

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
**«Санкт-Петербургский государственный университет
промышленных технологий и дизайна»**
Высшая школа технологии и энергетики
Кафедра прикладной математики и информатики

ТЕОРИЯ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Краткий конспект лекций для студентов всех форм обучения
по направлению подготовки

13.04.01 — Технология производства электрической
и тепловой энергии

Профили: «Тепломассообменные процессы и установки»;
«Электрическое оборудование энергетических комплексов»

Составитель В. П. Яковлев

Санкт-Петербург
2025

Утверждено
на заседании кафедры ПМИ
21.02.2025 г., протокол № 6

Рецензенты:
Н. В. Орлова, В. И. Сидельников

Краткий конспект лекций соответствует программе и учебному плану дисциплины «Теория принятия решений» для студентов, обучающихся по направлению подготовки 13.04.01 «Технология производства электрической и тепловой энергии», профили: «Тепломассообменные процессы и установки»; «Электрическое оборудование энергетических комплексов».

Текст лекций охватывает весь объем материалов по дисциплине. Издание предназначено для самостоятельной работы студентов всех форм обучения.

Утверждено Редакционно-издательским советом ВШТЭ СПбГУПТД
в качестве текста лекций

Режим доступа: http://publish.sutd.ru/tp_get_file.php?id=202016, по паролю.
- Загл. с экрана.

Дата подписания к использованию 02.04.2025 г. Рег. № 5092/24

Высшая школа технологии и энергетики СПбГУПТД
198095, СПб, ул. Ивана Черных, 4.

© ВШТЭ СПбГУПТД, 2025

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЛЕКЦИЯ № 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ ...	5
1. Процесс принятия решений. Типы поведения	5
2. Теория принятия решений, исследование операций, системный анализ и их взаимосвязь	6
3. Нормативный и дескриптивный подходы к принятию решений	9
4. Стратегии принятия решений	10
ЛЕКЦИЯ № 2. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПОНЯТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ИЗМЕРЕНИЙ. МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ И ПРОЦЕССОВ	13
1. Признак, показатель, критерий	13
2. Понятие модели. Методологические вопросы моделирования	14
3. Основные требования, предъявляемые к модели	15
4. Основные понятия теории моделирования систем и процессов	16
ЛЕКЦИЯ № 3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОБЛЕМНОЙ СИТУАЦИИ	18
1. Общая характеристика проблемной ситуации	18
2. Основные понятия математического моделирования. Построение математической модели	19
3. Классификация моделей. Типы математических моделей	22
ЛЕКЦИЯ № 4. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СРЕДСТВА ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ	26
1. Математическая постановка задачи принятия решений	26
2. Принципы оптимальности	28
3. Классификация задач принятия решений	30
ЛЕКЦИЯ № 5. ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ ПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ. СТАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ	32
1. Основные понятия оптимизации	32
2. Нелинейное программирование	35
3. Линейное программирование	35
4. Дискретное программирование	38
ЛЕКЦИЯ № 6. ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ	41
1. Задачи динамического программирования	41
2. Функция Беллмана	43
3. Сетевое планирование	47
4. Применение метода динамического программирования в сетевых задачах	48
ЛЕКЦИЯ № 7. ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОГО ВЫБОРА. ЗАДАЧА МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОГО ВЫБОРА	49
1. Понятие многокритериальности	49
2. Моделирование предпочтений	51
3. Многокритериальные модели предпочтений	56
4. Оптимальность по Парето	58

ЛЕКЦИЯ № 8. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ЗАДАЧ...	60
1. Сведение многокритериальных задач к однокритериальным.....	60
2. Методы решения задач векторной оптимизации.....	62
3. Метод анализа иерархий.....	64
ЛЕКЦИЯ № 9. ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ. ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В СТОХАСТИЧЕСКИХ УСЛОВИЯХ.....	72
1. Понятие риска. Управление риском.....	72
2. Методы статистической обработки данных в задачах оценки рисков.....	72
3. Теория ожидаемой полезности.....	76
ЛЕКЦИЯ № 10. ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ.....	81
1. Принципы оптимальности (критерии выбора решений).....	81
2. Свойства критериев оптимального выбора.....	85
ЛЕКЦИЯ № 11. СТАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ КОНФЛИКТА.....	86
1. Основные понятия и классификация игр.....	86
2. Игровые принципы оптимальности.....	88
ЛЕКЦИЯ № 12. АНТАГОНИСТИЧЕСКИЕ, МАТРИЧНЫЕ И БЕСКОАЛИЦИОННЫЕ ИГРЫ.....	95
1. Антагонистические игры. Матричные игры.....	95
2. Бескоалиционные игры N лиц.....	99
ЛЕКЦИЯ № 13. КООПЕРАТИВНЫЕ ИГРЫ.....	102
1. Основные понятия теории кооперативных игр.....	103
2. Принципы оптимальности решения кооперативных игр.....	105
ЛЕКЦИЯ № 14. ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ КОНФЛИКТА.....	109
1. Позиционные игры с полной информацией.....	109
2. Позиционные игры с неполной информацией.....	112
ЛЕКЦИЯ № 15. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ИГРЫ.....	114
1. Общие сведения.....	114
2. Свойства статистических игр.....	116
3. Выбор функций решения.....	120
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	125

ЛЕКЦИЯ № 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

1. Процесс принятия решений. Типы поведения

Существуют различные подходы к принятию решений:

- на основе предшествующего опыта;
- на основе здравого смысла;
- на основе метода аналогий;
- интуитивный подход и др.

Однако практика управления в различных областях деятельности человека нуждается в широком и эффективном использовании математических методов. Создание систем управления невозможно без разработки соответствующей теории принятия решений, отвечающей требованиям практики.

Теория принятия решений – это наука о принципах и методах оптимального выбора во всех областях целенаправленной деятельности.

Целенаправленная деятельность – это действие, основанное на стремлении достичь определенной цели, что и отличает собственно действие от поведения (*с точки зрения педагогики*).

Цель – это субъективный образ желаемого состояния объекта.

Известный немецкий ученый Макс Вебер выделял четыре вида социальных (целенаправленных) действий:

- целерациональное;
- ценностно-рациональное;
- традиционное;
- аффективное.

Целерациональные действия – это действия или такие поведенческие акты, которые совершаются индивидами намеренно, т. е. с осознанно поставленной целью, направленной на достижение четко определенных результатов. Целерациональное действие характеризуется ясностью и осознанием поставленной цели. В рациональности цели можно удостовериться с двух сторон: во-первых, с точки зрения её собственного содержания; во-вторых, с точки зрения целесообразности.

Ценностно-рациональное действие, характеризующееся сознательной верой в этическую, эстетическую, религиозную или иначе понимаемую безусловную самоценность определенного поведения, независимо от его успеха. Оно предполагает совершение поступков, основанных на убежденности в самодостаточной ценности поступка. Такое действие всегда подчинено определенным требованиям, в следовании которым индивид видит свой долг.

Согласно Веберу, «социальное действие может быть определено как традиционное, то есть выполняемое через привычку».

Традиционное действие формируется на основе следования традиции, т. е. подражания тем или иным образцам поведения. Такое действие совершается во многом чисто автоматически по сложившимся стереотипам, оно

характеризуется стремлением ориентироваться на привычные образцы поведения.

Социальное действие, подобно всякому действию, может быть определено как **аффективное**, особенно эмоциональное – через актуальные аффекты и чувства.

Аффективное действие – наименее осмысленное из всех типов действий. Оно характеризуется определенным эмоциональным состоянием. Смыслом аффективного действия является снятие возникшего эмоционального напряжения.

Математическая теория принятия оптимальных (рациональных, целенаправленных) решений опирается на понятия и методы математики, статистики, экономики, менеджмента и психологии с целью изучения закономерности выбора людьми путей решения разного рода задач, а также способов поиска наиболее выгодных из возможных решений.

Задачей теории принятия решений является построение количественных методов анализа процессов принятия решений.

Процесс принятия решений можно разделить на следующие этапы:

- описание цели;
- описание возможных способов действий (множества решений);
- построение математической модели;
- сбор данных (информации);
- постановка задачи;
- нахождение решения формальными методами;
- содержательная интерпретация решения;
- реализация и контроль;
- коррекция и повторение процесса.

Ключевую роль в процессе принятия решений принимает **лицо, принимающее решение (ЛПР)**.

ЛПР – это индивид или группа людей, которые осуществляют принятие решений и несут за них ответственность, в соответствие со своими полномочиями. Если решение принимается группой людей, то в этом случае можно использовать термин «группа, принимающая решение».

2. Теория принятия решений, исследование операций, системный анализ и их взаимосвязь

Теория принятия решений стала с одной стороны определенной **ветвью** других более общих наук, таких как **теория систем, системный анализ, кибернетика**, а с другой стороны, она является **синтезом определенных фундаментальных частных наук**, таких как **исследование операций, методы оптимизации**, обладая при этом собственной методологией.

Совокупности объектов разного типа, которые принято называть сложными системами, характеризуются многочисленными и разнообразными по типу связями между отдельно существующими элементами системы и наличием у системы функции назначения, которой нет у составляющих её частей.

Основными частями теории систем являются системный анализ и кибернетика. При этом *под системным анализом понимают исследование проблемы принятия решений в сложной системе*, а кибернетика рассматривается как наука об управлении и преобразовании информации в природных и искусственных системах и их объединениях. Близким к понятию «системный анализ» является понятие «исследование операций».

Исследование операций – это раздел прикладной математики, который занимается построением математических моделей анализа реальных задач процессов управления и принятия решений.

Перед исследованием операций ставятся следующие цели:

- составление математических задач принятия решений;
- рассмотрение вопросов существования оптимальных решений в различных классах задач;
- разработка необходимых и достаточных признаков оптимальности в различных классах задач;
- разработка методов численного определения оптимальных решений.

Системный анализ сводится к решению ряда задач исследования операций, но обладает свойствами, которые не охватываются этой дисциплиной. Однако в зарубежной литературе понятие «исследование операций» не является чисто математическим и приближается к понятию «системный анализ». Опора системного анализа на исследование операций приводит к таким его разделам, как *исследование многокритериальных задач, методы решения задач оптимизации, обработка экспертных оценок*.

Из определения «системного анализа» следует, что **целью применения системного анализа** к конкретной проблеме является повышение степени обоснованности принимаемого решения, рассмотрение множества вариантов, среди которых производится выбор, с одновременным указанием способов отбрасывания вариантов, заведомо уступающим другим.

Перечислим **основные понятия системного анализа**.

Элемент – некоторый объект (материальный, энергетический, информационный), который обладает рядом важных для нас свойств, но внутреннее строение (содержание) которого безотносительно к цели рассмотрения.

Связь – важный для целей рассмотрения обмен между элементами веществом, энергией, информацией.

Система есть совокупность взаимосвязанных элементов, обеспечивающих ее функционирование и направленных на достижение целей ее создания и (или) функционирования. Система обладает следующими признаками:

- связями, которые позволяют посредством переходов по ним от элемента к элементу соединить два любых элемента совокупности;
- свойствами, отличными от свойств отдельных элементов совокупности.

Практически любой объект при определенных условиях может быть рассмотрен как система. Необходимо различать статические и динамические системы.

Статические системы предполагают:

во-первых, постоянство значений характеристик, описывающих элементы системы и их взаимосвязи;

во-вторых, соответствие значений этих характеристик целям создания системы.

Динамические системы предполагают возможность изменения значений характеристик, описывающих элементы системы и их взаимосвязь, во времени. Однако любое изменение значений этих характеристик должно отвечать цели создания и функционирования действующей системы.

Автоматизированная система – сложная система с определенной ролью элементов двух типов: в виде технических средств и в виде действий человека.

Структура системы – расчленение системы на группы элементов с указанием связи между ними, неизменное на все время рассмотрения и дающее представление о системе. Расчленение может иметь материальную, функциональную, алгоритмическую или иную основу. Структура системы может быть охарактеризована по имеющимся в ней типам связей. Простейшими из них являются последовательное, параллельное соединение и обратная связь.

Декомпозиция – деление системы на части, удобное для каких-либо операций с этой системой. Примерами декомпозиции являются: разделение объекта на отдельно проектируемые части, зоны обслуживания; рассмотрение физического явления или математическое описание отдельно для данной части системы.

Иерархия – структура с наличием подчиненности, т. е. неравноправных связей между элементами, когда воздействие в одном из направлений оказывает гораздо больше влияния на элемент, чем в другом. Виды иерархических структур разнообразны, но важных для практики иерархических структур всего две – древовидная и ромбовидная. Древовидная структура наиболее проста для анализа и реализации. Кроме того, в ней всегда удобно выделять иерархические уровни – группы элементов, находящиеся на одинаковом удалении от верхнего (исходного) элемента.

Основными принципами системы являются:

- принцип конечной цели (абсолютный приоритет конечной цели);
- принцип единства (совместное рассмотрение системы как целого и как совокупности элементов);
- принцип связности (рассмотрение любой части совместно с ее связями с окружением);
- принципы модульного построения (выделение модулей в системе и рассмотрение ее как совокупности модулей);
- принцип иерархии (введение иерархии элементов и/или их ранжирование);
- принцип функциональности (совместное рассмотрение структуры и функции с приоритетом функции над структурой);

- принцип неопределенности (учет неопределенностей и случайностей).

3. Нормативный и дескриптивный подходы к принятию решений

Под *процессом принятия управленческого решения* понимают совокупность последовательных действий, направленных на выбор и принятие управленческого решения.

В теории принятия решений существуют два подхода:

- **нормативный** (предписывающий, непсихологический, математизированный, количественный);
- **дескриптивный** (описательный, психологический).

Модели реализации процесса принятия решения, при котором психологическое поведение людей практически не оказывает влияния на выбор окончательного решения, носят название **нормативных моделей принятия решений**.

Эти модели принятия решений, как правило, реализуют *концепцию максимальной полезности*.

В соответствии с этой концепцией рассматривается рациональный подход, предполагающий нахождение оптимального, т. е. наилучшего из всех возможных, решений. Каждый ЛПР имеет свою функцию полезности, отражающую присущую ему индивидуальную систему предпочтений. Эта функция может быть задана в виде некоторого аналитического выражения или «скрыта» внутри наших предпочтений. Оценивая каждое решение, ЛПР вольно или невольно сопоставляет с ним некоторое значение функции полезности, которое показывает степень предпочтительности этого решения по сравнению с остальными. *Оптимальным считается решение, обладающее максимальной полезностью*.

Условиями применения нормативных моделей являются:

- наличие информации – достоверной, необходимой и достаточной;
- использование известных (нормативных) правил (алгоритмов, методов) построения альтернативных решений и выбора окончательного из них.

При этом применяемые алгоритмы, правила и действия обеспечивают рассмотрение всех возможных альтернатив, последствия каждой из них могут быть просчитаны, а концепция максимальной полезности направлена на поиск оптимального решения.

Наряду с концепцией максимальной полезности при построении альтернативных решений и выборе окончательного из них могут быть использованы и другие концепции принятия решений.

В числе наиболее распространенных концепций можно назвать *концепцию ограниченной рациональности*.

Дескриптивная теория основывается на концепции ограниченной рациональности; была предложена в трудах экономиста Герберта Саймона. В рамках этой концепции рассматривается не «рациональный», а административный человек, принимающий не оптимальные, а

удовлетворительные решения (критерии пригодности), т. е. решения на основе упрощенных представлений о действительности.

Суть концепции ограниченной рациональности сводится к тому, что альтернативы рассматриваются до тех пор, пока не будет найдена та из них (те из них), которые удовлетворяют требованиям лица, принимающего решение (ЛПР).

При этом используются три основных правила (стратегии) упрощения, позволяющие принять решение:

- человек упрощает реальную ситуацию, рассматривая лишь небольшое число альтернатив и их возможных последствий;
- человек упрощает проблему выбора, устанавливая так называемые уровни притязаний по всем возможным последствиям, к которым может привести та или иная альтернатива;
- человек выбирает первую альтернативу, которая удовлетворяет всем уровням притязаний.

4. Стратегии принятия решений

Совокупность правил и действий, реализующих концепцию принятия решений с использованием правил предпочтения альтернатив и критериальных оценок, рассчитываемых для альтернатив, определяет содержание стратегии принятия решений.

Под **стратегией принятия решения** понимается совокупность правил и действий по отбору окончательного формируемого решения, определяемая содержанием концепции принятия решения, а также реализующими ее (концепцию) правилами предпочтения альтернатив и способами (методами) расчета критериальных оценок. Рассматривают следующие **стратегии принятия решений**.

Многокритериальные стратегии принятия решений. Формирование и выбор правил предпочтения, заложенных в стратегию принятия решений, остается за лицами, принимающими решение, однако существуют дополнительные аспекты, которые при этом необходимо учитывать.

Стратегии многокритериального выбора. Потребность в них возникает в том случае, когда альтернативы описываются несколькими параметрами, которые имеют важность для ЛПР при выборе альтернатив (например, прибыль, затраты, время, риск, издержки).

Эти параметры в психологии, например, носят название атрибутов альтернатив, а сами задачи отбора альтернатив по нескольким атрибутам носят название многоатрибутных (многоатрибутивных) задач принятия решений. В экономике и математике вместо термина «атрибут» используются термины «параметры» и «признаки», а сами задачи поиска альтернатив по значениям нескольких из них носят название многокритериальных задач принятия решений.

Для оценки и сравнения альтернатив, т. е. для принятия решения по выбору альтернативы, требуется переработка большого объема информации, что

заставляет упростить этот процесс, например, за счет свертки нескольких частных критериев, применяемых к отдельным параметрам и признакам альтернатив, в один общий критерий и за счет использования различных эвристических правил предпочтения, используемых для отсеивания неподходящих альтернатив и отбора окончательных решений (альтернатив).

Стратегии компенсации. Особенностью этих стратегий является то, что при построении общей критериальной оценки, рассчитанной для альтернативы и полученной как свертка частных критериальных оценок, плохие значения частных критериальных оценок, отвечающих одним параметрам альтернативы, компенсируются хорошими значениями частных критериальных оценок других параметров этой альтернативы. В зависимости от варианта компенсации плохих значений частных критериев одних параметров альтернативы хорошими значениями частных критериев других параметров этой же альтернативы выделяют *аддитивные стратегии многокритериального выбора, стратегии аддитивных разностей и стратегии идеальной точки.*

Аддитивная стратегия заключается в том, что люди определяют общую полезность каждой альтернативы как сумму оценок по отдельным атрибутам, полученных с учетом относительной важности этих атрибутов. Так, в примере с покупкой дома можно выделить основные атрибуты (цена, местоположение, возраст постройки и др.), определить их важность для покупателя, оценить каждый вариант по всем атрибутам и затем сложить полученные оценки, предварительно умножив их на «веса» атрибутов. Тогда наилучшим выбором будет вариант с максимальной общей полезностью.

Стратегия аддитивных разностей используется при попарных сравнениях альтернатив и заключается в том, что люди оценивают не общую полезность каждой альтернативы, а только различие между ними. Формально это различие выглядит как сумма «взвешенных» разностей оценок альтернатив по всем атрибутам. Если полученная сумма положительна, то первая из двух альтернатив предпочтительнее, чем вторая.

Стратегия идеальной точки напоминает правило аддитивных разностей, но отличается от него тем, что все альтернативы сравниваются не между собой, а с некоторым эталоном, то есть идеальным вариантом, который существует лишь в нашем сознании, но практически недостижим.

Стратегии исключения. Их особенностью является отказ от сравнения достоинств и недостатков всех альтернатив на основе значения рассчитываемых общих критериальных оценок и применение простых эвристических правил. Цель отказа – исключение из рассмотрения большого числа бесперспективных, неэффективных альтернатив с тем, чтобы исследовать лишь их небольшое число и сделать разумный выбор. К этой группе стратегий выбора относятся *стратегия доминирования, конъюнктивная стратегия, дизъюнктивная стратегия, лексикографическая стратегия и стратегия удаления по аспектам.*

Стратегия доминирования направлена на поиск такой альтернативы, которая по всем параметрам не хуже других альтернатив, и хотя бы по одному параметру она лучше, чем все остальные варианты выбора. Эта стратегия

позволяет исключить из рассмотрения некоторые альтернативы и сократить множество альтернатив, оставшихся для рассмотрения. Особенностью применения этой стратегии является то, что она позволяет найти наилучшую альтернативу, но лишь в том случае, если таковая есть. Такими же возможностями наделены и стратегии компенсации, однако преимуществом стратегии доминирования является ее простота.

Конъюнктивная стратегия исключает альтернативы, которые не удовлетворяют минимальным требованиям по всем параметрам одновременно, и выбирает первую удовлетворительную альтернативу, если она существует. Конъюнктивная стратегия согласуется с концепцией ограниченной рациональности, в соответствии с которой уменьшение количества рассматриваемых альтернатив обеспечивается тем, что из числа всех альтернатив отбираются те, которые в определенной мере удовлетворяют требованиям ЛПР.

Дизъюнктивная стратегия оценивает каждую альтернативу по ее лучшим качествам независимо от того, какие значения имеют остальные параметры альтернативы. Для выбора окончательного решения остаются только те альтернативы, которые имеют наилучшие значения какого-либо из ее параметров. Выбор окончательного параметра, по которому принимается конечный вариант, остается за ЛПР.

Лексикографическая стратегия схожа с дизъюнктивной стратегией, но отличается от нее тем, что сначала отбираются альтернативы, лучшие среди всех по самому важному параметру. Если таких альтернатив несколько, то среди них снова определяются лучшие по самому важному параметру из оставшихся и т. д. до тех пор, пока число вариантов не сократится до приемлемого.

Стратегия удаления по аспектам сравнима с лексикографической стратегией, но основана на принципе отказа от альтернатив. Сначала удаляются альтернативы, не удовлетворяющие требованиям по самому важному параметру, затем среди оставшихся исключаются альтернативы, не подходящие по менее важному параметру, и так далее, пока не останется один или несколько вариантов для окончательного выбора.

Следует также отметить, что:

- Принятие решений по многим критериям одновременно предполагает использование специальных стратегий принятия решений.
- При выборе окончательного варианта решений, как правило, используется не одна стратегия, а их сочетание.
- Сокращение множества альтернатив до разумных пределов, как правило, идет на основе стратегий исключений. Если после этого остается несколько вариантов, наилучший из них определяется на основе какой-либо из стратегий компенсации.
- Субъективный фактор поведения человека особенно ярко проявляется при выборе метода свертки многих критериев в один и при отборе метода расчета итоговой общей критериальной оценки, что находит отражение в реализации различных компенсационных стратегий многокритериального выбора.

ЛЕКЦИЯ № 2. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПОНЯТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ИЗМЕРЕНИЙ. МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ И ПРОЦЕССОВ

1. Признак, показатель, критерий

Использование математического аппарата является неотъемлемым условием развития и совершенствования различных наук, относящихся как к естественнотехническому направлению, так и к гуманитарному. Исследователь в любой области нуждается в инструментах и методологии измерения свойств изучаемых процессов, явлений и объектов. Для этих целей разработана математическая теория измерений.

Одно из наиболее общих определений характеризует *теорию измерений* как дисциплину, которая систематизирует положения о процессе измерений, а также представляет математический аппарат для реализации этого процесса.

Для оценки существующего состояния и прогноза развития социально-экономических и технических систем используются такие категории, как *признаки, показатели, критерии*.

Массовые явления в каждом исследовании выступают как статистические совокупности. *Статистическая совокупность* – это относительно однородная группа объектов или явлений, характеризующаяся наличием некоторых общих признаков и подвергающаяся изучению путем сбора количественных и качественных данных, их обработки и анализа.

Каждый отдельный элемент данного множества называется единицей статистической совокупности. *Единица совокупности* – это предел декомпозиции объекта исследования, при котором продолжают сохраняться все свойства изучаемого явления (процесса). Каждая единица совокупности обладает определенными свойствами.

Признаком называется индивидуальное свойство единицы совокупности. Признак может быть представлен в виде либо количественной, либо качественной характеристики единицы совокупности.

Признаки можно классифицировать в виде качественных (атрибутивных) или количественных. *Качественные признаки* выражают существенное неотъемлемое свойство единицы совокупности. Признаки, значения которых могут быть измерены, *называются количественными*, например, прибыль организации, уставный капитал, активы и пассивы предприятия и т. д.

В экономической деятельности часто выделяют альтернативные признаки. *Альтернативные признаки* – это признаки (два и более), характеризующиеся взаимоисключающими свойствами или возможностями. Таковыми являются признаки обладания или необладания каким-либо свойством. Например, в зависимости от образования каждый сотрудник может быть отнесен к категории либо имеющих, либо не имеющих высшего образования.

При оценке эффективности систем поддержки принятия решений наиболее широко распространено понятие «показатель».

Под **показателем** понимается характеристика группы единиц или совокупности в целом, являющая собой обобщенную характеристику свойств этой группы или всей совокупности, представленной в количественной либо вербальной форме.

В большинстве зарубежных практических руководств по анализу и оценке эффективности управленческих решений отмечается, что **показатели должны удовлетворять следующим основным требованиям:**

- четкость, ясность, внятность, недвусмысленность;
- полнота, всесторонность, выполненность;
- комплексность, сложность, модульность;
- непротиворечивость, состоятельность, завершенность.

Эти требования относятся как к количественным, так и к качественным показателям.

Критерии (критерии оптимальности) используются для оценки эффективности управленческих решений и должны обладать пятью свойствами:

- конкретность;
- измеримость;
- достижимость;
- релевантность (степень соответствия запроса и найденного);
- привязанность к определенному периоду времени.

2. Понятие модели. Методологические вопросы моделирования

Моделирование (в широком смысле) *представляет собой метод исследований во всех областях знаний и научно обоснованный метод оценок характеристик сложных систем, который используется для принятия решений в различных областях деятельности человека.* Все то, на что направлена человеческая деятельность, называется **объектом** (лат. objection – предмет).

Разработка методологии моделирования ориентирована на способы получения и обработки информации об объектах, существующих вне пределов нашего сознания и взаимодействующих между собой и внешней средой.

Большую роль в научных исследованиях играют *гипотезы*, под которыми понимают научные предположения, выдвигаемые для объяснения какого-либо явления. Гипотезы основываются на опытных данных, наблюдениях, догадках. Полная и тщательная проверка выдвигаемой гипотезы может проводиться экспериментальным способом. **Формулирование и проверка правильности гипотезы предполагают определение сходства объектов, т. е. аналогии.**

Гипотезы отражают реальный, объективно существующий мир. В то же время гипотезы должны сводиться к логическим схемам, удобным для проведения исследования.

Такие логические схемы, которые упрощают рассуждения и логические построения или позволяют проводить эксперименты, уточняющие природу явлений, называются *моделями*.

Другими словами, **модель** – это объект-заместитель некоторого объекта (оригинала), который обеспечивает изучение некоторых свойств объекта.

Замена объекта другим с целью получения информации о важнейших характеристиках исследуемого объекта с помощью объекта-модели называется **моделированием**.

Моделирование предполагает построение действующей математической или реальной модели, обладающей свойствами (или характеризующей соотношениями), которые подобны свойствам или соотношениям рассматриваемого явления (процесса, системы), и проведение экспериментов с моделью.

Теория, с помощью которой изучается замещение одних объектов (оригиналов) другими объектами (моделями) и исследование характеристик объектов на их моделях, называется **теорией моделирования**.

Изложенный выше материал позволяет сделать следующие выводы:

- всякая модель является субъективной, т. е. отражает индивидуальность исследователя;
- всякая модель является гомоморфной, т. е. в ней отражены только существенные свойства объекта-оригинала;
- возможно, существует множество моделей одного и того же объекта-оригинала, которые отличаются целями исследования и степенью адекватности.

3. Основные требования, предъявляемые к модели

Построение содержательной модели предполагает выдвижение соответствующих гипотез (или постулатов модели). Отнесение модели к той или иной науке позволяет использовать законы и другие положения, используемые в этой науке. Построение содержательной модели влечет за собой отвлечение от разного рода несоответствий, неточностей изучаемого реального явления (если только эти несоответствия не являются сами предметом исследования), т. е. переход к его упрощенному, схематическому описанию.

Модель считается адекватной объекту – оригиналу, если на уровне понимания исследователем моделируемого явления она отражает закономерности процесса функционирования реальной системы во внешней среде с достаточной степенью приближения.

Если руководствоваться только требованием адекватности, то более предпочтительными становятся не простые, а сложные модели. Действительно, усложнение модели подразумевает учет большего числа факторов, влияющих, так или иначе, на изучаемые свойства. Однако чрезмерное усложнение модели может привести к громоздким системам уравнений, не поддающимся изучению и решению. Таким образом, возникает необходимость формулировать требование достаточной простоты модели по отношению к ее исследуемым свойствам.

Модель считается достаточно простой, если имеющиеся в распоряжении средства исследования позволяют в определенные сроки и экономично по затратам труда и средств, но с заданной точностью, провести

количественный (или качественный) анализ исследуемых свойств и сделать выводы из полученных результатов.

4. Основные понятия теории моделирования систем и процессов

По форме представления объектов модели делятся на две группы:

Материальные и идеальные.

Материальные модели делятся на *физические и аналоговые*. В физических моделях обеспечивается аналогия между физической природой и моделью. В аналоговых моделях достигается сходство процессов, которые протекают в оригинале и модели.

Идеальные модели могут быть интуитивными и знаковыми (семиотическими). Интуитивные модели используются для прогнозирования на основе анализа наблюдения прошлого периода. При этом не предпринимаются попытки объяснить причины взаимосвязи, которые лежат в основе интуитивной модели.

Знаковые модели делятся на логические, геометрические и математические.

Логические модели – модели, в которых представлены различные варианты выбора действий *на основе умозаключений и анализа условий*.

Геометрические модели – это графические формы и объемные конструкции (например, рисунок, пиктограмма, чертеж, карта и т. п.).

Математические модели – это модели, в которых для описания процессов функционирования системы используются различные соотношения, например, функциональные зависимости, системы алгебраических, дифференциальных, интегральных или конечно-разностных уравнений, законы распределения случайных величин.

Методы исследования математических моделей можно разделить на *аналитические, численные и имитационные*. При использовании аналитического метода стремятся получить в общем виде явные зависимости для искомых характеристик. Численным методом стремятся получить числовые результаты при заданных начальных условиях.

Методом имитационного моделирования *описываются процессы* функционирования систем во времени. Происходит имитация элементарных явлений, составляющих процесс. При этом сохраняются их логическая структура и последовательность протекания во времени. Имитационные методы могут быть детерминированными и стохастическими.

Комбинированные методы исследования математических моделей позволяют объединить достоинства аналитического, численного и имитационного методов. При использовании комбинированных методов производят предварительную декомпозицию модели на составляющие подмодели. Для части из них используют аналитические методы, а для остальных либо численные, либо имитационные методы.

Объектами моделирования являются сложные социально-экономические и организационно-технические системы. ***Сложные системы обладают следующими характеристиками:***

Цель функционирования, определяющая степень целенаправленности поведения модели. Модели можно разделить на одноцелевые, которые предназначены для решения одной задачи, и многоцелевые, которые позволяют разрешать или рассматривать ряд аспектов функционирования системы.

Сложность, которую оценивают по количеству элементов в системе и связей между ними. При этом учитывают, что модель есть совокупность отдельных элементов и связей между ними. Разнообразие элементов модели позволяет выделить ряд уровней иерархии, отдельные функциональные подсистемы в модели, входы и выходы.

Целостность, которая указывает на то, что создаваемая модель есть одна целостная система, включающая в себя большое количество составных частей (элементов), находящихся в сложной взаимосвязи друг с другом.

Неоднозначность, которая может быть связана с состоянием системы, с пониманием цели, управления в системе, методами решения задач, неполнотой исходной информации о внешней среде, с действиями других лиц, не относящихся к данной управляющей системе и т. д.

Адаптивность – свойство высокоорганизованной системы. Адаптивность позволяет системе приспосабливаться к различным возмущающим факторам внешней среды. При этом имеет большое значение возможность адаптации модели в широком спектре возмущающих воздействий внешней среды, а также исследование поведения модели в меняющихся условиях, приближенных к реальным условиям.

Организационная структура системы моделирования во многом зависит от сложности модели и от степени совершенства средств моделирования.

Управляемость модели, которая вытекает из необходимости принимать управленческие решения экспериментаторами с целью обеспечения рассмотрения функционирования процесса в разных условиях, имитирующих реальные.

Возможность совершенствования модели, которая позволяет создавать мощные системы моделирования, предназначенные для изучения различных аспектов функционирования реальных объектов.

ЛЕКЦИЯ № 3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОБЛЕМНОЙ СИТУАЦИИ

1. Общая характеристика проблемной ситуации

Проблемной ситуацией объекта управления называется неудовлетворительное состояние управляемой системы с точки зрения целей ЛПР.

Задачей принятия решений (ЗПР) для конкретной проблемной ситуации называется задача поиска оптимального (или наилучшего) с точки зрения целей ЛПР управленческого решения (УР) для перевода управляемой системы из неудовлетворительного состояния в состояние, которое удовлетворяет субъект управления.

Допустимым решением (или допустимой альтернативой) ЗПР называется такое УР данной задачи, которое удовлетворяет всем заданным в ней ограничениям (ресурсным, временным, логическим и т. п.).

Оптимальным (или наилучшим) управленческим решением ЗПР называется такое УР, которое переводит управляемую систему из неудовлетворительного состояния в идеальное состояние, т. е. состояние, которое удовлетворяет ЛПР и является целью принимаемого решения.

В теории принятия решений для проведения предварительного анализа проблемной ситуации (ПС) и правильного выбора целей и критериев искомого УР часто используют различные методы моделирования проблемных ситуаций. В данном контексте под *моделированием проблемной ситуации* подразумевают процесс исследования состояния реальной управляемой системы, предусматривающий построение некоторой ее абстрактной или материальной модели, которая способна адекватно отражать (заменять) существующую ПС на определенных этапах ее изучения.

Целью моделирования проблемной ситуации является *определение целей, критериев и методов формирования искомого УР* на основе изучения ее некоторой модели, которая позволяет провести анализ актуальных данных об объекте управления, выявить существенные внешние и внутренние факторы и их связи, определить возможные варианты развития внешних и внутренних условий, которые существенно влияют на состояние управляемого объекта.

При построении математической модели проблемной ситуации выделяют несколько этапов.

На первом этапе обычно происходит построение концептуальной модели, которая приближенно описывает исходную ситуацию и служит основой для дальнейшего уточнения ее структуры, свойств и связей.

На втором этапе происходит формализация модели с учетом выявленных свойств, характеристик, связей и операций исходного объекта управления. На исходной математической модели вводятся соответствующие символьные операции, ограничения и задаются целевые функции, что позволяет перейти к ее абстрактному изучению.

Третьим этапом исследования и уточнения математической модели является проверка ее на корректность и адекватность по отношению к исходной проблемной ситуации в конкретной ЗПР. После необходимой корректировки формируемой математической модели и окончательной проверки ее на адекватность происходит ее упрощение.

2. Основные понятия математического моделирования.

Построение математической модели

Словосочетание «математическая модель» в общем случае означает совокупность соотношений, в которых участвуют характеристики некоторого явления (процесса, системы).

Неизвестные характеристики математической модели принято называть «прогностическими», или «внутренними», или «эндогенными» характеристиками. *В динамических моделях управления такие характеристики называют также «фазовыми переменными».* Если значения характеристик известны или считается, что они известны, то такие характеристики принято называть «внешними» или «экзогенными», или «параметрами».

Математические модели, соотношения которых определяют единственным образом значения ее внутренних величин при известных значениях ее внешних величин, *называются «замкнутыми».*

При построении *содержательной модели* выписываются соответствующие соотношения, т. е. содержательная часть переводится на формальный математический язык и тем самым осуществляется переход к математической модели. *В этом состоит первый этап применения математики – построение модели*, который в основном опирается на неформальное обсуждение постановки задачи и необходимую квалификацию исследователя в рассматриваемой области.

Прикладные математические задачи можно условно разделить на два класса. В задачах первого из них речь идет об исследовании свойств заданного объекта – это задачи *анализа*. Задачи второго класса имеют своей целью выбор объекта из некоторой совокупности на основании каких-либо требований – это задачи *синтеза*.

