З. Л. Абжандадзе
И. Э. Апакова
О. Е. Куляхтина

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Учебно-методическое пособие

Санкт-Петербург
2024

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

**«Санкт-Петербургский государственный университет
промышленных технологий и дизайна»
Высшая школа технологии и энергетики**

З. Л. Абжандадзе
И. Э. Апакова
О. Е. Куляхтина

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Учебно-методическое пособие

Утверждено Редакционно-издательским советом ВШТЭ СПбГУПТД

Санкт-Петербург
2024

УДК 517.98(075)
ББК 22.162я7
А794

Рецензенты:
кандидат физико-математических наук, доцент, исполняющий обязанности заведующего кафедрой высшей математики
Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета «ЛЭТИ»
А. П. Щеглова;
кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой высшей математики
Высшей школы технологии и энергетики Санкт-Петербургского государственного университета промышленных технологий и дизайна
Б. Ф. Иванов

Абжандадзе, З. Л.
А794 Функциональный анализ: учебно-методическое пособие / З. Л. Абжандадзе, И. Э. Апакова, О. Е. Куляхтина. — СПб.: ВШТЭ СПбГУПТД, 2024. — 55 с.

Учебно-методическое пособие соответствует программам и учебным планам дисциплины «Функциональный анализ» для студентов, обучающихся по направлению подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика». Приводится необходимый теоретический материал, а также примеры решения некоторых задач по основным разделам функционального анализа.

Пособие предназначено для подготовки бакалавров очной формы обучения. Отдельные разделы пособия могут быть полезны аспирантам и специалистам, работающим в области математики и информатики.

УДК 517.98(075)
ББК 22.162я7

© ВШТЭ СПбГУПТД, 2024
© Абжандадзе З. Л., Апакова И. Э., Куляхтина О. Е., 2024

ОГЛАВЛЕНИЕ

Множество и элементарные операции над множествами

В математике встречаются самые разнообразные множества. Понятие множества настолько общее, что трудно дать ему какое-либо определение, которое не сводилось бы просто к замене слова «множество» его синонимами: «совокупность», «собрание элементов», «класс», «семейство», «набор» и т.п.

" Под *множеством* мы понимаем объединение в одно целое определенных, вполне различимых объектов нашей интуиции или нашей мысли " –– так описал понятие «множество» Георг Кантор, основатель теории множеств.

Основные предпосылки канторовской теории множеств сводятся к следующему:

1. Множество может состоять из любых различных объектов.

2. Множество однозначно определяется набором составляющих его объектов.

3. Любое свойство определяет множество объектов, которые этим свойством обладают.

Если x — объект, P — свойство, $P(x)$ — обозначение того, что x обладает свойством P, то через $\{x|P(x)\}$ обозначает весь класс объектов, обладающих свойством P.

Объекты, составляющие класс или множество, называют *элементами* класса или множества.

Множество, состоящее из элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$, обычно обозначают $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Обычно принято обозначать множества прописными буквами латинского алфавита, а элементы множества — соответствующими строчными буквами.

Высказывание «x есть элемент множества X» коротко обозначают символом:

$$x \in X \quad (\text{или } X \ni x),$$

а его отрицание — символом

$$x \notin X \quad (\text{или } X \not\ni x).$$

В теории множеств часто используются логические операторы $\exists$ («существует» или «найдется») и $\forall$ («любой» или «для любого»), называемые кванторами *существования* и *всеобщности* соответственно.

Два множества A и B равны, когда они состоят из одних и тех же элементов.

Если все элементы, из которых состоит A, входят и в B (причем случай $A = B$ не исключается), то мы называем A *подмножеством* B и пишем $A \subset B$.

Например, натуральные числа образуют подмножество в множестве целых чисел, которые являются, в свою очередь, подмножеством всех действительных чисел.

Иногда мы не знаем заранее, содержит ли некое множество (например, множество корней данного уравнения) хотя бы один элемент. Поэтому целесообразно ввести понятие *пустого* множества, т.е. множества, не содержащего ни одного элемента. Мы будем обозначать его символом $\emptyset$.

Если любой элемент множества A является элементом множества B, то пишут $A \subset B$ или $B \supset A$ и говорят, что множество A является *подмножеством* множества B, или что B содержит A, или что B включает в себя A.

Операция над множествами

Пусть A и B — произвольные множества; их *суммой,* или *объединением* $C = A \cup B$, называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A и B.

Аналогично определяется сумма любого (конечного или бесконечного) числа множеств: если A_α — произвольные множества, то их сумма

$$\bigcup_\alpha A_\alpha$$

есть совокупность элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из множеств A_α.

Назовем *пересечением* $C = A \cap B$ множеств A и B множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих как A, так и B. Пересечением любого (конечного или бесконечного) числа множеств A_α называется совокупность

$$\bigcap_\alpha A_\alpha$$

элементов, принадлежащих каждому из множеств A_α.

Операции сложения и пересечения множеств по самому своему определению коммутативны и ассоциативны, т.е.

$$A \cup B = B \cup A, \ (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$$

$$A \cap B = B \cap A, \ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

Кроме того, они взаимно дистрибутивны:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

Определим для множеств операцию вычитания. Мы назовем *разностью* $C = A \setminus B$ множеств A и B совокупность тех элементов из A, которые не содержатся в B.

Иногда (например, в теории меры) удобно рассматривать так называемую *симметрическую разность* C множеств A и B:

$$C = A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Декартовым произведением непустых множеств X и Y называется совокупность $X \times Y$ всех пар вида (x, y), где $x \in X$ и $y \in Y$.

Общее понятие функции

Пусть X — некоторое множество на числовой прямой. Говорят, что на этом множестве *определена функция* f, если каждому числу $x \in X$ поставлено в соответствие определенное число $y = f(x)$. При этом X называется *областью определения* данной функции, а Y — совокупность всех значений, принимаемых этой функцией, — ее *областью значений.*

Если же вместо числовых рассматривать множества какой угодно природы, то мы придем к самому общему понятию функции. В зависимости от природы множеств X, Y термин «функция» в различных отделах математики имеет ряд полезных синонимов: *отображение, преобразование, морфизм, оператор, функционал, вектор-функция, мера* и т.д.

Для функции (отображения) приняты следующие обозначения:

$$f : X \to Y, \quad X \xrightarrow{f} Y.$$

Когда из контекста ясно, каковы область определения и область значений функции, используют также обозначения $x \mapsto f(x)$ или $y = f(x)$, а чаще обозначают функцию вообще одним лишь символом f.

Если x — элемент из X, то отвечающий ему $y = f(x)$ элемент из Y называется его *образом* (при отображении f).

Совокупность всех тех элементов x из X, образом которых является данный элемент $y \in Y$, называется *прообразом* (или точнее — *полным прообразом*) элемента y и обозначается $f^{-1}(y)$.

Две функции $f_1,\ f_2$ считаются *совпадающими* или *равными*, если они имеют одну и ту же область определения X и на любом элементе $x \in X$ значения $f_1(x), f_2(x)$ этих функции совпадают. В этом случае пишут $f_1 = f_2$.

Если $A \subset X$, а

$$f : X \to Y$$

— некоторая функция, то через $f \mid A$ или $f\,|_A$ обозначают функцию:

$$\varphi : A \to X,$$

совпадающую с f на множестве A. Более точно

$$f\,|_A\,(x) = \varphi(x),$$

если $x \in A$. Функция $f\,|_A$ называется *сужением* или *ограничением* функции f на множество A, а функция

$$f : X \to Y$$

по отношению к функции

$$\varphi = f\,|_A\colon A \to Y$$

называется *распространением* или *продолжением* функции φ на множество X.

Мы будем говорить, что f есть отображение множества X «на» множество Y, если $f(X) = Y$; такое отображение называют также *сюръекцией*. В общем случае когда $f(X) \subset Y$, говорят, что f есть отображение X «в» Y.

Если для любых двух различных элементов x_1 и x_2 из X их образы $y_1 = f(x_1)$ и $y_2 = f(x_2)$ также различны, то f называется *инъекцией*.

Отображение $f : X \to Y$, которое одновременно является сюръекцией и инъекцией, называется *биекцией* или *взаимно однозначным соответствием* между X и Y.

Отметим основные свойства отображений.

Теорема. *Прообраз суммы двух множеств равен сумме их прообразов:*

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B).$$

Теорема. *Прообраз пересечения двух множеств равен пресечению их прообразов:*

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

Теорема. *Образ суммы двух множеств равен сумме их образов:*

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B).$$

Метрические пространства

Одной из важнейших операции анализа является предельный переход. В основе этой операции лежит тот факт, что на числовой прямой определено расстояние от одной точки до другой. Обобщая представление о действительных числах как о множестве, в котором введено расстояние между элементами, мы приходим к понятию *метрического пространства* — одному из важнейших понятий современной математики.

