка изображает «новую реальность». «Незачем рисовать деревья, если люди видят более красивые по пути на выставку», – писал он ...».



Рисунок 8.5.5 – Ф. Купка «Lignes animées», 1921 – 1923

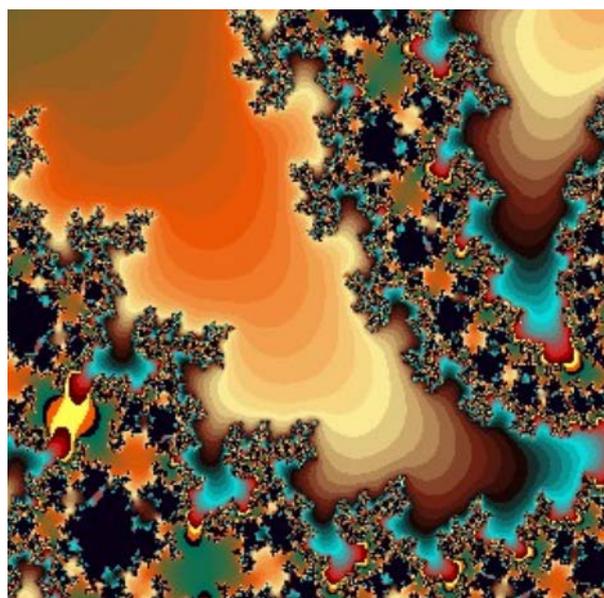


Рисунок 8.5.6 – Фрактал, множество Жюлиа, фрагмент

Как и Кандинский, Купка утверждал (см. [91]), что «цвет и форма составляют язык художника, обладающий своей собственной эмоциональной силой». Шлык В. А. в [91], обнаруживая параллели между предфрактальным объектом, изображенным на картине «Lignes animées» (рис. 8.5.5) с фракталом Жюлиа (рис. 8.5.6), подчеркивает следующее важное обстоятельство. К моменту написания этой картины (1921 – 1923 годы) пошло всего каких-то пять лет с того момента, как Жюлиа опубликовал свое исследование по преобразованию комплексной плоскости под действием отображения $f(z) = z^2 + c$. При этом ввиду отсутствия компьютеров множество Жюлиа существовало только в голове

у Жюлиа. И вот, непостижимым образом, нечто ему подобное (в идейном смысле) проявляется на холсте у Купки. Это может объясняться только одним [91]: «наука и искусство – всего лишь два из многих способов познания мира», пути их развития которых «пересекаются и переплетаются».

Шлык В. А. в [91], также отмечает, что фракталы присутствуют не только в традиционных видах живописи, но и в тех сферах изобразительного творчества, которые в двадцатом веке только появились. Речь идет о рекламе, плакате, оформлении интерьера, дизайне производства, фотографии, художественной полиграфии. Так примеры фрактальных структур присутствуют (см. [91]) во многих работах выдающегося мастера графического дизайна немецкого художника Антона Штанковски (1906 – 1998).

Другие многочисленные примеры работ разных авторов в этих направлениях можно во множестве найти в интернете.

Не обошли фракталы своим вниманием и философы, их интересует факт появления фракталов в искусстве. Так, например, Тарасенко В. В., проводя параллели между возникновением супрематизма и появлением фрактального мышления, после слов Ортеги-и-Гассета о том, что XX век – время дегуманизации науки и искусства пишет в [79] следующее. «Супрематизм – классический пример этой дегуманизации. ... Супрематизм и фрактальная геометрия предъявляют набор чистых форм, свободных от содержательной интерпретации, а потом «надевают» на эти формы новые концепции и точки зрения. ... Если внимательно посмотреть на процессы, происходящие в науке и искусстве, то можно увидеть их удивительное концептуальное и временное сходство, говорящее о том, что наука и искусство – разные формы современной культуры ... Математика и искусство создают новый язык, конструирующий новый мир. И этот мир, разворачиваясь от его творца, становится самостоятельным и самодостаточным».

Здесь от себя добавим, что Малевич, создав свой «шедевр», мог, как и многие творческие личности, просто не понимать, что он создал на самом деле, какие идеи надвигающегося мира он выразил. Мы не призываем вешать в красном углу собственной спальни репродукцию этого эпохального «творения». Но утверждаем, что невозможно игнорировать имеющиеся параллели с развитием науки, искусства и общества.

Впрочем, наука философия не стоит на месте, постоянно взбудораживая нас новыми откровениями. Как полагают некоторые авторы, фрактальность – это всеобщее свойство материи. Так что, недалек тот день, когда термин «фрактальность» и вовсе станет философской категорией, а шеренга великих философов пополнится фигурами новых гениев.

Ранее мы уже упоминали, что содержание настоящей работы носит в том числе и ознакомительный характер и что мнения цитированных авторов не обязательно совпадают с точкой зрения авторов книги, которые стремятся представить различные точки зрения.

В связи с этим отметим, что далеко не все разделяют восторги искусствоведов и простых обывателей, обнаруживающих фрактальные мотивы

при изучении работ известных художников, архитекторов, дизайнеров и др. Так, например, авторы в [63, с.157], имея в виду тенденцию на поиск везде и всюду фрактальных структур, с сарказмом пишут, что на смену увлечению золотым сечением «...готовится новое математическое чудо. Речь идет о фракталах, «автоподобных» формах, порождаемых компьютерами с помощью простых формул. Эти головокружительные зигзаги над бездной повторяют один и тот же мотив в разнообразных масштабах: наименьшая их часть подобна целому. Увлечение этими картинами стало настоящей модой (появились даже фрактальные майки и зонтики) и порой граничит с золотушным бредом, отождествляя свои формы с «отпечатком Бога». Божественный фрактал скоро сможет заменить золотую пропорцию. Будем с нетерпением ожидать нового Гика, в киберпанковом варианте, который докажет, что австралопитеки (обладавшие поразительными способностями к математике) рисовали на песке, покрывавшем каменный пол их жилищ, древообразные фракталы».

Задание

1. Что такое супрематизм и кто его основал?
2. Какие работы М. Чюрлёниса вы знаете и в каких из них, по вашему мнению, можно найти фрактальные конструкции?
3. Как вы считаете, есть ли связь между увеличением фрактальной размерности работ Дж. Поллака, показанных на рис. 8.5.2 – 8.5.4, и степенью депрессивного посыла от них?

§ 8.6. Фрактальный ландшафт

В этом параграфе мы рассмотрим другой метод генерации фракталов, имеющий большое практическое значение, а именно создание ландшафтов. Компьютерная генерация ландшафтов находит широкое применение в различных областях: разработка тренажеров для пилотов и водителей, создание компьютерных игр, кинематографические сцены, фоновые ландшафты в рекламе, в дизайне и др. Для создания виртуальных ландшафтов существует целый ряд программ, такие как, например, Bryce, MojoWorld, Terragen, Vue и др. Работа многих генераторов фрактальных ландшафтов, в том числе и перечисленных выше, основана на применении стохастического фрактального алгоритма. Он позволяет генерировать не только вид участков земной поверхности, но и облака.

Во введении к этой главе мы уже демонстрировали один фрактальный пейзаж. Возможно, вам приходилось видеть также и такие пейзажи, как эти (см. рис. 8.6.1):



Рисунок 8.6.1 – Фрактальные ландшафты

Все они полностью сгенерированы на компьютере с применением стохастического алгоритма, предназначенного для создания фрактального объекта, который имитирует внешний вид природной местности. Впервые моделирование такого рода гористых участков земной поверхности было предложено, упоминавшемся ранее, Бенуа Мандельбротом. Моделирование природных ландшафтов стало поворотным моментом в художественной практике. Так, например, в фильме 1982 года «Звёздный путь 2: Гнев Хана» американский специалист компьютерной графики Лорен Карпентер использовал усовершенствованные методы Мандельброта для моделирования инопланетного ландшафта. А живописные пейзажи, на фоне которых разворачиваются приключения героев фильмов «Пираты Карибского моря» или «Индиана Джонс: храм хрустального черепа» – всего-навсего имитация, созданная с помощью программы Vue.