Термин «*синтез*» применяется и в более специальном смысле, *в частности, как управление на основе применения обратной связи.* Такое деление весьма условно, так как существует много задач, в равной мере относящихся как к одному, так и к другому классу.

Основными «конструктивными элементами» математической модели для рассматриваемого класса задач являются те или иные постоянные и переменные величины, входящие в состав модели, и функциональные зависимости одних величин от других. Некоторые из постоянных величин могут быть заданы (это *параметры задачи*), другие – искомыми; то же относится к функциям.

Модель составляется с таким расчетом, чтобы, найдя искомые величины и функции, мы могли дать ответ на поставленные вопросы. Заданные и искомые

величины и функции в математической модели обычно связываются уравнениями и неравенствами. Более того, во многих случаях, особенно в задачах анализа, сама модель имеет вид уравнения или системы уравнений.

Уравнения, включаемые в математическую модель изучаемого объекта, выписываются на основе определяющих соотношений между величинами, вытекающих из постулатов содержательной модели. Эти постулаты могут иметь различное происхождение и различную степень адекватности. Некоторые постулаты непосредственно вытекают из универсальных физических законов, таких как закон сохранения энергии, второй закон Ньютона и т. п., или экономических законов, например, балансовые соотношения.

Однако универсальных и родственных им законов в большинстве случаев недостаточно. Поэтому приходится пользоваться законами, имеющими иной характер. Широко применяются, в частности, феноменологические законы. Эти законы достаточно хорошо эмпирически (и отчасти теоретически) обоснованы и имеют ограниченную область действия.

Еще менее универсальный характер имеют полуэмпирические соотношения, получающиеся в результате сочетания качественных соображений (в частности, соображений размерности) и обработки результатов эксперимента или иной статистики, либо выведенные из других соотношений такого же характера. Применяются также и чисто эмпирические соотношения, получаемые с помощью прямой обработки данных наблюдения или эксперимента и зачастую привязанные к определенным единицам измерения. Порой приходится также выводить новые формулы. В таких случаях необходимо отчетливо видеть слабые места в рассуждениях, так как велика опасность совершения грубых ошибок или подгонки решения под желаемый результат.

Переход от содержательного к формальному описанию объекта исследования осуществляется при участии в этом процессе различных коллективов специалистов в разных областях. Поэтому при переходе от содержательной модели к математической могут возникнуть затруднения и серьезные ошибки.

Найти взаимопонимание между этими группами специалистов помогает язык математических схем, позволяющий в первую очередь рассмотреть вопрос об адекватности перехода от содержательного описания системы к ее математической схеме, лишь потом решать вопрос о конкретном методе получения результатов.

Использование понятия *«математическая схема»* дает возможность применять математику не в качестве метода расчета, а в качестве метода мышления, средства формулирования понятий. Это наиболее важно при переходе от словесного описания системы к формальному представлению процесса ее функционирования в виде некоторой математической модели (аналитической или имитационной).

Математическая схема, используемая исследователем в первую очередь, должна адекватно отображать реальные процессы в исследуемой системе, а не предоставлять возможность получить ответ (результат решения).

Математическая схема может быть определена как звено при переходе от содержательного к формальному описанию процесса функционирования системы с учетом воздействия внешних факторов, т. е. имеет место цепочка «описательная модель – математическая схема – математическая (аналитическая и/или имитационная) модель».

К типовым математическим схемам относятся: математическое программирование, теория игр, дифференциальные уравнения, конечные и вероятностные автоматы, системы массового обслуживания, сети Петри и т.д.

Второй этап применения математики в процессе моделирования состоит в изучении математической модели, т. е. в решении полученной математической задачи. Для этого выбирается и реализуется соответствующий метод решения.

После получения результатов решения математической задачи необходимо провести анализ решения, осмыслить его, сформулировать выводы. *В этом состоит третий этап применения математики* – этап интерпретации (истолкования) результата исследования математической модели. Третий этап может включать и контроль правильности (верификации) модели, т. е. сравнения результата с другими известными фактами, в частности с экспериментальными.

Описанные этапы тесно связаны между собой, и такое разделение является в некоторой степени искусственным. При построении математической модели обычно ориентируются на предполагаемый метод решения задачи – в частности, с использованием ЭВМ.

Любая математическая модель характеризуется рядом свойств, к числу которых можно отнести продуктивность, робастность, наглядность.

Свойство продуктивности связано с тем, что изучаемый объект может характеризоваться различными параметрами и функциональными зависимостями, которые считаются заданными и описывают связи между рассматриваемыми величинами.

Все эти заданные параметры и зависимости называются исходными данными модели. Они оказывают влияние на величины, значения которых получены в результате решения математической задачи. Исходные данные могут быть измерены, или подсчитаны, или найдены в справочной литературе и т. п. При этом если появляется необходимость в измерении, то исходные данные должны легче поддаваться измерению, чем получаемые, так как в противном случае теряет смысл исследование модели.

Свойство *робастности (robust – крепкий)* модели, т. е. свойство ее устойчивости по отношению к погрешностям исходных данных. Информация об исходных данных может быть задана с большей или меньшей точностью, и такая неопределенность не должна существенно повлиять на результаты исследования. Известны правила, способствующие обеспечению этой устойчивости. Так, например, не следует вычитать близкие друг к другу приближенные значения величины, так как такое вычитание приводит к резкому возрастанию относительной погрешности.

Желательно также, хотя и не обязательно, выполнение свойства **наглядности** математической модели. По этим свойством понимается более или менее непосредственный, ясный, содержательный смысл ее компонент, дающий возможность наметить план решения математической задачи, а также сделать предположение относительно результата ее решения, что может значительно ускорить процедуру.

Основные принципы и подходы, определяющие требования, которым должна удовлетворять удачно построенная модель. Суть и назначение некоторых из этих требований рассмотрим ниже.

1. Адекватность (тождественность) модели. Этот принцип определяет требование соответствия модели системе-оригиналу по совокупности исследуемых свойств, по уровню их сложности и организации. Естественно говорить не просто об адекватности модели, а о большей или меньшей адекватности. Адекватность следует рассматривать только по определенным признакам – свойствам, принятым в данном исследовании.

2. Соответствие модели решаемой задаче. Этот принцип подчеркивает целесообразность конструирования специализированных моделей для решения конкретной задачи. Разработка универсальной модели для решения многих разнообразных задач в большинстве случаев оказывается трудновыполнимой, а сама модель оказывается практически непригодной.

3. Соответствие сложности модели и требований исследования существенных свойств системы-оригинала, а также точности результатов моделирования. Этот принцип определяет целесообразность уменьшения сложности модели за счет абстрагирования от несущественных деталей, поскольку модель в общем случае должна быть проще исследуемой системы.

4. Конструирование модели в виде отдельных достаточно самостоятельных, законченных элементов (блоков). Использование этого принципа облегчает разработку сложных систем за счет многократного использования одних и тех же блоков и обеспечения связей между ними. Структуризация блоков в основном осуществляется в соответствии с выполняемыми ими функциями.

5. Многовариантность построения элементов (блоков) модели исходя из предъявляемых к ним требованиям, прежде всего по точности выходных параметров. Многовариантность элементов обеспечивает рациональное построение модели системы в целом.

3. Классификация моделей. Типы математических моделей

Обычно модель отражает структуру моделируемого объекта и существенные для целей исследования свойства и взаимосвязи компонент этого объекта. Такую модель называют **структурной**.

Если в модели отражается только то, как объект функционирует, то она называется **функциональной** или **черным ящиком**. Возможны также модели **комбинированного** типа.

По **признаку полноты** можно выделить *полные, неполные и приближенные модели*.

Полные модели должны быть полностью идентичны исследуемой системе, т. е., по сути, являются точной ее копией. В неполных и приближенных моделях только некоторые стороны реальной системы (объекта, процесса, явления), существенные для поставленной цели исследования, являются идентичными модели. При этом исследователи стремятся к тому, чтобы модель адекватно отображала только исследуемые аспекты системы.

В зависимости от формы реализации носителя модели классифицируются на **мысленные и реальные**. Рассмотрим мысленные модели.

Мысленные модели применяются тогда и только тогда, когда реальные модели не могут быть реализованы в заданном интервале времени либо отсутствуют условия для их физического создания. Мысленные модели являются отражением или воображением в человеческом сознании моделируемой системы. В зависимости от требуемой глубины исследования данный класс моделей может принимать различные виды, которые отражают или представляют и воображают систему на уровне понятий, суждений, умозаключений. Мысленные модели реальных систем реализуются в виде *наглядных, символических и математических* моделей.

Наглядные модели отображают явления и процессы, протекающие в системе. Примеры таких моделей – учебные плакаты, рисунки, схемы, диаграммы, топографические карты и т. д.

Символические модели являются некоторыми искусственно созданными логическими объектами, замещающими реальные объекты и выражающими их основные свойства с помощью определенной системы знаков и символов. К этому виду моделей относятся словесные (вербальные, концептуальные) модели, которые, по сути, представляют собой отдельные мысленные модели, выраженные в форме речи или словесной записи.

Математические модели, как уже отмечалось, представляют собой системы математических символов, между которыми установлены математические отношения, описывающие свойства моделируемой системы. Наибольший эффект от применения математических моделей может быть достигнут в том случае, если система достаточно хорошо осмыслена, предварительно изучена и описана на вербальном уровне. Также определены цель исследования и доступные для измерения показатели свойств системы. В противном случае применение математической модели может оказаться не полезным, а вредным. Она будет отвлекать внимание от главных вопросов исследования к второстепенным вопросам и сводиться к бессмысленному жонглированию математическими символами. Математические модели могут иметь различные формы записи. Основными из них являются инвариантная, аналитическая и алгоритмическая формы.

Инвариантная форма реализуется с помощью обычного математического языка. В этом случае модель реализуется как совокупность входов, выходов системы, переменных ее состояния и математических отношений между ними.

Аналитическая форма является результатом решения исходных уравнений модели. В этой форме реализуются зависимости выходных параметров как функций входов и переменных состояния. Для аналитического моделирования характерно то, что в основном моделируется только функциональный аспект системы. При этом зависимости, описывающие алгоритм функционирования исследуемой системы, записываются в виде некоторых алгебраических, интегрально-дифференциальных, конечно-разностных и других уравнений или логических условий.

Математически эта форма записи модели может быть исследована различными методами:

аналитическим, в том случае, когда возможно получить в общем виде зависимости искомых характеристик от параметров и переменных, описывающих состояния системы;

численным, когда отсутствуют методы аналитического решения математических зависимостей, заложенных в модели. Результаты исследования получаются за счет применения различных численных методов решения математических задач, при заданных начальных условиях;

качественным, когда также невозможно получить решение в явном виде, а требуется лишь оценить некоторые свойства решения (например, устойчивость решения или область применения полученных характеристик и т. д.).

Алгоритмическая форма математической модели обеспечивает получение числовых значений характеристик исследуемой системы за счет разработки и реализации соответствующего алгоритма.

По цели моделирования следует различать имитационные (анализирующие) и оптимизационные (синтезирующие) модели.

Имитационные модели представляют собой математические зависимости, описывающие структуру и поведение системы при различных воздействиях окружающей среды. Данный тип моделей используется для анализа и выявления существенных системных свойств, недоступных непосредственному наблюдению, для прогнозирования поведения системы в различных ситуациях. Использование метода имитационного моделирования позволяет оценивать, сравнивать и выбирать варианты структуры системы, оценивать эффективность различных алгоритмов функционирования системы, а также влияние изменения различных параметров системы на ее выходные характеристики.

Преимуществом имитационного моделирования по сравнению с аналитическим является возможность решения более сложных задач. Имитационные модели позволяют достаточно просто учитывать такие факторы, как нелинейность характеристик элементов системы, многочисленные случайные воздействия со сложными законами распределения вероятностей их характеристик, наличие сложных комбинаций дискретных и непрерывных элементов и др., которые часто создают трудности при аналитических исследованиях.

При имитационном моделировании воспроизводится алгоритм функционирования системы во времени, причем поэтапно имитируются

состояния системы, составляющие процесс, с сохранением их логической структуры и последовательности протекания, что позволяет по исходным данным получить сведения о состоянии процесса функционирования системы, а, следовательно, оценить характеристики системы.

Одним из наиболее часто используемых методов имитационного моделирования является метод статистических испытаний (Метод Монте-Карло). Этот метод состоит в многократном воспроизведении случайных процессов, которые формируются таким образом, чтобы их вероятностные характеристики совпадали с аналогичными характеристиками исследуемой системы. После завершения экспериментов полученная информация обрабатывается методами математической статистики с целью получения оценок требуемых характеристик.

Модели можно разделить на линейные и нелинейные.

Линейная зависимость одной величины от другой характеризуется пропорциональностью их приращений. В действительности практически все зависимости являются линейными лишь приближенно, но в соответствующих, обычно устанавливаемых эмпирически диапазонах изменения величин предположение о линейности выполняется с хорошей точностью и в то же время существенно упрощает исследование. Аналогичным образом определяется понятие «линейная модель». Оно применяется для моделей объектов, рассматриваемых как преобразователи, для которых каждому входу соответствует некоторый выход.

Будем считать, что начала отсчета входа и выхода выбраны так, что нулевому входу соответствует нулевой выход. Тогда модель считается линейной, если в ней выполнен принцип суперпозиции (наложения), т. е. при сложении входов складываются и выходы, а при умножении входа на любое число выход умножается на такое же число. Если этот принцип не выполняется, то модель считается нелинейной.

Выгоды линейности иногда столь велики, что приближенная замена нелинейных соотношений на линейные, т. е. *линеаризация* соотношений, весьма распространена. Такая *линеаризация обычно проводится в двух случаях*:

- 1) эксперимент показывает, что отклонение от линейности в рассматриваемых диапазонах изменения переменных невелико и несущественно;
- 2) эти диапазоны малы, и мы заменяем приращения переменных на дифференциалы, отбрасывая члены высшего порядка малости.

Математическая модель может включать случайные компоненты – случайные скалярные или векторные величины, случайные последовательности или функции, случайные структуры и т. п., удовлетворяющие вероятностным законам. ***Такие модели называются вероятностными или стохастическими.***

Вероятностные модели изучаются с помощью методов теории вероятностей. Довольно часто бывает, что вероятностные характеристики случайных компонентов (математическое ожидание и дисперсия) случайных величин, законы их распределения, а также аналогичные характеристики случайных функций оказываются известными с весьма невысокой точностью

или даже вовсе неизвестными, т. е. модель не удовлетворяет требованию продуктивности.

Возможна также классификация моделей и по другим признакам.

Так различают *статические* и *динамические* модели. Статическая модель отражает состояние системы в данный момент времени. Динамическая модель характеризует изменение рассматриваемого объекта во времени. Промежуточное место занимают *квазистатические, стационарные и квазистационарные* модели.

В *квазистатической* модели принимается, что изменение объекта происходит столь медленно, что при рассмотрении ситуации в каждый момент можно в первом приближении считать объект статическим, а время считать добавочным параметром.

В *стационарной* модели считается, что процессы происходят, но характеристики изучаемого объекта во времени не меняются.

В *квазистационарной* модели имеет место относительно медленное изменение характеристик процессов, вследствие чего возможно при принятии долгосрочных управленческих решений опираться на текущие показатели.

ЛЕКЦИЯ № 4. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СРЕДСТВА ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

1. Математическая постановка задачи принятия решений

Основным инструментом теории принятия решений являются математические модели. Несмотря на их большое разнообразие, существуют важнейшие элементы, которые присутствуют практически во всех моделях. Так, например, в любой деятельности для достижения поставленной цели ЛПР должно иметь некоторый запас ресурсов (например, минеральное сырье, техническое оборудование, деньги, рабочую силу, вычислительную технику и т. д.).

В математической модели исследуемой системы или процесса **соответствующий элемент** (ресурс) принято называть *активным средством*. Действия, направленные на достижение поставленной цели, представляют собой способы использования активных средств. Соответствующий элемент математической модели называют *решением* или *стратегией* и обычно обозначают переменной x .

Переменная x может быть скалярной величиной, вектором, или функцией. Стратегии являются факторами, влияющими на ход операции, контролируемые ЛПР. Кроме того, существуют *неконтролируемые факторы*, влияющие на ход операции, которыми ЛПР не распоряжается. К ним можно отнести, например, природные условия.

Неконтролируемые факторы обозначают переменной y . Общее описание модели должно включать также сведения об информированности ЛПР о ситуации, в которой осуществляется функционирование системы или процесса,

т. е. о значениях *неконтролируемых факторов*. Значит информация в данном случае – это совокупность данных о значениях *неконтролируемых факторов*. Исходя из информированности ЛПР *неконтролируемые факторы* можно разбить на три группы: **фиксированные, случайные, неопределенные**.

Фиксированные *неконтролируемые факторы* – это такие факторы, значение которых точно известны ЛПР.

Случайные *неконтролируемые факторы* представляют собой случайные величины, законы (функции) распределения которых точно известны ЛПР.

Неопределенные *неконтролируемые факторы* являются детерминированными или случайными величинами, относительно которых ЛПР известна лишь область возможных значений или класс возможных законов распределения.

Ход операции можно описать некоторым набором фазовых переменных. Степень соответствия хода операции поставленной цели в математической модели характеризуется **критерием эффективности W** , который представляет собой некоторую функцию (в общем случае, вектор-функцию), зависящую от фазовых переменных, стратегий и *неконтролируемых факторов*. Синонимами критерия эффективности являются: **функция полезности, функция выигрыша, целевая функция**. Эквивалентом цели функционирования в математической модели является, как правило, **требование максимизации критерия эффективности**.

Существует различная классификация математических моделей. В частности, модели могут быть **динамическими**, в которых явно присутствует переменная времени и **статическими**, в которых этой переменной нет.

В реальности все процессы протекают во времени, поэтому динамические модели более точно описывают действительность. Однако для проведения исследования часто ограничиваются простыми статическими моделями. При этом стратегию и воздействие *неконтролируемых факторов* *представляют в виде единичного акта, фазовые переменные исключают*, а критерий эффективности *представляют, как функцию стратегий и контролируемых факторов*, т. е. как $W = F(x, y)$.

Переход от динамической формы модели к статической называют **нормализацией**. Практически в ходе исследования можно сразу строить статическую модель, минуя динамическую. Несмотря на внешнюю простоту этого выражения, связь между значениями критерия, стратегии и *неконтролируемого фактора* может быть весьма сложной. Иногда ее не удается представить в явном виде. В этом случае она задается с помощью промежуточных соотношений или в виде алгоритма.

С учетом сказанного получаем **математический объект $\{W, x, y\}$** , где $x \in X$ – множество (пространство) допустимых решений (стратегий), $y \in Y$ – множество значений *неконтролируемых факторов*. **Его называют статической (нормальной) формой математической модели**. Пространство X определяется ограничениями по имеющимся ресурсам, информации и действующими институтами. Под институтами понимают созданные людьми

рамки (нормы, правила), которые структурируют политические, экономические, социальные взаимодействия.

Содержательно всякая задача принятия решений является оптимизационной. То есть она состоит в выборе из некоторого множества допустимых решений таких, которые можно в том или ином смысле квалифицировать как оптимальные.

Допустимость каждого решения понимается в смысле возможности его фактического существования, а **оптимальность** – в смысле целесообразности. Допустимость того или иного решения определяется возможностью реализации соответствующих действий при имеющихся ресурсах.

Ограниченность ресурсов выражается в виде математических ограничений, чаще всего имеющих вид равенств и неравенств. **Оптимальность, целесообразность решения предполагает** наличие в каждой задаче принятия решений некоторой системы целей, описываемых критериями эффективности, и **принципа оптимальности** (иногда называемого критерием оптимальности).

Формально **принципом оптимизации π_0** называется отображение множества всех допустимых решений X в некоторое его подмножество, определяемое как множество оптимальных решений $\{x^0\}$:

$$\pi_0: X \rightarrow \{x^0\}.$$

Чаще всего оно определяется требованием максимизации (или минимизации) одной или нескольких числовых функций (критериев эффективности), значения которых выражают степень осуществления целей при соответствующем допустимом решении. Иногда эффективность определяется отношением предпочтения, когда применительно к парам допустимых решений указывается, какое из решений этой пары предпочтительней.

Для построения математической модели исследуемой системы или процесса в общем случае рекомендуется выполнить следующую последовательность работ:

- изучение условий задачи и определение важнейших факторов;
- выявление управляемых и неуправляемых факторов;
- анализ информации о значениях параметров и дополнение условий задачи недостающими сведениями;
- составление математической модели (математическое выражение целевых функций, соотношений и связей между параметрами);
- определение критерия (принципа) оптимальности (в общем случае нетривиальный и ответственный этап) и формулировка задачи.

2. Принципы оптимальности

Основная задача ЛПР состоит в сравнении между собой различных решений и выборе наилучшего из них. При этом возникает вопрос: на основании чего их сравнивать? Первое что приходит на ум – с помощью критерия эффективности. Однако, на самом деле для сравнения решений критерия эффективности достаточно только в том случае, когда в задаче нет

неконтролируемых факторов. В случае наличия случайных или неопределенных неконтролируемых факторов сравнивать между собой решения непосредственно с помощью критерия эффективности **нельзя**.

Для сравнения решений (стратегий) при наличии неконтролируемых факторов удобнее всего иметь численную оценку каждой стратегии.

Оценка, ставящая в соответствие каждой стратегии x действительное число, т. е. оценка, являющаяся функцией переменной x , называется **оценкой эффективности стратегии**.

Если имеется только фиксированный неконтролируемый параметр, т. е. y принимает известное исследователю операции значение y^0 , то критерий эффективности $W = F(x, y^0)$ будет являться лишь функцией от x .

Введем обозначение $f_0(x) = F(x, y^0)$. Величина $f_0(x)$ может служить оценкой эффективности стратегии. При этом стратегия x_1 будет лучше стратегии x_2 , если выполняется условие $f_0(x_1) > f_0(x_2)$. Аналогично определяется в этом случае и наилучшая (**оптимальная**) стратегия. **Оптимальной является стратегия x^0** , для которой выполняется условие $f_0(x^0) \geq f_0(x) \forall x \in X$.

Допустим, что имеют место случайные или неопределенные факторы. В этом случае для фиксированной стратегии x^* критерий эффективности $W = F(x^*, y)$ является функцией от y , а не фиксированным числом. Следовательно, он не может служить оценкой эффективности. *Каждой стратегии в данном случае соответствует не одно, а несколько значений критерия эффективности, поэтому результат сравнения стратегий с помощью критерия эффективности оказывается неопределенным.*

Далее рассмотрим вопросы построения оценок эффективности, которые, вообще говоря, могут вводиться различным образом. Определение вида оценки эффективности и связанного с ней понятия (принципа, критерия) оптимальности представляет собой элемент постановки задачи и является в конечном счете правом исследователя. Однако существуют наиболее распространенные и обоснованные оценки эффективности, зависящие от вида неконтролируемых факторов.

Если имеется случайный неконтролируемый фактор, представляющий собой случайную величину с известным исследователю операции законом распределения, то в качестве оценки эффективности чаще всего используется **математическое ожидание критерия эффективности**.

Пусть неконтролируемый фактор y принимает n значений $y_1, \dots, y_n$ с вероятностями $p_1, \dots, p_n$, тогда математическое ожидание определяется по формуле $M_y F(x, y_i) = \sum_{i=1}^n p_i F(x, y_i)$. Значит, в качестве оценки эффективности стратегии берется функция $f_0(x) = \sum_{i=1}^n p_i F(x, y_i)$.

Такая оценка эффективности называется оценкой в среднем, так как значение случайной величины при большом числе испытаний приближается к ней. При использовании этой оценки имеется определенный риск получения в каждом конкретном случае меньшего результата, чем тот, на который рассчитывали, и в этом надо отдавать себе отчет.

Только в среднем при многократном проведении исследования мы можем с достаточной уверенностью рассчитывать на получение при использовании некоторой стратегии результата, равного оценке в среднем этой стратегии. Таким образом, если исследование повторяется много раз, указанный риск оправдан, но при единичном исследовании вряд ли на него можно пойти. Это значит, что использование статистических данных в единичных (уникальных) ситуациях фактически ничего не дает.

При использовании оценки в среднем принцип оптимальности определяется следующим образом:

x^0 оптимальна в среднем на пространстве X , если $f_0(x^0) \geq f_0(x) \forall x \in X$.

Рассмотрим *случай неопределенных неконтролируемых факторов*. Относительно неопределенного неконтролируемого фактора y известна только область его возможных значений Y . Поэтому при применении стратегии x можно ожидать, что критерий примет произвольное значение в интервале от

$$A = \min F(x, y) \text{ до } B = \max F(x, y) \forall y \in Y.$$

При этом считается, что максимумы и минимумы функций существуют. Оценка эффективности стратегии x по смыслу должна принадлежать отрезку $[A, B]$. Однако неясно, как выбрать на нем одно единственное число. Можно ли быть уверенным, что при применении стратегии x в данной ситуации получится значение критерия эффективности больше A ? Очевидно, что нет. Только значение A можно твердо гарантировать. Следовательно, разумным будет взять это значение в качестве оценки эффективности стратегии x , т. е. положить, что $f_{\Gamma}(x) = \min_{y \in Y} F(x, y)$.

Такая оценка называется *гарантированной оценкой эффективности*. Этой оценке соответствует понятие оптимальной гарантирующей стратегии, т. е. такой x^0 , для которой $f_{\Gamma}(x^0) \geq f_{\Gamma}(x) \forall x \in X$.

Величина $F_{\Gamma}(x) = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} F(x, y)$ называется *максимальным*

гарантированным результатом на множестве X . Такое выражение принято называть максимином или минимаксом (при перестановке процедур максимизации и минимизации) функции.

Мы рассмотрели только два наиболее распространенных принципа оптимальности. Однако, следует иметь в виду, что в задачах принятия решений в условиях *многокритериальности, случайности и неопределенности* существует множество принципов оптимальности.

В теории принятия решений принципиально нет единого принципа оптимальности.

3. Классификация задач принятия решений

Таким образом, мы познакомились с общими принципами математического моделирования процессов принятия решений и основной задачей принятия решений, которая состоит в *сравнении между собой стратегий и выборе из них наилучшей в том или ином смысле*. Эта задача для

общей модели является слишком сложной для того, чтобы можно было получить конкретные результаты. Поэтому в общем случае можно только говорить о принципах сравнения стратегий, связанных с выбором вида оценки эффективности, и соответствующих им понятиях оптимальности. **Методов нахождения оптимальных стратегий, без которых нельзя говорить о практическом использовании теории принятия решений, для общей модели не существует.**

Поэтому в теории принятия решений выделяют классы задач, представляющие собой частные случаи основной задачи, для которых такие методы могут быть созданы.

Классы задач теории принятия решений. Классификацию проводят по двум признакам:

- по видам неконтролируемых факторов;
- по видам критерия эффективности и пространства стратегий.

Наиболее простую группу задач принятия решений составляют такие задачи, в которых **неконтролируемые факторы отсутствуют** или **имеются только фиксированные неконтролируемые факторы**. Раздел принятия решений, посвященный изучению подобных задач, называется математическим программированием, а сами задачи – **задачами математического программирования**.

Внутренняя классификация в разделе математического программирования связана с видом критерия эффективности и пространства стратегий.

Если критерий эффективности представляет собой линейную функцию от переменных, описывающих стратегии, а пространство стратегий является системой линейных ограничений, т. е. представляет собой многогранное множество, то имеет место **задача линейного программирования**.

Если, исходя из содержательного смысла задачи, ее решения должны быть целыми числами, то получаем **задачу целочисленного программирования**. Обычно в целочисленных задачах критерий и остальные ограничения предполагаются линейными, поэтому целочисленные задачи можно условно отнести к линейному программированию.

Если критерий эффективности или ограничения, задающие пространство стратегий, являются нелинейными функциями, то имеем **задачу нелинейного программирования**.

В частности, если критерий эффективности и пространство стратегий обладают свойствами выпуклости, то получается **задача выпуклого программирования**.

Если в задаче математического программирования имеется переменная времени и критерий эффективности выражается не в явном виде как функция от стратегий, а косвенно через уравнения, описывающие развитие процесса протекания операции во времени, то такая задача относится к **задачам динамического программирования**.

Линейное программирование (включая целочисленное программирование), нелинейное программирование (включая классические

экстремальные задачи и выпуклое программирование) и динамическое программирование **являются основными разделами математического программирования.**

Математические модели некоторых исследуемых явлений или процессов могут включать совокупность (комплекс) частных критериев эффективности системы. Такую задачу (*отсутствие единого критерия*) можно трактовать как задачу принятия решений в условиях неопределенности цели.

Выбор оптимального решения по комплексу нескольких критериев является задачей **многокритериальной (векторной) оптимизации.**

При наличии неконтролируемых факторов более сложных видов (случайных и неопределенных) возникают другие классы задач.

Если **имеются неопределенные неконтролируемые факторы**, то при использовании гарантированной оценки эффективности получаются **максиминные** (или **минимаксные**) задачи. В целом такие задачи представляют собой **обобщение задач математического (нелинейного) программирования.**

Среди задач с неопределенными неконтролируемыми факторами наиболее интересными являются **задачи, в которых неопределенность связана с действиями других разумных участников**, преследующих свои цели. Раздел теории принятия решений, занимающийся изучением подобных задач, называется **теорией игр**. Игровые задачи также имеют свою классификацию, в соответствии с которой выделяется несколько подразделов теории игр.

Практически всегда **при принятии управленческих решений** имеет место **ситуация неоднозначности исхода как следствие неполноты информации** о внешней среде. В этом случае говорят о принятии решений в условиях риска или об управлении риском. Неполнота информации связана с наличием случайных или неопределенных неконтролируемых факторов.

Иногда риск понимают в более узком смысле как совокупность различных обстоятельств и условий, создающих обстановку, для которой **имеется возможность определить вероятность осуществления того или иного исхода**. С этой точки зрения определенность и неопределенность представляют собой два крайних случая, а риск занимает промежуточную ситуацию.

ЛЕКЦИЯ № 5. ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ ПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ. СТАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ

1. Основные понятия оптимизации

Рассмотрим процесс принятия решений в условиях наличия полной информации. В этом случае математическая модель задачи выбора управленческих решений представляет собой **задачу оптимизации.**

Пусть заданы множество X и функция $f(x)$, определенная на X .

Задачей оптимизации называется задача определения точек максимума (или минимума) функции $f(x)$ на X .

Задача оптимизации записывается в виде $f(x) \rightarrow \max, x \in X$ или $\max_{x \in X} f(x)$.

Функцию $f(x)$ в этом случае называют целевой функцией (критерием эффективности), X – допустимым множеством, а любой элемент $x \in X$ – допустимой точкой данной задачи оптимизации.

Точка x^0 называется точкой **глобального (абсолютного) максимума** функции $f(x)$ на множестве X , или глобальным решением задачи $\max_{x \in X} f(x)$, если $f(x^0) \geq f(x)$ при всех $x \in X$.

Обозначается $f(x^0) = \max_{x \in X} f(x)$ или $x^0 = \arg \max_{x \in X} f(x)$.

Множество всех точек глобального максимума функции $f(x)$ на множестве X обозначим $\text{Arg} \max_{x \in X} f(x) = \{x^0 \in X \mid f(x^0) = \max_{x \in X} f(x)\}$.

Точка x^0 называется точкой **локального максимума** функции $f(x)$ на множестве X , или локальным решением задачи $\max_{x \in X} f(x)$, если существует $U_\varepsilon(x^0)$ -окрестность точки x^0 такая, что $f(x^0) \geq f(x)$ для всех $U_\varepsilon(x^0) \cap X$.

Определения **глобального и локального минимумов** получаются заменой в определениях глобального и локального максимумов знаков неравенств на противоположные. Глобальное решение является одновременно и локальным. Обратное утверждение неверно.

Точки максимума и минимума функции называют также точками экстремума, а сами задачи оптимизации – **экстремальными задачами**. Задачу определения точек экстремума обозначают $f(x) \rightarrow \text{extr}, x \in X$. Значение целевой функции в экстремальной точке называется значением задачи или экстремальным значением.

Рассмотрим **конечномерные задачи оптимизации** ($X \subset R^n$).

Задача оптимизации называется **задачей безусловной оптимизации**, если $X = R^n$, т. е. рассматриваются точки экстремума $f(x)$ на всем n -мерном пространстве, и задачей **условной оптимизации**, если X – собственное подмножество R^n .

Точками пространства R^n являются упорядоченные совокупности из n вещественных чисел $x=(x_1, \dots, x_n), y=(y_1, \dots, y_n), z=(z_1, \dots, z_n)$.

В задачах оптимизации одним из самых важных является вопрос существования решения. Этому вопросу посвящена теорема Вейерштрасса о существовании глобального максимума.

Теорема 5.1. (теорема Вейерштрасса). Если X – замкнутое ограниченное множество в R^n , $f(x)$ – непрерывная функция на множестве X , то точка глобального максимума (минимума) $f(x)$ на X существует.

Из условий теоремы Вейерштрасса наиболее обременительным является ограниченность множества X , довольно часто из постановки задачи она не вытекает, а для задачи на безусловный экстремум заведомо не выполняется. Поэтому полезной является следующая модификация этой теоремы.

Следствие 5.1. Если X – замкнутое множество в R^n , $f(x)$ – непрерывная функция на множестве X и ограничено множество $\{x \in X \mid f(x) \geq c\}$, где

c – некоторая константа, меньшая верхней грани $f(x)$ на X , то точка глобального максимума $f(x)$ на X существует.

Необходимое условие экстремума (максимума или минимума) для задачи безусловной оптимизации дает следующая теорема.

Теорема 5.2 (принцип Ферма). Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x^0 \in R^n$. Если x^0 – локальное решение задачи $f(x) \rightarrow \text{extr}$, $x \in R^n$, то

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_j} = 0, j = 1, \dots, n. \quad (5.1)$$

Условие (5.1) или эквивалентное ему

$$f'(x^0) = 0, \quad (5.2)$$

где $f'(x^0) = \left(\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_n} \right)$ – градиент функции $f(x)$ в точке x^0 ,

называется условием локального экстремума первого порядка, так как использует первые частные производные. Оно является необходимым, но недостаточным, т. е. ему могут удовлетворять и точки, не являющиеся экстремумами (все эти точки называются стационарными).

Для выявления посторонних стационарных точек используется необходимое условие локального экстремума второго порядка (использующие вторые производные).

Будем считать $f(x)$ дважды дифференцируемой и введем матрицу ее вторых частных производных, называемую матрицей Гессе:

$$f''(x) = \left(\frac{\partial^2 f(x^0)}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1 \dots n}^n. \quad (5.3)$$

Это квадратная симметрическая матрица порядка n .

Теорема 5.3 (необходимые условия локального максимума второго порядка). Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в точке x^0 . Если x^0 – локальное решение задачи $f(x) \rightarrow \text{max}$, $x \in R^n$, то матрица $f''(x^0)$ неположительно определена, т. е. $hf''(x^0)h \leq 0$ для любого $h \in R^n$.

Достаточное условие локального экстремума содержит усиление требований на матрицу Гессе.

Теорема 5.4 (достаточные условия локального максимума второго порядка). Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в точке x^0 , $f'(x^0) = 0$ и матрица $f''(x^0)$ отрицательно определена, тогда x^0 – строгое локальное решение задачи $f(x) \rightarrow \text{max}$, $x \in R^n$.

В задачах принятия решений часто требуется, чтобы компоненты стратегии x были неотрицательны. Задача максимизации функции при наличии простейших ограничений имеет вид $f(x) \rightarrow \text{max}$, $x \in R_+^n$.

Для точек с положительными координатами все условия экстремума сохраняются, так как это внутренние точки допустимого множества. Для граничных точек, т. е. векторов, у которых некоторые координаты равны нулю, принцип Ферма *видоизменяется следующим образом*:

если какая-то координата точки обращается в нуль, то условие равенства нулю частной производной по этой координате заменяется на условие ее неположительности.