Определение. *Метрическим пространством называется пара* (X, ρ), *состоящая из некоторого множества (пространства)* X *элементов (точек) и расстояния, т.е. однозначной, неотрицательной, действительной функции* $\rho(x, y)$, *для любых* x *и* y *из* X *и подчиненной следующим трем аксиомам:*

1) $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$,
2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (аксиома симметрии),
3) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (аксиома треугольника).

Приведем примеры метрических пространств.

1. Положив для элементов произвольного множества

$$\rho(x,y)=\begin{cases}0, & \text{если } x=y,\\ 1, & \text{если } x\neq y,\end{cases}$$

мы получим, очевидно, метрическое пространство. Его можно назвать пространством изолированных точек.

2. Множество действительных чисел с расстоянием

$$\rho(x,y)=|x-y|$$

образует метрическое пространство $\mathbb{R}^1$.

3. Множество упорядоченных групп из n действительных чисел $x=(x_1,x_2,\dots x_n)$ с расстоянием

$$\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(y_k-x_k)^2}$$

называется *$n-$мерным арифметическим евклидовым пространством* $\mathbb{R}^n$.

4. Рассмотрим то же самое множество упорядоченных групп из n действительных чисел $x=(x_1,x_2,\dots x_n)$, но расстояние определим формулой:

$$\rho(x,y)=\sum_{k=1}^{n}|x_k-y_k|.$$

5. Возьмем снова то же самое множество, что и в примерах 3 и 4, и определим расстояние между его элементами формулой:

$$\rho(x,y)=\max_{1\leq k\leq n}|x_k-y_k|.$$

6. Множество $C[a,b]$ всех непрерывных действительных функций, определенных на отрезке $[a,b]$, с расстоянием

$$\rho(f,g) = \max_{a \le t \le b} |g(t) - f(t)|$$

также образует метрическое пространство.

7. Обозначим через l_2 метрическое пространство, точками которого служат всевозможные последовательности $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ действительных чисел, удовлетворяющие условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty,$$

а расстояние определяется формулой:

$$\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (y_k - x_k)^2}.$$

8. Рассмотрим, как в примере 6, совокупность всех функций, непрерывных на отрезке $[a,b]$, но расстояние определим иначе, а именно, положим:

$$\rho(f,g) = \left(\int\limits_a^b \big(f(t) - g(t)\big)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

тогда полученное пространство — тоже метрическое пространство.

Непрерывные отображения метрических пространств

Пусть X и Y — два метрических пространства, и f — отображение пространства X в Y. Таким образом, каждому $x \in X$ ставится в соответствие некоторый элемент $y = f(x) \in Y$. Это отображение называется *непрерывным* в точке $x_0 \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $x \in X$, таких, что

$$\rho(x, x_0) < \delta,$$

выполнено неравенство:

$$\rho_1(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

(здесь ρ — расстояние в X, а ρ_1 — расстояние в Y.)

Если отображение f непрерывно во всех точках пространства X, то говорят, что f *непрерывно* на X.

Если X и Y — числовые множества, т.е. f — числовая функция, определенная на некотором подмножестве X числовой оси, то приведенное определение непрерывного отображения превращается в хорошо известное из элементарного анализа определение непрерывности функции.

Если отображение

$$f : X \to Y$$

взаимно однозначно, то существует обратное отображение

$$x = f^{-1}(y)$$

пространства Y на пространство X. Если отображение f взаимно однозначно и взаимно непрерывно, (т.е. f и f^{-1} — непрерывные отображения), то оно называется *гомеоморфным отображением* или *гомеоморфизмом*, а сами пространства X и Y, между которыми можно установить гомеоморфизм, называются *гомеоморфными* между собой.

Сходимость. Открытые и замкнутые множества

Открытым шаром $B(x_0, r)$ в метрическом пространстве R мы будем называть совокупность точек $x \in R$, удовлетворяющих условию

$$\rho(x, x_0) < r.$$

Точка x_0 называется *центром* этого шара, а число r — его *радиусом*.

Замкнутым шаром $B[x_0, r]$ мы назовем совокупность точек $x \in R$, удовлетворяющих условию

$$\rho(x, x_0) \leq r.$$

Открытый шар радиуса ε с центром x_0 мы будем называть также ε-*окрестностью* точки x_0 и обозначать символом $O_\varepsilon(x_0)$.

Множество $M \subset R$ называется *ограниченным*, если оно целиком содержится в некотором шаре.

Точка $x \in R$ называется *точкой прикосновения* множества $M \subset R$, если любая ее окрестность содержит хотя бы одну точку из M. Совокупность всех точек прикосновения множества M обозначается $[M]$ и называется *замыканием* этого множества.

Точка $x \in R$ называется *предельной точкой* множества $M \subset R$, если любая ее окрестность содержит бесконечно много точек из M.

Предельная точка может принадлежать, а может и не принадлежать M. Например, если M — множество рациональных чисел из отрезка $[0, 1]$, то каждая точка этого отрезка — предельная для M.

Точка x, принадлежащая M, называется *изолированной точкой* этого множества, если в достаточно малой ее окрестности $O_\varepsilon(x)$ нет точек из M, отличных от x.

Можно доказать, что *всякая точка прикосновения множества M есть либо предельная, либо изолированная точка этого множества.*

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — последовательность точек в метрическом пространстве R. Говорят, что эта последовательность *сходится к точке* x, если каждая окрестность $O_\varepsilon(x)$ точки x содержит все точки x_n, начиная с некоторой, т.е. если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число N_ε, что $O_\varepsilon(x)$ содержит все точки x_n, с $n > N_\varepsilon$. Точка x называется *пределом* последовательности $\{x_n\}$.

Это определение можно, очевидно, сформулировать еще и следующим образом: последовательность $\{x_n\}$ сходится к x, если

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x, x_n) = 0.$$

Непосредственно из определения предела вытекает, что

1) никакая последовательность не может иметь двух различных пределов

2) если последовательность $\{x_n\}$ сходится к точке x, то всякая ее подпоследовательность сходится к той же самой точке.

Множество M, лежащее в метрическом пространстве R, называется *замкнутым,* если оно совпадает со своим замыканием: $[M] = M$. Иначе говоря, множество называется замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки.

Примеры

1. Всякий отрезок $[a, b]$ числовой прямой есть замкнутое множество.

2. Замкнутый шар представляет собой замкнутое множество. В частности, в пространстве $C[a, b]$ множество функций f, удовлетворяющих условию $|f(t)| \leq K$, замкнуто.

3. Какого бы ни было метрическое пространство R, пустое множество $\emptyset$ и все R замкнуты.

4. Всякое множество, состоящее из конечного числа точек, замкнуто.

Основные свойства замкнутых множеств можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема. *Пересечение любого числа и сумма (объединение) любого конечного числа замкнутых множеств есть замкнутые множества.*

Точка x называется *внутренней точкой* множества M, если существует окрестность $O_\varepsilon(x)$ этой точки, целиком содержащаяся в M.

Множество, все точки которого внутренние, называется *открытым.*

Примеры

5. Интервал (a, b) числовой прямой есть открытое множество.

6. Открытый шар в любом метрическом пространстве есть открытое множество.

7. Множество непрерывных функций на $[a, b]$, удовлетворяющих условию $f(t) < g(t)$, где $g(t)$ — некоторая фиксированная непрерывная функция, представляет собой открытое подмножество пространства $C[a, b]$.

Теорема. *Для того чтобы множество M было открыто, необходимо и достаточно, чтобы его дополнение $R \backslash M$ до всего пространства R было замкнуто.*

Теорема. *Сумма любого (конечного или бесконечного) числа и пересечение любого конечного числа открытых множеств есть открытые множества.*

Структура открытых и замкнутых множеств в том или ином метрическом пространстве может быть весьма сложной, но на прямой исчерпывающее описание всех открытых множеств (а следовательно, и всех замкнутых) не представляет труда. Она дается следующей теоремой.

Теорема. *Всякое открытое множество на числовой прямой представляет собой сумму конечного или счетного числа попарно непересекающихся интервалов, имея в виду, что множества вида* $(-\infty, \infty)$, (a, ∞) *и* $(-\infty, b)$ *мы также включаем в число интервалов.*

Полные метрические пространства

Последовательность $\{x_n\}$ точек метрического пространства R мы будем называть *фундаментальной,* если она удовлетворяет критерию Коши, т.е. если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число N_ε, что

$$\rho(x_{n'}, x_{n''}) < \varepsilon$$

для всех $n' > N_\varepsilon, n'' > N_\varepsilon$.

Если в пространстве R любая фундаментальная последовательность сходится, то это пространство называется *полным.*

Теорема о вложенных шарах. *Для того чтобы метрическое пространство R было полным, необходимо и достаточно, чтобы в нем всякая последовательность вложенных друг в друга шаров, радиусы которых стремятся к нулю, имела непустое пересечение.*

Пусть A и B — два множества в метрическом пространстве R. Множество A называется *плотным* в B, если $[A] \supset B$.

В частности, множество A называется *всюду плотным* (в пространстве R), если его замыкание $[A]$ совпадает со всем пространством R.