Как же происходит генерация? Рассмотрим один алгоритм формирования фрактальных ландшафтов, называемый алгоритмом ромб-квадрат (diamond-square в англоязычной терминологии). Он впервые был представлен Фурнье, Фусселем и Карпентером в 1982 году [101], а позднее был модифицирован ([108] и др.). И начнем мы с его одномерного аналога – алгоритма построения линии горизонта. Он называется алгоритмом «смещения средней точки» (midpoint displacement – в англоязычной литературе или Mid-point displacement, а также MPD method). Суть этого метода состоит в особом принципе последовательного построения ломаных, которые в пределе и дадут нам линию горизонта.

Предположим, что на картине мы собираемся изобразить линию горизонта, образованную цепью горных вершин. Опишем последовательные этапы построения этой линии.

Первый этап. Пусть отрезок AB – это нижнее основание картины и его длина равна d . В точках A и B (см. рис. 8.6.2) проведем перпендикуляры и обозначим A' и B' пересечение линии, изображающей линию горизонта с левым краем полотна и, соответственно, с правым. Обозначим также через h_A длину отрезка AA' и через h_B – длину отрезка BB' . Четырехугольник $AA'B'B$ представляет собой трапецию, лежащую на боковой стороне AB . Пусть точка O – середина отрезка AB и OK – средняя линия трапеции $AA'B'B$, при этом точка K будет являться серединой отрезка $A'B'$. Как известно из школьного курса

геометрии, OK – длина средней линии трапеции $AA'B'B$ равна полусумме длин оснований: $\frac{h_A + h_B}{2}$.

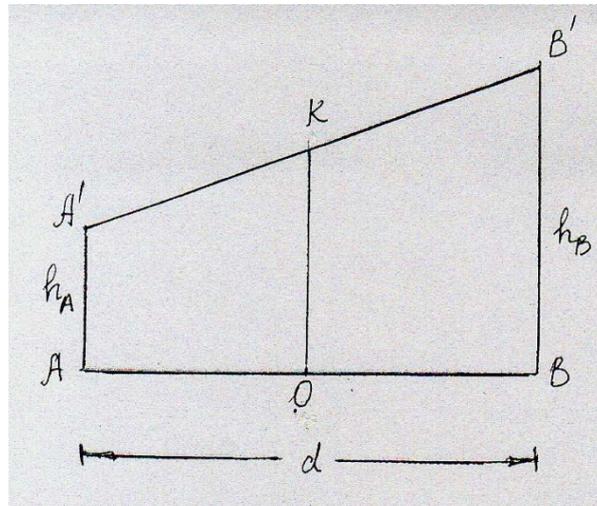


Рисунок 8.6.2 – Трапеция $AA'B'B$ со средней линией OK

Далее сместим по высоте точку K (отсюда и происходит название метода: алгоритм «смещения средней точки»). Смещение производим следующим образом. Зададимся какой-либо константой $r > 0$, которая будет определять «изломанность», «шероховатость» (roughness, англ.), получающейся линии горизонта, и рассмотрим отрезок $[-rd, rd]$. Из этого отрезка случайным образом выберем число $\Delta h_o \in [-rd, rd]$ и сместим точку K по вертикали (см. рис. 8.6.3) в положение O' . Таким образом, длина отрезка OO' равна:

$$h_o = \frac{h(a)+h(b)}{2} + \Delta h_o.$$

Величина Δh_o на этом рисунке выбрана отрицательной, поэтому точка O' располагается ниже точки K .

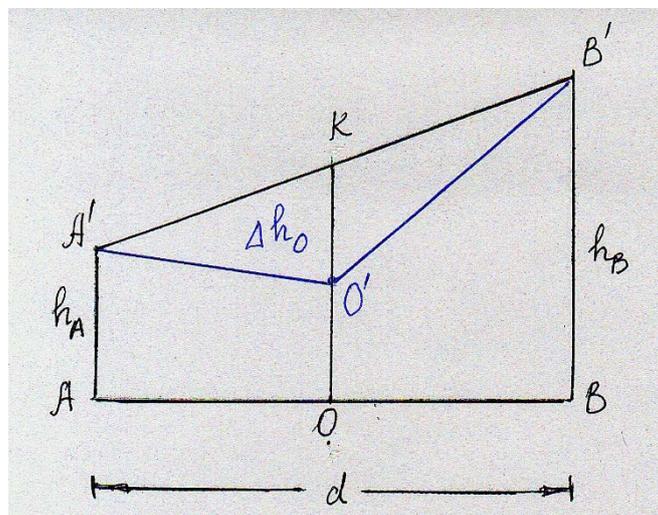


Рисунок 8.6.3 – Построение точки O'

Линия $A'O'B'$ (см. рис. 8.6.4), построенная в первом этапе, будет являться первым приближением в построении линии горизонта.

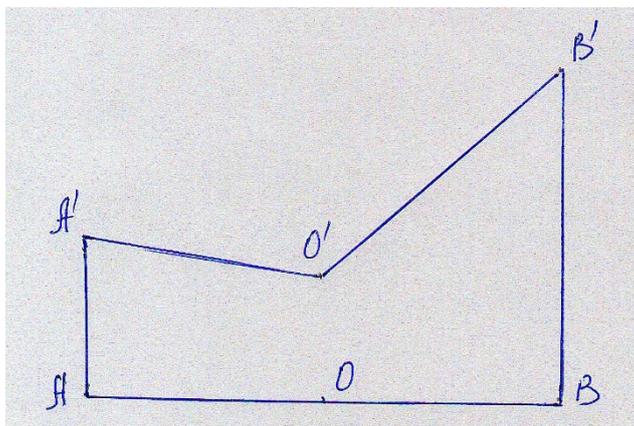


Рисунок – 8.6.4. Линия $A'O'B'$ – первое приближение в построении линии горизонта

Отметим, что на самом деле число Δh выбирается не просто случайным образом, а с помощью датчика псевдослучайных чисел – алгоритма, порождающего последовательность чисел, элементы которой почти независимы друг от друга и подчиняются в данном случае равномерному закону распределения.

Второй этап. Далее рассмотрим (см. рис. 8.6.5) трапеции $AA'O'O$ и $OO'B'B$.

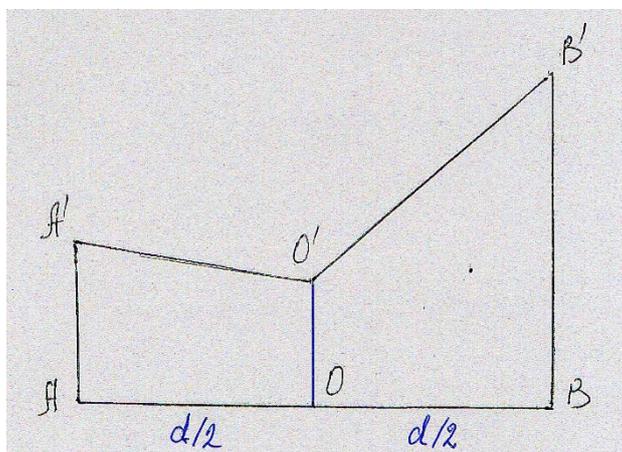


Рисунок 8.6.5 – Две трапеции: $AA'O'O$ и $OO'B'B$

Как и в случае с трапецией $AA'B'B$ найдем (см. рис. 8.6.56 точки P и Q – середины сторон AO и OB соответственно, а затем построим средние линии PL и QS . Тогда, как и в случае трапеции $AA'B'B$, получаем, что длина PL равна $\frac{h_A + h_O}{2}$, а длина QS равна соответственно $\frac{h_O + h_B}{2}$.