2. Нелинейное программирование

Во многих задачах оптимизации, связанных с проблемами принятия решений в технике, экономике, экологии, финансах и т. д., связи являются нелинейными. Поэтому становится ясной необходимость изучения нелинейных моделей принятия решений и методов их анализа. Остановимся на случае ограничений типа неравенств, которые изучаются в рамках математического программирования.

Общей задачей математического программирования называется задача условной оптимизации вида

$$f(x) \rightarrow \max, \quad g_i(x) \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad x \in P, \quad (5.4)$$

где P – некоторое непустое подмножество n -мерного евклидова пространства.

В качестве P обычно рассматривается множество простой структуры, например, координатный параллелепипед, частные случаи которого есть $P = R_+^n$ или $P = R^n$.

Условия типа $g_i(x) \geq 0$ называют ограничениями-неравенствами; условие $x \in P$ называется прямым ограничением.

Вообще говоря, в задаче могут быть одновременно ограничения типа равенств и неравенств. Однако такую задачу можно преобразовать к указанному виду.

Действительно, ограничение вида равенства $g(x) = 0$ можно заменить двумя ограничениями вида неравенств $g(x) \geq 0, -g(x) \geq 0$, а ограничение вида $g(x) \leq 0$ можно заменить на $-g(x) \geq 0$, т.е. система ограничений-неравенств задачи (5.4) имеет общий вид. Практически при решении нелинейных задач равенства на неравенства не заменяют, а используют, например, известный из курса математического анализа метод множителей Лагранжа.

Для задачи (5.4) можно построить функцию Лагранжа (по аналогии со случаем ограничений типа равенств):

$$L(x, y) = f(x) + \sum_{i=1}^m y_i g_i(x), \quad (5.5)$$

где $y = (y_1, \dots, y_m)$ – вектор множителей Лагранжа.

Метод множителей Лагранжа заключается в замене задачи условной максимизации функции $f(x)$ безусловной оптимизацией функции Лагранжа.

3. Линейное программирование

Если целевая функция линейна и допустимое множество задано линейными ограничениями, то задача математического программирования называется **задачей линейного программирования**.

Задачей линейного программирования (ЛП) в *стандартной* форме называется задача

$$cx \rightarrow \max, \quad Ax \leq b, \quad x \geq 0,$$

$$\text{где } x \in R^n, c \in R^n, b \in R^m, A - \text{матрица размера } m \times n. \quad (5.6)$$

Пример 5.1 (задача планирования производства). Пусть имеется три вида продуктов R_1, R_2, R_3 , которые могут быть использованы для производства двух видов товаров T_1, T_2 . Для производства единицы товара T_j необходимо затратить

a_{ij} количества ресурса R_i , $i = 1, 2, 3, j = 1, 2$. Матрица $A = (a_{ij})_{3 \times 2}$ называется технологической матрицей. Известна цена c_j на товар T_j и запасы b_i ресурса R_i . Вектора $b = (b_1, b_2, b_3)$ $c = (c_1, c_2)$ называются соответственно векторами ресурсов и цен. Требуется выбрать такой план производства товаров, который в условиях заданных ограничений на ресурсы максимизирует валовое производство (стоимость выпущенной продукции). Построим математическую модель задачи. Пусть x_j – производимое количество товара вида T_j , тогда вектор $x = (x_1, x_2)$ – производственный план предприятия. На производство всех видов товаров ресурс R_1 будет израсходован в количестве $a_{11}x_1 + a_{12}x_2$, ресурс R_2 – в количестве $a_{21}x_1 + a_{22}x_2$ и ресурс R_3 – в количестве $a_{31}x_1 + a_{32}x_2$. Стоимость выпущенной продукции равна $c_1x_1 + c_2x_2$. По смыслу задачи ясно, что x_1 и x_2 неотрицательны. С учетом ограничений по запасам ресурсов получаем задачу

$$c_1x_1 + c_2x_2 \rightarrow \max, \quad a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Для задачи ЛП используют следующую терминологию. Стратегию – переменную x – называют планом. План, удовлетворяющий всем ограничениям, называют *допустимым планом*, точку максимума или минимума – *оптимальным планом*.

Математические модели задач ЛП могут иметь различную форму:

- на максимум и минимум;
- ограничения в виде неравенств;
- неравенства «больше или равно» (меньше или равно);
- неравенства смешанных типов.

Все эти задачи обладают общими свойствами и сводятся одна к другой стандартными преобразованиями. Например, в задаче ЛП в стандартной форме для записи неравенства в форме равенства требуется введение новой переменной определенного знака. Применив этот прием ко всем ограничениям – неравенствам получаем задачу ЛП *в канонической форме* записи:

$$cx \rightarrow \max, Ax = b, x \geq 0.$$

Для любой конкретной задачи ЛП возможны три случая:

а) допустимых планов нет, т. е. множество допустимых планов пусто, тогда задача не имеет решения;

б) множество допустимых планов не пусто, но на этом множестве целевая функция не ограничена сверху (для задачи на максимум) или снизу (для задачи на минимум), тогда задача не имеет решения;

в) множество допустимых планов не пусто, и целевая функция ограничена (соответственно сверху или снизу), тогда задача имеет решение (существует оптимальный план).

Пример 5.2. Решить графическим методом задачу ЛП:

$$x_1 + x_2 \rightarrow \max, \quad x_1 + 2x_2 \leq 1, \quad 2x_1 + x_2 \leq 1, \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Множество допустимых планов X представляет собой четырехугольник с вершинами $(0, 0)$, $(0, 1/2)$, $(1/2, 0)$, $(1/3, 1/3)$. На рисунке 5.1 множество X заштриховано. Линии уровня целевой функции $x_1 + x_2$ – семейство прямых $x_1 + x_2 = C$. Одна из линий уровня (на которой она принимает одно и то же

значение) изображена пунктирной прямой. Направление возрастания функции $x_1 + x_2$ указывает вектор $f(x) = (1, 1)$, изображенный на рисунке 5.1.

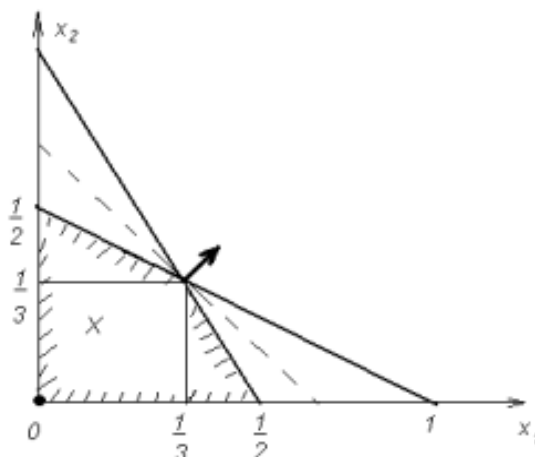


Рисунок 5.1 – Графический метод решения

Так как множество X замкнуто и ограничено, а целевая функция непрерывна, то по теореме Вейерштрасса задача имеет решение. Линия уровня функции $x_1 + x_2$ на многоугольнике X проходит через вершину с координатами $x_1^0 = x_2^0 = \frac{1}{3}$, целевая функция в этой точке принимает максимальное значение.

Из геометрических представлений ясно, что если решение существует, то оно не может быть внутренней точкой, а должно принадлежать границе допустимого множества.

Множество решений системы линейных неравенств является *выпуклой многогранной областью*. Если это множество ограничено, то получаем выпуклый многогранник.

Крайние точки выпуклой многогранной области называются *вершинами*. В задаче ЛП вершину допустимого множества называют также *опорным планом*.

Теорема 5.5. Если задача ЛП имеет решение, то существует вершина допустимого множества, которая является оптимальным планом.

В силу теоремы 5.5 для нахождения решения задачи ЛП достаточно ограничиться перебором угловых точек или вершин допустимого множества.

На этом основан *симплекс-метод*, или иначе, метод последовательного улучшения плана. Алгоритм симплекс-метода осуществляет направленный перебор вершин, т. е. для задачи на максимум переходит от опорного плана с меньшим значением целевой функции к опорному плану с большим значением целевой функции. Этот процесс конечен, т. е. за конечное число шагов находится решение задачи ЛП, либо выясняется, что она не имеет решения.

Многие задачи ЛП можно сформулировать в виде так называемой **транспортной задачи**. Имеется m пунктов производства некоторого продукта. В пункте i продукт производится в количестве a_i , $i = 1, \dots, m$. Имеется n пунктов потребления продукта с потребностями b_j , $j = 1, \dots, n$. Будем считать выполненным условие *баланса*: $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$. Обозначим через c_{ij} стоимость перевозки единицы продукции из i -го пункта производства в j -й пункт потребления. Пусть требуется выполнить перевозку продукта из пунктов

производства в пункты потребления за минимальную стоимость. План перевозок можно задать матрицей $x = (x_{ij})_{m \times n}$, где x_{ij} – количество перевозимого продукта из i -го в j -й пункт. Получаем задачу

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min,$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, x_{ij} \geq 0, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n.$$

Для решения транспортной задачи используется специальный метод: **метод потенциалов**, который является частным случаем симплекс-метода.

Если все величины a_i и b_j целочисленны, то решение, определяемое методом потенциалов, также является целочисленным.

4. Дискретное программирование

Задачу оптимизации, в которой требуется, чтобы все или некоторые переменные принимали только целочисленные или дискретные значения, называют задачей целочисленного или дискретного программирования. Иначе говоря, задачей целочисленного или дискретного программирования называется задача $f(x) \rightarrow \max, x \in X, X$ – дискретное множество. Как правило, $X \subset Z^n$ – множество точек с целочисленными координатами или $X \subset B^n, B = \{0,1\}$ – множество точек, координаты которых принимают значение 0 или 1 (булевы переменные).

Пример 5.3 (задача о назначениях). Имеются n сотрудников, которые могут выполнять n работ, причем использование i -го сотрудника на j -й работе приносит доход c_{ij} ($i, j = 1, \dots, n$). Предполагается, что каждый сотрудник выполняет только одну работу и каждую работу может выполнять только один сотрудник. Требуется поручить каждому сотруднику выполнение определенной работы так, чтобы максимизировать суммарный доход.

Введем n^2 переменных: $x_{ij} = 1$, если i -й сотрудник выполняет j -ю работу, и $x_{ij} = 0$ в противном случае. Условие, что каждый сотрудник выполняет только одну работу, можно записать в виде системы равенств $\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, i = 1, \dots, n$.

Аналогично каждую работу выполняет только один сотрудник тогда и только тогда, когда выполняются равенства $\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, j = 1, \dots, n$. Получаем задачу

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \max,$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, i = 1, \dots, n, \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, j = 1, \dots, n, x_{ij} \in \{0,1\}.$$

Пример 5.4 (задача коммивояжера). Имеется n городов, занумерованных числами от 1 до n . Коммивояжер, выезжая из города 1, должен побывать в каждом городе ровно один раз и вернуться в исходный пункт. Известны расстояния между городами c_{ij} ($i, j = 1, \dots, n, i \neq j$). Требуется найти самый короткий маршрут.

Введем переменные: $x_{ij} = 1$, если в маршрут входит переезд из города i в город j , и $x_{ij} = 0$, в противном случае. Сразу очевидны ограничения

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, i = 1, \dots, n, \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, j = 1, \dots, n, (i \neq j), \quad (5.7)$$

которые отражают требования однократного въезда и выезда из каждого города. Однако эти ограничения еще полностью не описывают допустимые маршруты.

Дело в том, что они не исключают возможности разрыва пути, т.е. появления нескольких не связанных между собой подмаршрутов для части городов. Чтобы исключить такую возможность, обычно вводят дополнительные переменные $u_i, i = 1, \dots, n$, которые можно считать неотрицательными и целыми числами, и записывают еще $(n-1)^2 - (n-1)$ ограничений

$$u_i - u_j + nx_{ij} \leq n-1, i, j = 2, \dots, n, i \neq j. \quad (5.8)$$

Покажем, что ограничения (10) исключают возможность существования подмаршрутов. Действительно, если имеется подмаршрут, включающий k городов и начинающийся и заканчивающийся в одном в одном из них, то для соответствующих переменных, очевидно, выполняются соотношения

$$\sum_{i \in M} x_{ij} = 1, j \in M, \sum_{j \in M} x_{ij} = 1 i \in M,$$

где M – множество номеров городов, образующих подмаршрут.

Тогда суммируя неравенства (5.8) для индексов $i, j \in M$ и учитывая, что все величины u_i сокращаются вследствие связности и замкнутости подмаршрута, придем к противоречию: $kn \leq k(n-1)$. Необходимо еще показать, что ограничения (5.8) не исключают допустимый маршрут. Для этого положим число u_i равным порядковому номеру i по маршруту следования коммивояжера. Тогда для тех пар (i, j) , для которых $x_{ij} = 0$, неравенства (10) вытекают просто из условий $1 \leq u_i \leq n$, откуда следует, что $u_i - u_j \leq n-1$, а для тех пар (i, j) , для которых $x_{ij} = 1$, справедливы, очевидно, равенства $u_i - u_j = -1$ (город с номером j следует за городом с номером i), и неравенства (10) выполняются как равенства. Таким образом, задача коммивояжера состоит в минимизации целевой функции $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$ при ограничениях (5.7), (5.8) где переменные x_{ij}, u_i – неотрицательные числа.

В приведенных примерах, а также во многих прикладных задачах дискретной оптимизации критерий эффективности и фундаментальные ограничения являются линейными функциями. Отличие таких задач дискретной оптимизации от обычных задач линейного программирования состоит только в наличии дополнительных ограничений на значения переменных, целевая функция и основные ограничения по-прежнему линейны. Поэтому имеются достаточные основания для включения их в линейное программирование, тем более что некоторые целочисленные задачи могут быть непосредственно сведены к задачам линейного программирования. Это целиком относится к задачам о назначениях.

Действительно, если в этой задаче требование целочисленности переменных заменить условием $x_{ij} \geq 0$, то она превращается, по существу, в транспортную задачу (только на максимум целевой функции), компоненты решения которой в силу имеющихся ограничений могут быть равны либо 0, либо 1.

Однако в общем случае целочисленная задача не сводится к обычной задаче линейного программирования. Примером служит задача о коммивояжере. О возникающих при этом сложностях говорит тот факт, что одной этой задаче посвящено множество книг.

Среди методов решения целочисленных задач можно выделить два направления: методы отсечения и комбинаторные методы.

В *методах отсечения* для решения целочисленных задач используются методы решения непрерывных задач. Рассмотрим это на примере задачи ЛП (7), в которой $x \in Z^n$. Сначала решается задача ЛП без условия целочисленности, которую назовем $1'$. Если найденное решение x^1 целочисленно, то оно является решением исходной задачи. Если нет, то к ограничениям задачи $1'$ добавляется дополнительное ограничение, которое отсекает x^1 и сохраняет в допустимом множестве исходной задачи все его целочисленные точки. Такое ограничение называется правильным отсечением. На следующем этапе находится решение задачи с дополнительным введенным ограничением, которую назовем задачей $2'$. Если решение x^2 не является целочисленным, то для него вводится правильное отсечение. И так далее до тех пор, пока решение очередной задачи ЛП не окажется целочисленным.

Конкретные способы построения правильных отсечений реализованы разными вычислительными алгоритмами (например, алгоритмы Гомори).

Представление о комбинаторных методах дает широко используемый на практике *метод ветвей и границ*. Основная идея метода состоит в разбиении допустимого множества на подмножества, позволяющие отбрасывать подмножества, заведомо не содержащие решений. Графически указанный процесс можно представить структурной схемой в виде дерева, у которого каждая вершина соответствует некоторому подмножеству планов (и, обычно, связанной с ним вспомогательной задаче линейного программирования), а выходящие из нее ветви отвечают разбиению этого подмножества на новые подмножества планов (и связанным с ним задачам).

Для решения задачи целочисленного программирования методом ветвей и границ можно использовать алгоритм Лэнда – Дойга. Прежде всего, решается исходная задача ЛП без условия целочисленности. Если в полученном решении все переменные целочисленные, то задача решена. Если некоторая компонента x_k нецелочисленная, т. е. $x_k = [x_k] + \{x_k\}$, где $[x_k]$ – целая часть, а $\{x_k\}$ – дробная часть x_k , то исходная задача разбивается на две подзадачи ЛП. Одна подзадача решается дополнительным ограничением $x_k = [x_k]$, а другая – с дополнительным ограничением $x_k = [x_k] + 1$. Вычисляется оценка (значение целевой функции). Если одна из этих подзадач, например, с ограничением $x_k = [x_k]$, дает нецелочисленное решение с компонентой $x_r = [x_r] + \{x_r\}$, то переходим к следующему шагу, на котором выбранная подзадача разветвляется на две новые с дополнительными ограничениями $x_k = [x_k]$, $x_r = [x_r]$ и $x_k = [x_k]$, $x_r = [x_r] + 1$ соответственно. Вычисления заканчиваются, когда кандидатов на ветвление больше нет. Описанный алгоритм применим для задач, в которых вместо требования целочисленности содержится требование, чтобы переменная принимала только значения 0, 1.

ЛЕКЦИЯ № 6. ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ

1. Задачи динамического программирования

Динамическое программирование в теории управления и теории вычислительных систем – способ решения сложных задач путём разбиения их на более простые подзадачи. Он используется при решении задач с оптимальной подструктурой, выглядящих как набор перекрывающихся подзадач, сложность которых чуть меньше исходной. В этом случае время вычислений, по сравнению с другими методами, можно значительно сократить.

Ключевая идея в динамическом программировании достаточно проста. Как правило, чтобы решить поставленную задачу, требуется решить отдельные части задачи (подзадачи), после чего объединить решения подзадач в одно общее решение. Часто многие из этих подзадач одинаковы. Подход динамического программирования состоит в том, чтобы решить каждую подзадачу только **один раз, сократив тем самым количество вычислений. Это особенно полезно в случаях, когда число повторяющихся подзадач экспоненциально велико.**

Метод динамического программирования сверху – это простое запоминание результатов решения тех подзадач, которые могут повторно встретиться в дальнейшем.

Динамическое программирование снизу включает в себя переформулирование сложной задачи в виде рекурсивной последовательности более простых подзадач.

Идея динамического программирования.

Оптимальная подструктура в динамическом программировании означает, что оптимальное решение подзадач меньшего размера может быть использовано для решения исходной задачи. К примеру, кратчайший путь в графе из одной вершины (обозначим s) в другую (обозначим t) может быть найден так: сначала считаем кратчайший путь из всех вершин, смежных с s , до t , а затем, учитывая веса ребер, которыми s соединена со смежными вершинами, выбираем лучший путь до t (через какую вершину лучше всего пойти). В общем случае мы можем решить задачу, в которой присутствует оптимальная подструктура, проделывая следующие три шага:

1. Разбиение задачи на подзадачи меньшего размера.
2. Нахождение оптимального решения подзадач рекурсивно, проделывая такой же трехшаговый алгоритм.
3. Использование полученного решения подзадач для конструирования решения исходной задачи.

Подзадачи решаются делением их на подзадачи ещё меньшего размера и т. д., пока не приходят к тривиальному случаю задачи, решаемой за константное время (ответ можно сказать сразу). К примеру, если нам нужно найти $n!$, то тривиальной задачей будет $1! = 1$ (или $0! = 1$).

Перекрывающиеся подзадачи в динамическом программировании означают подзадачи, которые используются для решения некоторого количества

задач (не одной) большего размера (то есть мы несколько раз проделываем одно и то же).

Динамическое программирование пользуется следующими свойствами задачи:

- перекрывающиеся подзадачи;
- оптимальная подструктура;
- возможность запоминания решения часто встречающихся подзадач.

Динамическое программирование обычно придерживается двух подходов к решению задач:

Нисходящее динамическое программирование: задача разбивается на подзадачи меньшего размера, они решаются и затем комбинируются для решения исходной задачи. Используется запоминание для решений часто встречающихся подзадач.

Восходящее динамическое программирование: все подзадачи, которые впоследствии понадобятся для решения исходной задачи, просчитываются заранее и затем используются для построения решения исходной задачи.

Этот способ лучше нисходящего программирования в смысле размера необходимого стека и количества вызова функций, но иногда бывает нелегко заранее выяснить, решение каких подзадач нам потребуется в дальнейшем.

Обычное динамическое программирование является частным случаем не сериального динамического программирования (НСДП), когда граф взаимосвязей переменных – просто путь.

НСДП, являясь естественным и общим методом для учета структуры задачи оптимизации, рассматривает множество ограничений и/или целевую функцию как рекурсивно вычислимую функцию. Это позволяет находить решение поэтапно, на каждом из этапов используя информацию, полученную на предыдущих этапах, причём эффективность этого алгоритма прямо зависит от структуры графа взаимосвязей переменных. Если этот граф достаточно разрежен, то объём вычислений на каждом этапе может сохраняться в разумных пределах.

Одним из основных свойств задач, решаемых с помощью динамического программирования, является аддитивность. Неаддитивные задачи решаются другими методами. Например, многие задачи по оптимизации инвестиций компании являются неаддитивными и решаются с помощью сравнения стоимости компании при проведении инвестиций и без них.

Классические задачи динамического программирования

Задача о наибольшей общей подпоследовательности: даны две последовательности, требуется найти самую длинную общую подпоследовательность.

Задача поиска наибольшей увеличивающейся подпоследовательности: дана последовательность, требуется найти самую длинную возрастающую подпоследовательность.

Задача о редакционном расстоянии (расстояние Левенштейна): даны две строки, требуется найти минимальное количество стираний, замен и добавлений символов, преобразующих одну строку в другую.

Задача о вычислении чисел Фибоначчи.

Задача о порядке перемножения матриц: даны матрицы $A_1, \dots, A_n$, требуется минимизировать количество скалярных операций для их перемножения.

Задача о выборе траектории.

Задача последовательного принятия решения.

Задача об использовании рабочей силы.

Задача управления запасами.

Задача о ранце: из неограниченного множества предметов со свойствами «стоимость» и «вес» требуется отобрать некое число предметов таким образом, чтобы получить максимальную суммарную стоимость при ограниченном суммарном весе.

Алгоритм Флойда – Уоршелла: найти кратчайшие расстояния между всеми вершинами взвешенного ориентированного графа.

Алгоритм Беллмана – Форда: найти кратчайший путь во взвешенном графе между двумя заданными вершинами.

Максимальное независимое множество вершин в дереве: дано дерево, найти максимальное множество вершин, никакие две из которых не связаны ребром.

2. Функция Беллмана

Обратимся к многошаговым задачам оптимизации, т. е. задачам оптимизации, в которых решение можно представить в виде ряда последовательных этапов.

Рассмотрим некоторый процесс. Предположим, что состояние этого процесса описывается n -мерным вектором $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, или, что то же самое, точкой x пространства R^n , которое называют фазовым пространством. Будем считать, что процесс является N -шаговым, т. е. он происходит в N этапов в соответствии со следующей схемой:

$$\underset{\text{начальное состояние}}{x^{(0)}} \rightarrow \dots \rightarrow x^{(k-1)} \rightarrow x^{(k)} \rightarrow \dots \rightarrow \underset{\text{конечное состояние}}{x^{(N)}}.$$

Переход между состояниями происходит в соответствии с уравнением:

$$x^k = f^{(k)}(x^{k-1}, u^{(k)}), \quad (6.1)$$

где $u^k \in R^m$ есть m -мерный вектор управления, выбираемый на k -м шаге, $f^{(k)}(x, u)$ – заданная n -мерная вектор функция аргументов $x \in R^n, u \in R^m$.

Таким образом, предполагается, что в результате k -го шага процесс переходит в состояние $x^{(k)}$, которое определяется только начальным состоянием $x^{(k-1)}$ этого шага и выбранным на нем вектором управления $u^{(k)}$ и не зависит от «предыстории» процесса k -го шага.

Показателем эффективности k -го шага является заданная числовая характеристика (целевая функция этого шага) $J_k = J_k(x^{(k-1)}, u^k)$, $k = 1, 2, \dots, N$.

Предположим, что эффективность всего процесса в целом характеризуется целевой функцией вида

$$J(\bar{x}, \bar{u}) = \sum_{k=1}^N J_k(x^{(k-1)}, u^{(k)}) + J_{N+1}(x^{(N)}), \quad (6.2)$$

где $\bar{x} = \{x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(N)}\}$ – набор состояний, называемый *фазовой траекторией процесса*, а $\bar{u} = \{u^{(0)}, u^{(1)}, \dots, u^{(N)}\}$ – набор векторов управления, который называется *управлением процесса*. Таким образом, рассматриваются только аддитивные (сепарабельные) целевые функции J , представимые в виде суммы целевых функций шагов J_k .

Предположим далее, что на фазовую траекторию и выбор управлений наложены ограничения

$$x^{(k)} \in X_k, \quad k = 0, \dots, N, \quad (6.3)$$

$$u^{(k)} \in U_k, (x^{(k-1)}), \quad k = 1, \dots, N, \quad (6.4)$$

где X_k и $U_k, (x^{(k-1)})$ – заданные множества в пространствах R^n и R^m соответственно, причем множество U_k зависит от начального состояния $x^{(k-1)}$ k -го шага.

Ограничения (6.3) называются *фазовыми*. Ограничения на начальное и конечное состояния процесса $x^{(0)} \in X_0, x^{(N)} \in X_N$ называются *начальными и конечными условиями*. При этом множества X_0 и $X_N \subset R^n$ во многих случаях содержат по одной точке (начало и конец фазовой траектории).

Пусть $\bar{u} = \{u^{(0)}, u^{(1)}, \dots, u^{(N)}\}$ – *управление процессом*, удовлетворяющее ограничениям (6.4) и переводящее его из некоторого начального состояния $x^{(0)} \in X_0$ в некоторое конечное состояние $x^{(N)} \in X_N$ в соответствии с уравнениями (6.1) с учетом ограничений (6.3). Обозначим множество всех таких управлений буквой U .

Динамическая (многошаговая) задача оптимизации формулируется следующим образом: среди всех управлений $\bar{u} \in U$ выбрать такое $\bar{u}^* = \{u^{(1)*}, u^{(2)*}, \dots, u^{(N)*}\}$, для которого целевая функция (6.2) принимает минимальное или максимальное и (в зависимости от смысла задачи) значение.

Управление $\bar{u}^*$ и соответствующая ему фазовая траектория $\bar{x}^*$ называются *оптимальными*. Таким образом, динамическая (многошаговая) задача оптимизации формулируется в математических символах следующим образом:

$$J(\bar{x}, \bar{u}) = \sum_{k=0}^N J_k(x^{(k-1)}, u^{(k)}) + J_{N+1}(x^N) \rightarrow \text{extr}, \quad (6.5)$$

$$\text{При условиях } x^{(k)} = f^{(k)}(x^{(k-1)}, u^{(k)}), \quad k = 1, \dots, N, \quad (6.6)$$

и ограничениях (6.3), (6.4).

Оптимальное уравнение в динамической задаче обладает тем свойством, что каковы бы ни были решения (управления) на начальном этапе (одном или нескольких шагах), последующие решения должны составлять оптимальное управление для критерия, представляющего собой сумму эффективностей на оставшихся шагах и полученного нового начального состояния. Это утверждение называется **принципом оптимальности**.

Математическое выражение принципа оптимальности представляет рекуррентное соотношение, называемое уравнением Беллмана. Оптимальная траектория в задаче (6.3)–(6.6) обладает тем свойством, что любая ее завершающая часть, начинающаяся с k -го шага, $k = 1, \dots, N - 1$, является оптимальной для оставшихся шагов процесса.

Опишем **метод динамического программирования**, в основе которого лежит принцип оптимальности. Заметим, что в формулировке многошаговой задачи оптимизации (6.3)–(6.6) ограничения на фазовую траекторию (6.3) (включая конечное состояние) можно включить в ограничения на выбор управлений, заменив соотношения (6.3) и (6.4) следующим эквивалентным ограничением:

$$u^{(k)} \in \tilde{U}_k(x^{(k-1)}) = \{u^k \in U_k(x^{(k-1)}) \mid f^k(x^{(k-1)}, u^{(k)}) \in X_k\}, k = 1, \dots, N. \quad (6.7)$$

С учетом этого можно записать задачи (13) – (16) в следующем виде:

$$J(\bar{x}, \bar{u}) = \sum_{k=1}^N J_k(x^{(k-1)}, u^k) + J_{N+1}(x^{(N)}) \rightarrow extr, \quad (6.8)$$

$$x^{(k)} = f^{(k)}(x^{(k-1)}, u^{(k)}), \quad k = 1, \dots, N, \quad (6.9)$$

$$u^{(k)} \in \tilde{U}_k(x^{(k-1)}), \quad k = 1, \dots, N, \quad (6.10)$$

$$x^{(0)} \in X_0. \quad (6.11)$$

Предположим, что в результате начальных $k - 1$ шагов процесс перешел в состояние $x^{(k-1)}$. Рассмотрим задачу оптимизации оставшихся $N - k + 1$ шагов. Пусть оптимальное управление $\bar{u}^*(k) = \{u^{(k)*}, \dots, u^{(N)*}\}$ последних $N - k + 1$ шагов и оптимальная траектория этих шагов $\bar{x}^*(k) = \{x^{(k-1)}, x^{(k)*}, \dots, x^{(N)*}\}$, начатая из состояния $x^{(k-1)}$, найдены.

Целевая функция $J^{(k)}(\bar{x}(k), \bar{u}(k)) = \sum_{i=k}^N J_i(x^{(i-1)}, u^{(i)}) + J_{N+1}(x^{(N)})$ последних $N - k + 1$ шагов, при $\bar{x}(k) = \bar{x}^*(k)$, $\bar{u}(k) = \bar{u}^*(k)$ принимает оптимальное (т. е. минимальное или максимальное) значение, зависящее от начального состояния $x^{(k-1)}$ фазовой траектории этих шагов, т. е.

$$extr J^{(k)}(\bar{x}(k), \bar{u}(k)) = J^{(k)}(\bar{x}^*(k), \bar{u}^*(k)) = B_k(x^{(k-1)}). \quad (6.12)$$

Функция $B_k(x^{(k-1)})$ из (6.12) называется функцией Беллмана последних $N - k + 1$ шагов. Для последнего шага она принимает вид

$$B_N(x^{(N-1)}) = \underset{u^{(N)} \in \tilde{U}_N(x^{(N-1)})}{extr} \left[J_{N+1}(f^{(N)}(x^{(N-1)}, u^{(N)})) + J_N(x^{(N-1)}, u^{(N)}) \right] \quad (6.13)$$

Для всех остальных шагов функции Беллмана связаны между собой следующими соотношениями, вытекающими из принципа оптимальности:

$$B_k(x^{(k-1)}) = \underset{u^{(k)} \in \tilde{U}_k(x^{(k-1)})}{extr} \left\{ B_{k+1}(f^{(k)}(x^{(k-1)}, u^{(k)})) + J_k(x^{(k-1)}, u^{(k)}) \right\}, \quad k = 1, \dots, N - 1. \quad (6.14)$$

Соотношения (6.13) и (6.14), позволяющие последовательно найти функции Беллмана $B_N(x^{(N-1)}), B_{N-1}(x^{(N-2)}), \dots, B_1(x^{(0)})$, называются **уравнениями Беллмана**.

Находя функции $B_k(x^{(k-1)}), k = N, \dots, 1$ из (6.13) и (6.14), одновременно определяются и управления $u^{(k)*}(x^{(k-1)})$, которые реализуют экстремумы в правых частях (6.13), (6.14):

$$Z_N = \left[J_{N+1}(f^{(N)}(x^{(N-1)}, u^{(N)})) + J_N(x^{(N-1)}, u^{(N)}) \right],$$

$$Z_k = \left\{ B_{k+1}(f^{(k)}(x^{(k-1)}, u^{(k)})) + J_k(x^{(k-1)}, u^{(k)}) \right\}, \quad k = N - 1, \dots, 1,$$

т. е. удовлетворяют соотношениям:

$$Z_N[x^{(N-1)}, u^{(N)*}(x^{(N-1)})] = \underset{u^{(N)} \in \bar{U}_N(x^{(N-1)})}{extr} Z_N(x^{(N-1)}, u^{(N)}) = B_N(x^{(N-1)}) \quad (6.15)$$

$$Z_k[x^{(k-1)}, u^{(k)*}(x^{(k-1)})] = \underset{u^{(k)} \in \bar{U}_k(x^{(k-1)})}{extr} Z_k(x^{(k-1)}, u^{(k)}) = B_k(x^{(k-1)}), \\ k = N-1, \dots, 1. \quad (6.16)$$

Управления $u^{(k)*}(x^{(k-1)})$, $k = 1, \dots, N$, называются *условно оптимальными*, а процесс их нахождения – условной оптимизацией (или обратной прогонкой). Следует отметить, что управления $u^{(k)*}(x^{(k-1)})$, найденные в соответствии с (6.16), удовлетворяют принципу оптимальности, т.е. в зависимости от начального состояния $x^{(k-1)}$ управление $u^{(k)*}(x^{(k-1)})$ учитывает оптимизацию не только k -го шага, но и следующих за ним $N-k$ шагов.

В результате условной оптимизации находится функция Беллмана $B_k(x^{(k-1)})$ и условно оптимальные управления $u^{(k)*}(x^{(k-1)})$, $k = 1, \dots, N$. После этого можно осуществить *безусловную оптимизацию (прямую прогонку)* в задаче (6.8) – (6.11), т. е. определить искомое оптимальное управление процессом $\bar{u}^* = \{u^{(1)*}, \dots, u^{(N)*}\}$ и оптимальную фазовую траекторию $\bar{x}^* = \{x^{(0)*}, \dots, x^{(N)*}\}$ следующим образом.

Так как функция Беллмана $B_1(x^{(0)})$ для каждого начального состояния $x^{(0)} \in X_0$ равна оптимальному значению целевой функции за N шагов, т. е. всего процесса, начатого из состояния $x^{(0)}$, то оптимальное начальное условие $x^{(0)*} \in X_0$ находим из соотношения

$$B_1(x^{(0)*}) = \underset{x^{(0)} \in X_0}{extr} B_1(x^{(0)}), \quad (6.17)$$

если множество X_0 из (21) состоит из единственной точки $x^{(0)}$, то полагаем ($x^{(0)*} = x^{(0)}$). Далее, используя найденные условные оптимальные управления, а также уравнения состояний (6.11), последовательно находим $u^{(1)*}, x^{(1)*}, u^{(2)*}, x^{(2)*}, \dots, u^{(N)*}, x^{(N)*}$ из следующих соотношений:

$$\begin{aligned} u^{(1)*} &= u^{(1)*}(x^{(0)*}), \quad x^{(1)*} = f^{(1)}(x^{(0)*}, u^{(1)*}), \\ u^{(2)*} &= u^{(2)*}(x^{(1)*}), \quad x^{(2)*} = f^{(2)}(x^{(1)*}, u^{(2)*}), \\ &\dots\dots\dots \\ u^{(N)*} &= u^{(N)*}(x^{(N-1)*}), \quad x^{(N)*} = f^{(N)}(x^{(N-1)*}, u^{(N-1)*}). \end{aligned} \quad (6.18)$$

Теперь рассмотрим **алгоритм метода динамического программирования**.

Этап I (условная оптимизация).

Шаг 1. Находим условно оптимальное управление $u^{(N)*}(x^{(N-1)})$ и функцию Беллмана $B_N(x^{(N-1)})$ в соответствии с (6.13), (6.15).

Шаг 2. Используя результаты первого шага, находим $u^{(N-1)*}(x^{(N-2)})$ и функцию Беллмана $B_{N-1}(x^{(N-2)})$ с помощью (6.14), (6.16) при $k = N-1$.

.....

Шаг N . Используя результаты $(N-1)$ -го шага, находим $u^{(1)*}(x^{(0)})$ и функцию Беллмана $B_1(x^{(0)})$ с помощью (6.14), (6.16) при $k = 1$.

Этап II (безусловная оптимизация).

Шаг 0. Находим оптимальное начальное состояние $x^{(0)*}$, в соответствии с (6.17).

Шаг 1. Определяем оптимальное управление $u^{(1)*}$ и конечное состояние $x^{(1)*}$ первого шага процесса по формулам (6.18).

Шаг 2. Используя результаты предыдущего шага, находим $u^{(2)*}$ и $x^{(2)*}$ в соответствии с (6.18).

.....