Множество A называется *нигде не плотным,* если оно не плотно ни в одном шаре, т.е. если в каждом шаре $B \subset R$ содержится другой шар B', не имеющий с A ни одной общей точки.

В теории полных метрических пространств фундаментальную роль играет следующая теорема.

Теорема Бэра. *Полное метрическое пространство R не может быть представлено в виде объединения счетного числа нигде не плотных множеств.*

В частности, *всякое полное метрическое пространство без изолированных точек несчетно.*

Принцип сжимающих отображений

Ряд вопросов, связанных с существованием и единственностью решений уравнений того или иного типа (например, дифференциальных уравнений), можно сформулировать в виде вопроса о существовании и единственности неподвижной точки при некотором отображении соответствующего метрического пространства в себя.

Среди различных критериев существования и единственности неподвижной точки при такого рода отображениях один из простейших и в то же время наиболее важных — так называемый *принцип сжимающих отображений.*

Пусть R — метрическое пространство. Отображение A пространства R в себя называется *сжимающим отображением*, или короче — *сжатием*, если существует такое число $\alpha < 1$, что для любых двух точек $x, y \in R$ выполняется неравенство:

$$\rho(Ax, Ay) \leq \alpha\rho(x, y).$$

Из определений следует, что всякое сжимающее отображение непрерывно.

Точка x называется *неподвижной точкой* отображения A, если $Ax = x$. Иначе говоря, неподвижные точки — это решения уравнения $Ax = x$.

Теорема (Принцип сжимающих отображении). *Всякое сжимающие отображение, определенное в полном метрическом пространстве R, имеет одну и только одну неподвижную точку.*

Непрерывные отображения

Здесь мы рассмотрим отображения метрических пространств.

Определение. *Отображение f из метрического пространства (X, d_X) в метрическое пространство (Y, d_Y) называется непрерывным в точке $x \in X$, если для всякой последовательности x_n, сходящейся к x, последовательность $f(x_n)$ сходится к $f(x)$. Отображение f называется непрерывным, если оно непрерывно в каждой точке.*

Определение. *Пусть X — некоторое множество — пространство-носитель. Топологией в X называется любая система τ его подмножеств G, удовлетворяющая двум требованиям:*

***1.** Само множество X и пустое множество $\emptyset$ принадлежат τ.*

***2.** Сумма $\bigcup G_\alpha$ любого (конечного или бесконечного) и пересечение $\bigcap_{k=1}^{n} G_k$ любого конечного числа множеств из τ принадлежат τ.*

Множество X с заданной в нем топологией τ, т.е. пара (X, τ), называется топологическим пространством.

Множества, принадлежащие системе τ, называются открытыми.

Так же как метрическое пространство есть совокупность множества точек — «носителя» и введенной в этом множестве метрики, топологическое пространство есть совокупность множества точек и введенной в нем топологии. Таким образом, задать топологическое пространство — это значит задать некоторое множество X и задать в нем топологию τ, т.е. указать те подмножества, которые считаются в X открытыми.

Ясно, что в одном и том же множестве X можно вводить разные топологии, превращая его тем самым в различные топологические пространства. И все же топологическое пространство, т.е. пару (X, τ), мы будем обозначать одной буквой, скажем, T. Элементы топологического пространства мы будем называть точками.

Множества $T \setminus G$, дополнительные к открытым, называются замкнутыми множествами топологического пространства T. Из аксиом 1 и 2 в силу соотношений двойственности:
1. Пустое множество $\emptyset$ и все T замкнуты.
2. Пересечение любого (конечного или бесконечного) числа и сумма конечного числа замкнутых множеств замкнуты. На основе этих определений естественно вводятся во всяком топологическом пространстве понятия окрестности, точки прикосновения, замыкания множества и т.д.

Линейные пространства

Понятие линейного пространства относится к числу самых основных в математике.

Определение. *Непустое множество L элементов $x, y, z, \ldots$ называется линейным, или векторным, пространством, если оно удовлетворяет следующим условиям:*

1. *Для любых двух элементов $x, y \in L$ однозначно определен третий элемент $z \in L$, называемый их суммой и обозначаемый $+$, причем*

1) $x + y = y + x$ *(коммутативность),*

2) $(x + y) + z = x + (y + z)$ *(ассоциативность),*

3) *в L существует такой элемент 0, что $x + 0 = x$ для всех $x \in L$ (существование нуля),*

4) *для каждого $x \in L$ существует такой элемент $-x$, что $x + (-x) = 0$ (существование противоположного элемента).*

2. *Для любого числа α и любого элемента $x \in L$ определен элемент $\alpha x \in L$ (произведение элемента на число α), причем*

1) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$,

2) $1x = x$,

3) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$,

4) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

В зависимости от того, какой запас чисел (все комплексные или только действительные) используется, различают комплексные и действительные линейные пространства.

Примеры

1. Прямая линия $\mathbb{R}^1$, т. е. совокупность действительных чисел, с обычными арифметическими операциями сложения и умножения, представляет собой линейное пространство.

2. Совокупность всевозможных систем n действительных чисел $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, где сложение и умножение на число определяются формулами:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots x_n + y_n),$$

также является линейным пространством. Оно называется действительным n-мерным арифметическим пространством и обозначается символом $\mathbb{R}^n$.

3. Непрерывные (действительные или комплексные) функции на некотором отрезке $[a, b]$ с обычными операциями сложения функций и умножения их на числа образуют линейное пространство $C[a, b]$.

4. Пространство l_2, в котором элементами служат последовательности действительных чисел $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$, удовлетворяющие условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty,$$

с операциями

$$(x_1, \dots, x_n, \dots) + (y_1, \dots, y_n, \dots) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n, \dots)$$

$$\alpha(x_1, \dots, x_n, \dots) = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n, \dots),$$

является линейным пространством.

Определение. *Линейные пространства L и L^* называются изоморфными, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие, которое согласовано с операциями в L и L^*.* Это означает, что из

$$x \longleftrightarrow x^*$$
$$y \longleftrightarrow y^*$$
$$x, y \in L,\ x^*, y^* \in L^* \text{ следует}$$
$$x + y \longleftrightarrow x^* + y^*$$

и

$$\alpha x \longleftrightarrow \alpha x^*$$

($\alpha \in \mathbb{R}$ — произвольное число).

Изоморфные пространства можно рассматривать как различные реализации одного и того же пространства. Примерами изоморфных линейных пространств могут служить арифметическое n-мерное действительное пространство и пространство всех многочленов степени $\leq n-1$ с действительными коэффициентами с обычными операциями сложения многочленов и умножения их на числа.

Линейная зависимость

Элементы $x_1, x_2, \ldots, x_n$, линейного пространства L называются линейно зависимыми, если существуют такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, одновременно не все равные 0, что

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0.$$

В противном случае эти элементы называются линейно независимыми.

Иначе говоря, элементы $x_1, x_2, \ldots, x_n$, линейно независимы, если из равенства

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$$

вытекает, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Бесконечная система элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ *пространства* L *называется линейно независимой, если любая ее конечная подсистема линейно независима.*

Если в пространстве L можно найти n линейно независимых элементов, а любые $n+1$ элементов этого пространства линейно зависимы, то говорят, что пространство L имеет размерность n. Если же в L можно указать систему из произвольного конечного числа линейно независимых элементов, то говорят, что пространство L бесконечномерно.

Базисом в n*-мерном пространстве* L *называется любая система из* n *линейно независимых элементов.*

Пространство $\mathbb{R}^n$ имеет размерность n, оправдывая тем самым свое название.

Линейные функционалы

Числовую функцию f, определенную на некотором линейном пространстве L, мы будем называть *функционалом.* Функционал f называется *аддитивным,* если

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

для всех $x, y \in L$; он называется *однородным,* если

$$f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

(λ – произвольное число).

Аддитивный однородный функционал называется линейным функционалом.

Примеры

1. Пусть $\mathbb{R}^n$ есть n-мерное арифметическое пространство с элементами $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ – произвольный набор из n фиксированных чисел. Тогда

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

– линейный функционал в $\mathbb{R}^n$.

2. Интеграл

$$I[x] = \int\limits_a^b x(t)dt$$

представляет собой соответственно линейный функционал в пространстве $C[a,b]$.

3. Пусть y_0 – некоторая фиксированная непрерывная функция на $[a,b]$. Положим для любой функции $x \in C[a,b]$

$$F(x) = \int\limits_a^b x(t)y_0(t)dt.$$

Линейность этого функционала следует из основных свойств операции интегрирования.

4. Рассмотрим в том же самом пространстве $C[a,b]$ линейный функционал другого типа, а именно, положим

$$\delta_{t_0}(x) = x(t_0),$$

так что значение функционала $\delta_{t_0}(x)$ на функции x равно значению этой функции в фиксированной точке t_0.

Этот функционал обычно записывают в виде:

$$\delta_{t_0(x)} = \int\limits_a^b x(t)\delta(t-t_0)dt,$$

понимая под δ «функцию», которая равна нулю всюду, кроме точки $t=0$, и интеграл от которой равен единице δ-функция Дирака.