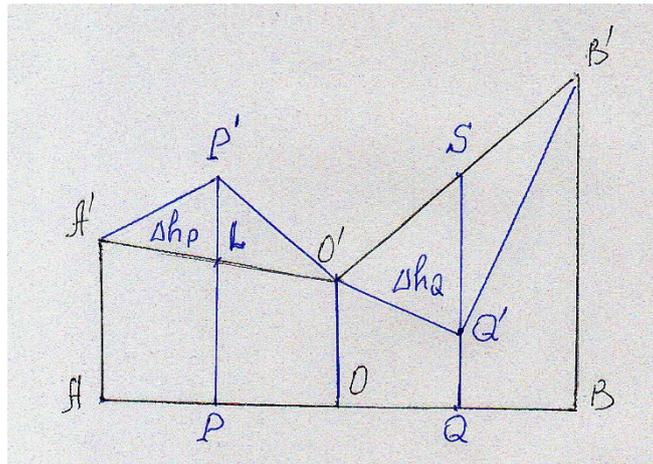


Рисунок 8.6.6 – Построение точек P' и Q'

Далее в трапеции $AA'O'O$ сместим по высоте точку L . Смещение производим следующим образом. Для заданной выше константы $r > 0$, которая определяет «шероховатость» (roughness), «изломанность» получающейся линии горизонта, и рассмотрим отрезок $[-r\frac{d}{2}, r\frac{d}{2}]$. Из этого отрезка случайным образом выберем число $\Delta h_p \in [-r\frac{d}{2}, r\frac{d}{2}]$, и сместим точку P по вертикали (см. рис. 8.6.6) в положение P' . Таким образом, длина отрезка PP' равна (см. рис. 8.6.6):

$$h_p = \frac{h_A + h_O}{2} + \Delta h_p.$$

Аналогично смещаем точку S на некоторую случайную величину $\Delta h_q \in [-r\frac{d}{2}, r\frac{d}{2}]$ в положение Q' . Таким образом, длина отрезка QQ' равна (см. рис. 8.6.6):

$$h_q = \frac{h_O + h_B}{2} + \Delta h_q.$$

Линия $A'P'O'Q'B'$ (см. рис. 8.6.7), построенная во втором этапе, будет являться вторым приближением в построении линии горизонта.

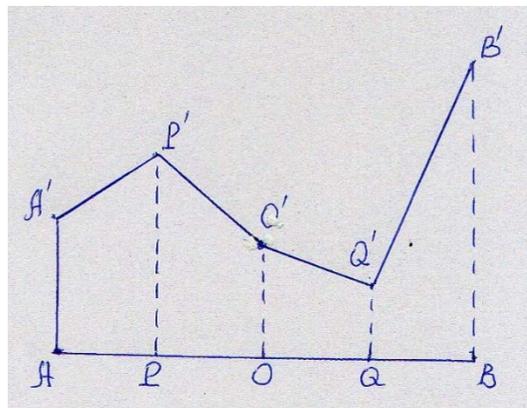


Рисунок 8.6.7 – Линия $A'P'O'Q'B'$ – второе приближение в построении линии горизонта

И так далее, деля всякий раз основания трапеций пополам и выбирая случайное смещение Δh из соответствующего отрезка $[-r \frac{d}{2^n}, r \frac{d}{2^n}]$.

Теперь перейдем к принципу генерации поверхностей и изложению самого алгоритма diamond-square (ромб-квадрат, здесь имеется в виду второе значение английского слова diamond – ромб). Как уже упоминалось выше, он впервые был представлен Фурнье, Фусселем и Карпентером в 1982 году в [101].

Рассмотрим квадрат $ABCD$ размера $d \times d$ клеток. Это будет карта местности. Для наглядности возьмем $d = 5$, т. е. квадрат 5×5 клеток (см. рис. 8.6.8a), а вообще, как это будет видно из дальнейших построений, нужно брать $d = 2^n + 1$ клеток, где n – число шагов формирования (генерации) поверхности.

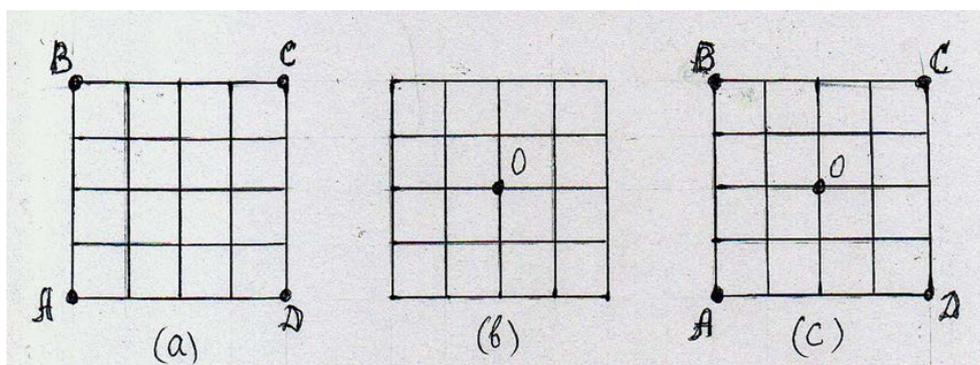


Рисунок 8.6.8 – Выделение точек квадрата для построения высот

Первый шаг. Первый этап – «diamond». В угловых точках квадрата $ABCD$ (см. рис. 8.6.9) зададим высоты: h_A , h_B , h_C и h_D соответственно. В центре квадрата – точке O (см. рис. 8.6.8b,) зададим высоту по формуле:

$$h_O = \frac{1}{4} (h_A + h_B + h_C + h_D) + \Delta h_O,$$

где Δh_O , как и в случае генерации линии горизонта, – это число, выбранное случайным образом из отрезка $[-rd, rd]$, а r – заранее выбранный коэффициент «шероховатости» (roughness), «изломанности» конструируемой поверхности. Далее проведем в точках A, B, C, D и O перпендикуляры к плоскости квадрата и отложим на них отрезки AA' длины h_A , BB' длины h_B , CC' длины h_C , DD' длины h_D и OO' длины h_O . Соединив построенные точки A', B', C', D' и O' отрезками, получим над квадратом $ABCD$ поверхность $A'B'C'D'O'$ (см. рис. 8.6.9).

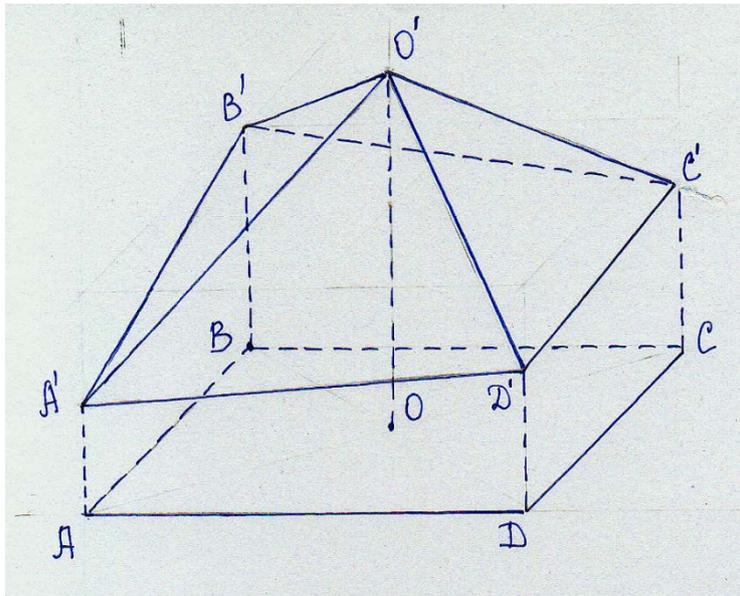


Рисунок 8.6.9 – Первый шаг. Поверхность первого этапа приближения – $A'B'C'D'O'$

Первый шаг. Второй этап – «square». Внесем дополнительные «изломы» в построенную поверхность $A'B'C'D'O'$. Для этого рассмотрим рисунок 8.6.8с и дополним его точками P, Q, R, S – серединами сторон AB, BC, CD и DA соответственно (см. рис. 8.6.9).