Шаг N . С помощью результатов $(N-1)$ -го шага, определяем $u^{(N)*}$ и $x^{(N)*}$ по формулам (6.18).

Окончательно имеем $\bar{u}^* = \{u^{(1)*}, \dots, u^{(N)*}\}$, $\bar{x}^* = \{x^{(0)*}, \dots, x^{(N)*}\}$.

Для многих экономических и производственных задач характерной является дискретная модель, предполагающая, что величины, описывающие процесс, могут принимать только дискретный ряд значений. Функциональные зависимости в таких задачах задаются, как правило, в виде таблиц, а не аналитически. Однако общая схема их решения методом динамического программирования остается без изменений. Более того, метод динамического программирования является одним из основных для решения дискретных и целочисленных задач.

3. Сетевое планирование

Сетевое планирование – метод управления, основанный на использовании математического аппарата теории графов и системного подхода для отображения и алгоритмизации комплексов взаимосвязанных работ, действий или мероприятий для достижения четко поставленной цели.

Наиболее известны практически одновременно и независимо разработанные метод критического пути – МКП и метод оценки и пересмотра планов – PERT.

Применяются для оптимизации планирования и управления сложными разветвленными комплексами работ, требующими участия большого числа исполнителей и затрат ограниченных ресурсов.

Основная цель сетевого планирования – сокращение до минимума продолжительности проекта.

Задача сетевого планирования состоит в том, чтобы графически, наглядно, системно отобразить и оптимизировать последовательность и взаимозависимость работ, действий или мероприятий, обеспечивающих своевременное и планомерное достижение конечных целей. Для отображения и алгоритмизации тех или иных действий или ситуаций используются экономико-математические модели, которые принято называть сетевыми моделями, простейшие из них – сетевые графики. С помощью сетевой модели руководитель работ или операции имеет возможность системно и масштабно представлять весь ход работ или оперативных мероприятий, управлять процессом их осуществления, а также маневрировать ресурсами.

Наиболее распространенными направлениями применения сетевого планирования являются:

- целевые научно-исследовательские и проектно-конструкторские разработки сложных объектов, машин и установок, в создании которых принимают участие многие предприятия и организации;
- планирование и управление основной деятельностью разрабатывающих организаций;
- планирование комплекса работ по подготовке и освоению производства новых видов промышленной продукции;
- строительство и монтаж объектов промышленного, культурно-бытового и жилищного назначения;
- реконструкция и ремонт действующих промышленных и других объектов;
- планирование подготовки и переподготовки кадров, проверка исполнения принятых решений, организация комплексной проверки деятельности предприятий, объединений, строительно-монтажных организаций и учреждений.

4. Применение метода динамического программирования в сетевых задачах

При организации работы над различными проектами и выполнении комплексов операций широкое распространение получили методы сетевого планирования и управления. Начальная информация о проекте задается перечнем работ, их продолжительностью или стоимостью, последовательностью выполнения (для каждой работы должно быть указано, каким работам предшествует и на какую опирается).

Реализацию проекта удобно представлять в виде *графа*, который задается множеством вершин или узлов и множеством *дуг* или *ребер*. Каждая дуга задается парой вершин. Сетью называется граф, каждой дуге которого поставлено в соответствие некоторое неотрицательное число. *Сетевым графиком проекта* называют наглядное представление проекта в виде сети. Дуги этой сети являются ориентированными, т. е. для каждой указаны начало и конец, и представляют *работы*; вершины (их называют *событиями*) представляют последовательность выполнения работ. Ни одна работа, представленная дугой, выходящей из некоторой вершины, не может начинаться прежде завершения всех работ, представленных дугами, входящими в данную вершину. Каждую пару событий должна соединять не более чем одна работа.

В сетевом графике должно быть одно начальное и одно конечное событие. Для выполнения перечисленных требований допустимо введение фиктивных работ (работ нулевой продолжительности, не требующих затраты каких-либо ресурсов). Начальному событию присваивается номер 1. Чтобы пронумеровать остальные события, нужно для каждого события найти величину максимального числа дуг в путях, соединяющих данное событие с начальным. События нумеруются по возрастанию этой величины. Если для некоторого числа событий

указанная величина одинакова, то эти события нумеруются в произвольном порядке. После построения графа можно вычислить необходимые затраты времени (или ресурсов) на реализацию проекта. При этом удобно использовать метод динамического программирования, начиная с начального состояния и последовательно вычисляя наиболее ранние сроки наступления событий, вплоть до конечного. Цепочка событий, т. е. последовательность работ (дуг), сдвиг начала которых приводит к увеличению общего времени выполнения проекта, называется **критическим путем**.

ЛЕКЦИЯ № 7. ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОГО ВЫБОРА. ЗАДАЧА МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОГО ВЫБОРА

1. Понятие многокритериальности

Оптимизация заключается в том, чтобы среди множества возможных вариантов найти наилучшие в заданных условиях, при заданных ограничениях, то есть оптимальные альтернативы. Наиболее разработаны методы однокритериальной оптимизации, в большинстве случаев позволяющие получить однозначное решение, например, методы однокритериального математического программирования.

В задачах многокритериальной оптимизации абсолютно лучшее решение выбрать невозможно (за исключением частных случаев), так как при переходе от одного варианта к другому, как правило, улучшаются значения одних критериев, но ухудшаются значения других. Состав таких критериев называется противоречивым, и окончательно выбранное решение всегда будет компромиссным. Компромисс разрешается введением тех или иных дополнительных ограничений или субъективных предположений и предпочтений. Лицо, принимающее решение, устанавливает свои предпочтения в задаче принятия решения, чтобы получить наиболее полезный для себя результат. Таким образом, можно говорить о принятии индивидуальных рациональных решений.

*Особенности постановки задач рационального выбора при решении реальных проблем: **многокритериальность; антагонистичность и неравнозначность частных критериев; важность учета критериев, основанных на субъективных оценках; необходимость одновременного учета неопределенностей различной природы.*** Во многих случаях дополнительной сложностью является иерархичность системы частных критериев. Например, решение задач оптимизации производственной деятельности непосредственно связано с моделированием и анализом технологических процессов, экономических показателей эффективности, с учетом техногенного воздействия промышленных объектов на экологию окружающей среды.

Возникает вопрос, что конкретно имеется в виду под эффективностью в данном случае? По какому критерию следует выбирать решение? Прежде всего,

хотелось бы максимизировать прибыль предприятия, обратить также в максимум объем производимых работ (услуг). Себестоимость продукции желательно минимизировать, а производительность труда обратить в максимум. Дальнейшая постановка задачи может выявить еще дополнительные критерии.

Такое **многообразие показателей эффективности (ряда количественных показателей $F_1, F_2, \dots$, из которых одни желательно обратить в максимум, а другие в минимум), называемое многокритериальностью**, характерно для многих крупномасштабных задач исследования операций.

Существует ли в этом случае решение, которое одновременно удовлетворяет всем требованиям? Ответ однозначен: в общем случае такого решения нет. Решение, максимизирующее какой-то один показатель, не максимизирует (минимизирует), как правило, другие. Поэтому часто формулировки типа: «достигнуть максимальной прибыли при минимальных затратах» по сути своей безграмотны и неприменимы при научном анализе.

Что же делать, если необходимо оценить эффективность решения по нескольким противоречивым показателям?

Самый простой способ заключается в сведении многокритериальной задачи к однокритериальной: составляется некоторая комбинированная функция от всех показателей, и она рассматривается в качестве одного, «обобщенного» показателя эффективности, по которому и находится оптимальное решение (так называемая, свертка критериев). Этот обобщенный показатель зачастую имеет вид дроби, где в числителе стоят величины, которые желательно увеличить, а в знаменателе те, которые желательно уменьшить. Например, доход и продуктивность – в числителе, расходы и время выполнения – в знаменателе и т. п.

Объединение таким способом нескольких критериев в один может быть рекомендовано в редких случаях, т. к. он предполагает, что уменьшение одного показателя всегда может быть скомпенсировано за счет увеличения другого; например, продуктивность – за счет стоимости и т. п., что не подтверждается на практике.

Задача многокритериального принятия решений включает следующие процедуры:

- формулировка задачи принятия решения, которая включает в себя содержательное описание проблемы и при необходимости ее модельное представление, определение цели и критериев их достижения, а также требования к виду окончательного результата;
- формирование совокупности возможных альтернатив;
- формирование множества объективных признаков оценки альтернатив проблемной ситуации;
- формирование совокупности ограничений области допустимых вариантов решений;
- определение предпочтений лиц, принимающих решения.

2. Моделирование предпочтений

Успешное решение многокритериальных задач невозможно без использования различного рода сведений о предпочтениях лица, принимающего решение. При этом одним из самых главных источников таких сведений является информация об относительной важности критериев. Но прежде чем учиться выявлять и использовать эту информацию, необходимо выяснить, что она представляет. Какой смысл содержит высказывание о том, что один критерий важнее другого критерия? Как имеющуюся в распоряжении информацию об относительной важности критериев можно использовать в процессе принятия решений?

Для ответа на эти вопросы рассмотрим ситуации, когда имеется несколько числовых функций $f_1, f_2, \dots, f_m$, $m \geq 2$, определенных на множестве возможных решений X . В зависимости от типа задачи принятия решений эти функции называют *критериями эффективности, целевыми функциями, показателями или критериями качества*.

Указанные выше числовые функции $f_1, f_2, \dots, f_m$ образуют *векторный критерий* $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$, который принимает значения в пространстве m -мерных векторов R^m . Это пространство называют *пространством критериев* или *пространством оценок*, а всякое значение $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)) \in R_m$ векторного критерия f при определенном $x \in X$ именуют *векторной оценкой* возможного решения x . Все возможные векторные оценки образуют множество возможных оценок (возможных векторов) $Y = f(X) = \{y \in R_m | y = f(x), x \in X\}$.

Обозначим *множество выбираемых решений* $SelX$, которое представляет собой решение задачи выбора, $SelX \subset X$. Наряду с множеством выбираемых решений удобно ввести в рассмотрение *множество выбираемых векторов* $SelY = f(SelX) = \{y \in Y | y = f(x), x \in SelX\}$, представляющее собой некоторое подмножество пространства R^m .

Для того чтобы осуществить обоснованный выбор, следует помимо векторного критерия располагать какими-то дополнительными сведениями о предпочтениях ЛПР. С этой целью необходимо включить в многокритериальную задачу еще один элемент, который позволил бы выразить и описать эти предпочтения.

Рассмотрим два возможных решения x' и x'' . Предположим, что после предъявления ЛПР этой пары решений оно выбирает (отдает предпочтение) первому из них. В этом случае пишут $x' \succ_x x''$. Знак $\succ_x$ служит для обозначений предпочтений данного ЛПР и называется отношением *строгого предпочтения* или, короче, *отношением предпочтения*. Отношение строгого предпочтения означает, что решение x' строго предпочтительней, чем x'' .

Отношение безразличия означает, что решения x' и x'' одинаковы по предпочтительности (если выбор ограничить двумя этими решениями, то безразлично, какой из них взять); записывается как $x' \sim x''$.

Отношение нестрогого предпочтения означает, что решение x' не менее предпочтительно, чем x'' , т. е. отношение нестрогого предпочтения есть

объединение отношений строгого предпочтения и отношения безразличия; записывается как $x' \succsim_x x''$.

Отношение предпочтения $\succ_x$, заданное на множестве возможных решений, естественным образом порождает отношение предпочтения $\succ_y$ на множестве возможных векторов Y , таком, что $f(x') \succ_y f(x'') \Leftrightarrow x' \succ_x x''$ для $x', x'' \in X$.

Для описания и изучения введенного ранее отношения предпочтения существует специальное математическое понятие – **бинарное отношение**.

Пусть имеются два произвольных множества A и B .

Декартовым произведением этих множеств называется множество, обозначаемое $A \times B$ и определяемое равенством $A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$.

Бинарным отношением $\mathfrak{R}$ (*фрактур R /вещественная часть*), заданным на множестве A , называется подмножество декартова произведения $A \times A$, т. е. $\mathfrak{R} \subset A \times A$. Если имеет место включение $(a, b) \in \mathfrak{R}$, то обычно пишут $a\mathfrak{R}b$ и говорят, что элемент a находится в отношении $\mathfrak{R}$ с элементом b . Заметим, что в общем случае из $a\mathfrak{R}b$ не следует выполнение соотношения $b\mathfrak{R}a$.

Введем следующие используемые в дальнейшем бинарные отношения для произвольных векторов $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ и $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ пространства R^m :

$$a > b \Leftrightarrow a_i > b_i, a \geq b \Leftrightarrow a_i \geq b_i, a \geq b \Leftrightarrow a_i \geq b_i, \text{ и } a \neq b, i=1, 2, \dots, m.$$

Приведем определения некоторых типов бинарных отношений.

Бинарное отношение $\mathfrak{R}$ заданное на множестве A , называют:

- *рефлексивным*, если соотношение $a\mathfrak{R}a$ имеет место для всех $a \in A$;
- *иррефлексивным*, если соотношение $a\mathfrak{R}a$ не выполняется ни для одного $a \in A$;
- *симметричным*, если всякий раз из выполнения соотношения $a\mathfrak{R}b$ для элементов $a, b \in A$ следует выполнение соотношения $b\mathfrak{R}a$;
- *асимметричным*, если из выполнения соотношения $a\mathfrak{R}b$ для элементов $a, b \in A$ всегда следует, что соотношение $b\mathfrak{R}a$ места не имеет;
- *антисимметричным*, если всякий раз из выполнения соотношений $a\mathfrak{R}b$, $b\mathfrak{R}a$ для элементов $a, b \in A$ вытекает равенство $a = b$;
- *транзитивным*, если для любой тройки элементов $a, b, c \in A$ из выполнения соотношений $a\mathfrak{R}b$, $b\mathfrak{R}c$ всегда следует справедливость соотношения $a\mathfrak{R}c$;
- *инвариантным относительно линейного положительного преобразования*, если для любых трех элементов $a, b, c \in A$ и произвольного положительного числа α из выполнения $a\mathfrak{R}b$ всегда следует соотношение $(\alpha a + c)\mathfrak{R}(\alpha b + c)$ (здесь считается, что $A = R^m$);
- *полным*, если для любой пары элементов $a, b \in A$ выполняется соотношение $a\mathfrak{R}b$, или соотношение $b\mathfrak{R}a$, или оба эти соотношения одновременно;
- *частичным*, если это отношение не является полным.

Отношения равенства ($=$) и нестрогого неравенства ($\geq$) дают примеры рефлексивных, а отношение строгого неравенства ($>$) и отношение частичного нестрогого порядка ($\geq$) – иррефлексивных отношений на R^m . Отношения равенства и нестрогого неравенства являются симметричными и антисимметричными, а отношения ($>$) и ($\geq$) – асимметричны. Все отношения ($=$, $\geq$, $>$, $\leq$) транзитивны и инвариантны относительно линейного положительного преобразования. Отношения равенства и отношение строгого неравенства, очевидно, являются частичными. Отношение нестрогого неравенства ($\geq$), рассматриваемое на множестве чисел, является полным, потому, что для любых двух чисел a и b выполнено $a \geq b$, либо $b \leq a$, либо оба эти неравенства одновременно. Отношение нестрогого неравенства на множестве векторов R^m при $m > 1$ является лишь частичным.

Нетрудно проверить, что всякое асимметричное отношение иррефлексивно

Бинарное отношение $\mathfrak{R}$, заданное на множестве A , называют:

- *порядком (отношением порядка)*, если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно;
- *строгим порядком (отношением строгого порядка)*, если оно является иррефлексивным и транзитивным;
- *линейным порядком*, если оно является полным порядком.

Всякое отношение строгого порядка является асимметричным. Пример строгого порядка, заданного на пространстве R^m , дает *лексиграфическое отношение порядка*. Вектор $y' = (y'_1, y'_2, \dots, y'_m)$ лексикографически больше вектора $y'' = (y''_1, y''_2, \dots, y''_m)$ тогда и только тогда, когда выполнено какое-либо одно из следующих условий:

- 1) $y'_1 > y''_1$;
- 2) $y'_1 = y''_1, y'_2 > y''_2$;
- 3) $y'_1 = y''_1, y'_2 = y''_2, y'_3 > y''_3, \dots$;
-
- m) $y'_i > y''_i, i = 1, \dots, m-1, y'_m > y''_m$.

Нетрудно понять, что любые два вектора пространства R^m либо равны друг другу, либо один из них лексикографически больше другого вектора.

Рассмотрим **задачу многокритериального выбора**, включающую множество возможных решений X , векторный критерий f и отношение предпочтения $\succ_x$. Поскольку отношение предпочтения задается на парах возможных решений, то оно представляет собой некоторое бинарное отношение. Предположим, что ЛПР в процессе выбора ведет себя «разумно», и обсудим требования, которым в таком случае должно удовлетворять его бинарное отношение предпочтения.

Напомним, что отношение предпочтения $\succ_x$ является отношением строгого предпочтения в том смысле, что выполнение соотношения $x \succ_x x$ невозможно ни для какого решения $x \in X$, поскольку ни одно решение не может быть строго предпочтительнее самого себя. В терминах рассмотренных бинарных отношений это означает, что отношение предпочтения должно быть

иррефлексивным. Тем самым далее при изучении задач принятия решений будут рассматриваться только такие отношения предпочтения, на которые наложено требование иррефлексивности.

Рассмотрим ситуацию, когда одно решение предпочтительнее второго, а оно, в свою очередь, предпочтительнее некоторого третьего решения. В таком положении ЛПР при сравнении первого и третьего решения всегда выберет первое. На языке бинарных отношений это означает, что отношение предпочтения должно быть транзитивным.

В соответствии с приведенными рассуждениями сформулируем условие (требование), которому должны удовлетворять рассматриваемые бинарные отношения предпочтения: *отношение предпочтения $\succ_x$, которым ЛПР руководствуется в процессе выбора, представляет собой строгий порядок, т. е. является иррефлексивным и транзитивным.*

Технически удобным средством описания предпочтений ЛПР является функция ценности (полезности). Действительная функция u , заданная на множестве X и представляющая отношение строгого порядка, называется функцией полезности (ценности), если она монотонна, т. е. $\forall x', x'' \in X$ из $u(x') > u(x'') \Leftrightarrow x' \succ_x x''$. Функция ценности является качественным критерием: она определена с точностью до произвольно возрастающего преобразования. *Принятие решений сводится к задаче, в которой принципом выбора является максимизация полезности.*

Предположим, что предпочтение не известно, но известен оптимальный выбор ЛПР: для каждого Z из некоторого семейства $\mathfrak{Z}$ (фрактур Γ) подмножества X задано множество $r(Z) \subset Z$ наиболее предпочитаемых в Z решений. Пусть $\mathfrak{Z}$ – некоторое семейство подмножеств X множества X . Отображение $г. \mathfrak{Z} \rightarrow X, r(Z) \subset Z$ называется *функцией выбора*.

Если ставить вопрос о том, как по функции выбора восстановить предпочтение индивида, т. е. решать задачу, обратную задаче принятия решения, то обязательно сталкиваемся с некоторыми принципами рациональности самих функций выбора. Функция выбора $г$ выглядела бы странно, если, согласно ей, ЛПР из трех элементов $\{x, y, z\}$ будет выбирать x , а из двух элементов $\{x, y\}$ – не x , а y ; или если он будет выбирать x из $\{x, y\}$, y из $\{y, z\}$, а z из $\{x, y, z\}$.

Решение задачи многокритериального выбора заключается в отыскании множества выбираемых решений $Sel X$, поэтому выясним, каким образом сведения об отношении предпочтения могут быть использованы в процессе решения задачи многокритериального выбора.

Рассмотрим два произвольных возможных решения x' и x'' . Для них имеет место один и только один случай из следующих трех:

- справедливо соотношение $x' \succ_x x''$, а соотношение $x'' \succ_x x'$ не выполняется;
- справедливо соотношение $x'' \succ_x x'$, а соотношение $x' \succ_x x''$ не выполняется;
- не выполняется ни соотношение $x' \succ_x x''$, ни соотношение $x'' \succ_x x'$.

Заметим, что четвертый случай, когда оба участвующих здесь соотношения $x' \succ_x x''$ и $x'' \succ_x x'$ выполняются, невозможен благодаря асимметричности отношения предпочтения $\succ_x$.

В первом указанном выше случае, т. е. при выполнении соотношения $x' \succ_x x''$, говорят, что решение x' доминирует решение x'' (по отношению $\succ_x$). Во втором случае x'' доминирует x' . Если же реализуется третий случай, то говорят что решения x' и x'' не сравнимы по отношению предпочтения.

Далее будет предполагаться выполненным следующее требование.

Аксиома 7.1 (исключение доминируемых решений). *Если для некоторой пары решений $x', x'' \in X$ имеет место соотношение $x' \succ_x x''$, то $x'' \notin Sel X$.*

В аксиоме 7.1 участвует не только отношение предпочтения $\succ_x$, которым руководствуется ЛПР в процессе принятия решений, но и множество $Sel X$. Это означает что данное требование следует рассматривать как определенное ограничение на множество выбираемых решений. В соответствии с аксиомой 7.1 любое доминируемое решение следует исключать из списка решений, претендующих на роль выбираемых. Исключение всех доминируемых решений приводит к множеству недоминируемых решений.

Множество недоминируемых решений обозначается $Ndom X$ и определяется равенством $Ndom X = \{x^* \in X | \nexists x \in X, \text{ что } x \succ_x x^*\}$.

Лемма 7.1. *Для любого непустого множества выбираемых решений $Sel X$, удовлетворяющего аксиоме 7.1, справедливо включение*

$$Sel X \subset Ndom X. \quad (7.1)$$

Включение (7.1) устанавливает, что для достаточно широкого класса задач (для которых выполнена аксиома 7.1) выбор решений следует производить только среди недоминируемых решений. Когда $Sel X \neq \emptyset$ и множество недоминируемых решений состоит из единственного элемента, задача выбора в принципе решена, поскольку это единственное недоминируемое решение в силу (29) является выбираемым решением и остается только найти его.

Подобного рода ситуация в практике встречается крайне редко. Чаще всего, тех сведений, которые имеются об отношении предпочтения, оказывается недостаточно не только для нахождения множества выбираемых решений, но и для построения множества недоминируемых решений. Тем не менее, даже неполные, фрагментарные сведения об отношении предпочтения ЛПР позволяют из всего множества возможных решений исключить доминируемые решения и упростить последующий выбор. Наряду с множеством недоминируемых решений удобно ввести в рассмотрение множество *недоминируемых векторов* (недоминируемых оценок):

$$Ndom Y = f(Ndom X) = \{f(x^*) \in Y | \nexists x \in X, x \succ_x x^*\} = \{y^* \in Y | \nexists y \in Y, y \succ_y y^*\}.$$

Для введенного множества недоминируемых векторов аксиому 7.1 и лемму 7.1 можно переформулировать следующим образом.

Аксиома 7.2 (исключение доминируемых векторов). *Если для некоторой пары векторов $y', y'' \in Y$ выполнено соотношение $y' \succ_y y''$, то $y'' \notin Sel Y$.*

Лемма 7.2 (в терминах оценок). Для любого непустого множества выбираемых векторов $Sel\ Y$, удовлетворяющего аксиоме 7.2, справедливо включение $Sel\ Y \subset Ndom\ Y$.

Теорема 7.1. Пусть множество возможных решений X (множество возможных векторов Y) состоит из конечного числа элементов. Если отношение предпочтения $\succ_x$ является иррефлексивным и транзитивным, то множество возможных решений (векторов) содержит хотя бы одно недоминируемое решение (один недоминируемый вектор), т. е. $Ndom\ X \neq \emptyset$ ($Ndom\ Y \neq \emptyset$).

3. Многокритериальные модели предпочтений

В практической деятельности часто встречаются задачи, заключающиеся в поиске лучшего (оптимального) решения при наличии различных несводимых друг к другу критериев эффективности. **Постановка задачи многокритериального выбора** включает множество возможных решений X , векторный критерий f , отношение предпочтения $\succ_x$, заданное на множестве возможных решений.

Приведенная задача многокритериального выбора сформулирована в терминах решений. Нередко данную задачу формулируют в терминах векторов. В таком случае она содержит два объекта: множество возможных векторов Y , $Y \subset R^m$, отношение $\succ_y$, заданное на множестве возможных векторов.

Введем понятие **функции ценности** на множестве оценок. Функция v , которая каждой точке y пространства оценок ставит в соответствие действительное число $v(y)$, называется **функцией ценности**, представляющей структуру предпочтений принимающего решение, в том случае, если $y^1 \sim y^2 \Leftrightarrow v(y^1) = v(y^2)$; $y^1 \succ_y y^2 \Leftrightarrow v(y^1) > v(y^2)$. Если v – функция ценности, отражающая предпочтения ЛПР, то рассматриваемая задача может быть сформулирована в форме стандартной задачи оптимизации: найти $x \in X$, которое максимизирует $v(f(x))$.

Пусть Y представляет собой непустое подмножество декартова произведения m множеств $Y_1 \times Y_2 \times \dots \times Y_m$ (в частности, это имеет место в важном случае принятия решения по многим критериям). Пусть определено отношение строгого предпочтения на Y , допускающее функцию полезности v . Возникает вопрос: как функция v выражается через некоторые функции полезности v_i соответственно на Y_i , $i = 1, \dots, m$? Допуская, что v_i является полезностью на Y_i , $i = 1, \dots, m$, покажем, как глобальная полезность v дезагрегируется по индивидуальным полезностям v_i .

Наиболее важным результатом в данном направлении является выражение полезности v в виде аддитивной функции.

Будем говорить, что v является **аддитивной функцией полезности** для отношения $\succ_y$ тогда и только тогда, когда она является вещественной функцией полезности на Y и существуют вещественные функции $v_1, v_2, \dots, v_m$ (определенные на $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$ соответственно), такие, что для всех $y =$

$(y_1, y_2, \dots, y_m)$ из Y справедливо равенство $v(y) = \sum_{i=1}^m v_i(y_i)$, $y_i \in Y_i$, $i = 1, \dots, m$.

Рассмотрим вопрос существования аддитивной функции ценности на множестве критериев. Пусть $F_I \subset \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ – подмножество множества критериев, т. е. группа критериев с номерами из множества $I = \{i_1, \dots, i_n\}$. Пусть $\bar{I} = \{1, \dots, m\} \setminus I$. Тогда $F_{\bar{I}}$ – все остальные критерии, а векторная оценка y представляется в виде $(y_I, y_{\bar{I}})$. Говорят, что критерии F_I не зависят по предпочтению от критериев $F_{\bar{I}}$, если предпочтения для любых двух оценок $y = (y_I, y_{\bar{I}})$ и $y' = (y'_I, y_{\bar{I}})$, содержащих одинаковые компоненты с номерами из $\bar{I}$, не зависят от самих значений этих компонент.

Критерии $f_1, f_2, \dots, f_m$ взаимонезависимы по предпочтению, если каждое подмножество F этого множества критериев не зависит по предпочтению от своего дополнения. Взаимная независимость по предпочтению влечет за собой существование аддитивной функции ценности.

Теорема 7.2. Для критериев $f_1, f_2, \dots, f_m$, $m \geq 3$, аддитивная функция ценности $u(y_1, \dots, y_m) = \sum_{i=1}^m u_i(y_i)$, где u_i – функция ценности по критерию f_i , y_i – значение критерия f_i , существует тогда и только тогда, когда критерии взаимонезависимы по предпочтению.

Непосредственно по определению проверить независимость критериев затруднительно, так как даже при небольших m возникает большое число вариантов. Но если любая пара критериев $\{f_i, f_j\}$ не зависит по предпочтению от остальных $(m-2)$ критериев, то все критерии $f_1, f_2, \dots, f_m$ взаимно независимы по предпочтению. **Таким образом, проверка сводится к установлению независимости только всех пар критериев от всех остальных.**

В постановке задачи многокритериального выбора имеется векторный критерий $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$, каждая компонента f_i которого, как правило, характеризует определенную цель ЛПР, а стремление достичь этой цели в математических терминах нередко выражается в условии максимизации (или минимизации) функции f_i на множестве X . Отметим, что в некоторых задачах принятия решений могут встретиться критерии, которые не обязательно следует максимизировать или минимизировать.

Например, иногда требуется получить некоторое среднее значение критерия или «удержать» его значения в определенных заданных пределах. Однако установлено, что во многих важных с практической точки зрения случаях (т. е. при некоторых «разумных» требованиях к $\succ_i$ и X) существует функция полезности (ценности) u_i , адекватно описывающая данное «частное» отношение предпочтения: для всех $x', x'' \in X$ верна эквивалентность

$$x' \succ_i x'' \Leftrightarrow u_i(x') > u_i(x'') \text{ и } x' \sim_i x'' \Leftrightarrow u_i(x') = u_i(x'').$$

Эти результаты показывают, что многие задачи, в которых изначально не требуется максимизация (или минимизация) критериев, могут быть, по крайней мере теоретически, сведены к экстремальным задачам.

4. Оптимальность по Парето

Предположим, что ЛПП заинтересовано в получении по возможности больших значений каждой компоненты f_i векторного критерия f . Внимательный анализ показывает некоторую расплывчатость этого предположения. Придадим обсуждаемому допущению строгую форму.

Всюду далее будем считать выполненным следующее допущение, формулируемое в терминах векторов пространства критериев.

Аксиома 7.3 (продолжение отношения предпочтения). *Существует продолжение $>$ на все пространство критериев R^m отношения $>_f$, причем это продолжение $>$ является иррефлексивным и транзитивным отношением.*

Данное требование (не считая обязательную иррефлексивность и транзитивность) заключается в постулировании «расширенных» возможностей ЛПП сравнивать оценки по предпочтительности. В соответствии с ним для любых двух векторов $y', y'' \in R^m$ выполняется одно и только одно из трех соотношений, при этом не имеет места ни $y' > y''$ ни $y'' > y'$.

Говорят, что i -й критерий f_i согласован с отношением предпочтения $>$, если для любых двух векторов $y', y'' \in R^m$, таких что из $y'_i > y''_i$ следует $y' > y''$.

Содержательно согласованность данного критерия с отношением предпочтения означает, что ЛПП при прочих равных условиях заинтересовано в получении по возможности больших значений этого критерия. Взаимосвязь отношения предпочтения данного ЛПП с критериями оптимальности выражается в виде следующего требования.

Аксиома 7.4 (согласование критериев с отношением предпочтения). *Каждый из критериев $f_1, f_2, \dots, f_m$ согласован с отношением предпочтения $>$.*

Заинтересованность ЛПП в получении по возможности больших значений всех компонент векторного критерия f можно также выразить в терминах так называемой аксиомы Парето.

Аксиома Парето (в терминах решений). *Для всех пар решений $x', x'' \in X$, для которых имеет место неравенство $f(x') \geq f(x'')$, выполняется $x' >_x x''$.*

Напомним, что запись $f(x') \geq f(x'')$ означает выполнение покомпонентных неравенств $f_i(x') \geq f_i(x'')$ для всех $i = 1, 2, \dots, m$, причем $f(x') \neq f(x'')$.

Лемма 7.3. *Принятие аксиом 7.3 и 7.4 гарантирует выполнение аксиомы Парето.*

Множество паретооптимальных решений обозначается $P_f(X)$ и определяется равенством $P_f(X) = \{x^* \in X \mid \nexists x \in X, \text{ что } f(x) \geq f(x^*)\}$.

Лемма 7.4. *При выполнении аксиом 7.3 и 7.4 множество недоминируемых решений $NdomX$ удовлетворяет включению $NdomX \subset P_f(X)$.*

Из лемм 7.1 и 7.4 вытекает следующий принципиально важный для теории принятия решений результат.

Теорема 7.3. *В условиях выполнения аксиом 7.1 – 7.4 для любого непустого множества выбираемых решений $Sel X$ справедливо включение*

$$Sel X \subset P_f(X). \quad (7.2)$$

Включение (7.2) выражает собой принцип *Эджворта – Парето* (или *принцип Парето*), согласно которому если ЛПР ведет себя достаточно «разумно» (т. е. в соответствии с аксиомами 7.1 – 7.4), то выбираемые им решения обязательно являются парето-оптимальными.

Этот принцип демонстрирует особую, исключительно важную роль множества парето-оптимальных решений. Если хотя бы одна из аксиом 7.1, 7.2, 7.3, 7.4 нарушается, то выбираемое решение не обязано должно быть парето-оптимальным. Отсюда следует, что принцип Эджворта – Парето не является универсальным, т. е. применимым во всех без исключения задачах многокритериального выбора.

Применение этого принципа рискованно или же вообще недопустимо, если:

- отношение предпочтения, которым ЛПР руководствуется в процессе выбора, не является транзитивным;
- отношение предпочтения ЛПР не согласовано хотя бы с одним из критериев;
- не выбираемое из некоторой пары решение оказывается выбранным из всего множества возможных решений.

Вектор $f(x^*)$ при паретооптимальном решении x^* называют *паретооптимальным вектором* решения x^* или просто паретооптимальным вектором, а множество всех таких векторов – *множеством паретооптимальных векторов* (или *множеством Парето*). Для этого множества используют обозначение $P(Y)$. Таким образом, $P(Y) = f(P_f(X)) = \{f(x^*) \in Y \mid \text{при некотором } x^* \in P_f(X)\}$, $Y = f(X)$.

Множество паретооптимальных векторов можно определить следующим эквивалентным образом:

$$P(Y) = \{y^* \in Y \mid \nexists y \in Y, y \geq y^*\}. \quad (7.3)$$

Сравнивая равенство (7.3) с аналогичным равенством из определения множества недоминируемых векторов, нетрудно обнаружить их полное совпадение (не считая отношений $\succ_x$ и $\geq$). На основании этого совпадения **множество паретооптимальных векторов можно рассматривать как множество недоминируемых по отношению $\geq$ элементов множества Y .**

Теорема 7.4 (в терминах векторов). Пусть выполняются аксиомы 7.1–7.4. Тогда для любого непустого множества векторов $Sel Y$ имеет место включение $Sel Y \subset P(Y)$.

Ранее уже отмечалось, что результаты, связанные с недоминируемыми решениями и векторами, могут быть переформулированы применительно к множествам Парето.

Теорема 7.5. В случае конечного множества возможных векторов Y (в частности, если конечно множество возможных решений X) существует хотя бы одно парето-оптимальное решение и соответственно хотя бы один парето-оптимальный вектор, т. е. $P_f(X) \neq \emptyset$, $P(Y) \neq \emptyset$.

Взаимосвязь между введенными выше различными подмножествами множества возможных решений при выполнении аксиом 7.1 – 7.4 в условиях справедливости лемм 7.1 и 7.4 имеет вид следующих включений

$$Sel X \subset Ndom X \subset P_f(X) \subset X. \quad (7.4)$$

К настоящему времени свойства множества Парето изучены достаточно подробно. В общем случае множество Парето может

- оказаться пустым;
- состоять из одного элемента;
- содержать бесконечное число элементов;
- совпадать с исходным множеством возможных решений.

ЛЕКЦИЯ № 8. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

1. Сведение многокритериальных задач к однокритериальным

Рассмотренные ранее оценки эффективности стратегий и понятия оптимальности при наличии неконтролируемых факторов не зависят от происхождения этих факторов. Чаще всего под ними подразумеваются природные факторы (в том числе такой фактор, как недостаточная изученность исследуемого процесса) и действия противника, или других лиц, не принадлежащих к оперирующей стороне. Однако имеется еще один источник неопределенности. *Речь идет о неопределенности в понимании цели операции.* Эта неопределенность в строгом смысле не является неконтролируемым фактором, так как выбор цели и связанного с ней критерия эффективности находится в распоряжении ЛПР. Однако если ЛПР не может или не решается сделать этот выбор, то возникает ситуация, аналогичная случаю наличия неконтролируемых факторов. *Обычно эта ситуация связана с тем, что имеется целый ряд показателей эффективности, желательность максимизации (или минимизации) которых не вызывает сомнения, но нет четких представлений о виде общего критерия, т. е. едином показателе.* Для выработки такого критерия приходится проводить дополнительное исследование.