Выпуклые множества и выпуклые тела

Пусть L — некоторое линейное действительное пространство и x, y — две его точки. Назовем замкнутым отрезком в L, соединяющим точки x, y, совокупность всех элементов вида

$$\alpha x + \beta y, \text{ где } \alpha + \beta = 1, \ \alpha, \beta > 0.$$

Отрезок без концевых точек x, y называется открытым отрезком.

Множество $M \in L$ называется выпуклым, если оно вместе с любыми двумя точками x, y содержит и соединяющий их отрезок.

Ядром $J(E)$ произвольного множества $E \in L$ называется совокупность таких его точек x, что для каждого $y \in L$ найдется такое число $\epsilon = \epsilon(y) > 0$, что $x + ty \in L$ при $|t| < \epsilon$. Выпуклое множество, ядро которого не пусто, называется выпуклым телом.

Примеры

1. В трехмерном евклидовом пространстве куб, шар, тетраэдр, полупространство представляют собой выпуклые тела. Отрезок, плоскость, треугольник в том же пространстве — выпуклые множества, но не выпуклые тела.

2. Рассмотрим в пространстве непрерывных функций на отрезке $[a, b]$ множество функций, удовлетворяющих условию

$$|f(t)| \leq 1.$$

Тогда нетрудно можно доказать, что это множество выпукло.

3. Единичный шар в l_2 т.е. совокупность таких точек $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$, что $\sum x_n^2 \leq 1$, есть выпуклое тело. Его ядро состоит из точек x удовлетворяющих условию $\sum x_n^2 < 1$.

Заметим, что совокупность точек $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ из l_2 удовлетворяющих условию $\sum n^2 x_n^2 < 1$ — выпуклое множество, но не выпуклое тело.

Установим важное свойство выпуклых множеств.

Теорема. *Пересечение любого числа выпуклых множеств есть выпуклое множество.*

Однородно-выпуклые функционалы

Пусть L — действительное линейное пространство.

Определенный на L функционал p называется выпуклым, если

$$p(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha p(x) + (1-\alpha)p(y)$$

для всех $x, y \in L$ и $0 \leq \alpha \leq 1$.

Функционал p называется положительно-однородным, если

$$p(\alpha x) = \alpha p(x) \text{ для всех } x \in L \text{ и всех } \alpha > 0.$$

Для выпуклого положительно-однородного функционала выполнено неравенство:

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y).$$

Положительно-однородный выпуклый функционал мы будем называть короче — однородно-выпуклым.

Укажем некоторые простейшие свойства однородно-выпуклых функционалов.

1. $p(0) = 0$.

2. Ненулевой однородно-выпуклый функционал неотрицателен.

3. При любом α

$$p(\alpha x) \leq \alpha p(x).$$

Примеры

1. Всякий линейный функционал является, очевидно, однородно-выпуклым. Однородно-выпуклым будет и функционал $p(x) = |f(x)|$, если f линеен.

2. Длина вектора в n-мерном евклидовом пространстве есть однородно-выпуклый функционал.

3. Пусть M — пространство ограниченных последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$. Функционал

$$p(x) = \sup_n x_n$$

однородно-выпуклый.

Функционал Минковского

Пусть L — произвольное линейное пространство и A — выпуклое тело в L, ядро которого содержит точку 0. Функционал

$$p_A(x) = inf\left\{r : \frac{x}{r} \in A, r > 0\right\}$$

называется функционалом Минковского выпуклого тела A.

Теорема. *Функционал Минковского — однородно-выпуклый и неотрицательный. Обратно, если $p(x)$ — произвольный однородно-выпуклый неотрицательный функционал на линейном пространстве L и k — положительное число, то*

$$A = \{x : p(x) \leq k\}$$

есть выпуклое тело, ядром которого служит множество $x : p(x) < k$ (содержащее точку 0.) Если $k = 1$, то исходный функционал $p(x)$ есть функционал Минковского.

Теорема Хана–Банаха

Пусть L — действительное линейное пространство и L_0 — некоторое его подпространство. Пусть на подпространстве L_0 задан некоторый линейный функционал f_0. Линейный функционал f, определенный на всем пространстве L, называется продолжением функционала f_0, если

$$f(x) = f_0(x) \text{ для всех } x \in L_0.$$

Задача о продолжении линейного функционала часто встречается в анализе. Основную роль во всем этом круге вопросов играет следующая теорема.

Теорема (Хана–Банаха). *Пусть p — однородно-выпуклый функционал, определенный на действительном линейном пространстве L, и пусть L_0 — линейное подпространство в L. Если f_0 — линейный функционал на L_0, подчиненный на L_0 функционалу $p(x)$, т.е. если на L_0*

$$f_0(x) \leq p(x),$$

то f_0 может быть продолжен до линейного функционала f на L, подчиненного $p(x)$ на всем L.

Нормированные пространства

Определение. *Пусть L — линейное пространство. Однородно-выпуклый функционал p, определенный на L, называется нормой, если он удовлетворяет следующим дополнительным условиям (помимо выпуклости):*

1) $p(x) = 0$ только при $x = 0$,

2) $p(\alpha x) = |\alpha|\, p(x)$ для всех α.

Таким образом, мы можем сказать, что *нормой в L называется функционал, удовлетворяющий следующим трем условиям:*

1) $p(x) \geq 0$, причем $p(x) = 0$ только при $x = 0$,

2) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$. $x, y \in L$,

3) $p(\alpha x) = |\alpha|\, p(x)$, каково бы ни было число α.

Определение. *Линейное пространство L, в котором задана некоторая норма, мы назовем нормированным пространством. Норму элемента $x \in L$ мы будем обозначать символом $\|x\|$.*

Всякое нормированное пространство становится метрическим пространством, если ввести в нем расстояние:

$$\rho(x, y) = \|x - y\|.$$

Справедливость аксиом метрического пространства тотчас же вытекает из свойств нормы. На нормированные пространства переносятся, таким образом, все понятия и факты для метрических пространств.

Полное нормированное пространство называется банаховым пространством или короче B-пространством.

Примеры

1. Прямая линия $\mathbb{R}^1$ становится нормированным пространством, если для всякого числа $x \in \mathbb{R}^1$ положить $\|x\| = |x|$.

2. Если в действительном n-мерном пространстве $\mathbb{R}^n$ с элементами $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ положить

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2},$$

то все аксиомы нормы будут выполнены. Формула

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}$$

определяет в $\mathbb{R}^n$ ту самую метрику, которую мы в этом пространстве уже рассматривали.

В этом же линейном пространстве можно ввести норму

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$

или норму

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \le k \le n} |x_k|\,.$$

3. В пространстве $C[a, b]$ непрерывных функций на отрезке $C[a, b]$ определим норму формулой:

$$\|f\| = \max_{a \le t \le b} |f(t)|\,.$$

4. Пусть m — пространство ограниченных числовых последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ Положим

$$\|x\| = \sup_n |x_n| .$$

Евклидовы пространства

Определение евклидовых пространств. Один из хорошо известных способов введения нормы в линейном пространстве — это задание в нем скалярного произведения. Скалярным произведением в действительном линейном пространстве L называется действительная функция (x, y), определенная для каждой пары элементов $x, y \in L$ и удовлетворяющая следующим условиям:

1) $(x, y) = (y, x)$,
2) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$,
3) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$,
4) $(x, x) \geq 0$ причем $(x, x) = 0$ только при $x = 0$.

Линейное пространство с фиксированным в нем скалярным произведением называется *евклидовым пространством.* В евклидовом пространстве L вводится норма с помощью формулы

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}.$$

Выполнение аксиом 1) и 3) нормы очевидно, а выполнение аксиомы 2) (неравенство треугольника) вытекает из неравенства *Коши–Буняковского:*

$$|(x, y)| \leq \|x\| \, \|y\| .$$

В евклидовом пространстве сумма, произведение на число и скалярное произведение непрерывны, т.е. если $x_n \to x$, $y_n \to y$ (в смысле сходимости по норме), $\lambda_n \to \lambda$ (как числовая последовательность), то

$$x_n + y_n \to x + y,$$

$$\lambda_n x_n \to \lambda x,$$

$$(x_n, y_n) \to (x, y).$$

Наличие в L скалярного произведения позволяет ввести в этом пространстве не только норму (т.е. длину) вектора, но и угол между векторами; именно угол φ между векторами x и y определяется формулой:

$$\cos\varphi = \frac{(x, y)}{\|x\| \, \|y\|}.$$

Если $(x, y) = 0$, то $\varphi = \pi/2$; в этом случае векторы x и y называются *ортогональными.*

Определение. *Система ненулевых векторов* $\{x_\alpha\}$ *из* $\mathbb{R}$ *называется ортогональной, если*

$$(x_\alpha, x_\beta) = 0 \text{ при } \alpha \neq \beta.$$

Заметим, что если векторы $\{x_\alpha\}$ ортогональны, то они линейно независимы.