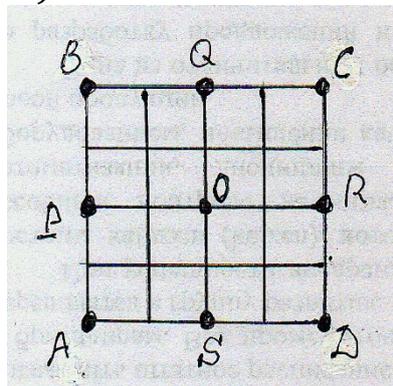


Рисунок 8.6.10 – Квадрат с серединами сторон

В каждой из точек P, Q, R, S восставим перпендикуляры, на которых отметим точки P', Q', R' и S' так, что длины отрезков PP', QQ', RR' и SS' будут соответственно равны:

$$h_P = \frac{1}{3} (h_A + h_B + h_O) + \Delta h_P, \quad h_Q = \frac{1}{3} (h_B + h_C + h_O) + \Delta h_Q,$$

$$h_R = \frac{1}{3} (h_C + h_D + h_O) + \Delta h_R \quad \text{и} \quad h_S = \frac{1}{3} (h_A + h_D + h_O) + \Delta h_S,$$

где $\Delta h_P, \Delta h_Q, \Delta h_R$ и Δh_S – это числа, выбранные случайным образом из отрезка $[-r d, r d]$.

Соединим (см. рис. 8.6.11) построенные точки $A', P', B', Q', C', R', D'$ и S' с точкой O' , а также с соседними, получим поверхность $A'P'B'Q'C'R'D'O'$ первого приближения.

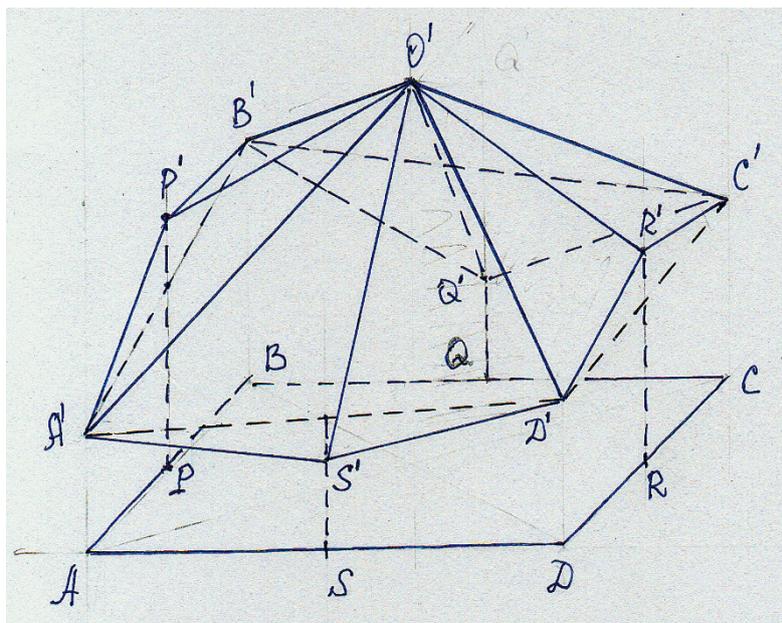


Рисунок 8.6.11 – Поверхность $A'P' B' Q' C' R' D' O'$ – поверхность первого шага построения. На чертеже изображен случай, когда $\Delta h_S < 0$, $\Delta h_P > 0$, $\Delta h_Q < 0$ и $\Delta h_R > 0$

Второй шаг. Первый этап. На втором этапе из квадрата $ABCD$ с четырьмя высотами по углам мы получили четыре квадрата $APOS$, $PBQO$, $OQCR$ и $SORD$ с перпендикулярами, проведенными в вершинах. Теперь над каждым из этих квадратов построим поверхность по методу, изложенному в первом этапе. Для этого в каждом из четырех квадратах находим центры, в которых построим высоты. Но только теперь при формировании высот числа Δh будут выбираться случайным образом из отрезка $[-r \frac{d}{2}, r \frac{d}{2}]$. Это будет поверхность второго приближения.

Далее идет второй шаг второй этап и т. д. На шаге с номером k случайное смещение выбирается из отрезка $[-r \frac{d}{2^{(k-1)}}, r \frac{d}{2^{(k-1)}}]$.

И так далее. После нескольких шагов построения поверхность соответствующего приближения будет выглядеть как-то так (см. рис. 8.6.12). Рисунок взят из [107].

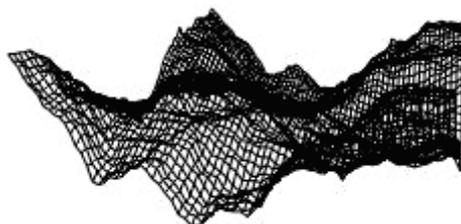


Рисунок 8.6.12 – Примерный вид поверхности после нескольких шагов построения

Теперь поясним смысл (происхождение) названия: алгоритм diamond-square.

1. На этапе diamond происходит формирование ромбов путем нахождения центров квадратов.

2. На этапе square происходит формирование квадратов путем нахождения центров ромбов.

Этап diamond и этап square это одна итерация (один шаг).

Чтобы разобраться в терминологии авторов метода, еще раз повторим этапы построения поверхности.

Этап diamond (ромб). В нашем случае на первом этапе был взят квадрат $ABCD$ (см. рис. 8.6.13a) заданы высоты: h_A, h_B, h_C и h_D , найден центр квадрата – точка O (см. рис. 8.6.13b) и в ней определена высота h_O . При этом сформировались четыре ромба, части которых, лежащие вне квадрата $ABCD$, показаны пунктирными линиями (см. рис. 8.6.13c).

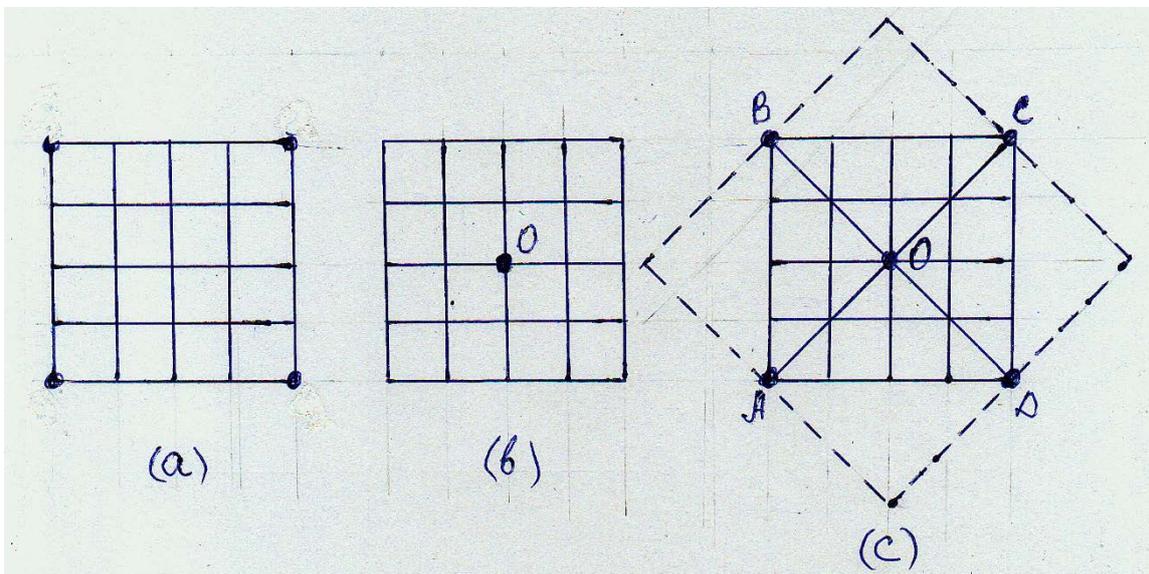


Рисунок 8.6.13 – Формирование ромбов на первом этапе

Этап square (квадрат). В нашем случае на втором этапе были найдены (см. рис. 8.6.14 a) точки P, Q, R, S – середины сторон исходного квадрата, являющиеся также центрами ромбов, построенных на первом этапе. Попутно были вычислены значения высот h_P, h_Q, h_R и h_S в этих точках. На рис. 8.6.14b отмечены 9 жирных точек. При этом из исходного квадрата $ABCD$ сформировались четыре новых квадрата (см. рис. 8.6.14c): $APOS, PBQO, OQCR$ и $SORD$ формата 2×2 . Они выделены жирными линиями.