Вопрос о введении единого (общего) критерия эффективности в операции по ряду первичных (частных) критериев аналогичен вопросу о введении оценок эффективности стратегий. Но так как выбор критерия эффективности, в принципе находится в распоряжении ЛПР, то варианты введения общего критерия (методов свертки критериев эффективности) отличаются большим разнообразием.

Общий вид свертки $f_0 = \varphi(f_1, \dots, f_m)$, где f_0 – общий критерий, $f_1, \dots, f_m$ – частные критерии, φ – некоторая (вообще говоря, произвольная) функция. Перечислим *наиболее распространенные способы свертки критериев эффективности.*

Суммирование с весовыми коэффициентами. Это способ наиболее распространен в экономических задачах, откуда происходит его второе название – экономический способ свертки:

$$f_0 = \sum_{i=1}^m a_i f_i. \quad (8.1)$$

Коэффициенты a_i называют весовыми и обычно удовлетворяют условию нормировки: $a_i \geq 0, i = 1, \dots, m, \sum_{i=1}^m a_i = 1$. Эти коэффициенты могут играть роль переводных (в единую систему измерения). Остающаяся неточность знания цели может выражаться в неопределенности a_i .

Переход от критериев количественных к качественным. Все критерии можно условно разбить на два типа:

- критерии, принимающие только два значения (чаще всего 0 и 1),
- критерии, принимающие более двух (как правило, много) значений.

Первые называют **критериями качественного типа**. Смысл их состоит в том, что все исходы операции они разбивают на две группы: удовлетворительные и неудовлетворительные.

Вторые будем называть **критериями количественного типа**, при таких критериях цель операции состоит в получении возможно большего значения эффективности. От критериев качественного типа можно перейти к количественным, например, с помощью предыдущего способа свертки. *Способ перехода от количественных критериев к качественным* имеет вид:

$$f_0 = \begin{cases} 1, & f_i \geq f_i^*, \quad i = 1, \dots, m, \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases},$$

где через f_i^* обозначены пороговые (удовлетворительные) значения частных критериев.

Логические способы свертки (для критериев качественного типа). Переменные, принимающие значения только 0 и 1, называются логическими (или булевыми), операции с такими переменными носят название логических. Так как критерии качественного типа представляют собой булевы переменные, то для свертки качественных критериев можно использовать логические операции. К ним относятся:

- отрицание (противоположная цель), $f_0 = 1 - f_1$ ($m = 1$);
- конъюнкция (логическое произведение); исход операции оценивается как удовлетворительный по общему критерию, если он удовлетворителен по всем частным критериям, $f_0 = \prod_{i=1}^m f_i$;
- дизъюнкция (логическая сумма); для «успеха» по общему критерию достаточно «успеха» хотя бы по одному частному критерию,

$$f_0 = 1 - \prod_{i=1}^m (1 - f_i).$$

Обобщенные логические способы свертки (для критериев количественного типа). Содержательными аналогами логических операций для количественных критериев служат следующие операции:

- противоположная цель, $f_0 = -f_1$ ($m = 1$);
- оценка по наихудшему значению частных критериев (с учетом весовых коэффициентов) $f_0 = \min_{1 \leq i \leq m} a_i f_i, (a_i > 0)$; (8.2)
- оценка по наилучшему значению частных критериев

$$f_o = \max_{1 \leq i \leq m} a_i f_i, (a_i > 0).$$

Перечисленные способы свертки являются не только наиболее распространенными, но и в совокупности обладают в определенном смысле свойством полноты, т. е. практически любая свертка представима в виде комбинации. Зачастую ЛПР затрудняется выбрать не только значения весовых коэффициентов, но и сам способ свертки критериев. В такой ситуации обычно вводят понятия оптимальности в терминах всего набора частных критериев (вектора критериев). Оказывается, однако, что эти понятия представляют собой неявное определение единого общего критерия. Покажем это на основе понятия **оптимальности по Парето**.

Пусть имеется вектор критериев эффективности $(f_1(x), \dots, f_m(x))$, зависящих для простоты только от стратегии $x \in X$ (неконтролируемых факторов нет). Согласно введенному ранее понятию Парето-оптимальности точка x^o называется *эффективной точкой* (или оптимальной по Парето стратегией), а вектор $(f_1(x^o), \dots, f_m(x^o))$ – эффективным значением вектора критериев, если **не существует** такой точки $x \in X$, что $f(x) \geq f(x^o)$, т. е. $f_i(x) \geq f_i(x^o)$, $i = 1, \dots, m$, причем хотя бы для одного i_0 неравенство строгое: $f_{i_0}(x) > f_{i_0}(x^o)$.

Теорема 8.1 (Карлина). *Если частные критерии $f_i(x)$ вогнуты на выпуклом множестве X , то для любой эффективной точки x^o существуют такие весовые коэффициенты a_i что x^o доставляет максимум функции (33) на множестве X при подстановке в нее данных a_i .*

Теорема 8.2 (Гермейера). *Пусть x^o – эффективная точка, причем $f(x^o) > 0, i = 1, \dots, m$. Тогда существуют такие весовые коэффициенты $a_i \geq 0, i = 1, \dots, m, \sum_{i=1}^m a_i = 1$, что для единого критерия вида (8.2) x^o является точкой максимума на X .*

Таким образом, оптимальные по Парето могут получаться как обычные точки максимума общего критерия, вводимого с помощью одного из двух перечисленных выше методов свертки критериев эффективности. Как правило, эффективных точек для векторов критериев оказывается много, фиксация весовых коэффициентов в (8.1) и (8.2) соответствует выделению единственной такой точки. Свертка (8.1) несколько предпочтительней свертки (8.2) при вычислениях, так как (8.2) приводит фактически к максиминной задаче. Однако в отличие от (8.1), максимизация свертки (8.2) справедлива как необходимое условие эффективности практически без ограничений. Как достаточное условие эффективности, максимизация свертки (8.1) справедлива без учета требований выпуклости и вогнутости (при этом должно быть $a_i > 0$).

2. Методы решения задач векторной оптимизации

Среди известных методов решения задач многокритериальной оптимизации можно отметить **метод последовательных уступок, метод идеальной точки, субоптимизация (метод ограничений), лексикографическая оптимизация (метод приоритетов)**.

Метод последовательных уступок решения задач многокритериальной оптимизации применяется в случае, когда частные критерии могут быть упорядочены в порядке убывания их важности. Предположим, что все частные критерии максимизируются и пронумерованы в порядке убывания их важности.

Находим максимальное значение первого по важности критерия в области допустимых решений однокритериальной задачи. Затем назначается величина допустимого отклонения первого критерия и находится максимальное значение второго критерия при условии, что значение первого критерия не должно отклоняться от своего максимального значения более чем на величину допустимой уступки.

Снова назначается величина уступки по второму критерию, которая вместе с первой уступкой используется для нахождения условного максимума третьего частного критерия. Аналогичные процедуры повторяются до тех пор, пока, не будет выявлено максимальное значение последнего по важности критерия при условии, что значение каждого из первых $m-1$ частных критериев отличается от соответствующего условного максимума не более чем на величину допустимой уступки по данному критерию.

Полученное на последнем этапе решение считается оптимальным. Поэтому практически метод реализуется так, что ЛПР в режиме диалога анализирует точки на границе Парето и соглашается остановиться на некоторой компромиссной.

Метод идеальной точки состоит в отыскании на границе Парето точки, ближайшей к точке утопии, задаваемой ЛПР. Обычно ЛПР формулирует цель в виде желаемых значений показателей, и часто в качестве координат целевой точки выбирается сочетание наилучших значений всех критериев (обычно эта точка не реализуется при заданных ограничениях, поэтому ее называют точкой утопии).

Субоптимизация, или метод ограничений, заключается в том, что выделяется один частный критерий, а остальные переводятся в ограничения в виде условия достижимости определенного значения. Строится задача вида

$$f_1(x) \rightarrow \max, f_i(x) \geq l_i, i = 2, \dots, m, x \in X.$$

Лексикографическая оптимизация, или метод приоритетов, основан на введении отношения порядка критериев по относительной важности. Критерии перенумеровываются таким образом, что функция $f_1(x)$ считается самым важным показателем, а последняя по номеру функция $f_m(x)$ считается наименее важной. Далее рассматривается задача последовательной оптимизации $f_1(x), \dots, f_m(x)$.

Сначала решается задача $f_1(x) \rightarrow \max, x \in X$. Если множество полученных оптимальных стратегий содержит более одной точки, решается задача максимизации критерия $f_2(x)$ на этом множестве:

$$f_2(x) \rightarrow \max, x \in \underset{x \in X}{\operatorname{Arg} \max} f_1(x).$$

И так далее, до тех пор, пока не будут рассмотрены все критерии или найдено единственное решение задачи.

Обобщением метода идеальной точки является целевое программирование. Этот термин был предложен А. Чарисом и В. Купером для определенного типа задач математического программирования, состоящих в нахождении решений, обеспечивающих «как можно более близкое» приближение к множеству одновременно недостижимых целей. Обозначим Y^* целевое множество в пространстве критериев. Данное множество может быть задано, например, $f_i(x) = y_i^*$ или $f_i(x) \geq y_i^*$ ($f_i(x) \leq y_i^*$) или $f_i(x) \in [y_i^1, y_i^2]$, $i = 1, \dots, m$.

Кандидатами в решение являются точки из Y , ближайшие к Y^* в смысле какой-то метрики ρ в пространстве критериев. Тогда в общем виде задача формулируется следующим образом: найти $\rho(f(x), Y^*) \rightarrow \min$, где $\rho(f(x), Y^*) = \min_{y \in Y^*} \rho(f(x), y)$. Метрика может быть выбрана, например, полиэдральная (обобщенная линейная): $\rho_0(f(x), y^*) = \min_i \alpha_i |f_i(x) - y_i^*|$, $\rho_0(f(x), y^*) = \sum_i \alpha_i |f_i(x) - y_i^*|$ или евклидова $\rho_0(f(x), y^*) = \sum_i \alpha_i (f_i(x) - y_i^*)^2$. Если метрика полиэдральная, задача целевого программирования может быть сведена к задаче линейного программирования.

3. Метод анализа иерархий

Очень часто при анализе интересующей нас структуры число элементов и их взаимосвязей настолько велико, что превышает способность исследователя воспринимать информацию в полном объеме. В таких случаях система делится на подсистемы. Иерархия есть определенный тип системы, основанный на предположении, что элементы системы могут группироваться в несвязанные множества. Элементы каждой группы находятся под влиянием элементов некоторой вполне определенной группы и, в свою очередь, оказывают влияние на элементы этой группы. Будем считать, что элементы в каждой группе иерархии (уровень, кластер, страта) независимы.

Основной задачей в иерархии является оценка высших уровней исходя из взаимодействия различных уровней иерархии, а не из непосредственной зависимости от элементов на этих уровнях. Точные методы построения систем в виде иерархий появляются в естественных и общественных науках, и особенно в задачах общей теории систем, связанных с планированием и построением социальных систем.

Концептуально, **наиболее простая иерархия – линейная**, восходящая от одного уровня элементов к соседнему уровню. Например, в процессе производства имеется уровень рабочих, доминируемый уровнем мастеров, который в свою очередь доминируется уровнем управляющих и т. д., до вице-президентов и президента.

В **нелинейной иерархии** верхний уровень может быть как в доминирующем положении по отношению к нижнему уровню, так и в доминируемом (например, в случае потока информации).

В математической теории иерархий разрабатывается **метод оценки воздействия уровня на соседний верхний уровень посредством композиции**

соответствующего вклада (приоритетов) элементов нижнего уровня по отношению к элементу верхнего уровня. Эта композиция может распространяться вверх по иерархии. Каждый элемент иерархии функционально может принадлежать к нескольким другим различным иерархиям. Элемент может являться управляющей компонентой на некотором уровне одной иерархии или может просто быть элементом, раскрывающим функции нижнего или высшего порядка в другой иерархии.

Метод анализа иерархий представляет собой систематическую процедуру для иерархического представления элементов, отражающих содержание проблемы. *Метод состоит в декомпозиции проблемы на все более простые составляющие части и дальнейшей обработке последовательности суждений ЛПР на основе попарных сравнений.* В результате может быть выражена относительная степень взаимодействия элементов в иерархии. Эти суждения затем выражаются численно. *Метод анализа иерархий включает в себя процедуры синтеза множественных суждений, получения приоритетности критериев и нахождения альтернативных решений.*

Матричный метод попарных сравнений, позволяющих сравнивать самые разнообразные параметры систем, был предложен Т. Саати. Элементы задачи сравниваются попарно по отношению к интенсивности их воздействия на общую для них характеристику. Степень интенсивности определяется опросом экспертов, поэтому метод Саати можно рассматривать как дальнейшее развитие и формализацию метода экспертных оценок.

Введем некоторые понятия. Матрица $A = (a_{ij})_{n \times n}$ называется положительной, если $a_{ij} > 0, i, j = 1, \dots, n$. Матрица $A = (a_{ij})_{n \times n}$ называется обратносимметричной, если $a_{ji} = 1/a_{ij} > 0, i, j = 1, \dots, n$.

Матрица $A = (a_{ij})_{n \times n}$ является согласованной, если $a_{ik} = a_{ij} \cdot a_{jk}, i, j, k = 1, \dots, n$. Очевидно, что условие обратносимметричности является необходимым, но не достаточным условием согласованности. *Собственный вектор* (характеристический вектор) матрицы $A = (a_{ij})_{n \times n}$ – это такой ненулевой вектор ξ , что $A\xi = \lambda\xi$, или $(1/\lambda)A$ преобразует ξ в ξ , т. е. оставляет ξ инвариантным.

Величины λ , соответствующие такому ξ , называются *собственными значениями* (характеристическими значениями) матрицы A . Следовательно, ξ будет собственным вектором, он является нетривиальным (т. е. ненулевым) решением уравнения $(A - \lambda E)\xi = 0$ для некоторого числа λ , где E – единичная матрица. Компоненты w составляют множество решений однородной линейной системы с матрицей $A - \lambda E$.

Для получения нетривиального решения матрица $A - \lambda E$ должна быть вырожденной, т. е. ее определитель должен быть равным нулю. Этот определитель представляет собой полином n -й степени от λ . Условие равенства определителя нулю ведет к уравнению n -й степени, которое называется характеристическим уравнением матрицы A . Собственный вектор получается в

результате решения системы уравнений, соответствующей найденному собственному значению.

Теорема 8.3. *Положительная обратносимметричная матрица согласована тогда и только тогда, когда $\lambda_{\max} = n$, где $\lambda_{\max}$ – максимальное собственное значение матрицы, а n – размерность матрицы.*

Допустим, что n видов действия или объектов рассматриваются экспертами. Предположим, что **цели экспертов следующие**: 1) высказать суждения об относительной важности этих объектов; 2) гарантировать такой процесс получения суждений, который позволит количественно интерпретировать суждения по всем объектам.

Опишем **метод получения из количественных суждений** экспертов (т. е. из относительных величин, ассоциируемых с парами объектов) **множества весов**, ассоциируемых с отдельными объектами; в том смысле, который определен ниже, эти веса должны отражать количественные суждения экспертов. Благодаря такому подходу полученную из целей экспертов информацию приводим в удобную форму без информационных потерь, свойственных качественным суждениям.

Пусть $C_1, C_2, \dots, C_n$ – совокупность объектов (например, проектов, критериев эффективности, учебных дисциплин). Экспертам предлагается высказать суждения об их относительной важности (эффективности). Для проведения парных сравнений объектов разработана шкала относительной важности оценок.

Приведем некоторые из возможных объяснений этих оценок.

1. Способность человека производить качественные разграничения хорошо представлена пятью определениями: *слабый, равный, сильный, очень сильный, абсолютный*. Для большей точности можно использовать промежуточные определения.

2. Классификация по трем основным зонам – *неприятие, безразличие, приятие*, каждая из которых делится на низкую, умеренную и высокую степени.

3. Психологический предел 7 ± 2 предметов, при одновременном сравнении, подтверждает, что если взять 7 ± 2 отдельных предметов, близких относительно свойства, используемого для сравнения, то требуется 9 точек чтобы их различить.

Опыт показал, что при сравнении двух объектов сравнений в основном ставятся следующие вопросы: *какой из них важнее или имеет большее воздействие? какой из них более вероятен? какой из них предпочтительнее?*

Количественные суждения о парах объектов (C_i, C_j) представляются матрицей $A = (a_{ij})_{n \times n}$, $(i, j = 1, 2, \dots, n)$. При сравнении объектов (определения a_{ij}) нужно ответить на вопрос: во сколько C_i важнее C_j . Элементы a_{ij} определены по следующим правилам:

Правило 1. Если $a_{ij} = a$, то $a_{ji} = \frac{1}{a}$, $a \neq 0$,

Правило 2. Если суждения таковы, что C_i имеет одинаковую с C_j относительную важность, то $a_{ij} = 1, a_{ji} = 1$; в частности, $a_{ii} = 1$ для всех i . Итак матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 1/a_{21} & 1 & \dots & a_{2n} \\ 1/a_{n1} & 1/a_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

После представления количественных суждений о парах (C_i, C_j) в числовом выражении через a_{ij} задача сводится к тому, чтобы n возможным объектам $C_1, C_2, \dots, C_n$ поставить в соответствие множество числовых весов $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ которые соответствовали бы зафиксированным суждениям, например, коэффициенты важности.

В идеальном случае точного отношения между попарными суждениями a_{ij} и искомыми весами ω_i имеют место соотношения:

$$\omega_i / \omega_j = a_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (8.3)$$

Значит, если A – согласованная матрица значений парных сравнений, то для нахождения вектора приоритетов нужно найти вектор ω , который удовлетворяет уравнению $A\omega = \lambda_{max}\omega$. На основании теоремы 8.3 имеем $\lambda_{max} = n$, но для согласованной матрицы A имеет место $\sum_{i=1}^n \lambda_i = n$, поэтому все остальные собственные значения матрицы равны нулю. Так как желательно иметь нормализованное решение, изменим ω , полагая $\gamma = \sum_{i=1}^n \omega_i$ и заменяя ω на $(1/\gamma)\omega$. Это обеспечит единственность, а также то, что $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$. Но если A – несогласованная матрица, то не существует вектора приоритетов ω , удовлетворяющего уравнению $A\omega = \lambda\omega$.

Пример 8.1. Пусть имеется согласованная матрица попарных сравнений трех критериев f_1, f_2, f_3 :

$$\begin{matrix} & f_1 & f_2 & f_3 \\ f_1 & 1 & 3/2 & 3 \\ f_2 & 2/3 & 1 & 2 \\ f_3 & 1/3 & 1/2 & 1 \end{matrix},$$

т. е. установлено, что критерий f_1 в $3/2$ раза важнее критерия f_2 и в 3 раза важнее критерия f_3 , а критерий f_2 в 2 раза важнее f_3 . Для свертки этих критериев типа суммы требуется найти весовые коэффициенты свертки (вектор приоритетов). Согласно теореме 8.3 $\lambda_{max} = 3$, поэтому для нахождения вектора приоритетов имеем систему линейных уравнений

$$\begin{aligned} (A - 3E)\omega &= 0, \quad \sum_{i=1}^3 \omega_i = 1: \\ (1 - 3)\omega_1 + \frac{3}{2}\omega_2 + 3\omega_3 &= 0, \quad \frac{2}{3}\omega_1 + (1 - 3)\omega_2 + 2\omega_3 = 0, \\ \frac{1}{3}\omega_1 + \frac{1}{2}\omega_2 + (1 - 3)\omega_3 &= 0, \quad \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 \end{aligned}$$

Нормированные веса (вектор приоритетов) есть

$$\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right).$$

Тем не менее, нереальным было бы требование выполнения этих условий в общем случае, т. е. матрица A не всегда согласована. В большинстве практических случаев это сделало бы задачу нахождения ω_i (при заданных a_{ij}) неразрешимой. Во-первых, даже физические измерения никогда не бывают точными в математическом смысле, и, следовательно, отклонения должны быть

приняты во внимание; во-вторых, эти отклонения достаточно велики из-за ошибок в человеческих суждениях.

В общем случае под согласованностью подразумевается то, что при наличии основного массива необработанных данных все другие данные логически могут быть получены из них. Для проведения парных сравнений n объектов или действий при условии, что каждый объект или действие представлены в данных по крайней мере один раз, требуется $(n - 1)$ суждений о парных сравнениях. Из них можно просто вывести все остальные суждения. Но для большинства задач очень трудно определить $(n - 1)$ суждений, связывающих все объекты или виды действия, одно из которых является абсолютно верным.

Если матрица не согласована, то на основе теоремы 8.3 можно оценить отклонение от согласованности величиной $(\lambda_{\max} - 1)/(n - 1)$. Заметим, что неравенство $\lambda_{\max} \geq n$ всегда верно. *Насколько плоха согласованность для определенной задачи, можно оценить путем сравнения полученного значения величины $(\lambda_{\max} - 1)/(n - 1)$ с ее значением из случайно выбранных суждений и соответствующих обратных величин матрицы того же размера.*

Выражение $(\lambda_{\max} - 1)/(n - 1)$ называется **индексом согласованности (ИС)**. Индекс согласованности сгенерированной случайным образом по шкале от 1 до 9 обратносимметричной матрицы называют **случайным индексом (СИ)**. Сгенерированные **средние случайные индексы СИ** для матриц порядка от 1 до 15 на базе 100 случайных выборок приведены в табл. 8.1.

Таблица 8.1

Случайная согласованность															
Порядок	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Средние СИ	0	0	0,58	0,90	1,12	1,24	1,32	1,41	1,45	1,49	1,51	1,48	1,56	1,57	1,59

Отношение ИС к среднему СИ для матрицы того же порядка называется **отношением согласованности (ОС)**. Значение ОС, меньшее или равное 0,10, считается приемлемым.

Приведем метод получения приближенной оценки согласованности (индекса согласованности). Для его реализации матрицу попарных сравнений умножают справа на вектор приоритетов, получают новый вектор. Разделив первую компоненту нового вектора на первую компоненту вектора приоритетов, вторую компоненту нового вектора на вторую компоненту вектора приоритетов и т. д., определим еще один вектор. Разделив сумму компонент этого вектора на число компонент, найдем приближение к числу $\lambda_{\max}$. Чем ближе $\lambda_{\max}$ к n (числу объектов или видов действия в матрице), тем более согласован результат.

Чтобы понять, как установить допуски на отклонения, рассмотрим i -ю строку матрицы A . Элементами этой строки являются $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ij}, \dots, a_{in}$.

В идеальном (точном) случае эти величины не что иное, как отношения $\omega_i/\omega_1, \omega_i/\omega_2, \dots, \omega_i/\omega_n$. Следовательно, в идеальном случае при умножении

первого элемента этой строки на ω_1 , второго на – на ω_2 , и т. д. получим $\omega_i, j = 1, 2, \dots, n$.

В итоге имеем строку идентичных элементов $\omega_i, \omega_i, \dots, \omega_i$, тогда как в общем случае мы получили бы строку элементов, представляющих статистическое рассеивание значений вокруг ω_i . Поэтому имело бы смысл требование равенства w_i среднему этих значений. Следовательно, вместо выражения в идеальном случае $w_i = a_{ij}w_j, i, j = 1, 2, \dots, n$, более реалистичные выражения для общего случая принимают вид

$$w_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_{ij}w_j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (8.4)$$

Несмотря на то, что условия для выражения (8.4) являются менее строгими, чем для выражения (8.3), все еще остается вопрос, достаточны ли эти условия для существования решения; т. е. гарантируется ли решаемость задачи по определению единственных весов ω_i , при заданных a_{ij} ? Чтобы найти ответ на заданный вопрос, необходимо записать (8.4) в другом виде. Для этого необходимо подытожить цепь рассуждений по данному вопросу.

При поиске условий, описывающих зависимость вектора весов w от количественных суждений, мы вначале рассмотрели идеальный (точный) случай этапа 1 и получили выражение (8.3). Затем, ясно понимая, что в реальном случае потребуется допускать отклонения, мы предусмотрели такие допущения и пришли к формулировке (8.4).

Оказалось, что все это еще недостаточно реалистично, т. е. то, что выражение (8.4), имеющее силу в идеальном случае, все еще слишком строго для гарантирования существования такого вектора весов w , который удовлетворял бы (8.4). Следует отметить, что при хороших оценках a_{ij} приближается к w_i/w_j и, следовательно, является малым возмущением этого отношения. Но поскольку a_{ij} изменяется, соответствующее решение (36) получим, если вместо n брать λ_{max} :

$$w_i = \frac{1}{\lambda_{max}} \sum_{j=1}^n a_{ij}w_j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

В общем случае отклонения в a_{ij} могут вызвать большие отклонения как в λ_{max} , так и в $w_i, i = 1, 2, \dots, n$. Однако в случае обратносимметричных матриц, удовлетворяющим правилам 1 и 2, этого не наблюдается, т. е. имеется устойчивое решение. **Вычисление вектора приоритетов по матрице попарных сравнений, являющейся заведомо несогласованной, можно осуществить следующими четырьмя методами,** которые представлены ниже в порядке увеличения точности оценок.

Метод 1. Суммировать элементы каждой строки и нормализовать делением каждой суммы на сумму всех элементов; сумма полученных результатов будет равна единице. Первый элемент результирующего вектора будет приоритетом первого объекта, второй – второго объекта и т. д.

Метод 2. Суммировать элементы каждого столбца и получить обратные величины этих сумм. Нормализовать их так, чтобы их сумма равнялась единице, разделив каждую обратную величину на сумму всех обратных величин.

Метод 3. Разделить элементы каждого столбца на сумму элементов этого столбца (т. е. нормализовать столбец), затем сложить элементы каждой полученной строки и разделить эту сумму на число элементов строки. Это – процесс усреднения по нормализованным столбцам.

Метод 4. Умножить n элементов каждой строки и извлечь корень n -й степени (геометрическое среднее). Нормализовать полученные числа.

Если матрица согласована, то во всех четырех случаях векторы приоритетов будут одинаковыми. В случае несогласованности очень хорошее приближение можно получить только с помощью метода 4.

Легко убедиться, что при решении задачи из примера 8.1 любым из этих методов получается тот же вектор приоритетов. В общем случае, когда матрица не согласована, эти методы дают различные результаты.

Пример 8.2. Пусть A , B , C , и D обозначают цели профессорско-преподавательского состава (ППС): A – работа, B – профессиональный рост, C – повышение квалификации, D – уверенность в своих силах. Создадим шкалу приоритетов относительной важности этих критериев. Суждения производит эксперт, который задает вопросы типа «Насколько сильнее профессиональный рост (B) по сравнению с повышением квалификации (C)?». Ответ представителя ППС соответствует одному из чисел для сравнения, записанных в табл. 8.1, и это суждение заносится в позицию (B , C) матрицы попарных сравнений 4×4 . После занесения оставшихся пяти суждений, а также вычисления средних значений элементов матрицы, соответствующих ответам выбранных представителей ППС, получим:

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C & D \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 \\ 1/4 & 1 & 4 & 6 \\ 1/6 & 1/4 & 1 & 4 \\ 1/7 & 1/6 & 1/4 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Следующий шаг состоит в вычислении вектора приоритетов по заданной матрице, являющейся заведомо несогласованной. Применим различные методы оценки решения в данном примере.

Метод 1 дает сумму строк этой матрицы в виде вектор-столбца $(19,00; 11,20; 5,42; 1,56)^T$. Сумма всех элементов матрицы получается путем сложения компонент этого вектора и равна 37,18. Разделив каждую компоненту вектора на это число, получим $(0,51; 0,31; 0,15; 0,04)^T$ вектор-столбец приоритетов относительной важности критериев A , B , C , и D соответственно.

Метод 2 дает сумму столбцов этой матрицы $(1,51; 6,43; 11,25; 18,00)^T$. Обратными величинами этих сумм являются $(0,66; 0,16; 0,09; 0,06)^T$, а после нормализации становятся $(0,68; 0,16; 0,09; 0,06)^T$.

Методом 3 нормализуем каждый столбец (складываем компоненты и делим каждую компоненту на эту сумму) и получаем матрицу

$$\begin{pmatrix} 0,66 & 0,78 & 0,53 & 0,39 \\ 0,13 & 0,16 & 0,36 & 0,33 \\ 0,11 & 0,04 & 0,09 & 0,22 \\ 0,09 & 0,03 & 0,02 & 0,06 \end{pmatrix}.$$

Сумма строк является вектором-столбцом $(2,36; 0,98; 0,46; 0,20)^T$, который после деления на размерность столбцов 4 позволяет получить вектор-столбец приоритетов $(0,590; 0,245; 0,115; 0,050)^T$. Метод 4 дает $(0,61; 0,24; 0,10; 0,04)^T$.

Проиллюстрируем на этом примере приближенное вычисление ИС. Для нахождения приближения к λ_{max} используем приведенную выше матрицу и вектор приоритетов, полученный методом 3. После умножения матрицы справа на вектор приоритетов $(0,590; 0,245; 0,115; 0,050)^T$ имеем вектор столбец $(4,83; 4,44; 4,28; 4,00)^T$, а в результате усреднения последних имеем приближение к λ_{max} , равное 4,39. Отсюда $ИС = \frac{(4,39-4)}{3} = 0,13$. Для определения того, насколько хорош этот результат, разделим его на соответствующий СИ = 0,90. Отношение согласованности $0,13/0,90 = 0,14$, что, пожалуй, не так уж близко к 0,10.

Эти сравнения и вычисления устанавливают приоритеты элементов некоторого уровня иерархии относительно одного элемента следующего уровня. Если уровней больше, чем два, то различные векторы приоритетов могут быть объединены в матрицы приоритетов, из которых определяется один окончательный вектор приоритетов для нижнего уровня.

Например, требуется определить «степень влияния», или приоритеты, элементов одного уровня относительно их важности для элемента следующего уровня. Заданы элементы одного уровня иерархии и один элемент следующего, более высокого уровня. Нужно сравнить элементы данного уровня попарно по силе их влияния на элемент более высокого уровня, поместить числа, отражающие достигнутое при сравнении согласие во мнениях, в матрицу парных сравнений, и в случае ее согласованности найти собственный вектор с наибольшим собственным значением. Собственный вектор обеспечивает упорядочение приоритетов, а собственное значение является мерой согласованности суждений.

Таким образом, метод попарных сравнений, основанный на решении задачи о собственном значении, обеспечивает способ шкалирования, особенно в тех сферах, где не существует измерений и количественных сравнений. Мера согласованности позволяет возвратиться к суждениям, модифицируя их для улучшения общей согласованности.

ЛЕКЦИЯ № 9. ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ. ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В СТОХАСТИЧЕСКИХ УСЛОВИЯХ

1. Понятие риска. Управление риском

Неполнота или неточность исходных данных о состоянии системы и ее будущем развитии приводит к математическим задачам принятия решений, сформированным на основе некоторой информационной модели. Неточность исходной информации приводит к такому понятию как **«риск»**, в отношении которого до сих пор не сложилось однозначного толкования. Это объясняется сложностью данного явления и его недостаточной теоретической изученностью.

Существует несколько концепций и определений риска:

- возможная опасность потерь, возникающая из специфики тех или иных явлений природы или видов деятельности человеческого общества;
- возможность наступления неблагоприятных событий, связанных с различными видами потерь;
- вероятность неблагоприятного исхода, приводящего к возможному ущербу;
- вероятность неожиданного воздействия определенных факторов, под влиянием которых может произойти отклонение результата от запланированной величины;
- степень неопределенности или непредсказуемости процесса функционирования системы.

Приведенные определения риска относятся к различным сферам деятельности. Общим для них является связывание риска с вероятностью некоторого события (случайного неконтролируемого фактора), приводящего к ущербу, потере доходов или появлению дополнительных расходов, отклонению результата от запланированной величины.

Риск в широком смысле – это *непредсказуемость состояния системы или течения процесса, как результат неполноты информации.*

Под управлением риском понимается *принятие управленческих решений в системе, неизменным атрибутом которого являются процедуры учета и оценки факторов риска в целях максимального снижения неопределенности при принятии решений и обеспечения устойчивости системы.* Рассмотрим методы статистической обработки данных в задачах оценки рисков.

2. Методы статистической обработки данных в задачах оценки рисков

Основными характеристиками случайной величины являются математическое ожидание и дисперсия.

Математическое ожидание случайной величины – среднее значение, одна из числовых характеристик распределения вероятностей случайной

величины. Математическое ожидание дискретной случайной величины вычисляется по формуле:

$$M(Y) = \sum_{k=1}^N p_k y_k,$$

где y_k – значение случайной величины Y ; p_k – вероятность появления случайной величины; N – количество значений случайной величины. Если значения случайной величины равновероятны, то $p_k = \frac{1}{N}$.

Дисперсия случайной величины – мера разброса, т. е. математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания. Обозначается $D(Y)$ или $\text{var } x$ (в зарубежной литературе). В статистике часто употребляется обозначение σ_Y^2 или σ^2 .

Квадратный корень из дисперсии, равный, равный σ , называется *средним квадратическим отклонением* (СКО), стандартным отклонением или стандартным разбросом. Стандартное отклонение измеряется в тех же единицах, что и математическое ожидание случайной величины, а дисперсия в квадратах единицы измерения случайной величины. Дисперсия рассчитывается по формуле $D(Y) = M(Y - M(Y))^2$.

Математическая статистика занимается разработкой методов регистрации, описания, анализа экспериментальных данных, получаемых в результате наблюдения массовых случайных явлений. Одной из ее задач является задача экспериментального определения числовых характеристик случайных величин. Пусть произведено N опытов, в результате которых получено множество значений $\{y_1, \dots, y_N\}$ дискретной случайной величины Y .

Математическое ожидание этой величины определяется по формуле (1):

$$M^*(Y) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_k, \quad (9.1)$$

а дисперсия – по формуле (2):

$$D^*(Y) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (y_k - M(Y))^2. \quad (9.2)$$

Рассмотрим величины $M^*(Y)$ и $D^*(Y)$ как случайные определенные формулами (1) и (2). Математическое ожидание величины $M^*(Y)$ равно $M(Y)$, а математическое ожидание величины $D^*(Y)$ равно $\frac{D(Y)(N-1)}{N}$.

Эти факты принято выражать следующим образом: экспериментальная оценка (1) математического ожидания является несмещенной, а экспериментальная оценка (2) дисперсии является смещенной. Это означает, что если повторять много раз серию из N опытов, получая каждый раз экспериментальные значения случайной переменной X и вычислять каждый раз экспериментальные значения $D^*(Y)$, то оно будет колебаться не около $D(Y)$, а около $\frac{D(Y)(N-1)}{N}$. Несмещенная оценка величины дисперсии задается формулой $D(Y) = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (y_k - M(Y))^2$.

Для описания системы случайных величин, кроме математических ожиданий и дисперсий, используют и другие характеристики. К их числу относятся корреляционный момент (ковариация) и коэффициент корреляции.

Корреляционным моментом $\sigma_{Y_1Y_2}$ (ковариацией) случайных величин Y_1 и Y_2 называют математическое ожидание произведения отклонений этих величин от своих математических ожиданий:

$$\sigma_{Y_1Y_2} = M([Y_1 - M(Y_1)] * [Y_2 - M(Y_2)]).$$

Корреляционный момент дискретных случайных величин вычисляют по формуле:

$$\sigma_{Y_1Y_2} = \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^S M([Y_{1k} - M(Y_1)] * [Y_{2i} - M(Y_2)]) p(y_{1k}, y_{2i}),$$

где y_k – значение случайной величины Y_1 , $k = 1, \dots, N$;

y_i – значение случайной величины Y_2 , $i = 1, \dots, S$;

$p(y_k, y_i)$ – вероятность того, что система (Y_1, Y_2) случайных величин принимает значения (y_k, y_i) .