Если ортогональная система $\{x_\alpha\}$ полна (т.е. наименьшее содержащее ее замкнутое подпространство есть все L), то она называется ортогональным базисом. Если при этом норма каждого элемента равна 1, то система x_α называется ортогональным нормированным базисом. Вообще, если система x_α (полная или нет) такова, что

$$(x_\alpha, x_\beta) = \begin{cases} 0, & \text{при } \alpha \neq \beta \\ 1, & \text{при } \alpha = \beta \end{cases},$$

то она называется ортогональной нормированной (или ортонормальной) системой. Ясно, что если $\{x_\alpha\}$ — ортогональная система, то $\left\{\frac{x_\alpha}{\|x_\alpha\|}\right\}$ — ортогональная нормированная система.

Примеры

1. n-мерное арифметическое пространство $\mathbb{R}^n$, элементами которого служат системы действительных чисел $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с обычными операциями сложения и умножения и скалярным произведением

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

представляет собой хорошо известный пример евклидова пространства. Ортогональный нормированный базис в нем (один из бесконечного числа возможных) образуют векторы:

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0),$$

$$e_2 = (0, 1, \ldots, 0),$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$e_n = (0, 0, \ldots, 1).$$

2. Пространство l_2 с элементами $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, где

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty,$$

и скалярным произведением

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$$

есть евклидово пространство.

Простейший ортогональный нормированный базис в l_2 образуют векторы:

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots),$$

$$e_2 = (0, 1, 0, \ldots),$$

$$e_3 = (0, 0, 1, \ldots),$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

3. Пространство $C[a,b]$, состоящее из непрерывных на $[a,b]$ действительных функций, со скалярным произведением

$$(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)dx$$

также является евклидовым. Среди различных ортогональных базисов, которые можно указать в нем, важнейшим является тригонометрическая система, состоящая из функций

$$\frac{1}{2},\cos\left(n\frac{2\pi x}{b-a}\right),\sin\left(n\frac{2\pi x}{b-a}\right),\ (n=1,2,\dots).$$

В каждом из приведенных выше примеров евклидовых пространств мы указали по ортогональному базису. Рассмотрим следующую общую теорему, аналогичную теореме о существовании ортогонального базиса в n-мерном евклидовом пространстве.

Теорема (об ортогонализации). *Пусть*

$$f_1,f_2,\dots,f_n,\dots$$

—линейно независимая система элементов в евклидовом пространстве L. Тогда в L существует система элементов

$$\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_n,\dots,$$

удовлетворяющая следующим условиям:

1) система $\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_n,\dots,$ ортогональная и нормированная;

2) каждый элемент φ_n есть линейная комбинация элементов $f_1,f_2,\dots,f_n$:

$$\varphi_n=a_{n1}f_1+a_{n2}f_2,+\dots+a_{nn}f_n,$$

причем $a_{nn}\neq 0$,

3) каждый элемент f_n представляется в виде:

$$f_n = b_{n1}\varphi_1 + b_{n2}\varphi_2 + \cdots + b_{nn}\varphi_n$$

причем $b_{nn} \neq 0$.

Каждый элемент системы $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$, определяется условиями 1)—3) однозначно с точностью до множителя ± 1.

Неравенство Бесселя

Пусть

$$\varphi_1, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \ldots$$

— ортогональная нормированная система в евклидовом пространстве E и f — произвольный элемент из E. Сопоставим элементу $f \in E$ последовательности чисел

$$c_k = (f, \varphi_k),\ k = 1, 2, \cdots,$$

которые мы будем называть координатами, или коэффициентами Фурье элемента f по системе φ_k и ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k,$$

который мы назовем рядом Фурье элемента f по системе φ_k.

Естественно, возникает вопрос: сходится ли этот ряд, и если он сходится, то совпадает ли его сумма с исходным элементом f? Можно доказать, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leq \|f\|^2.$$

Это неравенство называется *неравенством Бесселя.*

Определение. *Ортогональная нормированная система*

$$\varphi_1, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \ldots$$

называется замкнутой, если для любого $f \in E$ справедливо равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \|f\|^2,$$

называемое равенством Парсеваля.

Можно заметит, что замкнутость системы

$$\varphi_1, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \ldots$$

равносильна тому, что для каждого $f \in E$ частичные суммы ряда Фурье $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k$, сходятся к f.

Теорема. *В сепарабельном евклидовом пространстве E всякая полная ортогональная нормированная система является замкнутой, и обратно.*

Гильбертово пространство

Определение. *Полное евклидово пространство бесконечного числа измерений называется гильбертовым пространством.*

Таким образом, гильбертовым пространством называется совокупность H элементов $f, g, \ldots$ произвольной природы, удовлетворяющая следующим аксиомам.

1. H есть евклидово пространство (т.е. линейное пространство с заданным в нем скалярным произведением).

2. Пространство H полно в смысле метрики

$$\rho(f, g) = \|f - g\|.$$

3. Пространство H бесконечномерно, т.е. в нем для любого n можно найти n линейно независимых элементов.

4. H сепарабельно, т.е. в нем существует счетное всюду плотное множество.

Примером сепарабельного гильбертова пространства может служить действительное пространство l_2.

Определение. *Два евклидовых пространства, L и L^*, называются изоморфными, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие так, что если*

$$x \leftrightarrow x^*, \; y \leftrightarrow y^*, x, y \in L, \; x^*, y^* \in L^*,$$

то

$$x + y \leftrightarrow x^* + y^*$$

$$\alpha x \leftrightarrow \alpha x^*$$

и

$$(x, y) \leftrightarrow (x^*, y^*).$$

Иначе говоря, изоморфизм евклидовых пространств — это взаимно однозначное соответствие, сохраняющее как линейные операции, определенные в этих пространствах, так и скалярное произведение. Известно, любые два n-мерных евклидовых пространства изоморфны между собой и, следовательно, каждое такое пространство изоморфно арифметическому пространству $\mathbb{R}^n$. Евклидовы пространства бесконечного числа измерений не обязательно изоморфны друг другу. Например, пространства l_2 и $C_2[a, b]$ между собой не изоморфны. Это видно, например, из того, что первое из них полно, а второе — нет. Однако имеет место следующий факт.

Теорема. *Любые два сепарабельных гильбертовых пространства изоморфны между собой.*

Эта теорема означает, что с точностью до изоморфизма существует лишь одно (сепарабельное) гильбертово пространство (т.е. система аксиом 1-4 полна) и что пространство l_2 можно рассматривать как его «координатную реализацию», подобно тому как n-мерное арифметическое пространство со скалярным произведением

$$(x,y)=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

представляет собой координатную реализацию евклидова пространства n измерений, заданного аксиоматически.

Рассмотрим следующий вопрос. Пусть L — нормированное пространство. Каким дополнительным условиям должна удовлетворять норма, определенная в L, чтобы пространство L было евклидовым, т.е. чтобы норма в нем определялась некоторым скалярным произведением? Иначе говоря, как охарактеризовать евклидовы пространства в классе всех нормированных пространств? Такую характеристику дает следующая теорема.

Теорема. *Для того чтобы нормированное пространство L было евклидовым, необходимо и достаточно, чтобы для любых двух элементов, f и g, выполнялось равенство:*

$$\|f+g\|^2+\|f-g\|^2=2(\|f\|^2+\|g\|^2).$$

Примеры

Рассмотрим n-мерное пространство $\mathbb{R}_p^n$, в котором норма определена формулой:

$$\|x\|_p=\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

При $p \geq 1$ все аксиомы нормы выполнены, однако евклидовым пространством $\mathbb{R}_p^n$ будет только при $p=2$.

Заметим, что и пространство $C[a,b]$ непрерывных функций на любом отрезке $[a,b]$ не есть евклидово пространство.

Комплексные евклидовы пространства

Наряду с действительным может быть введено и комплексное евклидово пространство (т.е. комплексное линейное пространство со скалярным произведением в нем). В комплексном пространстве скалярное произведение мы определим как числовую (комплекснозначную) функцию двух векторов, удовлетворяющую следующим условиям:

1) $(x, y) = \overline{(y, x)}$,
2) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$,
3) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$,
4) $(x, x) \geq 0$, причем $(x, x) = 0$ только при $x = 0$.

Хорошо известный пример комплексного евклидова пространства n измерений — это линейное пространство $\mathbb{C}^n$, в котором скалярное произведение элементов

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ и } y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

определяется формулой:

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{(y_k)}.$$

Известно что, всякое комплексное евклидово пространство размерности n изоморфно этому пространству.

Примеры

1) Комплексное пространство l_2, в котором элементы — это последовательности комплексных чисел
$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ удовлетворяющие условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty,$$

а скалярное произведение определяется формулой

$$(x, y) \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}.$$

2) Пространство $C_2[a,b]$ комплекснозначных непрерывных функций на отрезке $[a,b]$ со скалярным произведением

$$(f,g)=\int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt.$$

В комплексном евклидовом пространстве длина (норма) вектора определяется, как и в действительном случае, формулой:

$$\|x\|=\sqrt{(x,x)}.$$

Понятие угла между векторами в комплексном случае обычно не вводят, поскольку величина $\frac{(x,y)}{\|x\|\cdot\|y\|}$, строго говоря, комплексное число и может не быть косинусом какого-либо действительного угла; однако понятие ортогональности сохраняется: элементы x и y называются взаимно ортогональными, если $(x,y)=0$.