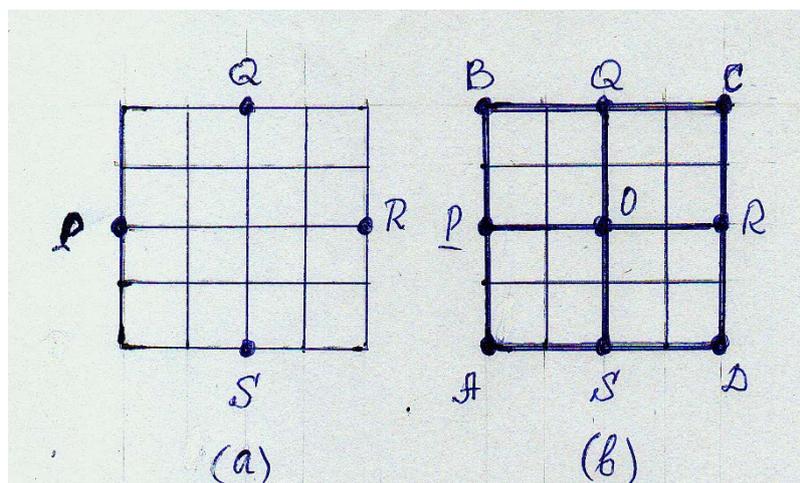


Рисунок 8.6.14 – Формирование квадратов на втором этапе

Этап diamond (ромб). В нашем случае на втором шаге в первом этапе находятся центры квадратов $APOS, PBQO, OQCR, SORD$ (см. рис. 8.6.15a) и при этом, как и на первом шаге, формируются новые ромбы (см. рис. 8.6.15b). Части ромбов, лежащие вне исходного квадрата $ABCD$, показаны пунктирными линиями.

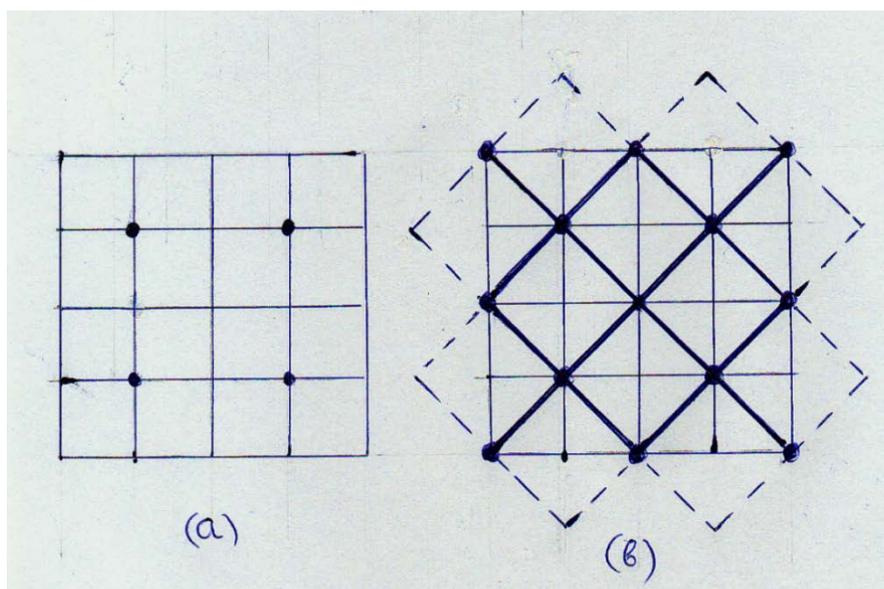


Рисунок 8.6.15 – Формирование ромбов на втором шаге в первом этапе

И так далее.

Замечание 8.6.1. Отметим, что не всякая поверхность может быть смоделирована таким способом. Например, песчаный пляж, небольшая рябь на поверхности озера. Можно показать, что в этих случаях фрактальная размерность совпадает с топологической, т. е. имеет размерность два.

Замечание 8.6.2. Алгоритм позволяет создавать не только ландшафты. С его помощью можно сгенерировать облачное небо. Для этого в квадрате нужно, создавая карту высот, придавать самым высоким точкам самые густо синие тона, а точкам с самыми низкими высотами – самые светло-синие тона.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Адкинс Лесли. Древняя Греция. Энциклопедический справочник [Текст] / Адкинс Лесли, Адкинс Рой. – М.: Вече, 2008. – 496 с.: ил. – (Библиотека мировой истории) – ISBN 978-5-9533-1932-4. – Текст: непосредственный.
2. Алимов, Ю. И. Является ли вероятность «нормальной» физической величиной? / Ю. И. Алимов, Ю. А. Кравцов // Успехи физических наук. – 1992. – № 7, Том 162. – С. 149 – 182. – Текст: непосредственный.
3. Аристотель. Сочинения в четырёх томах. – Т. 1. – М.: Мысль, 1976. – 550 с. – Текст: непосредственный.
4. Арнольд, В. И. Что такое математика: монография / В. И. Арнольд. – М.: МЦНМО, 2002. – 104 с. ISBN 5-94057-090-9. – Текст: непосредственный.
5. Геометрия: учебник для 7 – 9 кл. общеобразовательных учреждений / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др. – 20-е изд. – М.: Просвещение. 2010. – 384 с.: ил. – ISBN 978-5-09-023915-8. – Текст: непосредственный
6. Болгарский, Б. В. Очерки по истории математики: монография / Б. В. Болгарский. – Мн.: Выш. Школа, 1979. – 368 с., ил. – Текст: непосредственный.
7. Бондаренко, И. А. О построении Парфенона в соотношении с храмом Зевса в Олимпии. Некоторые пропорционально-метрические наблюдения / И. А. Бондаренко // Вопросы всеобщей истории архитектуры. – 2019. – №1(12). – С. 43 – 60. – Текст: непосредственный.
8. Буныковский, В. Я. Основания математической теории вероятностей: монография / В. Я. Буныковский. – СПб: Типография Императорской Академии Наук, 1848. – 478 с. – Текст: непосредственный.
9. Бурбаки, Н. Очерки по истории математики: монография / Н. Бурбаки. – М.: ИЛ 1963. – 291 с. – Текст: непосредственный.
10. Вентцель, Е. С. Теория вероятностей: учебник для вузов / Е. С. Вентцель. – Изд. 2-е. – М.: ФМ, 1962. – 564 с. – Текст: непосредственный.
11. Вернан, Ж.-П. Происхождение древнегреческой мысли: монография / Ж.-П. Вернан; Пер. с фр. /Общ. Ред. Ф. Х. Кессили, А. П. Юшкевича; Послесл. Ф. К. Кессиди. – М.: Прогресс, 1988. – 224 с. – Текст: непосредственный.
12. Малая советская энциклопедия: Гл. ред. Б. А. Введенский. Т. 3 Горняцкий – Илосос. – М.: Большая Советская Энциклопедия, 1959. – 1274 стб., ил. – Текст: непосредственный.
13. Вигасин, А. А. История Древнего мира 5 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений / А. А. Вигасин, Г. И. Годер, И. С. Свенцицкая – М.: Просвещение, 2009. – 287 с.; ил., карт. – Текст: непосредственный.
14. Современные основы школьного курса математики: учебное пособие / Н. Я. Виленкин, К. И. Дуничев, Л. А. Калужин, Ф. Ф. Столяр. – М: Просвещение, 1980. – 240 с. – Текст: непосредственный.
15. Математическая энциклопедия: Гл. ред. И. М. Виноградов. Т.2 Д – Коо. – М.: Советская Энциклопедия, 1979. – 1104 стб., ил. – Текст: непосредственный.