Корреляционный момент служит для характеристики связи между величинами Y_1 и Y_2 . Если корреляционный момент не равен нулю, то случайные величины Y_1 и Y_2 зависимы. Положительный корреляционный момент указывает на то, что две случайные величины меняются в одну сторону (одновременно увеличиваются или уменьшаются), при отрицательном – в разные. Если имеется N измерений двух случайных величин, то статистический корреляционный момент имеет вид:

$$\sigma_{Y_1Y_2} = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^N ([Y_{1k} - M(Y_1)] * [Y_{2i} - M(Y_2)]).$$

Коэффициентом корреляции $\rho_{Y_1Y_2}$ случайных величин Y_1 и Y_2 называют отношение корреляционного момента к произведению СКО этих величин:

$$\rho_{Y_1Y_2} = \frac{\sigma_{Y_1Y_2}}{\sigma_{Y_1}\sigma_{Y_2}}.$$

Коэффициент корреляции характеризует степень тесноты линейной зависимости между случайными величинами. Если случайные величины Y_1 и Y_2 связаны точной линейной функциональной зависимостью $Y_1 = aY_2 + b$, то $\rho_{Y_1Y_2} = \pm 1$, причем знак «плюс» или «минус» берется в зависимости от того, положителен или отрицателен коэффициент a . В общем случае, когда величины Y_1 и Y_2 связаны произвольной вероятностной зависимостью, имеем $-1 \leq \rho_{Y_1Y_2} \leq +1$.

Для независимых случайных величин коэффициент корреляции нормирует ковариацию для облегчения сравнения с другими параметрами случайных переменных.

Минимальное число характеристик, с помощью которых может быть охарактеризована система n случайных величин $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$, сводится к вычислению следующих характеристик:

n значений математических ожиданий, характеризующих среднее значение величин;

n значений дисперсий, характеризующих их рассеяние;

$n(n-1)$ значений корреляционных моментов, характеризующих попарную корреляцию всех величин, входящих в систему.

Все корреляционные моменты и дисперсии удобно расположить в виде

матрицы $K = (\sigma_{ij})_{n \times n} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2n} \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_{nn} \end{pmatrix}$, которая называется

корреляционной матрицей системы случайных величин. Например, если на фондовом рынке имеются n финансовых инструментов, то случайные величины их доходностей $r_1, \dots, r_n$ могут быть охарактеризованы вектором математических ожиданий $\bar{r} = (\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_n)$ и корреляционной матрицей $K = (\sigma_{ij})_{n \times n}$.

Для оценки риска можно использовать **подход, связанный с введением функции риска**. Пусть x – стратегия ЛПР, $r(x)$ – случайная стратегия, определяющая результат деятельности ЛПР (например, инвестора) в случае возникновения неблагоприятного события; $d(x)$ – функция, определяющая ожидаемый результат деятельности ЛПР, не связанный с возможностью возникновения неблагоприятного события, приводящего к убыткам или потерям.

В данном случае имеется ввиду, что $d(x)$ не обязательно математическое ожидание величины $r(x)$, и возможно $d(x) \geq r(x), \forall x$, но, в частности, $d(x) = Mr(x) = \bar{r}(x)$. Отклонение $r(x)$ от $d(x)$ представляет собой **функцию потерь ЛПР**.

Функцию риска будем задавать в соответствии с выбранной метрикой, считая вероятности возникновения неблагоприятных событий известными.

В метрике l_1 классическая функция риска имеет вид математического ожидания

$$R_{absl_1}(x) = M|r(x) - d(x)|. \quad (9.3)$$

Согласно метрике l_2^2 оценка риска есть дисперсия

$$R_{absl_2^2}(x) = M(r(x) - d(x))^2. \quad (9.4)$$

Метрика l_2 приводит к функции риска в виде среднего квадратического отклонения

$$R_{absl_2}(x) = (M(r(x) - d(x))^2)^{1/2}. \quad (9.5)$$

Для функций риска (9.3) – (9.5) функция $d(x) = Mr(x) = \bar{r}(x)$, т. е. представляет собой математическое ожидание величины $r(x)$. Оценки риска (9.3) – (9.5) представляют собой абсолютные функции риска.

Иногда требуется **оценить риск на единицу выгоды или выигрыша**. В этой ситуации можно использовать **относительные функции риска**, например, метрика l_2^2 дает **относительную функцию риска** вида

$$R_{rell_2^2}(x) = \frac{M(r(x) - d(x))^2}{d(x)}.$$

Вероятностные функции риска могут быть определены по-разному. Пусть задано требуемое значение результата деятельности ЛПР $r_{тр}$, тогда функцию риска можно представить в виде $R_{prob\ tr}(x) = P(r(x) < r_{тр})$.

Другой вероятностной оценкой риска, используемой инвесторами при принятии решений на фондовом рынке, является **Value at Risk (VaR)**. Это **выраженная в денежных единицах оценка величины, которую не превысят ожидаемые в течение данного периода времени потери с заданной вероятностью**.

Например, VaR портфеля ценных бумаг – это наименьшая доходность, которую предполагается получить на рассматриваемом временном горизонте с вероятностью α :

$$VaR_\alpha(Y) = \max(\vartheta | P(Y \geq \vartheta) \geq \alpha),$$

где $P(Y)$ – вероятность случайной величины Y (доходности портфеля),
 ϑ (*тема*) – граница минимальной доходности.

Существуют различные методы нахождения VaR. К основным из этих методов относятся:

- историческое моделирование;
- вариационно-ковариационный (или аналитический) подход;
- имитационное моделирование по методу Монте-Карло.

3. Теория ожидаемой полезности

Раздел теории принятия решений, изучающий методы решения задач со случайными неконтролируемыми факторами, основанные на использовании функции полезности, называется теорией ожидаемой полезности.

Исход, зависящий от случая, формализуется понятием лотереи или случайного исхода.

Пусть $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ – конечное множество исходов (состояний). Обозначим $p = (p_1, \dots, p_n)$ некоторое вероятностное распределение на нем, т. е.

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1, \quad p_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Пару $l = (X, p) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$ называют **лотереей**, а исходы из множества X – **выигрышами**.

Принимающий решение должен определить систему предпочтений на множестве лотерей. Это предпочтение может задаваться с помощью функции $\tilde{u}(l)$, определенной на множестве лотерей: $l_1 > l_2 \Leftrightarrow \tilde{u}(l_1) > \tilde{u}(l_2)$.

Функция $\tilde{u}(l)$ должна выражать отношение ЛПР к риску. Сначала строится функция $u(x)$, заданная на множестве исходов. Эта функция строится эмпирически, путем опроса ЛПР.

Заменяя в лотерее l исходы на полезности, получают лотерею в полезностях $u[l]$, учитывающую отношение к риску. **Математическое ожидание выигрыша в такой лотерее является критерием для сравнения лотерей.**

Функцией полезности называется функция $u(x)$, определенная на множестве X , математическое ожидание которой определяет порядок (отношение предпочтения ЛПР) на множестве лотерей

$$l_1 > l_2 \equiv M_{l_1} u > M_{l_2} u,$$

где $M_l u = \sum_{i=1}^n u(x_i) p_i$.

Величина $\tilde{u}(l) = M_l u$ называется **ожидаемой полезностью лотереи**

$$l = (X, p) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}.$$

Пример 9.1. Пусть имеются две лотереи: в первой с вероятностью 0,9 можно выиграть 200 ден. ед. и с вероятностью 0,1 можно проиграть 800 ден. ед.,

во второй – с вероятностью 0,1 можно выиграть 1000 ден. ед. и с вероятностью 0,9 ничего не выиграть.

Таким образом, имеем $l_1 = \begin{pmatrix} 200 & -800 \\ 0,9 & 0,1 \end{pmatrix}$, $l_2 = \begin{pmatrix} 1000 & 0 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$. Требуется определить более предпочтительную лотерею, если функция полезности имеет вид $u(x) = \ln(x + 1000)$.

Найдем ожидаемые полезности лотерей. Лотереи в полезностях имеют вид: $u[l_1] = \begin{pmatrix} 7,090 & 5,299 \\ 0,9 & 0,1 \end{pmatrix}$, $u[l_2] = \begin{pmatrix} 7,601 & 6,908 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$.

Тогда ожидаемые полезности лотерей $\tilde{u}(l_1) = M_{l_1} u = 7,090 \cdot 0,9 + 5,299 \cdot 0,1 = 6,911$, $\tilde{u}(l_2) = M_{l_2} u = 7,601 \cdot 0,1 + 6,908 \cdot 0,9 = 6,977$. Таким образом, получаем, что вторая лотерея предпочтительнее первой.

Рассмотренные ранее принципы принятия решения не позволяют в полной мере учитывать склонность ЛПР к риску. Критерий «математическое ожидание» совсем не учитывает отношение к риску, а линейная свертка критериев «математическое ожидание – дисперсия» предполагает постоянство меры несклонности к риску (коэффициент риска), тогда как для большинства людей отношение к риску меняется в зависимости от величины ожидаемого выигрыша.

Так, в примере 9.1 математические ожидания и дисперсии лотерей:

$$M_{l_1} x = 200 \cdot 0,9 - 800 \cdot 0,1 = 100, \quad M_{l_2} x = 1000 \cdot 0,1 + 0 \cdot 0,9 = 100,$$

$$D_{l_1} x = (200 - 100)^2 \cdot 0,9 + (-800 - 100)^2 \cdot 0,1 = 9 \cdot 10^4,$$

$$D_{l_2} x = (1000 - 100)^2 \cdot 0,1 + (0 - 100)^2 \cdot 0,9 = 9 \cdot 10^4.$$

Значит, согласно линейной свертке критериев, «математическое ожидание – дисперсия» при постоянном коэффициенте риска эти лотереи эквивалентны.

Функция полезности определяется неоднозначно. Из свойств математического ожидания очевидным образом следует, что если $u(x)$ – функция полезности, то любая функция вида $kx+b$ при $k>0$ также является функцией полезности. Для выбора определенной функции полезности нужно зафиксировать шкалу (масштаб и точку отсчета).

В рассмотренном примере выигрыши денежные, в общем случае это не всегда так. **Рассмотрим построение функции полезности в общем случае.**

Пусть в X существует наиболее предпочтительный (наилучший) исход x^* и наименее предпочтительный (наихудший) исход x_* . Положим $u(x^*) = 1$, $u(x_*) = 0$. Лотерею с двумя исходами x^* , x_* и вероятностями p и $1-p$ будем называть базовой (или простой) и обозначить $l_p = \begin{pmatrix} x^* & x_* \\ p & 1-p \end{pmatrix}$. Вероятность p наилучшего исхода будем называть параметром базовой лотереи.

Для произвольного исхода x эмпирически определяется вероятность p такая, что участие в лотерее l_p одинаково по предпочтительности исходу x . Примем $u(x) = p$. Тем самым на множестве исходов будет задана функция $u: X \rightarrow [0,1]$. Покажем, что функция $u(x)$ является функцией полезности. Продолжим эту функцию на множество лотерей.

Для базовых лотерей $\tilde{u}(l_p) = p$. Рассмотрим произвольную лотерею $l = (X, p)$. Исход x_1 заменим на базовую лотерею $l_{u(x_1)}$, исход x_2 – на лотерею

$l_{u(x_2)}$ и т. д. (Новыми выигрышами лотереи являются билеты на базовые лотереи). Получим составную лотерею, которая имеет два исхода x^* , x_* и, следовательно, может интерпретироваться как базовая лотерея l_p .

Найдем $\tilde{u}(l)$ как параметр эквивалентной базовой лотереи. Вероятность исхода x^* по формуле полной вероятности равна

$$p = p_1 u(x_1) + p_2 u(x_2) + \dots + p_n u(x_n).$$

Действительно, с вероятностями $p_1, \dots, p_n$ разыгрывается одна из лотерей $l_{u(x_1)}, \dots, l_{u(x_n)}$ (или, в терминах теории вероятностей, происходит одно событие из полной группы несовместных случайных событий (гипотез) – участие в лотерее $l_{u(x_1)}, \dots, l_{u(x_n)}$).

Условная вероятность выигрыша x^* при выборе первой лотереи равна $u(x_1)$ при выборе второй – $u(x_2)$, при выборе последней – $u(x_n)$. Следовательно, вероятность исхода x^* равна $p = p_1 u(x_1) + p_2 u(x_2) + \dots + p_n u(x_n)$.

Отметим, что полученное значение p является математическим ожиданием функции $u(x)$ при распределении вероятностей $p = (p_1, \dots, p_n)$ и, следовательно, $\tilde{u}(l) = p = M_l u$. Очевидно, что из двух базовых лотерей предпочтительнее та, у которой вероятность p исхода x^* больше, т. е.

$$l_{p^1} \succ l_{p^2} \equiv p_1 > p_2 \equiv \tilde{u}(l_{p^1}) > \tilde{u}(l_{p^2}).$$

Следовательно, построенная ранее функция $\tilde{u}(l)$ является ожидаемой полезностью, а $u(x)$ – функцией полезности: ее математическое ожидание определяет отношение предпочтения на множестве лотерей.

Предположим, что исходы оцениваются единственным количественным критерием, большие значения которого предпочтительнее меньших (например, денежный выигрыш). Тогда исходы $x_1, \dots, x_n$ – числа из отрезка $[x_*, x^*]$, и в качестве функции полезности выбирается какая-то монотонно возрастающая на отрезке функция.

Достоверным эквивалентом (или детерминированным денежным эквивалентом, ДДЭ) лотереи l называется значение x такое, что для ЛПР получение денежной суммы x эквивалентно (равноценно) участию в лотерее l . Другими словами, если ДДЭ лотереи l равен x , то ЛПР безразлично – получить денежную сумму, равную x , или участвовать в лотерее l .

Пусть определен ДДЭ всех базовых лотерей l_p . По определению, чем больше вероятность p наибольшего выигрыша, тем больше достоверный эквивалент лотереи l_p , и близким значениям p соответствуют близкие значения ДДЭ, т. е. ДДЭ задает монотонно возрастающую непрерывную функцию от p на отрезке $[0,1]$. Следовательно, у нее существует обратная функция, которая является функцией полезности.

Функция $u(x)$: $G \rightarrow [0,1]$ называется эмпирической функцией полезности, если $u(x) = p \equiv \text{ДДЭ} l_p = x$.

Если выигрыши являются денежными, функцию полезности $u(x)$ можно интерпретировать следующим образом: полезность $u(x)$ денежной суммы x , где $x_* \leq x \leq x^*$, совпадает с долей удачных билетов в простой лотерее

$l_p = \begin{pmatrix} x^* & x_* \\ p & 1-p \end{pmatrix}$, участие в которой равноценно для ЛПР получению денежной суммы x .

На этом основан **метод пяти точек** построения графика функции полезности (*кривой денежных эквивалентов*). ЛПР может указать свой (субъективный) ДДЭ для некоторых простых лотерей. По оси абсцисс будем откладывать ДДЭ x , а по оси ординат – параметр простой лотереи p . При $p = 0$ получаем вырожденную лотерею, в которой всегда наступает исход x_* . ДДЭ такой лотереи очевидно x_* . Аналогично, ДДЭ простой лотереи с параметром $p = 1$ равен x^* . Кривая денежных эквивалентов проходит через точки $(x_*, 0)$ и $(x^*, 1)$. Отрезок, соединяющий эти точки, является графиком математического ожидания выигрыша простой лотереи l_p :

$$M_l x = x_*(1-p) + x^*p = (x^* - x_*)p + x_*.$$

Далее принимающий решение должен указать ДДЭ простых лотерей $l_{0,5}$, $l_{0,25}$ и $l_{0,75}$ (т. е. ответить на вопрос, сколько он готов заплатить за участие в лотерее $l_{0,5}$, $l_{0,25}$ и $l_{0,75}$). Тем самым на кривой денежных эквивалентов найдено 5 точек: $(x_*, 0)$, $(x_{0,25}, 0,25)$, $(x_{0,5}, 0,5)$, $(x_{0,75}, 0,75)$, $(x^*, 1)$. Проведя через эти точки гладкую кривую, получим эмпирическую кривую денежных эквивалентов. При необходимости для построения аппроксимирующей кривой может использоваться большее количество точек. Как правило, предполагается какой-то вид функциональной зависимости, и с помощью заданных точек определяются параметры функции.

Расположение кривой по отношению к графику математического ожидания характеризует отношение принимающего решение к риску:

если $ДДЭ l_p < M_l x$, ЛПР не склонен к риску или осторожен;

если $ДДЭ l_p > M_l x$, ЛПР склонен к риску или азартен;

если $ДДЭ l_p = M_l x$, ЛПР безразличен к риску.

При безразличии ЛПР к риску обосновано применение принципа среднего результата.

Свойства функции полезности:

1. Функция $u(x)$ – строго возрастающая, т. е. $x_1 < x_2 \Rightarrow u(x_1) < u(x_2)$.

2. Если ЛПР не склонен к риску, $u(x)$ – вогнутая функция. ЛПР оценивает свое участие в лотерее суммой, которая меньше математического ожидания выигрыша в этой лотерее.

Разность $\Delta = M_l x - ДДЭ l > 0$ называется «надбавкой за риск». ЛПР в данном случае отказывается от надбавки за риск.

3. Если ЛПР склонен к риску, его функция полезности $u(x)$ является выпуклой.

4. Если ЛПР безразличен к риску, $u(x)$ – линейная функция.

Пример 9.2. Сравнить ожидаемую полезность двух лотерей:

$$l_1 = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}, \quad l_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Построим кривую денежных эквивалентов для простых лотерей с выигрышами от 1 до 10 и определим полезности денежных сумм, входящих в лотереи. Предположим, что эти лотереи в полезностях имеют вид:

$$u[l_1] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}, \quad u[l_2] = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,46 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Тогда ожидаемые полезности лотерей:

$$M_{l_1} u = 0 \cdot 0,8 + 1 \cdot 0,2 = 0,2, \quad M_{l_2} u = 0,3 \cdot 0,5 + 0,46 \cdot 0,5 = 0,38.$$

Следовательно, вторая лотерея предпочтительнее. Но математическое ожидание выигрыша второй лотереи меньше, чем первой:

$$M_{l_1} x = 1 \cdot 0,8 + 10 \cdot 0,2 = 2,8 > M_{l_2} x = 2 \cdot 0,5 + 3 \cdot 0,5 = 2,5.$$

В данном случае ЛПР не склонен к риску.

Пусть построена кривая денежных эквивалентов простых лотерей или, что то же самое, определена функция полезности $u(x)$.

Найдем ДДЭ произвольной лотереи l . Как было сказано выше, лотерея l эквивалентна базовой лотереи l_p с параметром $p = \tilde{u}(l)$, т. е. $u(\text{ДДЭ}l) = \tilde{u}(l)$. Достоверным эквивалентом лотереи l является решение x уравнения $u(x) = \tilde{u}(l)$.

Пример 9.3. Найти детерминированный эквивалент лотереи $l = \begin{pmatrix} 0 & 300 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$ для функции полезности $u(x) = 2x + 1$. Ожидаемая полезность $\tilde{u}(l) = 1 \cdot 1/3 + 601 \cdot 2/3 = 401$. Решим уравнение $2x + 1 = 401$, в результате получим $x = 200$.

Отношение к риску одного и того же принимающего решение может меняться в зависимости от интервала денежных сумм, соответственно этому меняется характер выпуклости функции полезности. Как правило, надбавка за риск уменьшается с увеличением x , т. е. большинство людей обладают убывающей несклонностью к риску (вогнутость функции полезности уменьшается).

Функция $r(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$ называется *функцией несклонности к риску*.

Функция полезности восстанавливается по $r(x)$ с точностью до положительного линейного преобразования. ЛПР нейтрален к риску, если $r(x) \equiv 0$, склонен к риску при $r(x) < 0$ и не склонен к риску, если $r(x) > 0$.

Пример 9.4. Оценить отношение ЛПР к риску, если его функция полезности имеет вид $u(x) = -e^{-cx}$, $c > 0$. Несклонность к риску $r(x) = -\frac{-c^2 e^{-cx}}{ce^{-cx}} = c > 0$. Следовательно, ЛПР не склонен к риску (оценивает участие в лотерее ниже математического ожидания выигрыша в этой лотерее), и это отношение к риску постоянно, т. е. не зависит от x .

Таким образом, если определена функция полезности, с ее помощью можно сравнить любые две лотереи, т. е. задать отношение порядка.

Верно и обратное: если бинарное отношение на множестве лотерей удовлетворяет некоторым аксиомам, то оно имеет приведенный выше вид, т. е. является ожидаемой полезностью для некоторой функции $u(x)$.

Будем полагать, что отношение предпочтения $\succ$ на множестве лотерей есть транзитивное и инвариантное относительно линейного положительного

преобразования бинарное отношение (отношение слабого порядка). Пусть $l_1 = (X, p^1)$ и $l_2 = (X, p^2)$ – лотереи на X , $a \in [0,1]$, тогда можно построить новую лотерею $l = al_1 + (1 - a)l_2$, где $l = (X, p)$, $p = ap_1 + (1 - a)p_2$.

Дж. Нейманом и О. Моргенштерном были предложены следующие аксиомы (требования), определяющие предпочтения:

(A1) (аксиома непрерывности). Для любых l_1, l_2, l_3 множества $\{a \in [0,1] | al_1 + (1 - a)l_2 \succ l_3\}$ и $\{a \in [0,1] | l_3 \succ al_1 + (1 - a)l_2\}$ являются замкнутыми;

(A2) (аксиома замещения и независимости). Если $l_1 \succ l_2$, то для любой лотереи l и числа $a \in (0,1)$ выполняется $al_1 + (1 - a)l \succ al_2 + (1 - a)l$.

Теорема 9.1. (Неймана-Моргенштерна). Пусть отношение слабого порядка $\succ$ на множестве лотерей удовлетворяет аксиомам (A1) и (A2). Тогда существует $u(x): X \rightarrow R$ такая, что предпочтение $\succ$ задается ожидаемой полезностью $M_l u = \sum_{k=1}^n u(x_k) p_k$, т. е. $l_1 \succ l_2 \equiv M_{l_1} u > M_{l_2} u$.

Функция полезности определяется с точностью до положительного линейного преобразования: если $u'(x)$ – функция, представляющая отношение $\succ$, то существуют числа $k > 0$ и b такие, что $u'(x) = ku(x) + b$.

Аксиома (A1) гарантирует, что функция $\tilde{u}(l)$, определяющая порядок $\succ$, является непрерывной функцией, а аксиома (A2), что функция $\tilde{u}(l)$ является линейной функцией. Из этих двух условий следует, что $\tilde{u}(l)$ является линейным продолжением некоторой функции $u(x)$ на множестве исходов.

ЛЕКЦИЯ № 10. ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

1. Принципы оптимальности (критерии выбора решений)

При принятии решений в условиях неопределенности используется информация только о множестве возможных состояний внешней среды. Наличие перечня возможных событий или сценариев при отсутствии статистических данных относительно их вероятностей является весьма распространенным случаем, обусловленным различными причинами: нестабильность экономической ситуации, неизвестный покупательский спрос на товар, экологическая обстановка, стихийные бедствия, и др. В задачах такого рода выбор решения зависит от объективной действительности, называемой в модели «природой». Математическая модель подобных ситуаций называется «игрой с природой».

Рассмотрим ситуацию, когда ЛПР, располагая информацией о возможных соотношениях внешней среды (природы), обладая конечным числом стратегий (управлений) $i = 1, \dots, n$, и набор возможных вариантов состояний внешней среды (значений неопределенного неконтролируемого фактора) также конечен $j = 1, \dots, m$. Выигрыш от i -й стратегии при j -ом состоянии внешней среды (j -е значение неконтролируемого фактора) равен a_{ij} . Матрица выигрышей

(платежная матрица) при всех возможных стратегиях и состояниях внешней среды есть $A = (a_{ij})_{n \times m}$. Например, ЛПР рассматривает инвестиции в n проектов и анализирует бизнес-планы этих проектов. При анализе каждого проекта ЛПР может проводить классификацию состояний внешней среды на макроэкономические, экологические, технологические. Так как будущее состояние внешней среды при выборе решения неизвестно, то задача ЛПР состоит в выборе такого проекта для инвестирования, который окажется в некотором смысле наиболее прибыльным и наименее рискованным.

Выбор стратегии (строки матрицы A) в условиях неопределенности можно осуществлять с использованием предлагаемых далее критериев.

Разность между выигрышем, который получает ЛПР, зная состояние внешней среды j , и выигрышем, который будет получен в ситуации, когда ЛПР выберет произвольную стратегию i , а состояние внешней среды окажется тем же j , называется риском (по Сэвиджу) при использовании стратегии i в условиях состояния j и обозначается r_{ij} . Матрица $R = (r_{ij})_{n \times m}$ называется матрицей риска, ее элементы $r_{ij} = \max_{1 \leq k \leq n} a_{kj} - a_{ij} \geq 0$.

Если ЛПР стремится избежать возможных потерь, то он выберет ту стратегию, которая гарантирует минимальный риск, т. е. по критерию Сэвиджа:

$$S = \min_{1 \leq i \leq n} \max_{1 \leq j \leq m} r_{ij}. \quad (10.1)$$

Возможна ситуация, когда в результате накопленных статистических данных можно оценить вероятности состояний природы $q_1, q_2, \dots, q_m$, тогда разумно использовать понятие оптимальности в среднем, т. е. выбрать стратегию i_0 , для которой выполняется $\sum_{j=1}^m a_{i_0 j} q_j = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^m a_{ij} q_j$. Использование вероятностных распределений здесь выигрыша не увеличивает.

Подход, связанный с оценкой вероятностей состояний природы, можно развить дальше. Имеет ли смысл принимать решение на основе накопленных статистических данных или следует провести эксперимент с целью уточнений этих данных? Тут возможны различные математические постановки задач.

Рассмотрим ситуацию, когда до эксперимента известны вероятности состояний природы $q_1, q_2, \dots, q_m$, а в результате эксперимента можно точно выяснить, какое состояние имеет место в действительности. Проведение эксперимента всегда связано с затратами. Пусть эти затраты равны C . Стоит ли проводить эксперимент? Здесь у оперирующей стороны появились две дополнительные стратегии – проводить или не проводить, одну из которых надо выбрать. Для того, чтобы сделать это, надо сравнить выигрыши с экспериментом и без него. Выигрыш (максимальный в среднем) без эксперимента равен $\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^m a_{ij} q_j$.

В результате проведения эксперимента узнаем состояние природы j , поэтому максимальный выигрыш будет $b_j = \max_{1 \leq k \leq n} a_{kj}$, но заранее до проведения эксперимента это состояние неизвестно, а принимать решение надо заранее. Так как пользуемся вероятностными оценками, то надо взять математическое ожидание выигрыша после эксперимента, которое равно $\sum_{j=1}^m b_j q_j$. С учетом

затрат на проведение эксперимента условие выгодности эксперимента имеет вид $\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^m a_{ij} q_j < \sum_{j=1}^m b_j q_j - C$. Преобразуя соответствующим образом данное неравенство, с учетом замены операции максимизации на минимизацию при выносе знака «минус» получаем:

$$C < \min_{1 \leq i \leq n} [\sum_{j=1}^m (b_j - a_{ij}) q_j] \text{ или } C < \min_{1 \leq i \leq n} [\sum_{j=1}^m r_{ij} q_j].$$

Величина $r_i^* = \sum_{j=1}^m r_{ij} q_j$ представляет собой средний ожидаемый риск, следовательно, эксперимент нужно проводить, если связанные с ним затраты меньше минимального среднего риска $C < \min_{1 \leq i \leq n} r_i^*$.

В противном случае эксперимент не следует проводить и необходимо применить ту стратегию i^* , для которой достигается минимум среднего риска.

Существуют и другие критерии, согласно которым ЛПР может сделать разумный выбор стратегии. Если предположить, что внешняя среда (природа) действует по отношению к ЛПР наихудшим образом, то используется **критерий Вальда**:

$$W = \max_{1 \leq i \leq n} \min_{1 \leq j \leq m} a_{ij}. \quad (10.2)$$

Максимаксный критерий, основанный на предположении, что природа благоприятствует ЛПР:

$$M = \max_{1 \leq i \leq n} \max_{1 \leq j \leq m} a_{ij}. \quad (10.3)$$

Если ЛПР не чистый пессимист, не чистый оптимист, то для выбора стратегии ЛПР может использовать критерий Гурвица:

$$H = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\alpha \min_{1 \leq j \leq m} a_{ij} + (1 - \alpha) \max_{1 \leq j \leq m} a_{ij} \right), \quad (10.4)$$

где $\alpha \in (0; 1)$ означает степень пессимизма ЛПР. Чем ближе α к единице, тем ЛПР больше считает себя пессимистом и склонен получить гарантированный выигрыш, нежели рисковать.

Критерий Лапласа опирается на «принцип недостаточного основания» (недостаточно основания выделить какие-либо состояния природы как более вероятные). Согласно этому принципу, все состояния природы полагаются равновероятными:

$$L = \max_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m a_{ij}. \quad (10.5)$$

Если имеется информация, позволяющая получить оценки апостериорных вероятностей состояний природы, то возможно также использование **критерия Байеса – Лапласа**.

Следует отметить, что все критерии, кроме одного, связаны с матрицей выигрышей A и так или иначе максимизируют выигрыш.

Критерий Сэвиджа связан с матрицей рисков R и предназначен для нахождения стратегии, минимизирующей потери в результате выбора стратегии, не обеспечивающей наибольший выигрыш при данном состоянии природы.

Это говорит о принципиальном отличии критерия Сэвиджа от остальных критериев. Оптимальная стратегия, найденная, например, по критерию Вальда, может привести к большим потерям, чем та, которая найдена по критерию

Севиджа, что ставит под сомнение удобство использования критерия, ориентированного на максимальный гарантированный результат.

Аналогичные замечания можно высказать и по остальным критериям, использующим матрицу выигрышей. Оптимальная стратегия, найденная по критерию Сэвиджа, при этом может привести к выигрышу, значительно меньшему, чем, например, по критерию Вальда.

Пример 10.1. Дана матрица выигрышей A и соответствующая ей матрица рисков R :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0,1 & 1 & 8 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \\ 1,9 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если ЛПР склонен к осторожному поведению, то согласно критерию Вальда имеем значение игры $W = 2$ и оптимальную стратегию $i^0 = 1$. Критерий Сэвиджа имеет значение $S = 3$ и дает оптимальную стратегию $i^0 = 3$. Максимальные потери при использовании стратегии $i^0 = 1$ равны 5, а минимальный выигрыш составляет 2. При использовании стратегии $i^0 = 3$ максимальные потери равны 3, а минимальный выигрыш составляет 0,1.

Пример 10.2. Возможны два состояния природы: Π_1 – поставщик надежный; Π_2 – поставщик ненадежный. ЛПР – завод. Он может применять стратегии: A_1 – не осуществлять дополнительных мероприятий; A_2 – послать поставщику свой транспорт; A_3 – послать представителя и транспорт; A_4 – купить материал-заменитель у другого.

Матрица выигрышей (затрат со знаком «-») и матрица рисков имеют вид

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} \Pi_1 & \Pi_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} -100 & -400 \\ -150 & -300 \\ -200 & -260 \\ -330 & -200 \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{cc} & \begin{matrix} \Pi_1 & \Pi_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 200 \\ 50 & 100 \\ 100 & 60 \\ 230 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Какую оптимальную стратегию рекомендует каждый из приведенных выше критериев? Оптимальный по критерию Вальда ($W = \max_{1 \leq i \leq 4} \min_{1 \leq j \leq 2} a_{ij} = -260$) является чистая стратегия A_3 . Согласно максимаксному критерию ($W = \max_{1 \leq i \leq n} \max_{1 \leq j \leq m} a_{ij} = -100$) оптимальной является стратегия A_1 .

По критерию Гурвица (при $\alpha = 0,8$) имеем $H = \max_{1 \leq i \leq 4} [0,8 \min_{1 \leq j \leq 2} a_{ij} + 0,2 \max_{1 \leq j \leq 2} a_{ij}] = \max_{1 \leq i \leq 4} \{-520; -540; -680; -464\} = -464$, т. е. рекомендуется стратегия A_4 .

Оптимальными по критерию Сэвиджа ($S = \min_{1 \leq i \leq 4} \max_{1 \leq j \leq 2} r_{ij} = 200$) являются стратегии A_2 и A_3 . По критерию Лапласа ($L = \max_{1 \leq i \leq 4} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 a_{ij} \right\} = \max_{1 \leq i \leq 4} \{-250; -225; -230; -265\} = -225$) рекомендуется стратегия A_2 .

Пример 10.3. Инвестор (ЛПР) имеет возможность выделить 10 ден. ед. на формирование портфеля акций. Ценные бумаги можно приобрести у компаний

B , C и K , номинальная стоимость акции составляет соответственно 3, 2 и 5 ден. ед. На конец года рынок ценных бумаг может оказаться в одном из двух состояний. Эксперты установили, что дивиденды компании B для первого состояния на конец года составят 10 % от номинальной стоимости акции, а для второго состояния – 15 %; для компании C соответственно 8 и 12 %; для компании K – 14 и 8 %. Сформировать портфель акций инвестора, обеспечив ему возможно большую прибыль.

Инвестор принимает решение о способах формирования портфеля акций; природа – совокупность внешних обстоятельств, обуславливающих то или иное состояние рынка ценных бумаг на конец года. Ограничимся для инвестора тремя возможностями, полностью использующими выделенную банком сумму в 10 ден. ед. на приобретение ценных бумаг. Тогда **первая стратегия инвестора** состоит в том, что он приобретает по одной акции каждой из компаний; **вторая стратегия** – банк приобретает по две акции каждой из компаний B и C ; **третья стратегия** – приобретается две акции компании K . Природа может реализовывать одно из двух состояний, которые характеризуются различными размерами дивидендов, выплачиваемых (в процентах) компаниями.

Элементы a_{ij} платежной матрицы имеют смысл суммарной прибыли инвестора, получаемой им в реальных ситуациях. Так, например, элемент a_{11} соответствует ситуации (R_1, S_1) и $a_{11} = 3 * 0,10 + 2 * 0,08 + 5 * 0,14 = 1,16$. Аналогично считаем другие элементы. Платежная матрица имеет вид:

$$\begin{matrix} & S_1 & S_2 \\ \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1,16 & 1,09 \\ 0,92 & 1,38 \\ 1,40 & 0,80 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Оптимальной по критерию Вальда ($W = \max_{1 \leq i \leq 4} \min_{1 \leq j \leq 2} a_{ij} = 1,09$) является первая чистая стратегия. По критерию Гурвица (при $\alpha = 0,7$) имеем:

$$H = \max_{1 \leq i \leq 3} \left[0,7 \min_{1 \leq j \leq 2} a_{ij} + 0,3 \max_{1 \leq j \leq 2} a_{ij} \right] = \max_{1 \leq i \leq 3} \{1,111; 1,058; 0,98\} = 1,111,$$
 т. е. рекомендуется стратегия R_1 . Оптимальной по критерию Сэвиджа является стратегия R_1 .

2. Свойства критериев оптимального выбора

Смысл того или иного критерия раскрывается по результатам его применения к конкретным задачам, а особенно по его дополнительным свойствам. Такие свойства могут формулироваться в виде аксиом.

Пусть на множестве альтернатив задано отношение предпочтения: строгое $>$ или нестрогое $\geq$. Отношения предпочтения называют строгими (нестрогими), если $i_1 > i_2$ ($i_1 \geq i_2$) эквивалентно тому, что альтернатива i_1 согласно выбранному критерию дает строго большее (нестрого большее) значение критерия, чем альтернатива i_2 .

Рассмотрим следующие аксиомы:

(A1) *Упорядочение*. Любые две альтернативы сравнимы по критерию оптимальности.

(A2) *Симметрия*. Решение не зависит от перестановки строк и столбцов матрицы $A = (a_{ij})_{n \times m}$

(A3) *Строгое доминирование*. Если $\forall j = 1, \dots, m, a_{ij} > a_{ji}$, то $i > j$.

(A4) *Непрерывность*. Если последовательность матриц (a_{ij}^k) сходится поэлементно к матрице (a_{ij}) и $\forall k i_1 > i_2$, то в пределе $i_1 \geq i_2$.

(A5) *Линейное преобразование*. Отношение $\geq$ не изменится, если каждый элемент матрицы a_{ij} заменить на $\lambda a_{ij} + \mu$, $\lambda > 0$.

(A6) *Присоединенные строки*. Предпочтение имеющихся альтернатив не изменится от присоединения новой альтернативы (строки матрицы).

(A7) *Сдвиг столбца*. Предпочтение не меняется от добавления константы ко всем элементам некоторого столбца.