Если φ_n — какая-либо ортогональная система в комплексном евклидовом пространстве R и f — произвольный элемент из R то, как и в действительном случае, числа

$$a_n=\frac{1}{\|\varphi_n\|^2}(f,\varphi_n)$$

называются *коэффициентами Фурье,* а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\varphi_n$$

— рядом Фурье элемента f по ортогональной системе φ_n.

Имеет место неравенство Бесселя:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|\varphi_n\|^2\,|a_n|^2\le(f,f).$$

В частности, если система φ_n ортогональна и нормирована, то коэффициенты Фурье по такой системе определяются формулами:

$$c_n=(f,\varphi_n),$$

а неравенство Бесселя имеет вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \leq (f, f).$$

Полное комплексное евклидово пространство бесконечной размерности называется комплексным гильбертовым пространством. На комплексный случай переносится теорема об изоморфизме — гильбертовых пространств.

Теорема. *Все сепарабельные комплексные гильбертовы пространства изоморфны между собой.*

Простейшей реализацией комплексного гильбертова пространства является комплексное пространство l_2.

Топологические линейные пространства

Определение. *Множество E называется топологическим линейным пространством, если:*

1. E представляет собой линейное пространство (с умножением элементов на действительные или комплексные числа).

2. E является топологическим пространством.

3. Операции сложения и умножения на числа в E непрерывны относительно заданной в E топологии.

Последнее условие означает следующее:

1) если $z_0 = x_0 + y_0$, то для каждой окрестности U точки z_0 можно указать такие окрестности V и W точек x_0 и y_0 соответственно, что $x + y \in U$ при $x \in V,\ y \in W$;

2) если $\alpha_0 x_0 = y_0$, то для любой окрестности U точки y_0 существуют такая окрестность V точки x_0 и такое число $\varepsilon > 0$, что $\alpha x \in U$ при $|\alpha - \alpha_0| < \varepsilon$ и $x \in V$.

Из связи, существующей в линейном топологическом пространстве между алгебраическими операциями и топологией, следует, что топология в таком пространстве полностью определяется заданием системы окрестностей нуля. Действительно, пусть x — точка линейного топологического пространства

E, и U — некоторая окрестность нуля в E. Тогда $U + x$ — «сдвиг» этой окрестности на x — есть окрестность точки x; очевидно, что любая окрестность любой точки $x \in E$ может быть получена таким способом.

Из непрерывности операций сложения и умножения на числа в топологическом линейном пространстве E непосредственно вытекают следующие утверждения.

1. *Если U, V, — открытые множества в E, то и множество $U + V$ (т.е. совокупность всех элементов вида $x + y$, $x \in U$, $y \in V$,) открыто.*

2. *Если U открыто, то и множество λU (т.е. совокупность всех элементов вида λx, $x \in U$) при любом $\lambda \neq 0$ открыто.*

3. *Если F замкнутое множество в E, то и λF замкнуто при любом λ.*

Примеры

1. К топологическим линейным пространствам относятся прежде всего все нормированные пространства. Действительно, из свойств нормы сразу следует, что операции сложения векторов и умножения их на числа в нормированном пространстве непрерывны в той топологии, которая определяется нормой.

2. Пусть $C^\infty[a, b]$ — пространство бесконечно дифференцируемых функций на отрезке a, b. Топологию в $C^\infty[a, b]$ определим с помощью следующей системы окрестностей нуля. Каждая такая окрестность $U_{m,\varepsilon}$ определяется номером m и числом $\varepsilon > 0$ и состоит из всех функций φ, удовлетворяющих неравенствам

$$\left|\varphi^{(k)}(x) < \varepsilon\right|, \ k = 0, 1, \ldots, m,$$

где $\varphi^{(k)}$ — производная k-го порядка от функции φ.

Тот факт, что в топологическом линейном пространстве топология связана с линейными операциями, определенными в нем, накладывает на его топологию довольно жесткие ограничения. Именно в топологическом линейном пространстве E точка x и не содержащее ее замкнутое множество имеют непересекающиеся окрестности.

В нормированных пространствах важную роль играет понятие ограниченного множества.

Определение. *Множество M, лежащее в топологическом линейном пространстве E, называется ограниченным, если для каждой окрестности нуля U существует такое $n > 0$, что $M \subset \lambda U$ при всех $|\lambda| \geq n$.*

Для нормированных пространств это понятие ограниченности совпадает с ограниченностью по норме (т.е. с возможностью поместить данное множество внутрь некоторого шара $\|x\| \leq R$.)

Определение. *Пространство E называется локально ограниченным, если в нем существует хотя бы одно непустое открытое ограниченное множество.*

Всякое нормированное пространство локально ограничено.

Непрерывные линейные функционалы

Определение. *Функционал f, определенный на пространстве E, называется непрерывным, если для всякого $x_0 \in E$ и всякого $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность U элемента x_0, что*

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \text{ для всех } x \in U.$$

Это определение относится, в частности, и к линейным функционалам.

Если E — конечномерное топологическое линейное пространство, то всякий линейный функционал на E автоматически непрерывен. В общем случае из линейности функционала его непрерывность не вытекает. Заметим, что *если линейный* *функционал f непрерывен в какой-либо одной точке $x \in E$, то он непрерывен и всюду на E.*

Таким образом, проверять непрерывность линейного функционала достаточно в одной точке, например в точке 0.

Теорема. *Для того чтобы линейный функционал f был непрерывен на E, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая окрестность нуля в E, на которой функционал f ограничен.*

Пусть рассматриваемое пространство E нормировано. Тогда всякий непрерывный линейный функционал f ограничен в некоторой окрестности нуля. Но в нормированном пространстве всякая окрестность нуля содержит шар, и, значит, f ограничен на некотором шаре. В силу линейности функционала это равносильно его ограниченности на любом шаре, в частности, на единичном $\|x\| \leq 1$. Обратно, из ограниченности функционала f на единичном шаре следует его непрерывность.

Поэтому *в нормированном пространстве линейный функционал непрерывен в том и только том случае, когда его значения на единичном шаре ограничены в совокупности.*

Пусть f — непрерывный линейный функционал в нормированном пространстве E. Число

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)|,$$

т.е. точную верхнюю грань значений $|f(x)|$ на единичном шаре пространства E, мы назовем *нормой функционала* f. Отметим следующие свойства $\|f\|$:

1.

$$\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|}.$$

2. Для любого $x \in E$

$$|f(x)| \leq \|f\| \, \|x\|.$$

Рассмотрим примеры линейных функционалов в нормированных пространствах.

1. Пусть $\mathbb{R}^n$ есть n-мерное евклидово пространство и $\mathbf{a}$ – какой-либо фиксированный вектор в нем. Скалярное произведение

$$f(x) = (x, \mathbf{a}),$$

где x пробегает все $\mathbb{R}^n$, представляет собой линейный функционал на $\mathbb{R}^n$ и $\|f\| = \|\mathbf{a}\|$.

2. Интеграл

$$I(x) = \int_a^b x(t)dt,$$

где $x(t)$ — непрерывная функция на $[a, b]$, представляет собой линейный функционал в пространстве $C[a, b]$. Этот функционал ограничен, а его норма равна $b - a$.

3. Пусть $y_0(t)$ — фиксированная непрерывная функция на $[a, b]$. Положим для любой функции $x(t) \in C[a, b]$

$$F(x) = \int_a^b x(t)y_0(t)dt.$$

Этот функционал линеен. Он ограничен и его норма:

$$\|F\| = \int_a^b |y_0(t)|\, dt.$$

4. Рассмотрим в пространстве $C[a, b]$ линейный функционал

$$\delta_{t_0}(x) = x(t_0).$$

Его значение на функции $x(t)$ определяется как значение $x(t)$ в данной точке t_0. Ясно, что

$$|x(t_0)| \leq \|x\|,$$

причем для $x = const$ имеет место равенство. Отсюда сразу следует, что норма функционала равна 1.

5. В любом евклидовом пространстве X можно определить линейный функционал так же, как и в $\mathbb{R}^n$, выбрав некоторый фиксированный элемент $a \in X$, положив для любого $x \in X$

$$F(x) = (x, a).$$

Легко проверить, что при этом

$$\|F\| = \|x\|\,.$$

Мера Лебега на $\mathbb{R}$

Начнем с обобщения известных из средней школы понятий площади и объема. Первое, что приходит в голову — построить отображение, которое каждому ограниченному подмножеству в $\mathbb{R}^n$ ставит в соответствие некоторое неотрицательное число (его n-мерный объем), причем объемы ограниченных множеств конечны, объемы конгруэнтных множеств совпадают, а объем объединения конечного числа попарно непересекающихся множеств равен сумме их объемов. К сожалению, так не выходит (например, при $n \geq 3$ такого отображения не существует); разумная теория получается, если не требовать, чтобы объем был определен на всех (хотя бы и ограниченных) подмножествах, но зато потребовать аддитивности относительно счетных объединений.