16. Виппер, Ю. Ф. Золотое деление как основной морфологический закон в природе и искусстве (открытие проф. Цейзинга) / С примечаниями и объяснениями изложил Ю. Ф. В.: монография / Ю. Ф. Виппер. – М., 1876. – 24 с.: ил.; 25. – Текст: непосредственный.
17. Витрувий, М. П. Десять книг об архитектуре: монография / М. П. Витрувий. – М.: ИАА, 1936. – 327 с. – Текст: непосредственный.
18. Волошинов, А. В. Математика и искусство: монография / А. В. Волошинов. – М.: Просвещение, 1992. – 335 с. – ISBN 5-09-002705-6. – Текст: непосредственный.
19. Воробьёв, Н. Н. Числа Фибоначчи: монография / Н. Н. Воробьёв. – 5-е изд. – М.: Наука, 1984. – 144 с. – Текст: непосредственный.
20. Вудсон, У. Справочник по инженерной психологии для инженеров и художников-конструкторов / У. Вудсон, Д. Коновер. – М.: Мир, 1969. – 518 с. – Текст: непосредственный.
21. Гарднер, Э. С. Дело о заблудившейся девушке. Детективные романы / Э. С. Гарднер; Пер. с англ. – М.: Центрполиграф, 2004. – 511 с. – (Весь Перри Мейсон) ISBN 5-9524-1007-3 (Вып. 29) ISBN 5-9524-0106-6. – Текст: непосредственный.
22. Геродот. История. / Пер. и прим. Г. А. Стратановского. Статья В. Г. Боруховича. (Серия «Памятники исторической мысли».) – Л.: Наука, 1972. – 600 с. – Текст: непосредственный.
23. Гика, М. Эстетика пропорций в природе и искусстве. / Перевод с французского В. В. Белохвостина: монография / М. Гика. – М.: Изд. Всесоюзной Академии архитектуры, 1936. – 310 с. – Текст: непосредственный.
24. Гнеденко, Б. В. Курс теории вероятностей. – Изд. 8-е, испр. и доп.: учебник для вузов / Б. В. Гнеденко. – М.: Едиториал УРСС, 2005. – 448 с. (Классический университетский учебник) ISBN 5-354-01091-8. – Текст: непосредственный.
25. Гнеденко, Б. В. Курс теории вероятностей. – Изд. 5-е: учебник для вузов / Б. В. Гнеденко. – М.: Наука, 1969. – 400 с. – Текст: непосредственный.
26. Гнеденко, Б. В. Очерки по истории математики в России: монография / Б. В. Гнеденко. – М.-Л.: ОГИЗ ГИТТЛ, 1946. – 247 с. – Текст: непосредственный.
27. Гримм, Г. Д. Пропорциональность в архитектуре: монография / Г. Д. Гримм – М.-Л.: Глав. ред. строит. лит-ры, ОНТИ, 1935. – 148 с., [15] л., ил. – Текст: непосредственный.
28. Гриненко, Г. В. История философии: учебное пособие / Г. В. Гриненко. – М.: ЮРАЙТ, 2003. – 288с.– ISBN 5-94879-098-3. – Текст: непосредственный.
29. Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учебное пособие / В. Е. Гмурман. – М.: Высшая школа, 1975 – 333 с. – Текст: непосредственный.

30. Даан-Дальмедико, А., Пейффер, Ж. Пути и лабиринты. Очерки по истории математики: монография / А. Даан-Дальмедико, Ж Пейффер; Пер. с франц. – М.: Мир, 1986. – 432 с., ил. – Текст: непосредственный.
31. Диоген Лаэртский. О жизни, учениях и изречениях знаменитых философов / АН СССР, Ин-т философии. – М. Мысль, 1979. – 620 с. – Текст: непосредственный.
32. Душенко, К. В. История знаменитых цитат: монография / К. В. Душенко. – М.: КоЛибри, 2018. – 1045 с. ISBN 978-5-38-913120-0. – Текст: непосредственный.
33. Евин, И. А. Искусство и синергетика: учебное пособие / И. А. Евин. – М.: Книжный дом «Либроком», 2009. 164 с. – Текст: непосредственный.
34. Евклид. Начала Евклида. Книги I-VI греческого и комментарии Д. Д. Мордухай-Болтовского при редакционном участии М. Я. Выгодского и И. Н. Веселовского / Евклид. – Москва, Ленинград: ГИТТЛ, 1950. – 447 с. – Текст: непосредственный.
35. Евклид. Начала Евклида 1950, т. 3 Книги XI – XV, греческого и комментарии Д. Д. Мордухай-Болтовского при редакционном участии И.Н. Веселовского / Евклид. – М.-Л.: ГИТЛ, 1950. – 331 с. – Текст: непосредственный.
36. Жолков, С. Ю. Математика и информатика для гуманитариев: учебник для вузов / С. Ю. Жолков. – Изд. 2-е, испр. и доп. – М.: Альфа-М; ИНФА-М, 2005. – 528 с.– ISBN 5-98281-049-5 (Альфа-М). – ISBN 5-16-002380-1(ИНФРА-М). – Текст: непосредственный.
37. Закс, Л. Статистическое оценивание: монография / Л. Закс; Пер. с нем. В. Н. Варыгина. – М.: Статистика, 1976. – 598 с. – Текст: непосредственный.
38. Зубов, В. П. Архитектурная теория Альберти: монография / В. П. Зубов. – СПб.: Алетейя, 2001. – 464 с. – ISBN 5-89329-450-5. – Текст: непосредственный.
39. Иванов, Б. Ф. Связь «золотого сечения», математического ожидания, медианы и моды в эстетических предпочтениях / Б. Ф. Иванов, Н. Л. Белая // Дизайн, материалы и технология. – 2018. – Т. 53, № 3. – С. 20 – 24. ISSN 1990-8997. – Текст: непосредственный.
40. Иванов, Б. Ф. Точки эстетических предпочтений в эксперименте фехнеровского типа и их доверительные интервалы / Б. Ф. Иванов, Н. Л. Белая // Дизайн, материалы и технология. – 2020. – Т. 4(60), № 4. – С. 15 – 19. – ISSN 1990-8997 DOI: 10.46418/1990–8997_2020_4(60)_15. – Текст: непосредственный.
41. Ильина, О. В. Эргономика и эргономические параметры в промышленном дизайне. Часть 2. Физиология: учебное пособие / О. В. Ильина. – ВШТЭ СПбГУПТД. – СПб., 2019.– 100 с. – Текст: непосредственный.
42. Ильина, О. В. Эргономика и эргономические параметры в промышленном дизайне. Часть 1. Антропометрия: учебное пособие / О. В. Ильина. – ВШТЭ СПбГУПТД. – СПб., 2018.– 70 с. – Текст: непосредственный.

44. Каазик, Ю. Я. Математический словарь / Ю. Я. Каазик. – Таллин: Валгус, 1985. – 296 с., ил. – Текст: непосредственный.
45. Клайн, М. Математика. Утрата определённости: монография / М. Клайн; Пер. с англ. / Под ред., с предисл. и примеч. И. М. Яглома. – М.: Мир, 1984. – 434 с. ил. ISBN 5-03-000918-3 (русск.) ISBN 1-19-503533 (англ.). – Текст: непосредственный.
46. Клайн, М. Математика. Поиск истины: монография / М. Клайн; Пер. с англ. Ю. А. Данилова / Под ред. Ю. В. Сачкова и В. И. Аршинова. – М.: Мир, 1988. – 295 с. ил. – Текст: непосредственный.
47. Ле Корбюзье. Архитектура XX века: монография / Ле Корбюзье. – М.: Прогресс, 1977. – 303 с. – Текст: непосредственный.
48. Ковалёв, Ф. В. Золотое сечение в живописи: учебное пособие / Ф. В. Ковалёв. – М.: – К.: Выща шк., 1989. – 143 с. ISBN 5-11-001336-5. – Текст: непосредственный.
49. Колмогоров, А. Н. Математика XIX века: монография / Под ред. А. Н. Колмогорова и А. П. Юшкевича. – М.: Наука 1978, 255 с. – Текст: непосредственный.
50. Крамер, Г. Математические методы статистики: монография / Г. Крамер. – М.: Мир, 1975. – 648 с. – Текст: непосредственный.
51. Кремер, Н. Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для вузов / Н. Ш. Кремер. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002. – 543 с. ISBN 5-238-00141-X. – Текст: непосредственный.
52. Курант, Р. Что такое математика?: монография / Р. Курант, Г. Роббинс. – М.: Просвещение, 1967. – Текст: непосредственный.
53. Ливио Марио. φ – Число Бога. Золотое сечение – формула мироздания: монография. – Москва: АСТ, 2015. – 425 с., ил. (Золотой фонд науки) ISBN 978-5-17-094497-2. – Текст: непосредственный.
54. Лотман Ю. М. Искусствоведение: Методы точных наук и семиотики: монография / Сост. и ред. Ю. М. Лотмана, В. М. Петрова; Предисл. Ю. М. Лотмана; Послесл. В. М. Петрова. – Изд. 4-е – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. – 368 с. ISBN 978-5-397-00702-3. – Текст: непосредственный.
55. Лотман, Ю. «Золотое сечение» и проблемы внутримозгового диалога. / Ю. Лотман, Н. Николаенко // Декоративное искусство СССР. – 1983. – № 9. – С. 31 – 34. – Текст: непосредственный.
56. Майстров Л. Е. Развитие понятия вероятности: монография. – М.: Наука, 1980. – 269 с. – Текст: непосредственный.
57. Максимов Ю. Д. Вероятностные разделы математики: учебник для вузов / Под ред. Максимова Ю. Д. – СПб.: Иван Фёдоров, 2001. – 592 с., илл. ISBN 5-81940-050-X. – Текст: непосредственный.
58. Мантуров, О. В. Толковый словарь математических терминов / О. В. Мантуров, Ю. К. Солнцев, Ю. И. Соркин, И. Г. Федин. – М.: Просвещение, 1965. – 539 с. – Текст: непосредственный.