(A8) *Повторение столбца*. Предпочтение не изменится, если добавить новый столбец, идентичный одному из уже имеющихся.

(A9) *Выпуклость*. Если $i_1 \sim i_2$ (эквивалентно), и $a_{i_0 j} = \frac{1}{2}(a_{i_1 j} + a_{i_2 j})$, $j = 1, \dots, m$, то $i_0 \geq i_1$.

(A10) *Присоединение специальной строки*. Предпочтение имеющихся альтернатив не изменится от присоединения новой строки, каждый элемент которой не превосходит всех имеющихся в соответствующем столбце.

Легко проверяется, что критерий Вальда (10.2) удовлетворяет всем аксиомам, кроме A7, Критерий Лапласа (10.5) – всем, кроме аксиомы A8, критерий Сэвиджа (10.1) – всем, кроме A6 (имея ввиду, что отношение предпочтения для двух альтернатив является строгим (нестрогим) по критерию Сэвиджа, если альтернатива i_1 дает строго меньшее (нестрого меньшее) значения этого критерия), критерий Гурвица (10.4) – всем, кроме A7 и A9. Более того, соответствующие наборы аксиом однозначно определяют каждый из этих критериев оптимальности.

ЛЕКЦИЯ № 11. СТАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ КОНФЛИКТА

1. Основные понятия и классификация игр

Многие ситуации, в которых рассматривается вопрос о выборе решения, обладают тем свойством, что в них сталкиваются не менее двух сторон с различными (а иногда и противоположными) интересами. Каждая сторона обладает возможными действиями, направленными на достижение своей цели. *Конфликтом* (конфликтной ситуацией) называется процесс столкновения интересов нескольких участвующих сторон. *Математическая модель конфликтной ситуации называется игрой*. Таким образом, **теория игр – это математическая теория принятия решений в условиях конфликта**. Основной задачей теории игр является построение компромиссных

взаимовыгодных решений, которые полностью или хотя бы частично согласовывают интересы всех взаимодействующих сторон.

В общем случае в описании игры можно выделить следующие элементы:

- 1) коалиции действий – совокупность действующих совместно в данной конфликтной ситуации субъектов;
- 2) коалиции интересов – множество одинаково заинтересованных в исходе конфликта сторон;
- 3) множества возможных выборов каждой из коалиций действия;
- 4) описание предпочтений каждой из коалиций сторон;
- 5) множество возможных исходов конфликта.

Появление термина коалиция указывает на тот факт, что участниками конфликта могут быть не только отдельные лица, но и большие, сложно организованные группы лиц. Коалиции действия и интересов могут не совпадать. Например, пассажиры самолета заинтересованы в его скорейшем прибытии к месту назначения и, таким образом, образуют коалицию интересов, однако они не могут предпринять никаких действий, направленных на достижение этой цели, т. е. не являются коалицией действия. Если коалиция действия совпадает с коалицией интересов, то такую монолитную коалицию можно считать одним лицом, поэтому ее называют *игроком*. Для любой коалиции действия, в частности, для любого игрока, если он может действовать самостоятельно, должны быть определены ее возможные действия, т. е. задано множество допустимых стратегий. Выбор всеми коалициями действия определенных стратегий определяет *исход* (или *ситуацию*) конфликта. Множество возможных исходов конфликта определяет совместные ограничения на действия участников конфликта. Если такие ограничения задаются лишь формально (в виде прямого произведения множеств), то соответствующую игру называют *игрой без запрещенных ситуаций*, если эти ограничения существенны, то – *игрой с запрещенными ситуациями*.

Для сравнения исходов используется либо отношение предпочтения, либо критерий эффективности, называемой *функцией выигрыша*. Протекание игры состоит в выборе каждым игроком своей стратегии и получении в сложившейся ситуации выигрыша. Основной целью теории игр является выработка рекомендаций для рационального поведения игроков в конфликте.

Рассмотрим основные классы теоретико-игровых моделей. Различают **игры двух лиц и игры N лиц ($N > 2$)**. Игры двух лиц называются **антагонистическими**, если игроки преследуют противоположные цели. Другой важный принцип классификации связан с вопросом о допустимости образования тех или иных коалиций. **Если в игре образование коалиций недопустимо, то такая игра называется безкоалиционной**. Она определяется заданием множества игроков, пространств их стратегий и набором их функций выигрыша. Среди коалиционных игр наиболее распространены **кооперативные игры, в которых образуется одна коалиция**. Целью этой коалиции является максимизация суммарного выигрыша, с тем, чтобы впоследствии разделить его между членами коалиции по соглашению.

Следующим признаком классификации являются стратегии. Если множество стратегий всех игроков конечно, то игра называется **конечной**. Если $N=2$ и игрок 1 имеет n стратегий, а 2 – m стратегий, то возможны $n*m$ исходов. Выигрыши игроков можно задать двумя матрицами, поэтому такая игра называется **биматричной**. Конечная антагонистическая игра называется **матричной**.

Игры можно квалифицировать и **в соответствии с формой их задания**. Если процесс принятия решений описывается в виде динамического процесса, где игроки выбирают свои стратегии последовательно по шагам, обладая при этом определенной информацией при каждом шаге выбора стратегии, то такие игры называются **позиционными**. Классическим примером такой игры являются шахматы. Если же в игре стратегия представлена как одноактный выбор, который производится одновременно и независимо всеми игроками, то такая игра считается заданной **в нормальной форме**.

Игрой в нормальной форме называется совокупность

$$\Gamma = \langle I, \{U_i\}_{i \in I}, \{g_i\}_{i \in I} \rangle,$$

где I – множество всех игроков; U_i – множество стратегий i -го игрока; g_i – функция выигрыша i -го игрока, которую он стремится максимизировать. Обычно игроков нумеруют в произвольном порядке от 1 до N , поэтому $I = \{1, 2, \dots, N\}$. Стратегия i -го игрока для игры в нормальной форме сводится к одноактному выбору любой точки из множества U_i . Функция выигрыша ставит в соответствие каждому элементу $u = (u_1, \dots, u_N)$ из множества $U = \prod_{i=1}^N U_i$ (исход игры), действительное число, т. е. g_i есть однозначное отображение $U \rightarrow R$.

При проведении предварительного анализа конфликта использование исходных множеств управлений может привести к нежелательному для оперирующей стороны результату: либо решения не существует, либо (если это решение существует) количественная оценка этого решения неудовлетворительна. Тогда целесообразно расширить класс используемых стратегий достаточно *традиционным способом расширения множества управлений путем перехода в пространство вероятностных мер*. Элементы исходных множеств управлений называют **чистыми стратегиями**, а их произвольную выпуклую комбинацию – **смешанной стратегией**. Существует **два способа реализации смешанных стратегий**:

- 1) *введение искусственной рандомизации*, т. е. использование функции распределения на исходном множестве управлений;
- 2) *введение повторения*, т. е. проведения конфликта многократно.

При этом с определенной частотой выбирают некоторые элементы исходного множества. В обоих способах соответствующим образом определяются функции выигрыша.

2. Игровые принципы оптимальности

Важнейшей характеристикой выбранного решения является целесообразность, или в более строгой формулировке, оптимальность этого решения.

Под принципом оптимальности понимается отображение $\varphi: \Gamma \rightarrow 2^U$, которое ставит в соответствие игре Γ (или некоторому классу игр) подмножество множества ее исходов. При этом $\varphi(\Gamma)$ обозначает решение задачи или реализацию принципа оптимальности. При анализе игры существуют две взаимосвязанные проблемы: сделать оптимальный выбор и оценить результат при сделанном выборе.

Для конфликта, в котором участвуют не менее двух игроков, понятие оптимального решения не может быть определено однозначно, т. е. в общем случае игр n лиц отсутствует единое и объективное понятие оптимальности. Таким образом, целесообразно анализировать конкретные, более частные виды конфликта, где такое понятие оптимальности формализуется полностью, либо удастся максимально расширять возможности формализации этого понятия. Рассмотрим примеры полной формализации принципа оптимальности.

Для игры **в случае полной независимости игроков** функции выигрышей имеют вид $g_i(u) = g_i(u_i), i = 1 \dots, N$. При этом множество исходов равняется прямому произведению множеств выборов $U = \prod_{i=1}^N U_i$. Тогда для любого игрока оптимальным выбором естественно считать только выбор из множества элементов $u_i \in \operatorname{argmax} g_i(u_i), u_i \in U_i$, реализующих максимум функций $g_i(u_i)$. Такая игра эквивалентна задаче оптимизации.

Также единственным образом определяется оптимальность в играх многих лиц, для которых $g_i(u) = g(u)$ для всех i , т. е. в играх с совпадающими интересами игроков. При разумном поведении игроков (обмене информации, координации усилий по выбору соответствующих стратегий) задача также сводится к задаче оптимизации.

Термин «оптимальный выбор» однозначно понимается при исследовании антагонистической игры, в которой существует седловая точка, т. е. выполняется равенство

$$\min_{u_2} \max_{u_1} g(u_1, u_2) = \max_{u_1} \min_{u_2} g(u_1, u_2) = g(u_1^0, u_2^0).$$

Следует обратить внимание на то, что в приведенных примерах задачи выбора оптимального решения и оценки ожидаемого результата фактически совпадают, так как при выборе оптимального решения однозначно определяется ожидаемый результат (выигрыш) игроков. В общем случае игры многих лиц такая однозначность отсутствует, что не только усложняет решение игры, но и привносит принципиальную трудность в определение оптимального (или рационального) выбора. Отсутствие однозначного соответствия между выбранными стратегиями и оцениваемым выигрышем иллюстрирует следующий пример.

Пусть функция выигрыша имеет вид $g_i(u) = f_1(u_1) + \psi_i(u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_N)$, игроки стремятся максимизировать свои функции выигрыша и не имеют информации о действиях партнеров. Тогда выбор оптимальной стратегии не представляет труда и в некотором смысле однозначен. Однако оценка получаемого выигрыша неоднозначна. Действительно, выигрыш игрока будет зависеть от выбора всех оставшихся игроков.

Таким образом, принцип оптимальности является наиболее сложным и важным при принятии решений. Причины этой неоднозначности заключаются в природе конфликтной ситуации. В связи с этим **принцип оптимальности должен отвечать следующим условиям:**

- 1) должен быть таким, чтобы существовал оптимальный выбор, т. е. отображение φ не приводило к пустому множеству рациональных выборов;
- 2) должен максимально сужать степень неопределенности как во множестве выборов, так и в оценке ожидаемого результата;
- 3) должен быть прост и понятен, чтобы можно было практически вычислить множество рациональных решений и оценить с большой степенью точности ожидаемый выигрыш; полученные результаты должны хорошо интерпретироваться на содержательном уровне;
- 4) должен обладать устойчивостью, т. е. решение игры должно мало меняться при небольшом изменении параметров модели конфликтной ситуации; большинство используемых принципов оптимальности являются неустойчивыми и нуждаются в некоторой коррекции или регуляризации.

При выборе принципа оптимальности проявляются тенденции изоляционизма и коллективизма.

Изоляционизм заключается в стремлении каждого игрока к тому, чтобы выбор его оптимального решения в минимальной степени зависел от других игроков. Как правило, это достигается введением нового вспомогательного критерия эффективности игрока i , в минимальной степени зависящей от u_j , $j \neq i$. В идеале вспомогательный критерий имеет вид $\Psi_i(u_i)$. В случае антагонистической игры игрок вместо функции $g_1(u_1, u_2)$ максимизирует $\Psi(u_1) = \min_{u_2 \in U_2} g_1(u_1, u_2)$. Такой принцип оптимальности принято называть *принципом максимина* или *максимального гарантированного результата*. Так называемый обобщенный принцип максимального гарантированного результата в полной мере учитывает имеющуюся информацию, а также информацию, которая может поступить в процессе принятия решений.

Так, в предыдущем примере антагонистической игры при использовании принципа максимального гарантированного результата первый игрок имел информацию о своей функции выигрыша и множестве выборов, а самое главное он имел информацию о множестве выборов своего партнера. В этих условиях независимо от функции выигрыша партнера игрок 1 гарантированно может получить $\max_{u_1 \in U_1} \min_{u_2 \in U_2} g_1(u_1, u_2)$.

Коллективизм основан на координации усилий с целью получения большего выигрыша каждым игроком. Координация усилий может заключаться, например, в выборе общей цели – общего критерия эффективности для группы (коалиции) игроков. К основным свойствам рациональности коллективных принципов оптимальности можно отнести:

Выгодность. По крайней мере, необходимо, чтобы каждому игроку в коалиции был дан выигрыш не меньший, чем он может обеспечить (гарантировать) себе сам.

Устойчивость. Устойчивость понимается в том смысле, что никому из игроков не выгодно уклоняться от принятых на себя обязательств.

Справедливость. Справедливость, как правило, понимается как некоторая симметричность в положении игроков, т. е. в некотором смысле их равноправие.

Одним из принципов оптимальности является *ситуация равновесия по Нэшу*: u^0 называется ситуацией равновесия, если выполнены следующие условия для любого i :

$$g_i(u^0) = \max_{u_i \in U_i} g_i(u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_N).$$

Этот принцип принято считать индивидуальным поведением. Однако он не предполагает полностью изолированное поведение.

Наиболее естественно выглядит следующая интерпретация. Участники конфликта собираются вместе и каким-то образом выбирают приемлемую для всех ситуацию. Заключив необязательное соглашение придерживаться этой ситуации, игроки расходятся и каждый принимает окончательное решение о выборе своего управления, предполагая, что остальные участники конфликта соблюдают условия соглашения. ***Выбранная в начале ситуация является равновесной по Нэшу, если ни одному из игроков не выгодно в одиночку отклоняться от нее.*** Отметим, что равновесность ситуации гарантирует ее устойчивость только по отношению к отклонениям отдельных игроков. Два или несколько игроков, объединившись в коалицию, могут увеличить свои выигрыши, уменьшив при этом выигрыши остальных участников конфликта, т. е. этот принцип оптимальности не учитывает возможности создания коалиций. С другой стороны, ситуация равновесия не может быть результатом изолированных действий игроков, т. е. носит элементы коллективизма.

Основные недостатки ситуации равновесия:

- 1) она не всегда существует;
- 2) в случае неединственности ситуации равновесия нет разумного основания выбора одной из них;
- 3) могут существовать неравновесные ситуации, в которых выигрыши всех игроков превышают их выигрыши в ситуации равновесия.

Стандартным способом устранения первого недостатка является расширение класса стратегий путем введения смешанных стратегий либо использование дополнительной информированности. Большую трудность представляет наличие нескольких ситуаций равновесия.

Рассмотрим игру, которую в литературе называют «семейный спор». В этой игре множество выборов игроков конечно и состоит из двух элементов. Функции выигрыша игроков задаются соответственно матрицами $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Игрок 1 выбирает строки, игрок 2 – столбцы с целью получения максимально возможного выигрыша. В результате выбора пары (i, j) игроки получают соответственно a_{ij} и b_{ij} . В этой игре имеется две ситуации равновесия $(1,1)$ и $(2,2)$, с выигрышами соответственно $(2,1)$ и $(1,2)$. Трудность принятия решения заключается в том, что в этом примере ситуации равновесия

неэквивалентны. Первому игроку более выгодна ситуация равновесия (1,1), а второму – (2,2).

Более того, если даже один из игроков захочет «уступить» партнеру, то нет никакой гарантии, что партнер не поступит точно так же, в результате чего оба получат по нулю. Именно поэтому ситуации равновесия, вообще говоря, не являются полностью индивидуальным способом выбора решения, для их реализации необходима договоренность придерживаться ситуаций равновесия вообще, а в случае их неединственности – о выборе конкретного решения из множества устойчивых.

Выбор ситуации равновесия более или менее удовлетворителен, если ситуация равновесия u^0 единственная и строгая, т. е. для любого i и любой $v_i \neq u_i^0$ $g_i(u^0) > g_i(u_1^0, \dots, u_{i-1}^0, v_i, u_{i+1}^0, \dots, u_n^0)$. Однако и в этом случае могут быть выборы более выгодные, чем в равновесной ситуации, для всех игроков одновременно.

Примером может служить хорошо известная задача «дилемма заключенного», в которой игроки стремятся максимизировать выигрыш, заданный в виде следующих матриц $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Единственной и строгой ситуацией равновесия в этой игре является ситуация (2,2), приводящая к выигрышам (1,1), равным максиминному выигрышу для каждого игрока. Однако более выгодной (но не устойчивой) является ситуация (1,1) которой соответствуют выигрыши (5,5).

Ситуации, при отклонении от которых один или несколько игроков могут получить строго больший выигрыш только за счет своих партнеров, называются *ситуациями, оптимальными по Парето*:

u^0 – называется оптимальной по Парето, если не существует $u \in U$, для которого выполняются неравенства $g_i(u) > g_i(u^0)$, причем хотя бы одно из них строгое.

Выбор оптимальной по Парето точки относится к коллективным принципам принятия рациональных решений. Множество оптимальных по Парето точек содержит, как правило, более одного элемента. Поэтому возникает вопрос конкретной точки из этого множества. Именно вследствие этого необходимы дополнительные предположения и схемы, приводящие к однозначному и «справедливому» исходу.

При изолированном поведении игроков, действующих самостоятельно, не обмениваясь информацией, центральное место занимают игры в нормальной форме. Исходная постановка игры в нормальной форме не предполагает никакой дополнительной информации у игроков о действиях друг друга. Поэтому можно считать, что все игроки одновременно и независимо осуществляют выбор своих стратегий, т. е. элементов $u_i \in U_i$. В результате складывается ситуация u однозначно определяющая выигрыши всех игроков $g_1, \dots, g_N(u)$.

Рассмотрим *возможные принципы оптимальности* для игры в нормальной форме *при изолированном поведении игроков*, когда каждый выбирает свою стратегию независимо от других. Эти принципы оптимальности основаны на тех или иных понятиях доминирования стратегий. Для конечных

игр (*например, биматричных*) используют следующие определения доминирования для всех векторов.

Вектор $z = (z_1, \dots, z_n)$ *строго доминирует* вектор $y = (y_1, \dots, y_n)$, если $z_i > y_i, i = 1, \dots, n$. Вектор $z = (z_1, \dots, z_n)$ *доминирует* вектор $y = (y_1, \dots, y_n)$, если $z_i \geq y_i, i = 1, \dots, n$; если при этом хотя бы для одного индекса i_0 неравенство строгое, т. е. $z_{i_0} > y_{i_0}$, то вектор z *истинно доминирует* вектор y .

Для бесконечных игр вводятся соответствующие определения по отношению к функциям.

Функция $f_1(u)$ *мажорирует* функцию $f_2(u)$ на множестве U если $f_1(u) \geq f_2(u) \forall u \in U$. Если дополнительно $\exists u' \in U$ такое, что $f_1(u') > f_2(u')$, то функция $f_1(u)$ *истинно мажорирует* функцию $f_2(u)$. Если $f_1(u) > f_2(u) \forall u \in U$, то функция $f_1(u)$ *строго мажорирует* $f_2(u)$.

Понятие мажорирования можно вводить для части переменных. При этом достаточно указать, на каком множестве определяется мажорирование.

Используя мажорирование функции, можно дать определения доминирования стратегий для игры в нормальной форме Γ .

Стратегия u_i игрока i в игре Γ *доминирует* (истинно, строго) стратегию v_i , если функция $g_i(u_i, u_{(-i)})$ *мажорирует* (истинно, строго) функцию $g_i(v_i, v_{(-i)})$ на множестве $U_{(-i)}$. При этом говорят, что стратегия v_i *доминируется* (истинно, строго) стратегией u_i .

Стратегия v_i игрока i в игре Γ называется *недоминируемой* (истинно, строго), если не существует стратегии $u_i \in U_i, u_i \neq v_i$, которая её доминирует (истинно, строго). Множество недоминируемых стратегий игрока i обозначают ND^i , а истинно и строго недоминируемых соответственно $ND_{и}^i, ND_{с}^i$. Справедливы включения $ND \subseteq ND_{и}^i \subseteq ND_{с}^i$.

Стратегия u_i игрока i в игре Γ называется *доминирующей* (истинно, строго), если она доминирует (истинно, строго) любую стратегию $u_i \in U_i, u_i \neq v_i$.

Из двух стратегий при изолированном поведении игроку выгодно выбирать доминирующую, так как при любых действиях остальных игроков она дает ему выигрыш не меньше, чем другая, а возможно и больше.

При введенном понятии доминирования многие стратегии оказываются несравнимыми, т. е. не доминирующими друг друга. Множества доминирующих стратегий обозначим $D^i, D_{и}^i, D_{с}^i$. Очевидны включения $D_{с}^i \subseteq D_{и}^i \subseteq D^i \subseteq ND_{и}^i$.

При изолированном поведении игроку имеет смысл выбирать из множеств доминирующих стратегий или, учитывая их возможную пустоту, хотя бы из множеств недоминируемых стратегий, которые не пусты при весьма общих условиях (для определения этих множеств не нужно даже знать функции выигрыша других игроков). Однако это не значит, что доминирующие стратегии при всех обстоятельствах являются наилучшими. В игре могут существовать исходы, которые выгоднее для всех игроков, чем те, к которым приводит использование доминирующих стратегий. Для достижения таких исходов требуются какие-то способы коллективного выбора.

С введенными понятиями доминирования связаны принципы оптимальности, дающие в качестве решения исходы из доминирующих и

недоминируемых стратегий. Они обоснованы при изолированном поведении. Общих условий непустоты множеств доминирующих стратегий не существует.

Исключение доминируемых стратегий может производиться последовательно. Если в результате получается однозначный исход, то игра называется *разрешимой по доминированию*, а исход – *сложным равновесием*.

Пример 11.1. $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 5 & 5 & -4 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 \\ 5 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

В этой биматричной игре нет доминирующих стратегий. Но последовательное исключение доминируемых стратегий (сначала 3 столбец, затем 1 строка, затем 2 столбец, наконец 3 строка) дает сложное равновесие (2,1) с выигрышем (5,5).

Разрешимость по доминированию предполагает знание игроками не только своих выигрышей, но и выигрышей других игроков, а также аналогичного принципа поведения, т. е. является индивидуальным, но строго говоря, не полностью изолированным поведением. Единственным принципом оптимальности полностью изолированного поведения является принцип гарантированного результата. Он связан с оценкой стратегии по наихудшему возможному случаю. Этот принцип весьма гибок и может принимать различную форму в зависимости от имеющейся информации. Для игры в нормальной форме Γ , когда игрок действует изолированно, зная лишь множества стратегий остальных игроков, но не зная их конкретных выборов и даже функций выигрыша, гарантированный результат i -го игрока при выборе стратегий u_i равен $g_i^\Gamma(u_i) = \inf_{u_{-i} \in U_{-i}} g_i(u_i, u_{-i})$. Стратегия u_i^0 называется *гарантирующей стратегией* i -го игрока в игре Γ , если выполняется условие $\inf_{u_{-i} \in U_{-i}} g_i(u_i^0, u_{-i}) = \sup_{u_i \in U_i} \inf_{u_{-i} \in U_{-i}} g_i(u_i, u_{-i}) = g_i^0$, где g_i^0 – максимальный гарантированный результат i -го игрока.

Принцип гарантированного результата (максимального гарантированного результата или максимина) связан с осторожным поведением, основанным только на достоверной информации (в игре Γ такая информация заключается в знании множества стратегий остальных игроков). Максимальный гарантированный результат g_i^0 определен всегда (возможно равен $\pm\infty$), но оптимальная гарантирующая стратегия может не существовать.

ЛЕКЦИЯ № 12. АНТАГОНИСТИЧЕСКИЕ, МАТРИЧНЫЕ И БЕСКОАЛИЦИОННЫЕ ИГРЫ

1. Антагонистические игры. Матричные игры

Антагонистическая игра представляет собой частный случай игры в нормальной форме Γ , когда имеется два игрока $n = 2$ и *сумма функций выигрыша этих игроков тождественно равна нулю*. Так как в этом случае в любом исходе по выигрышу одного игрока можно однозначно определить выигрыш другого, то достаточно задать функцию выигрыша одного игрока. Таким образом, антагонистическая игра (или игра двух лиц с нулевой суммой) в нормальной форме – это тройка

$$\Gamma_a = \langle U_1, U_2, g(u_1, u_2) \rangle, \quad (12.1)$$

где U_1 – множество стратегий игрока 1; U_2 – множество стратегий игрока 2; $g(u_1, u_2)$ – вещественная функция, определенная на $U_1 \times U_2$ и представляющая собой выигрыш игрока 1 в ситуации (u_1, u_2) , когда он выбирает стратегию u_1 , а игрок 2 выбирает стратегию u_2 , при этом выигрыш игрока 2 равен $-g(u_1, u_2)$.

Так как точки максимума функции совпадают с точкой минимума этой функции, взятой со знаком минус, то в антагонистической игре игрок 1 стремится по возможности максимизировать функцию $g(u_1, u_2)$, а игрок 2 – минимизировать. В антагонистической игре поведение на основе принципа гарантированного результата становится особенно уместным. Его применение с учетом того, что

$$\sup_{u_1 \in U_1} \inf_{u_2 \in U_2} (-g(u_1, u_2)) = -\inf_{u_2 \in U_2} \sup_{u_1 \in U_1} g(u_1, u_2),$$

приводит к понятиям: **нижняя и верхняя цена игры**.

Нижней ценой игры (55) называется величина

$$\underline{v} = \sup_{u_1 \in U_1} \inf_{u_2 \in U_2} g(u_1, u_2). \quad (12.2)$$

Верхней ценой игры (55) называется величина

$$\bar{v} = \inf_{u_2 \in U_2} \sup_{u_1 \in U_1} g(u_1, u_2). \quad (12.3)$$

Смысл величин $\underline{v}$ и $\bar{v}$ заключается в следующем: игрок 1 может гарантировать себе выигрыш не меньше $\underline{v} - \varepsilon$, независимо от действий игрока 2; а игрок 2 – выигрыш не больше $\bar{v} + \varepsilon$, независимо от действий игрока 1 (ε – сколь угодно малое положительное число, если наружные грани в (12.2), (12.3) не достигаются; $\varepsilon=0$, если они достигаются).

Величины $\underline{v}$ и $\bar{v}$, определенные выражениями (12.2), (12.3), всегда связаны соотношением $\underline{v} \leq \bar{v}$. Таким образом, если оба игрока разумны, то выигрыш игрока 1 должен лежать на отрезке $[\underline{v}, \bar{v}]$. Величины $\underline{v}$ и $\bar{v}$ могут быть как положительными, так и отрицательными, поэтому в слово «выигрыш» здесь не вкладывается смысл успешного исхода. Так как выигрыш может быть и положительным, и отрицательным, то фактически он может выступать как в виде дохода, так и в виде расхода.

Если $\underline{v} = \bar{v}$, то их общее значение называют *ценой игры* Γ ; если $\underline{v} < \bar{v}$, то говорят, что игра не имеет цены.

Следует напомнить, что пара (u_1^0, u_2^0) называется седловой точкой функции $g(u_1, u_2)$ на прямом произведении множеств $U_1 \times U_2$, если

$$g(u_1, u_2^0) \leq g(u_1^0, u_2^0) \leq g(u_1^0, u_2) \quad \forall u_1 \in U_1, \text{ и } u_2 \in U_2$$

Или эквивалентно

$$\max_{u_1 \in U_1} g(u_1, u_2^0) = g(u_1^0, u_2^0) = \min_{u_2 \in U_2} g(u_1^0, u_2).$$

Если цены игры нет, то существенным становится вопрос об информированности игроков о выборе противника и, вообще говоря, выигрыш игрока 1 может быть любым из диапазона $[\underline{v}, \bar{v}]$. Поэтому *интересным является вопрос об условиях существования цены игры.*

Рассмотрим этот вопрос для матричных игр, являющихся конечными антагонистическими играми (12.2), где множества стратегий U_1 и U_2 состоят из конечного числа точек, а $g(u_1, u_2)$ – функция дискретного аргумента.

Если множество U_1 содержит n точек, то выбор каждой стратегии игроком 1 можно представить в виде выбора натурального числа $i, i = 1, \dots, n$. Аналогично, если множество U_2 содержит m точек, то выбор каждой стратегии игроком 2 можно представить в виде выбора натурального числа $j, j = 1, \dots, m$. Обозначим через a_{ij} значение функции g в ситуации, соответствующей выбору j -й чистой стратегии игрока 2. Тогда конечную игру можно задавать матрицей $A = (a_{ij})$ размера $n \times m$ (отсюда и название матричная игра). Тогда стратегией игрока 1 является выбор строки i матрицы A , стратегией игрока 2 – выбор столбца j матрицы A , выигрыш игрока 1 в ситуации (i, j) равен a_{ij} , а игрока 2 соответственно $(-a_{ij})$.

Нижняя и верхняя цена матричной игры

$$\underline{v} = \max_{1 \leq i \leq n} \min_{1 \leq j \leq m} a_{ij}, \quad \bar{v} = \min_{1 \leq j \leq m} \max_{1 \leq i \leq n} a_{ij}.$$

Равенство $\underline{v} = \bar{v}$ имеет место тогда и только тогда, когда матрица A содержит седловую точку (i_0, j_0) , т. е. $a_{ij_0} \leq a_{i_0 j_0} \leq a_{i_0 j} \quad \forall i, j$. В этом случае общее значение нижней и верхней цены игры называется ценой игры, а i_0 и j_0 – *оптимальными стратегиями* игроков.

Пример 12.1. В игре с матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ пара стратегий (1,1) составляет седловую точку, цена игры равна 1. Выбором первой строки игрок 1 гарантирует себе выигрыш не меньше 1, выбором первого столбца игрок 2 гарантирует себе проигрыш не более 1. Значит при разумных игроках выигрыш игрока 1 равен 1 (игрок 2 получает -1).

Если $\underline{v} < \bar{v}$, то выигрыши игроков однозначно не определены (можно указать только разумный диапазон).

Пример 12.2. В игре с матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ нижняя и верхняя цены соответственно $\underline{v} = 1, \bar{v} = 2$, т. е. игрок 1 может гарантировать себе выигрыш не меньше 1, а игрок 2 – проигрыш не более 2. У каждого игрока обе стратегии

являются оптимальными гарантирующими, но без дополнительных предположений исход этой игры и выигрыш неоднозначны.

В общем случае антагонистическая игра (даже матричная) не имеет цены. В такой ситуации решающим становится вопрос информированности игроков о выборе противника. Без его конкретизации нельзя определить решение игры. Различные варианты уточнения информированности приводят к расширению множеств стратегий. Одним из наиболее традиционных подходов является введение случайности в выбор игроков. При этом считается, что конкретный выбор каждого игрока не может быть известным противнику.

Рассмотрим общую матричную игру

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}. \quad (12.4)$$

Введем смешанные стратегии для обоих игроков. Смешанной стратегией игрока 1 в матричной игре (12.4) является вектор

$$p = (p_1, \dots, p_n), \quad p_i \geq 0, i = 1, \dots, n, \quad \sum_{i=1}^n p_i = 1,$$

где p_i – вероятность выбора i -й чистой стратегии ($i = 1, \dots, n$);

Смешанной стратегией игрока 2 является вектор

$$q = (q_1, \dots, q_m), \quad q_j \geq 0, j = 1, \dots, m, \quad \sum_{j=1}^m q_j = 1,$$

где q_j – вероятность выбора j -й чистой стратегии ($j = 1, \dots, m$).

Функция выигрыша игрока 1 как математическое ожидание в соответствии с формулами теории вероятностей имеет вид:

$$h(p, q) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} p_i q_j = p A q.$$

Множество смешанных стратегий игрока 1 есть $S_n = \{p = (p_1, \dots, p_n) | p_i \geq 0, i = 1, \dots, n, \sum_{i=1}^n p_i = 1\}$.

Множество смешанных стратегий игрока 2 есть $S_m = \{q = (q_1, \dots, q_m) | q_j \geq 0, j = 1, \dots, m, \sum_{j=1}^m q_j = 1\}$.

Совокупность $\{S_n, S_m, h(p, q)\}$ называется **смешанным расширением** матричной игры. Чистые стратегии игроков являются подмножествами множеств смешанных стратегий (вершинами симплексов S_n и S_m). Выбору i -ой чистой стратегии соответствует вектор p с компонентами $p_i = 1, p_k = 0, k \neq i$ (аналогично для игрока 2).

Функция h на множествах чистых стратегий принимает значения a_{ij} . В смешанных стратегиях нижняя и верхняя цена игры определяются соответственно $\max_{p \in S_n} \min_{q \in S_m} h(p, q)$, и $\min_{q \in S_m} \max_{p \in S_n} h(p, q)$. Существует теорема, которая утверждает, что нижняя и верхняя цены матричной игры в смешанных стратегиях всегда равны между собой (их общее значение v называется *ценой матричной игры*).

Теорема 12.1 (основная теорема матричных игр фон Неймана). *Любая матричная игра имеет цену (в смешанных стратегиях), а игроки имеют оптимальные смешанные стратегии, т. е.*

$$v = \max_{p \in S_n} \min_{q \in S_m} h(p, q) = \min_{q \in S_m} \max_{p \in S_n} h(p, q) = \min_{q \in S_m} h(p^0, q) = \max_{p \in S_n} h(p, q^0) = h(p^0, q^0).$$

Рассмотрим некоторые **свойства оптимальных стратегий матричных игр**, необходимые в дальнейшем для обоснования методов решения. Далее понадобятся обозначения:

$$h(i, q) = \sum_{j=1}^m a_{ij} q_j, \quad (12.5)$$

$$h(p, j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} p_i. \quad (12.6)$$

Выражение (12.5) представляет собой выигрыш игрока 1 при использовании им i -ой чистой стратегии, тогда как игрок 2 использует смешанную стратегию q ; выражение (12.6) – выигрыш игрока 1 при использовании им смешанной стратегии p , тогда как игрок 2 использует чистую j -ю стратегию.

Теорема 12.2. *Для того чтобы v было ценой игры, а p^0 и q^0 – оптимальными стратегиями игроков, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства*

$$h(i, q^0) \leq v \leq h(p^0, j) \quad \forall i, j.$$

Теорема 12.3 (о свойствах оптимальных стратегий). Пусть p^0 и q^0 – произвольные оптимальные стратегии, а v – цена игры. Тогда, если $p_i^0 > 0$, то $h(i, q^0) = v$; если $q_j^0 > 0$, то $h(p^0, j) = v$.

Кроме того, имеют место равенства

$$\min_{1 \leq j \leq m} h(p^0, j) = \max_{p \in S_n} \min_{1 \leq j \leq m} h(p, j) = \min_{q \in S_m} \max_{1 \leq i \leq n} h(i, q) = \max_{1 \leq i \leq n} h(i, q^0) = v.$$

Очевидно, если существует цена игры в чистых стратегиях, то она совпадает с ценой игры в смешанных стратегиях.

Ранее определялось понятие доминирования для векторов, на его основе определяется доминирование для их комбинаций.

Некоторая линейная комбинация векторов $\alpha^1, \dots, \alpha^k$ доминирует (строго доминирует) вектор β , если существуют такие числа $\lambda_1, \dots, \lambda_k, \lambda_i > 0, i = 1, \dots, k, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$, что вектор $\sum_{i=1}^k \lambda_i \alpha^i$ доминирует (строго доминирует) вектор β . При этом говорят, что вектор β доминируется вектором α или линейной комбинацией.

Теорема 12.4 (принцип доминирования). *Если i_0 -я строка матрицы игры доминируется некоторой линейной комбинацией остальных строк, то существует такая оптимальная стратегия p^0 игрока 1, что $p_{i_0}^0 = 0$. Если i_0 -я строка строго доминируется некоторой линейной комбинацией остальных строк, то для любой оптимальной стратегии p^0 игрока 1 выполняется $p_{i_0}^0 = 0$. Аналогично, если j_0 -й столбец матрицы игры доминирует (строго доминирует) некоторую линейную комбинацию остальных столбцов, то существует такая (любая) оптимальная стратегия q^0 игрока 2, что $q_{j_0}^0 = 0$.*

В соответствии с принципом доминирования при решении матричной игры (нахождении цены и оптимальных стратегий) **можно предварительно вычеркивать доминируемые строки и доминирующие столбцы, сокращая размерность задачи.**

2. Бескоалиционные игры N лиц

Перейдем к рассмотрению игр *с числом участников больше двух* или игр *двух лиц с ненулевой суммой*. Среди задач принятий решений в условиях конфликта выделяется класс игр, в которых запрещены какие-либо соглашения между игроками – бескоалиционные игры.