Определение. *Пусть X — произвольное множество. Булевой подалгеброй в 2^X называется семейство $\mathfrak{B}$, обладающее следующими свойствами:*

1. $\emptyset \in \mathfrak{B}$, $X \in \mathfrak{B}$.

2. *Если $A, B \in \mathfrak{B}$, то $A \bigcup B$, $A \bigcap B$ и $A \setminus B$ также лежат в $\mathfrak{B}$.*

Булева подалгебра $\mathfrak{E} \subset 2^X$ называется σ-алгеброй, если она обладает следующим свойством:

3. *Если все множества из счетного семейства $A_1, A_2, \ldots, A_n \ldots$ лежат в $\mathfrak{E}$, то их пересечение $\bigcap_n A_n$ и объединение $\bigcup_n A_n$ также лежат $\mathfrak{E}$.*

Ввиду законов де Моргана в определении σ-алгебры достаточно потребовать замкнутости только относительно счетных объединений (или только счетных пересечений).

Определение. *Пусть X — топологическое пространство. Тогда σ-алгеброй борелевских множеств называется наименьшая σ-алгебра, содержащая все открытые множества (или, что равносильно, все замкнутые множества). Подмножество в X называется борелевским, если оно является элементом этой σ-алгебры.*

Определение. *Пространство с мерой — это тройка $(X, \mathbf{\Omega}, \mu)$, где X — множество, $\mathbf{\Omega} \subset 2^X$ — σ-алгебра и μ — отображение, удовлетворяющее следующим условиям.*

1. *Если $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ — счетное семейство попарно непересекающихся элементов из $\mathbf{\Omega}$, то*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

2. *Для хотя бы одного $A \in \mathbf{\Omega}$ имеем $\mu(A) < \infty$.*

Элементы σ-алгебры $\mathbf{\Omega}$ называются *измеримыми множествами,* а функция μ — *мерой;* число $\mu(A)$ называется *мерой множества A.*

Свойство (1) называется *счетной аддитивностью.*

Отметим сразу же несколько следствий этого определения.

Во-первых, если $A \neq \emptyset$ и $\mu(A) < \infty$ то, $\mu(\emptyset) = 0$; «конечная аддитивность»:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i).$$

Если A_i попарно непересекающихся множества. Из конечной аддитивности следует, что $\mu(A) \leq \mu(B)$. Если $A \subset B$, а также что $\mu(A \bigcup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$.

Теорема. *Если* $A_1 \subset A_2 \cdots \subset A_n \subset \dots$ *измеримые множества, то*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i),$$

или если $A_1 \supset A_2 \cdots \supset A_n \supset \dots$, *и* $\mu(A_1) < \infty$, *то*

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i).$$

Примеры

1. Пусть X — произвольное множество. Объявим все подмножества в X измеримыми и положим для $A \subset X$, его меру $\mu(A)$, равной количеству элементов в A (если A бесконечно, то $\mu(A) = \infty$.)

2. Если $(X, \mathbf{\Omega}, \mu)$ — пространство с мерой и $E \subset \mathbf{\Omega}$, то ограничение μ на семейство измеримых множеств, содержащихся в E, задает меру на E.

Заметим, что всякое открытое множество $U \subset \mathbb{R}$ единственным образом представляется в виде объединения не более чем счетного семейства попарно непересекающихся интервалов (они называются *составляющими интервалами множества* U). Определим для открытого множества $U \subset \mathbb{R}$ его меру $\mu(U)$ как сумму длин составляющих интервалов (длину бесконечного интервала полагаем равной бесконечности).

Определение. *Внешней мерой подмножества* $E \subset \mathbb{R}$ *называется число*

$$\mu(E) = \inf_{U \supset E} \mu(U),\ U \text{ открыто.}$$

Из этого определения очевидно, что внешняя мера любого интервала (вне зависимости от того, какие из концов в него включены) равна его длине. Ясно также, что $\mu(E) \leq \mu(F)$, как только $E \subset F$.

Отметим несколько свойств внешной меры:

1. Если $U_1, U_2, U_3, \ldots$ — открытые подмножества в $\mathbb{R}$ и $U = \bigcup U_i$, то

$$\mu(U) \le \sum \mu(U_i).$$

Если при этом U_i попарно не пересекаются, то

$$\mu(U) = \sum \mu(U_i).$$

2. Для конечного или счетного семейства произвольных подмножеств $E_1, E_2, \dots \in \mathbb{R}$ имеем:

$$\mu\left(\bigcup E_i\right) \le \sum \mu(E_i).$$

3. Если $A \supset B$, то

$$\mu(A) - \mu(A \setminus B) \le \mu(B).$$

4. Если $K_1, K_2, \ldots, K_n \in \mathbb{R}$ — попарно непересекающиеся компактные подмножества, то

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} K_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(K_i).$$

Определение. *Ограниченное подмножество $E \subset \mathbb{R}$ называется измеримым по Лебегу или просто «измеримым», если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое компактное подмножество $K \subset \mathbb{R}$,* что

$$\mu(E) \le \mu(K) + \varepsilon.$$

Заметим, что всякое компактное подмножество в $\mathbb{R}$ автоматически является измеримым. Очевидно, также измерим и всякий ограниченный интервал. Так как всякое открытое множество является объединением не более чем счетного семейства непересекающихся интервалов, измеримость ограниченных открытых множеств будет являться частным случаем следующей теоремы.

Теорема. *Пусть $E_1, E_2, \ldots$ конечное или счетное семейство попарно непересекающихся ограниченных измеримых множеств. Если $E = \bigcup E_i$, то:*

1) $\mu(E) = \sum_i \mu(E_i)$;

2) *если E ограничено, то оно измеримо.*

Также заметим, что если E_1 и E_2 — ограниченные измеримые множества, то $E_1 \setminus E_2$, $E_1 \cap E_2$, и $E_1 \cup E_2$ — также ограниченные измеримые множества.

Определение. *Подмножество $E \subset \mathbb{R}$ называется измеримым по Лебегу, если его пересечение со всяким конечным интервалом является измеримым ограниченным множеством.*

Если $E \subset \mathbb{R}$ — измеримое по Лебегу множество, то его мерой Лебега называется внешняя мера $\mu(E)$. Ясно, что всякое ограниченное измеримое множество является измеримым по Лебегу.

Теорема. *Тройка $(\mathbb{R}, \mathfrak{L}, \mu)$, где через $\mathfrak{L}$ — множество измеримых по Лебегу подмножеств в $\mathbb{R}$, является пространством с мерой.*

Интеграл Лебега

Определение. *Пусть X — пространство с мерой и Y — топологическое пространство. Отображение $f : X \longrightarrow Y$ называется измеримым, если для всякого открытого подмножества $U \subset Y$ его прообраз $f^{-1}(U)$ измерим (что равносильно: измерим прообраз всякого замкнутого множества).*

Если $Y = \mathbb{R}$, то измеримое отображение из X в Y называется измеримой функцией.

Ясно, что если отображение $f : X \longrightarrow Y$ измеримо, а $g : Y \longrightarrow Y_1$ — непрерывное отображение в другое топологическое пространство, то композиция gof измерима; кроме того, из того, что пересечение измеримых множество измеримо, вытекает следующее: если $f_1 : X \longrightarrow Y_1$ и $f_2 : X \longrightarrow Y_2$

измеримы, то отображение $(f_1, f_2) : X \longrightarrow Y_1 \times Y_2$ также измеримо. Сопоставляя эти два факта, получаем:

Теорема. *Пусть X — пространство с мерой. Если f, g — измеримые функции из X в $\mathbb{R}$, то функции $f+g, fg$, и λf для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ также измеримы.*

Если $f : X \longrightarrow Y$ — измеримое отображение, то ясно, что измеримы прообразы не только открытых множеств, но и любых, замкнутых множеств или полуоткрытых интервалов в $\mathbb{R}$.

Отметим еще, что характеристическая функция подмножества $E \subset X$ (равная единице на E и нулю вне E) измерима, тогда и только тогда, когда измеримо множество E.

Теорема. *Пусть X — пространство с мерой и f_n — последовательность измеримых отображений из X в $\mathbb{R}$. Предположим, что для всякого $x \in X$ существует предел:*

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x).$$

Тогда отображение f также измеримо.

Определение. *Отображение $f : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ называется простой функцией, если X можно представить в виде конечного объединения попарно непересекающихся измеримых множеств $X = E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n$ таким образом, что f будет постоянна на каждом из E_i.*

Интегралом Лебега от простой функции $f : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ называется сумма:

$$\int_X f d\mu = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\mu(E_i), \text{ где } x_i \in E_i.$$

Отметим, что всякая простая функция измерима как линейная комбинация характеристических функций измеримых множеств.