59. Милнор, Дж. Голоморфная динамика: монография / Дж. Милнор. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000, 320 с. – ISBN 5-93972-006-4. – Текст: непосредственный.
60. Николаева Е. В. Фракталы как искусство. Сборник статей / Пер. с англ., фр. Е. В. Николаевой. – СПб.: Страта, 2016. – 224 с. – ISBN 978-5-906150-18-9. – Текст: непосредственный.
61. Новый Завет. Евангелие от Матфея. На церковнославянском (рус.) Азбука веры: [сайт]. – 2005. – URL: <https://azbyka.ru/biblia/?Mt.6-26&c> (дата обращения: 12. 07. 2023). – Текст: электронный.
62. Нойферт, Э. Строительное проектирование: монография / Э. Нойферт; Пер. с нем. – М.: Архитектура-С, 2009. – 560 с. с ил. – Текст: непосредственный.
63. Ортоли, С. Ванна Архимеда. Краткая мифология науки / С. Ортоли, Н. Витковски; Пер. с фр. Д. Баяока. – М.: Колибри, 2007. – 240 с. – ISBN 978-5-98720-046-9. – Текст: непосредственный.
64. Парланд, А. А. Храмы Древней Греции. Лекции по архитектуре, читанные в императорской академии художеств / А. А. Парланд. – СПб.: Типография Башкова и Брянкина, 1890. – 267 с.– Текст: непосредственный.
65. Пежемский, Д. В. Изменчивость продольных размеров трубчатых костей человека и возможности реконструкции телосложения. 03.03.02 «Антропология»: Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата биологических наук / Пежемский Денис Валерьевич; Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова. – Москва, 2011. – 25 с. – Библиогр.: с. 23-24. – Место защиты: Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова. – Текст: непосредственный.
66. Петров, В. М. Количественные методы в искусствоведении: учебное пособие для высшей школы / В. М. Петров. – М.: Академический Проект, Фонд «Мир», 2004. – 429 с. ISBN 5-8291-0319-2 (Акад. Проект) – Текст: непосредственный.
67. Петрович, Д. Теоретики пропорций: монография / Д. Петрович; Пер. с сербско-хорв. М. Д. Сорокиной; Под ред. Ю.Л. Сопоцько. – М.: Стройиздат, 1979. – 193 с. – Текст: непосредственный.
68. Петушкова, Г. И., Петушкова, Т. А., Хамматова, Э. А. Гармоническое пространство моды в дизайне костюма / Г. И. Петушкова, Т. А. Петушкова, Э. А. Хамматова // Дизайн и Технологии. – 2016. – № 54(96). – С. 6 – 16. – Текст: непосредственный.
69. Пирахан [Электронный ресурс]. – URL: <http://ru.wikipedia.org/wiki/> (дата обращения: 12. 07. 2023). – Текст: электронный.
70. Платон. Собрание сочинений в 4 т. Т. 3 / Пер. с древне-греч.; Общ. ред. А. Ф. Лосева, В. Ф. Асмуса, А. А. Тахо-Годи; Авт. вступ. ст. и ст. в примеч. А. Ф. Лосев; Примеч. А. А. Тахо-Годи. – М.: Мысль, 1994. – 654 с., [2] е. – (Филос. наследие). ISBN 5-244-00385-2, ISBN 5-244-00577-4 – Текст: непосредственный.

71. Плохинский, Н. А. Биометрия: монография / Н. А. Плохинский. – Новосибирск: Изд.-во Сибирского отделения АН СССР, 1961 – 364 с. – Текст: непосредственный.
72. Радзюкевич, А. В. К вопросу о научном изучении пропорций в архитектуре и искусстве / А. В. Радзюкевич // Ползуновский вестник. – 2014. – № 1. – С. 159 – 164. – Текст: непосредственный.
73. Радзюкевич, А. В. К вопросу о размерах и пропорциях пирамиды Хеопса. / А. В. Радзюкевич, Ю. Г. Марченко // Вестник ТГАСУ. – 2015. – №1. – С. 9 – 22. – Текст: непосредственный.
74. Радзюкевич, А. В. Критический анализ исследования Адольфа Цейзинга, основоположника гипотезы «золотого сечения» / А. В. Радзюкевич // АМИТ. – 2014. – 4(29). – С. 1 – 11. – Текст: непосредственный.
75. Райхер, В. К. Общественно-исторические типы страхования: монография / В. К. Райхер. – М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1947. – 282 с. – Текст: непосредственный.
76. Рунге, В. Ф. Эргономика в дизайне среды: учебное пособие / В. Ф. Рунге, Ю. П. Манусевич. – М.: Архитектура-С, 2005. – 327 с. – ISBN 5-9647-0026-8 – Текст: непосредственный.
77. Секей Габор. Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике: монография / Габор Секей. – М.: Мир, 1990. – 240 с. ISBN 5-03-001293-1 (русс.) – ISBN 963-05-4151 (англ.) – Текст: непосредственный.
78. Славутский, И. Ш. И в шутку и всерьёз о математике / И. Ш. Славутский. – СПб.: Издательство центра профессионального образования «Информатизация образования», 1998. – 113 с. – ISBN 5-89733-001-8 – Текст: непосредственный.
79. Тарасенко, В. В. Супрематизм и фрактальная геометрия: радикальный конструктивизм наблюдаемых форм / В. В. Тарасенко // Малевич. Классический авангард. – 2007. – Вып. 9. – С. 221-224. – Текст: непосредственный.
80. Турчин В. Физики продолжают шутить. Сборник переводов. / Составители-переводчики Ю. Конобеев, В. Павлинчук, Н. Работнов, В. Турчин; Под общей редакцией д.ф.-м.н. В. Турчина. – М.: Мир, 1963. – 320 с. – Текст: непосредственный.
81. Тутубалин, В. Н. Вероятность, компьютеры и обработка результатов эксперимента / В. Н. Тутубалин // Успехи физических наук. – 1993. – Т. 163, №7. – С. 93 – 109. – Текст: непосредственный.
82. Фалин, Г. И. История опытов с бросанием монеты. Часть 1. Опыт де Бюффона / Г. И. Фалин // Математика в школе. – 2014. – № 9. – С. 55 – 60. – Текст: непосредственный.
83. Фалин, Г. И. История опытов с бросанием монеты. Часть 2. Опыт де Моргана / Г. И. Фалин // Математика в школе. – 2014. – № 10. – С. 52-57. – Текст: непосредственный.

84. Фалин, Г. И. История опытов с бросанием монеты. Часть 3. Опыт Джевонса / Г. И. Фалин // Математика в школе. – 2015. – № 1. – С. 52-58. – Текст: непосредственный.
85. Фалин, Г. И. Исторические опыты с бросанием монеты и основы теории вероятностей. – URL: <https://www.youtube.com/watch?v=6IHhmfofRS0> (дата обращения: 12.07.2023). – Текст: электронный.
86. Фалин, Г. И. История опытов с бросанием монеты. Часть 4. Опыт Романовского / Г. И. Фалин // Математика в школе. – Математика в профильной школе. Фрактал. – 2015. – № 1. – С. 42-49. – Текст: непосредственный.
87. Фалин, Г. И. История опытов с бросанием монеты. Часть 5. Опыт Феллера. / Г. И. Фалин // Математика в школе. – Математика в профильной школе. Фрактал. – 2015. – № 2. – С.44-54. – Текст: непосредственный.
88. Феллер, В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1: монография / В. Феллер. – М.: Мир, 1964. – 498 с. – Текст: непосредственный.
89. Шейнин, О. Б. Теория вероятностей. Исторический очерк: монография / О. Б. Шейнин. – Берлин. 2019. – 372 с. – URL: http://www.sheynin.de/download/modamo_Geschichte.pdf (дата обращения: 12.07.2023). – Текст: электронный.
90. Шестова, М. А. Экспериментальная эстетика и эстетические эмоции: обзор западных трендов / М. А. Шестова // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Психологические науки. – 2021. – № 1. – С. 47–54. DOI: 10.18384/2310-7235-2021-1-47-54 – Текст: непосредственный.
91. Шлык, В. А. Фракталы в абстрактном искусстве и дизайне / В. А. Шлык // Известия Челябинского научного центра. – 2004. – Вып. 1 (22). – С. 231. – 244 – Текст: непосредственный.
92. Щетников, А. И. Лука Пачоли и его трактат «О божественной пропорции» / А. И. Щетников // Матем. обр. – 2007. – № 1(41). – С. 33–44. – Текст: непосредственный.
93. Эверетт, Д. Л. Не спи – кругом змеи! Быт и язык индейцев амазонских джунглей / Д. Л. Эверетт. – Москва: Издательский Дом ЯСК, 2016. – 378 с. – ISBN 978-5-9907947-6-4 – Текст: непосредственный.
94. Энгельс, Ф. Анти-Дюринг / Ф. Энгельс. – Москва: ОГИЗ Государственное издательство политической литературы, 1948. – 376 с. – Текст: непосредственный.
95. Юсупов, Э. С. Словарь терминов архитектуры / Э. С. Юсупов. – СПб.: Фонд Ленинградская галерея, 1994. – 432 с. – Текст: непосредственный.
96. Юшкевич, А. П. История математики. С древнейших времён до начала XIX столетия. Т. 1. С древнейших времён до начала нового времени: монография / А. П. Юшкевич и др.; под. ред. А. П. Юшкевича. – М.: Наука, 1970. – 351 с. – Текст: непосредственный.
97. Юшкевич, А. П. История математики. Том 2. Математика XVII столетия: монография / А. П. Юшкевич и др.; под. ред. А. П. Юшкевича. – М.: Наука, 1970. – 300 с. – Текст: непосредственный.

- 98 Юшкевич, А. П. История математики. Том 3. Математика XVIII столетия: монография / А. П. Юшкевич и др.; под. ред. А. П. Юшкевича. – М.: Наука, 1972. – 495 с. – Текст: непосредственный.
99. Benjafield John G. The golden section and American psychology, 1892-1938. / John G. Benjafield // *Journal of the Behavior Sciences*. – 2010. – vol. 49. – issue 1. – P. 52 – 71. – Текст: непосредственный.
100. Falconer Kenneth. Fractal geometry. Mathematical Foundations and Applications: монография / Kenneth Falcone. – New York: John Wiley & Sons 1990. – 286 p. – Текст: непосредственный.
101. Fournier Alain. Computer Rendering of Stochastic Models / Alain Fournier, Don Fussell, Loren Carpenter // *Communications of the ACM*. – 1982. – v. – 25. – issue 6. – P. 371-384. – DOI:10.1145/358523.358553 – Текст: непосредственный.
102. Frank Michael C. Number as a cognitive technology: Evidence from Pirahã language and cognition / Michael C. Frank, Daniel L. Everett, Evelina Fedorenko, Edward Gibson // *Cognit.* – 2008. – V. 108. – P. 819–824. DOI:10.1016/j.cognition.2008.04.007 – Текст: непосредственный.
103. Green C. D. All that glitters: a review of psychological research on aesthetics of golden section. / C. D. Green // *Perception*. – 1995. – vol. 24. – P. 937 – 968. – Текст: непосредственный.
104. Green Cristopher D. How to Find Refutations of the Golden Section without Really Trying / Cristopher D. Green // *Empirical Studies of the Arts*. – 2012. – vol. 30. – number 1. – P. 115-122. – Текст: непосредственный.
105. Holger Höge. The Golden Section Hypothesis –its last Funeral / Höge Holger // *Empirical Studies of the Arts*. – 1997. – vol. 15. – 2. – P. 233-255. – Текст: непосредственный.
106. Jiuping Xu. Random-Like Bi-level Decision Making. Lecture Notes in Economics Mathematical Systems 688: монография / Xu Jiuping, Li Zongmin, Tao Zhimiano. – Singapore: Springer Science + Business Media 2016. – 401p. – Текст: непосредственный.
107. Martz P, 1997, Generating Random Fractal Terrain [online], Available: URL: <http://www.gameprogrammer.com/fractal.html>.
108. Miller Gavin S.P. Definition and visualization of terrain maps / Gavin S.P. Miller // *Computer Graphics: SIGGRAPH' 86 | Proceedings of the SIGGRAPH 1986 Conference / Dallas, Texas, United States of America – 1986. – vol. 20. – number 4 August) – Текст: непосредственный.*
109. Neveux Marguerite. Le Nombre d'or, radiographie d'un mythe.: монография / Marguerite Neveux. – Paris.: Ed. du Seuil coll, «Points Sciences», 1995. – 328 p. – Текст: непосредственный.
110. Russell Phil A. Testing the Aesthetic Significance of the Golden- Section Rectangle / Phil A. Russell // *Perception*. – 2000. – vol. 29. – 12. – P. 1413-1422. – Текст: непосредственный.

111. Tilley A. The measure of man and woman – Human factors in design.: монография / A. Tilley, D. Henry. – New York: Publisher: Willey; Revised edition, 1993. – 97 p. – ISBN 0-8230-3031-8 – Текст: непосредственный.

112. Tinio P. P. L., Smith J. K. The Cambridge handbook of the psychology of aesthetics and the arts: монография / P. P. L. Tinio J. K. Smith, Cambridge, 2014, 620 p– Текст: непосредственный.

113. Whitworth W. A. Choice and Chance. An Elementary Treatise on Permutations, Combinations and Probability. Fourth edition: монография / W. A. Whitworth. – England. Cambridge: Deighton Bell and Co. London; George Bell and Sons, 1886. – 299 p. – Текст: непосредственный.

114. Zeising Adolf. Neue Lehre von den Proportionen des menschlichen Korpera aus einem bisher unerkannt gebliebenen die ganze Natur und Kunst durhdringenden morphologischen Grundgesetze.: монография / Adolf Zeising. – Leipzig: Rudoph Weigel. 1854. – 457 s. – Текст: непосредственный.

Научное издание

**Белая Нина Леонидовна
Иванов Борис Филиппович**

Математика для дизайнеров

Монография

Редактор и корректор М. Д. Баранова
Техн. редактор Д. А. Романова

Научное электронное издание сетевого распространения

Системные требования:
электронное устройство с программным обеспечением
для воспроизведения файлов формата PDF

Режим доступа: http://publish.sutd.ru/tp_get_file.php?id=202016, по паролю.
- Загл. с экрана.

Дата подписания к использованию 06.06.2024 г. Рег. № 5153/24

Высшая школа технологии и энергетики СПбГУПТД
198095, СПб., ул. Ивана Черных, 4.