Из конечной аддитивности меры μ ясно, что $\int_X f d\mu$ не зависит от выбора разбиения пространства X, относительно которого функция f будет простой. Ясно также, что если f и g — простые функции, то проста и функция $f+g$, причем

$$\int_X (f+g)d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu.$$

Также, очевидно, что если f — простая функция и $c > 0$, то

$$\int_X cf d\mu = c \int_X f d\mu.$$

Определение. *Интегралом Лебега от измеримой положительной функции*

$$f : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

называется верхняя грань

$$\int_X f d\mu = \sup_{\varphi \leq f} \int_X \varphi d\mu, \text{ где } \varphi \text{ простая функция.}$$

Если $E \subset X$ — измеримое подмножество, то мера μ на X индуцирует меру на E; если f — измеримая положительная функция, то интеграл от ограничения $f\mid_E$ по этой мере на E ровно:

$$\int_E f d\mu = \int_X \xi_E f d\mu,$$

где ξ_E — характеристическая функция множества E.

Отметим простейшие свойства интеграла от неотрицательных функций. Пусть $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ измеримы.

1. Если $f \leq g$, то $\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$.

2. Если $\lambda \in \mathbb{R}_+$, то $\int_X (\lambda f) d\mu = \lambda \int_X f d\mu$.

3. Если $Y \subset X$ — измеримо, то $\int_Y f d\mu \leq \int_X g d\mu$.

Заметим следующий важный факт. Если f — положительная измеримая функция на пространстве с мерой $(X, \mathbf{\Omega}, \mu)$, тогда отображение

$$E \longmapsto \int_E f d\mu$$

является мерой на X.

Определение. *Говорят, что некоторое свойство, зависящее от точки $x \in X$, выполнено почти всюду (или почти всюду по мере μ), если оно выполнено для всех x, кроме тех, что лежат в некотором множестве меры нуль.*

Заметим, что интегралы Лебега от двух функций совпадающих почти всюду, должны быть равны.

Теорема Леви. *Пусть f_n — последовательность отображений из X в $\mathbb{R}_+$, причем $f_n \leq f_{n+1}$ для всех n, и пусть*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

для почти всех $x \in X$. Тогда

$$\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Из теоремы Леви следует следующий важный результат. Если f и g — положительные измеримые функции, то

$$\int_X (f+g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu.$$

Пусть $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ — произвольная функция. Обозначим $f_+(x) = \max(f(x), 0)$ и $f_-(x) = -\min(f(x), 0)$.

Ясно, что f_+ и f_- неотрицательны, измеримы, если измерима f, $f = f_+ - f_-$ и интегралы от f_+ и f_- конечны тогда и только тогда, когда f суммируема. Из этого вытекает, что следующее определение применимо к любой суммируемой функции.

Определение. *Пусть f — суммируемая вещественная функция на X, представленная в виде $f = f_1 - f_2$ где f_1 и f_2 — неотрицательные измеримые функции с конечным интегралом. Тогда интегралом Лебега от f по X называется число:*

$$\int_X f d\mu = \int_X f_1 d\mu - \int_X f_2 d\mu.$$

Приведенное здесь определение интеграла Лебега от вещественных функций корректно. Перечислим некоторые свойства интеграла Лебега.

1. $\int_X d\mu = \mu(X)$.

2. Для любого постоянного λ,

$$\int_X \lambda f(x) d\mu = \lambda \int_X f(x) d\mu.$$

3. $\int_X (f(x) + g(x)) d\mu = \int_X f(x) d\mu + \int_X g(x) d\mu$.

4. Ограниченная на множестве E функция f интегрируема на E.

5. Если $f(x) \geq 0$, то $\int_X f(x) d\mu \geq 0$.

6. Если $m \leq f(x) \leq M$ для всех, (или почти для всех) $x \in X$, то $m\mu(X) \leq \int_X f(x) d\mu \leq M\mu(X)$.

7. Если $\mu(X) = 0$, то $\int_X f(x) d\mu = 0$.

8. Если $f(x) = g(x)$ почти всюду, то $\int_X f(x) d\mu = \int_X g(x) d\mu$, причем оба интеграла существуют или не существуют одновременно.

9. Если функция φ интегрируема на X и почти всюду $|f(x)| \leq \varphi(x)$, то f также интегрируема на X.

10. Интегралы $I_1 = \int_X f(x) d\mu$, и $I_2 = \int_X |f(x)| \, d\mu$ существуют или не существуют одновременно.

И наконец, приведем несколько важных теорем об интегралах Лебега.

Теорема (Абсолютная непрерывность интеграла Лебега). *Если $f(x)$ — суммируемая на множестве X функция, то для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что*

$$\left| \int_E f(x) d\mu \right| < \varepsilon$$

для всякого измеримого $E \subset X$ такого, что $\mu(E) < \delta$.

Теорема (Лебег). *Если последовательность f_n на X сходится к f и при всех n*

$$|f_n(x)| \leq \varphi(x),$$

где φ интегрируема на X, то предельная функция f интегрируема на X и

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)d\mu = \int_X f(x)d\mu.$$

Теорема (Леви). *Пусть на множестве X*

$$f_1(x) \leq f_2(x) \leq \ldots f_n(x) \leq \ldots,$$

причем функции f_n интегрируемы и их интегралы ограничены в совокупности

$$\int_X f_n(x)d\mu \leq M.$$

Тогда почти всюду на X существует конечный предел:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),$$

функция f интегрируема на X и

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)d\mu = \int_X f(x)d\mu.$$

Теорема (Фату). *Если последовательность измеримых неотрицательных функций f_n сходится почти всюду на X к f и*

$$\int_X f_n(x)d\mu \leq M,$$

то f интегрируема на X и

$$\int_X f(x)d\mu \leq M.$$

Теорема. *Если существует интеграл Римана:*

$$I = \int_a^b f(x)dx,$$

то f *интегрируема на* $[a, b]$ *по Лебегу и*

$$\int_{[a,b]} f(x)d\mu = I.$$

Дополнительная литература

1. Антоневич, А. Б. Задачи и упражнения по функциональному анализу / А. Б. Антоневич, П. Н. Князев, Я. В. Радыно. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. – 216 с. – Текст: непосредственный.

2. Берденова, Г. Ж. Функциональный анализ в примерах и задачах / Г. Ж. Берденова, С. Муталип. – Костанай, 2016. – 224 с. – Текст: непосредственный.

3. Богачев, В. И. Действительный и функциональный анализ: университетский курс / В. И. Богачев. – М.: Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотичная динамика», Институт компьютерных исследований, 2009. – 724 с. – Текст: непосредственный.

4. Бородин, П. А. Задачи по функциональному анализу / П. А. Бородин, А. М. Савчук, И. А. Шейпак. – М.: МЦНМО, 2017. – 334 с. – Текст: непосредственный.

5. Канторович, Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – М.: Наука, 1984. – 752 с. – Текст: непосредственный.

6. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. – М.: Наука, 1976. – 544 с. – Текст: непосредственный.

7. Константинов, Р. В. Лекции по функциональному анализу / Р. В. Колмогоров. – Долгопрудный, 2019. – 616 с. – Текст: непосредственный.

8. Кутателадзе, С. С. Основы функционального анализа / С. С. Кутателадзе. – Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2006. – 356 с. – Текст: непосредственный.

9. Львовский, С. М. Лекции по математическому анализу / С. М. Львовский. – М.: МЦНМО, 2008. – 296 с. – Текст: непосредственный.

10. Рудин, У. Функциональный анализ / У. Рудин. – М.: Мир, 1975. – 443 с. – Текст: непосредственный.

11. Сакс, С. Теория интеграла / С. Сакс. – М.: ИЛ, 1949. – 495 с. – Текст: непосредственный.

12. Треногин, В. А. Функциональный анализ / В. А. Треногин. – М.: Физмалит, 2002. – 488 с. – Текст: непосредственный.

13. Федоров, В. М. Курс функционального анализа / В. М. Федоров. – СПб.: Изд-во «Лань», 2005. – 352 с. – Текст: непосредственный.

14. Хелемский, А. Я. Лекции по функциональному анализу / А. Я. Хелемский. – М.: МЦНМО, 2004. – 552 с. – Текст: непосредственный.

15. Шамин, Р. В. Функциональный анализ от нуля до единицы / Р. В. Шамин. – М.: МЦНМО, 2015. – 197 с. – Текст: непосредственный.

Учебное издание

Абжандадзе Зураб Леванович
Апакова Инна Эдуардовна
Куляхтина Ольга Евгеньевна

Функциональный анлиз

Учебно-методическое пособие

Редактор и корректор А. А. Чернышева
Техн. редактор Д. А. Романова

Учебное электронное издание сетевого распространения

Системные требования:
электронное устройство с программным обеспечением
для воспроизведения файлов формата PDF

Режим доступа: http://publish.sutd.ru/tp_get_file.php?id=202016, по паролю.
- Загл. с экрана.

Дата подписания к использованию 04.06.2024 г. Рег. № 5060/22

Высшая школа технологии и энергетики СПбГУПТД
198095, СПб., ул. Ивана Черных, 4.