Бескоалиционной игрой *N* лиц в нормальной форме называется объект $\Gamma = \langle \{1, \dots, N\}, U_1, \dots, U_N, g_1, \dots, g_N \rangle$. Бескоалиционная игра происходит следующим образом. Игроки одновременно и независимо друг от друга выбирают свои стратегии u_i из U_i , в результате чего формируется ситуация $u = (u_1, \dots, u_N)$, и игрок i получает выигрыш $g_i(u_i)$.

Рассмотрим *четыре принципа оптимальности* для бескоалиционной игры: *принцип равновесия, принцип максимина (наилучшего гарантированного результата), оптимальность по Парето, принцип доминирования*.

Ситуация $(u_1^0, \dots, u_N^0)$ называется *ситуацией равновесия* (по Нэшу) в бескоалиционной игре Γ , если $\forall u_i \in U_i, i = 1, \dots, N$

$$g_i(u_1^0, \dots, u_{i-1}^0, u_i^0, u_{i+1}^0, \dots, u_N^0) \geq g_i(u_1^0, \dots, u_{i-1}^0, u_i, u_{i+1}^0, \dots, u_N^0).$$

Если сложилась ситуация равновесия, то каждому игроку в отдельности не выгодно от нее отклоняться. Один игрок, изменив свою стратегию, может только уменьшить свой выигрыш. Способ нахождения точек равновесия в бескоалиционной игре *N* лиц аналогичен способу определения седловых точек. Если функции выигрыша игроков g_i являются непрерывно дифференцируемыми и точка равновесия $(u_1^0, \dots, u_N^0)$ является внутренней для произведения $U_1 \times \dots \times U_N$, то необходимо выполнение условий

$$\frac{\partial g_i(u_1^0, \dots, u_N^0)}{\partial u_i} = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (12.7)$$

где $\frac{\partial g_i}{\partial u_i}$ – вектор частных производных по векторной переменной u_i . Равенство (63) вытекает из обычных условий экстремума, так как в точке равновесия каждая функция g_i достигает максимума по «своей» переменной u_i при фиксированных остальных переменных. В общем случае надо учитывать возможную принадлежность равновесных стратегий u_i^0 границам множества U_i (для всех индексов i или для их части), поэтому либо отдельно проверяют граничные точки (если множества U_i имеют простой вид), либо вместо (63) используют условия экстремума с ограничениями (например, неположительность производных по всем допустимым направлениям).

Рассмотрим *способ нахождения точек равновесия в смешанных стратегиях в биматричной игре* – конечной игре двух лиц с ненулевой суммой выигрышей. Функции выигрыша двух игроков можно записать в виде матриц:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix}.$$

Стратегиями здесь можно считать выбор некоторой строки в матрице A и столбца в матрице B . Функции выигрыша также записывают в виде одной матрицы, элементы которой есть пары чисел (a_{ij}, b_{ij}) , определяющие выигрыши игрока 1 и 2 в ситуации (i, j) . Игру, определяемую матрицами A и B , будем обозначать $\Gamma(A, B)$.

Правило определения ситуаций равновесия в биматричной игре:

- для каждого столбца матрицы $(a_{ij}, b_{ij})_{n \times m}$ отметить максимальный элемент по первой координате;
- для каждой строки отметить максимальный элемент по второй координате.

Ситуация равновесия – это (i, j) , соответствующие элементы матрицы, у которых выделены обе координаты.

Пример 12.3. Биматричная игра с матрицей выигрышей $\begin{pmatrix} 2; 2 & 0; 2 & 5; 1 \\ 2; 0 & 2; 7 & 3; 8 \end{pmatrix}$ имеет единственную ситуацию равновесия $(1, 1)$ с выигрышем $(2, 2)$.

Величина $v_i = \max_{u_i \in U_i} \min_{u_j \in U_j, j \neq i} g_i(u_1, \dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \dots, u_N)$ называется максимальным гарантированным выигрышем i -го игрока. Стратегия i -го игрока u_i^0 называется максиминной стратегией, если $v_i = \min_{u_j \in U_j, j \neq i} g_i(u_1, \dots, u_{i-1}, u_i^0, u_{i+1}, \dots, u_N)$.

В примере 12.3 при использовании первой стратегии 1-й игрок получит не меньше 0, а при использовании второй стратегии – не меньше 2. Поэтому максимальный гарантированный результат игрока 1 равен 2, и игрок имеет одну максиминную стратегию 2. Максимальный выигрыш игрока 2 равен 2, максиминная стратегия 2. Данный пример показывает, что выигрыши игроков в ситуации равновесия не меньше максимального гарантированного результата.

В антагонистической игре, имеющей решение, компоненты седловой точки являются осторожными стратегиями игроков, т. е. в седловой точке одновременно реализуется принцип гарантированного результата. Кроме того, во всех седловых точках выигрыши игроков одинаковы и равны значению игры. В общем случае ситуация равновесия не обладает указанными свойствами. **В неантагонистической игре** в разных точках равновесия игроки могут получать разные выигрыши, более того, может быть другая ситуация, в которой все игроки получают выигрыш больше, чем в точке равновесия.

Пример 12.4. В биматричной игре с матрицей выигрышей $\begin{pmatrix} 1; 0 & -1; -1 \\ 0; 0 & 0; 1 \end{pmatrix}$ две точки равновесия $(1, 1)$ и $(2, 2)$ с выигрышами $(1, 0)$ и $(0, 1)$ соответственно. Выигрыши игроков разные, поэтому игрокам выгодно стремиться к разным точкам равновесия. В результате они могут не попасть в равновесную ситуацию. Если игрок 1 выберет первую стратегию, а игрок 2 выберет вторую стратегию, то оба игрока получают выигрыш -1 (наихудший вариант). При этом игрок 1 имеет максиминную стратегию 2, а игрок 2 – первую; максимальный гарантированный выигрыш игроков 1 и 2 равен 0.

Пример 12.5. В биматричной игре с матрицей выигрышей $\begin{pmatrix} 10; 10 & 0; 16 \\ 16; 0 & 5; 5 \end{pmatrix}$ ситуация равновесия одна – (2,2), но она не оптимальна по Парето, так как есть ситуация (1,1), более выгодная обоим игрокам.

В биматричной игре понятие доминирования стратегий для игрока 1 совпадает с доминированием векторов-строк его матрицы выигрышей, а для игрока 2 – с доминированием столбцов.

В примере 12.5 игра разрешима по доминированию. Последовательное исключение первой строки и первого столбца дает сложное равновесие (2,2) с выигрышами (5,5).

Теорема 12.5. Если множества стратегий всех игроков конечны, и игра разрешима по доминированию, то любое сложное равновесие является равновесием по Нэшу.

Обратное утверждение неверно. Равновесная стратегия может быть доминируемой (но не строго доминируемой).

Пример 12.6. В биматричной игре $\begin{pmatrix} 4; 4 & -2; 5 & 3; 5 \\ 2; -3 & 1; 6 & 5; 6 \\ -1; 8 & 2; 7 & 5; 5 \end{pmatrix}$ единственное равновесие (3;3), но третья стратегия игрока 2 доминируется второй.

Если биматричная игра не имеет равновесия в чистых стратегиях, то строится смешанное расширение игры. Смешанную стратегию, как и в случае антагонистических игр, отождествляем с вероятностным распределением на множестве чистых стратегий.

Для биматричной игры множество $I_p = \{i | p_i > 0\}$ называется спектром смешанной стратегии p игрока 1, а стратегия p , для которой $I_p = \{1, 2, \dots, n\}$ – вполне смешанной.

Аналогично $J_q = \{j | q_j > 0\}$ – спектр смешанной стратегии q игрока 2, стратегия q , для которой $J_q = \{1, 2, \dots, m\}$ – вполне смешанная. Ситуацию (p, q) , в которой обе стратегии p и q вполне смешанные, называют *вполне смешанной*.

Для биматричной игры $\Gamma(A, B)$ оптимальные смешанные стратегии удовлетворяют системе линейных уравнений $qa_1 = pb_1$, $pb^j = v_2$,

где $a_i b^j$ – строки (столбцы) матрицы $A(B)$, $i \in I_p, j \in J_q, v_1, v_2$ – некоторые числа.

Если же ситуация равновесия (p, q) вполне смешанная, то указанная система уравнений принимает вид

$$Aq = v_1 u, \quad pB = v_2 w,$$

где $u = (1, \dots, 1)$, $w = (1, \dots, 1)$ – векторы соответствующей размерности, числа $v_1 = pAq$, $v_2 = pBq$ – выигрыши игроков в ситуации (p, q) .

Если матрицы A и B квадратные, невырожденные, и биматричная игра $\Gamma(A, B)$ имеет вполне смешанную ситуацию равновесия, то она единственная и вычисляется по формулам $p = v_2 u B^{-1}$, $q = v_1 A^{-1} u$,

где $v_1 = \frac{1}{u A^{-1} u^T}$, $v_2 = \frac{1}{u B^{-1} u^T}$, $u = (1, \dots, 1)$, числа v_1, v_2 – выигрыши игроков в ситуации равновесия (p, q) .

Пример 12.7. Рассмотрим биматричную игру

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 7 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 7 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для данной игры пара (2, 2) является ситуацией по Нэшу в чистых стратегиях. Выясним, имеет ли эта игра ситуацию равновесия в смешанных стратегиях. Для этого решим систему уравнений (в силу симметричности матриц выигрыша $p^0 = q^0$):

$$6q_1 + 2q_3 = v_1, \quad 4q_2 + 3q_3 = v_1, \quad 7q_1 = v_1, \quad q_1 + q_2 + q_3 = 1.$$

Откуда получаем $v_1 = v_2 = 56/23$, $q^0 = (8/23; 11/23; 4/23)$, $p^0 = (8/23; 11/23; 4/23)$.

Эта ситуация является и вполне смешанной ситуацией равновесия по Нэшу ($p_i^0 > 0, q_i^0 > 0, i = 1, 2, 3$).

В общем случае решение биматричной игры в смешанных стратегиях находится путем перебора квадратных подматриц матриц A и B и решения соответствующих систем линейных уравнений.

ЛЕКЦИЯ № 13. КООПЕРАТИВНЫЕ ИГРЫ

Часто в экономике и других областях встречаются конфликтные ситуации, предполагающие возможность объединения двух или более игроков для получения совместной выгоды, например, объединение всех продавцов с целью повышения цен. Когда число игроков становится больше двух, могут создаваться коалиции с целью извлечения дополнительной выгоды из сотрудничества, при этом выигрыш любой коалиции должен быть больше суммы выигрышей ее отдельных участников.

Возможность создания в игре различных коалиций можно рассматривать как специфическое расширение множества допустимых стратегий игроков. Для анализа таких ситуаций служат кооперативные игры. Они отвечают на вопрос, кому и с кем выгодно объединяться и стоит ли это делать вообще. Теория кооперативных игр обеспечивает методы анализа того, что каждая коалиция игроков может получить без указания на то, как этот результат может быть достигнут.

При анализе кооперативных игр, как правило, предполагается, что полезности игроков обладают свойством трансферабельности, то есть измеряются в одной шкале и могут передаваться от одного игрока другому без потерь. Такие игры называются играми с трансферабельной полезностью, хотя существуют и более сложные модели кооперативных игр, выходящие за рамки указанного предположения.

Теория кооперативных игр изучает не антагонистические конфликты, участники которых могут путем кооперирования объединять свои усилия. В теории кооперативных игр основная единица анализа – это группа участников, или коалиция. Цель анализа – определить такие варианты объединения, т.е. такие коалиции, которые будут наиболее полезны с точки зрения их платежей.

Но при этом обычно абстрагируются от того, каким образом должны действовать игроки, чтобы обеспечить себе выигрыш. То есть в теории кооперативных игр не учитываются стратегические возможности игроков, поэтому кооперативные игры также называют нестратегическими играми. В кооперативной игре задаются возможности и предпочтения различных групп игроков (коалиций) и из них выводятся оптимальные для игроков ситуации, в том числе распределения между ними суммарных выигрышей. При этом устанавливаются сами принципы оптимальности, доказываются их реализуемость в различных классах игр, и находятся конкретные реализации. Рассматривая кооперативные игры, вначале введем главные понятия, характеризующие их, затем рассмотрим принципы оптимального решения и, наконец, методы поиска таких решений.

1. Основные понятия теории кооперативных игр

Кооперативной игрой называется игра, в которой группы игроков – коалиции – могут объединять свои усилия. Подразумевается, что игроки примут решение о создании коалиции в зависимости от размеров выплат внутри коалиции.

Обозначим через N множество всех игроков, $N = \{1, 2, \dots, n\}$, а через K – любое его подмножество. Пусть игроки из подмножества K договариваются между собой о совместных действиях и таким образом образуют одну коалицию. Образовав коалицию, множество игроков K действует как один игрок против остальных $N \setminus K$ игроков, образующих другую коалицию, действующую как второй игрок, и выигрыш этих коалиций зависит от применяемых стратегий каждым из n игроков. Возможны и более сложные случаи при формировании нескольких коалиций. Очевидно, что число таких коалиций, состоящих из r игроков, равно числу сочетаний из n по r , т. е. C_n^r , а число всевозможных коалиций равно

$$\sum_{r=1}^n C_n^r = 2^n - 1.$$

Из этой формулы видно, что число всевозможных коалиций значительно растет в зависимости от числа всех игроков в данной игре. Для исследования этих игр необходимо учитывать все возможные коалиции, и поэтому трудности исследования возрастают с ростом n .

Функция v , ставящая в соответствие каждой коалиции K наибольший, уверенно получаемый ее выигрыш $v(K)$, называется **характеристической функцией игры**. Характеристическая функция описывает величину выгоды, которую данное подмножество игроков может достичь путем объединения в коалицию. Кооперативная игра полностью определяется заданием характеристической функции, переводящей элементы из множества всех коалиций во множество выплат. То есть игра задается коалиционными выигрышами, а выигрыши отдельных игроков не рассматриваются. Но очевидно, что каждый игрок предпочитает ту коалицию, в которой он получает больший выигрыш, поэтому нужно учитывать и возможное распределение выигрышей внутри коалиции. Таким образом анализ кооперативных игр

подразумевает, что игроки принимают решение о создании коалиции в зависимости от размеров выплат внутри коалиции.

Распределение выигрыша коалиции между входящими в нее игроками называется **дележом**. В кооперативной игре, как правило, существует множество возможных дележей. Каждый дележ описывается теми платежами, которые при этом получают отдельные игроки. С математической точки зрения *дележ* – это вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, где x_i – выигрыш i -го игрока.

Характеристическая функция v называется простой, если она принимает только два значения: 0 и 1. Если характеристическая функция v простая, то коалиции K , для которых $v(K) = 1$, называются *выигрывающими*, а коалиции K , для которых $v(K) = 0$, называются *проигрывающими*.

Простая игра называется **правильной**, если $v(K) = 1 - v(N \setminus K)$, т. е. коалиция выигрывает только тогда, когда дополняющая коалиция (оппозиция) проигрывает.

Простые характеристические функции возникают, например, в условиях голосования, когда коалиция является выигрывающей, если она собирает более половины голосов (простое большинство) или не менее двух третей голосов (квалифицированное большинство).

Если в простой характеристической функции v выигрывающими являются те и только те коалиции, которые содержат фиксированную непустую коалицию R , то характеристическая функция v , обозначаемая в этом случае через V_R , называется *простейшей*. Например, при голосовании в Совете безопасности ООН выигрывающими являются все коалиции, состоящие из всех постоянных членов Совета плюс еще хотя бы один непостоянный член.

Характеристическая функция обладает следующими свойствами:

- *персональность*: $v(\emptyset) = 0$, т. е. пустая коалиция (не состоящая ни из одного игрока) не получает ничего;

- *дополнительность*: $v(K) + v(N \setminus K) = v(N)$, т. е. сумма выигрышей коалиции и остальных игроков должна равняться общей сумме выигрышей всех игроков;

- *монотонность*: $A \subseteq B \Rightarrow v(A) \leq v(B)$, т. е. у больших коалиций выигрыш больше;

- *супераддитивность*: $v(K \cup L) \geq v(K) + v(L)$, если $K, L \subset N, K \cap L \neq \emptyset$, т. е. общий выигрыш коалиции должен быть не меньше суммарного выигрыша всех участников коалиции (это свойство отражает дополнительные возможности, возникающие у группы игроков при их объединении).

Кооперативные игры называются *существенными*, если для любых коалиций K и L выполняется неравенство $v(K) + v(L) < v(K \cup L)$, т. е. при условии супераддитивности выполняется строгое неравенство. Если же при этом условии выполняется равенство $v(K) + v(L) = v(K \cup L)$ (свойство аддитивности), то такие игры называются *несущественными*.

Доказаны следующие свойства:

- для того чтобы характеристическая функция была аддитивной (а кооперативная игра – несущественной), необходимо и достаточно выполнение следующего равенства: $\sum_{i \in N} v(i) = v(N)$;

- в несущественной игре имеется только один дележ;
- в существенной игре множество дележей бесконечно.

Кооперативная игра с множеством игроков N и характеристической функцией v_1 называется **стратегически эквивалентной** игре с тем же множеством игроков и характеристической функцией v_2 , если найдутся такие $k > 0$, и произвольные вещественные C_i ($i \in N$), что для любой коалиции $K \subset N$ имеет место равенство:

$$v_2(K) = kv_1(K) + \sum_{i \in N} C_i.$$

Смысл определения стратегической эквивалентности кооперативных игр состоит в том, что их характеристические функции отличаются только масштабом измерения выигрышей k и начальным значением C_i . Стратегическая эквивалентность кооперативных игр с характеристическими функциями v_1 и v_2 (или, что, то же самое, стратегическая эквивалентность их характеристических функций) обозначается $v_1 \sim v_2$.

Кооперативная игра называется нулевой, если все значения ее характеристической функции равны нулю. Содержательное значение нулевой игры состоит в том, что в ней игроки не имеют никакой заинтересованности. Всякая несущественная игра стратегически эквивалентна нулевой.

2. Принципы оптимальности решения кооперативных игр

Решение игроков о создании коалиций принимается не случайно, а основывается на некоторых рациональных принципах. В частности, каждый игрок, принимая решение о вхождении в ту или иную коалицию, заранее оценивает результат такого решения. Исходом в кооперативной игре является дележ, возникающий не как следствие действия игроков, а как результат их соглашений. Поэтому в кооперативных играх сравниваются не ситуации, как это имеет место в бескоалиционных играх, а дележи, и это сравнение может носить более сложный характер. Распределение выигрышей (дележ) игроков должно удовлетворять следующим очевидным условиям:

- *условие индивидуальной рациональности*: $x_i \geq v(i)$ для $i \in N$, т. е. любой игрок должен получить выигрыш в коалиции не меньше, чем он получил бы, не участвуя в ней (в противном случае он не будет участвовать в коалиции);
- *условие коллективной рациональности (условие эффективности)*: $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$, т. е. сумма выигрышей игроков должна соответствовать их возможностям (если сумма выигрышей всех игроков меньше чем $v(N)$, то игрокам невыгодно вступать в коалицию, так как остается неразделенный выигрыш); если же сумма выигрышей больше, чем $v(N)$, то игроки должны делить между собой сумму большую, чем у них есть. Другими словами, сумма выигрышей каждого из членов коалиции не должна превосходить уверенно получаемое ею количество. В противном случае коалиция, встретившись с дележом, дающим ей столько, сколько она самостоятельно не в состоянии добиться, должна согласиться на него и не заниматься его сравнением с какими-либо другими дележами.

Существуют как простые, интуитивно понятные подходы к решению кооперативных игр, так и более сложные, включающие математический инструментарий разной степени сложности. Одним из простых и естественных подходов к решению является *решение в угрозах и контругрозах*, основанное на следующей идее.

Пусть, например, в процессе игры трех лиц образовалась коалиционная структура $\{\{1,2\}, \{3\}\}$, содержащая коалицию $K = \{1,2\}$, в которую входят игроки с номерами 1 и 2. При распределении дохода коалиции $v(\{1,2\})$ игроки 1 и 2 получают суммы x_1 и x_2 соответственно. Тогда, если игрок 1 недоволен таким распределением, он может сказать своему партнеру, что если его доля дохода не будет увеличена, то он сформирует коалицию $L = \{1,3\}$, где сможет рассчитывать на больший выигрыш.

Если такая коалиция L может образоваться, т. е. если игроку 3 действительно выгодно вступать в коалицию с игроком 1, то такое заявление называется угрозой игрока 1 игроку 2. В свою очередь игрок 2 может заявить игроку 1, что в случае подобных его действий он может предложить игроку 3 такую конфигурацию коалиционной структуры $\{\{1\}, \{2,3\}\}$, что игрок 3 получит больший доход, чем в коалиции L , а сам игрок 2 получит не меньше, чем в исходной коалиции K . Таким образом, игрок 2 выдвигает контругрозу, защищающую его долю x_2 , и т. д. Если в результате такого переговорного процесса складывается некоторая коалиционная структура, то говорят о равновесии в угрозах и контругрозах. Такой подход позволяет получить определение переговорного множества как множества таких дележей, при которых для любой угрозы игрока i против любого другого игрока j существует контругроза игрока j против угрозы игрока i .

Для того, чтобы эта структура была устойчивой, игроки должны иметь ясное представление о своих возможных выигрышах и выигрышах других игроков в разных коалиционных конфигурациях и уверенность в их действительном получении (случай блефа, т. е. сознательный обман и передача заведомо неправильной информации в данном случае не рассматривается).

Теория кооперативных игр предлагает несколько более строгих подходов к образованию устойчивых коалиций и определению дележей. Подобно тому, как решение бескоалиционных игр может упроститься путем анализа доминирования стратегий, анализ кооперативных игр может осуществляться путем определения доминирующих и доминируемых дележей.

Дележ x доминирует y , если существует такая коалиция K , для которой дележ x превосходит y для всех членов коалиции K (доминирование x над y по коалиции K).

Наличие доминирования x над y означает, что во множестве игроков N найдется коалиция, для которой x предпочтительнее y . В теории кооперативных игр поиск доминируемых дележей основан на условии предпочтительности, которое предполагает необходимость «единодушия» в предпочтении со стороны коалиции: если хотя бы одно из неравенств $x_i > y_i$ будет нарушено, т. е. если хотя бы для одного из членов коалиции K выигрыш в условиях дележа y будет

не меньшим, чем в условиях дележа x , то можно будет говорить о предпочтении дележа x дележу y не всей коалицией K , а только теми ее членами, для которых соответствующее неравенство $x_i > y_i$ соблюдается.

Так же как не для всякой игры возможна ситуация доминирования стратегий, соотношение доминирования дележей возможно не по всякой коалиции. Так, в частности, невозможно доминирование по коалиции, состоящей из одного игрока или из всех игроков. По другим коалициям также не всегда возможно доминирование платежей.

Может быть много вариантов, связанных с доминированием дележей в кооперативных играх. В связи с этим возникает необходимость выделения устойчивых дележей, отклонение от которых будет невыгодно игрокам. Множество таких дележей в кооперативной игре называется *ядром игры*. Следовательно, определение ядра – это один из путей нахождения оптимального решения кооперативной игры.

Однако решение кооперативной игры, в отличие от бескоалиционной, не определяется однозначным критерием оптимальности. При формулировке принципов оптимальности решений в теории кооперативных игр преобладает аксиоматический подход, при котором сначала устанавливаются в виде аксиом желаемые свойства решения, а затем определяется распределение выигрыша между игроками или множество распределений, удовлетворяющее этим свойствам.

В зависимости от выбранной системы свойств получаемое оптимальное распределение выигрыша может быть различным. Например, оптимальное поведение участников кооперативной игры может состоять в стремлении к множеству дележей, не доминируемых другими дележами (*С-ядро*), или множеству не доминирующих друг над другом дележей, которые в совокупности доминируют над всеми остальными дележами, или к множеству дележей, в которых минимизируется «недовольство» игроков от участия в коалициях (*n-ядро*) и т. д.

С-ядро. Понятие ядра является ключевым принципом оптимальности для теории кооперативных игр. Ядро связано с таким исходом совместных действий игроков, который уже нельзя улучшить никакой коалицией участников, т. е. созданием новых и роспуском существующих коалиций.

Экономическое содержание понятия ядра связано с рыночной деятельностью большого числа экономических субъектов, каждый из которых обладает предпочтениями и располагает некоторым количеством наличных ресурсов. Предполагается, что экономическая система обеспечивает свободу заключения контрактов или свободу образования коалиций, которые улучшают благосостояние участников экономического процесса. *Распределение благ между субъектами, которое является оптимальным при заданных ограничениях, входит в ядро дележей.*

С-ядро (*core*) представляет собой множество недоминируемых дележей, т. е. коалиция всех участников не может увеличить выигрыш каждого участника собственными силами. Более строго, *С-ядро* – это множество эффективных распределений выигрыша, устойчивых к отклонениям любой коалиции игроков.

С-ядро задается системой линейных уравнений и нестрогих линейных неравенств, поэтому геометрически оно является выпуклым многогранником, вершины которого и определяют входящие в ядро дележи. Поиск С-ядра осуществляется путем нахождения координат этих вершин. Доказано, что в несущественной игре С-ядро состоит из единственного дележа. Для существенной игры С-ядро может быть пустым (т. е. недоминируемых платежей может не быть).

Принцип оптимальности в форме вектора Шепли. Еще один подход к поиску оптимальных решений кооперативных игр предложил Л. Шепли. Он стал в настоящее время наиболее распространенным на практике. Этот подход основан на принципе «справедливого дележа», исходя из вклада каждого игрока в выигрыш коалиции.

Вкладом i -го игрока называется величина $v(K) - v(K \setminus i)$, где v – характеристическая функция кооперативной игры. Т. е. вклад игрока – это приращение выигрыша коалиции при его участии по сравнению с выигрышем коалиции без этого игрока.

Вектор Шепли, или значение Шепли (Shaply value) $\varphi(v) = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, представляет собой распределение, в котором выигрыш каждого игрока φ_i равен его среднему вкладу в соответствующие коалиции K . В форме, практически реализуемой для расчетов, значение Шепли для каждого игрока имеет вид:

$$\varphi_i = \frac{(k-1)!(n-k)!}{n!} (v(K) - v(K \setminus i)),$$

где n – количество игроков, k – количество участников коалиции K .

Вектор Шепли удовлетворяет следующим свойствам (аксиомы Шепли):

1. *Линейность (аксиома агрегации).* Для любых двух игр с характеристическими функциями v и ω , а также любого α выполняются равенства:

$$\begin{aligned}\varphi(\varphi + \omega) &= \varphi(v) + \varphi(\omega); \\ \varphi(\alpha \cdot v) &= \alpha \varphi(v).\end{aligned}$$

Это свойство показывает, что при участии игроков в двух играх их выигрыши в отдельных играх должны складываться.

2. *Симметричность (аксиома симметрии).* Получаемый игроком выигрыш не зависит от его номера. Это означает, что если игра ω получена из игры v перестановкой игроков, то ее вектор Шепли $\varphi(\omega)$ есть вектор $\varphi(v)$ с соответствующим образом переставленными элементами. То есть игроки, одинаково входящие в игру, должны получать одинаковые выигрыши.

3. *Аксиома эффективности.* При распределении общего выигрыша не должно выделяться ничего «бесполезному игроку», не вносящему вклада ни в какую коалицию. В теории кооперативных игр такой игрок называется болваном, т. е. для такого игрока i для любой коалиции K , содержащей i , выполняется равенство $v(K) - v(K \setminus i) = 0$ и соответственно $\varphi_i = 0$. Благодаря этому свойству вектор Шепли позволяет полностью распределить имеющийся в распоряжении тотальной коалиции выигрыш, т. е. сумма компонент вектора $\varphi(v)$ равна $v(N)$. Иными словами, при разделении общего выигрыша коалиции

ничего не выделяется на долю «посторонних игроков», не принадлежащих этой коалиции, но и ничего не взимается с них.

Доказано (теорема Шепли), что для любой кооперативной игры существует единственное распределение выигрыша, удовлетворяющее аксиомам 1-3, и это распределение – вектор Шепли. Если вектор Шепли принадлежит S -ядру, то этот дележ одновременно справедлив и устойчив, но вектор Шепли может и не принадлежать непустому S -ядру.

ЛЕКЦИЯ № 14. ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ КОНФЛИКТА

Многие реальные конфликтные ситуации имеют длительный характер. Их участники действуют неоднократно и с учетом информации о предшествующем развитии конфликта. Очевидно, что для моделей подобных взаимодействий общие теоремы существования решения для игр в нормальной форме не позволяют находить или даже конкретизировать оптимальное поведение из-за большого числа возможных стратегий.

Для решения динамических игр с конечным числом игроков часто удобно использовать позиционное представление игры. Наиболее простым классом позиционных игр является класс конечношаговых позиционных игр с полной информацией. В такой игре на каждом шаге игры делает ход лишь один игрок, имеющий полную информацию о текущем состоянии дел, всех происходящих действиях и общей структуре игры. Это предположение характеризуется как полная информация. Хорошо известными примерами таких игр являются шашки и шахматы.

Позиционное представление игры означает, что все взаимодействие записывается в виде конечного ориентированного графа – дерева, вершины (узлы) которого соответствуют ситуациям, в которых течение игры может измениться. Более конкретно, вершины дерева – это либо ситуации принятия решения каким-либо одним игроком, либо ситуации, когда течение игры может измениться из-за каких-либо неподконтрольных игрокам факторов, обобщенно называемых Природой. Наконец, листьям дерева – финальным вершинам – соответствуют исходы игры, когда взаимодействие игроков завершено и определяются их итоговые выигрыши.

1. Позиционные игры с полной информацией

Математические модели конфликтов, учитывающие динамику, исследуются в теории позиционных игр, описывающих динамику принятия решений. Приведем определение многошаговой позиционной игры.

Многошаговая позиционная игра N лиц Γ определяется:

а) заданием древовидного графа G с начальной вершиной x_0 , называемой начальной позицией игры;

б) разбиением множества всех позиций (вершин) X на $N+1$ множеств $X_1, \dots, X_N, X_{N+1}$, где X_i – множество очередности i -го игрока, $i = 1, \dots, N$, а X_{N+1} – множество конечных позиций;

в) заданием вектор-функции $H(x) = (h_1(x), \dots, h_N(x))$ на множестве X_{N+1} ; функция $h_i(x)$ называется выигрышем i -го игрока;

г) разбиением каждого множества X_i на непересекающиеся подмножества X_i^j , информационными множествами i -го игрока.

Игра происходит следующим образом. Задано множество I игроков, перенумерованных натуральными числами $1, \dots, i, \dots, N$ (т.е. $I = \{1, 2, \dots, N\}$).

Пусть $x_0 \in X_{i_1}$, тогда в позиции x_0 «ходит» игрок i_1 и выбирает позицию $x_1 \in F_{x_0}$ (F_x – множество тех позиций, которые могут реализовываться непосредственно после позиции x).

Если $x_1 \in X_{i_2}$, то в позиции x_1 «ходит» игрок i_2 и выбирает следующую позицию $x_2 \in X_{i_3}$, и т. д. Игра прекращается, когда достигается конечная позиция $x_k \in X_{n+1}$, т.е. такая, для которой $F_{x_k} = \emptyset$.

В результате последовательного набора позиций однозначно реализуется некоторая последовательность $x_0, \dots, x_i, \dots, x_k$, определяющая путь в древовидном графе, исходящий из начальной позиции x_0 и достигающий одной из конечных позиций игры. Такой путь называют *партией*. В позиции x_k каждый из игроков получает выигрыш $h_i(x_k)$.

Будем предполагать, что игрок i при совершении выбора в позиции $x \in X_i$ знает эту позицию x , а, следовательно, из-за древовидности графа G может восстановить и все предыдущие позиции. В таком случае говорят, что игроки имеют *полную информацию*.

Пример 14.1 (выдача кредита). Банк (игрок 1) рассматривает запрос о выдаче кредита в размере 100 денежных единиц. Получатель кредита (игрок 2) рассчитывает получить прибыль 10 и предлагает вернуть кредитору 105 денежных единиц. Составим дерево игры (рис. 14.1).

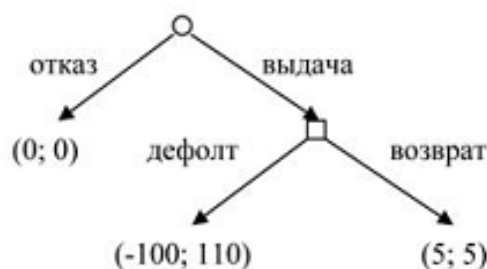


Рисунок 14.1 – Дерево игры «Выдача кредита»

Банк имеет две стратегии: отказать и выдать кредит. Второй игрок может вернуть кредит или объявить дефолт. В случае отказа выигрыши игроков равны нулю. Если кредит получен и возвращен, выигрыши составляют 5 единиц, в случае дефолта банк теряет 100, а прибыль получателя кредита составляет 110 единиц.

Однозначное отображение u_i , которое каждой вершине (позиции) $x \in X_i$, ставит в соответствие некоторую вершину (позицию) $y \in F_x$, называется *стратегией поведения* игрока i .

Множество всевозможных стратегий игрока i будем обозначать через U_i . Таким образом, стратегия i -го игрока предписывает ему в любой позиции x из множества его очередности X_i однозначный выбор следующей позиции.

Упорядоченный набор $u = u_1, \dots, u_i, \dots, u_N$, где $u_i \in U_i$, называется *ситуацией в игре*, а декартово произведение $U = \prod_{i=1}^N U_i$ – множество ситуаций. Каждая ситуация $u = u_1, \dots, u_i, \dots, u_N$ однозначно определяет партию в игре, а следовательно, и выигрыши игроков.

Действительно, пусть $x_0 \in X_{i_1}$. Тогда в ситуации $u = u_1, \dots, u_i, \dots, u_N$ следующая позиция x_1 определяется однозначно по правилу $u_{i_1}(x_0) = x_1$. Пусть теперь $x_1 \in X_{i_2}$. Тогда x_2 определяется однозначно по правилу $u_{i_2}(x_1) = x_2$. Если на k -том шаге реализовалась позиция $x_{k-1} \in X_{i_k}$, то x_k определяется однозначно по правилу $x_k = u_{i_k}(x_{k-1})$ и т. д.

Пусть ситуации $u = (u_1, \dots, u_i, \dots, u_N)$ в указанном смысле соответствует партия $x_0, x_1, \dots, x_k$. Тогда можно ввести понятие функции выигрыша K_i игрока i на ситуациях, положив ее значение в каждой ситуации u равным значению выигрыша h_i в окончательной позиции партии $x_0, x_1, \dots, x_k$, соответствующей ситуации

$$u = (u_1, \dots, u_N): K_i(u_1, \dots, u_i, \dots, u_N) = h_i(x_k), \quad i = 1, \dots, N.$$

Функции K_i , $i = 1, \dots, N$, определены на множестве ситуаций $U = \prod_{i=1}^N U_i$. Таким образом, построив множества стратегий игроков U_i и определив на декартовом произведении функции выигрыша K_i , $i = 1, \dots, N$, получаем игру в нормальной форме

$$\Gamma = \langle N, \{U_i\}_{i \in I}, \{K_i\}_{i \in I} \rangle,$$

где $I = \{1, \dots, i, \dots, N\}$ – множество игроков, U_i – множество стратегий игрока i , K_i – функция выигрыша игрока i , $i = 1, \dots, N$.

К игре в нормальной форме, в принципе, может быть сведен любой динамический (т. е. протекающий в течение некоторого времени, а не мгновенно) конфликтно-управляемый процесс формальным введением сложных правил поведения – стратегий. В тех случаях, когда мощность пространства стратегий невелика и имеется возможность численного нахождения решений, такой подход является вполне допустимым. Однако в большинстве задач поиска оптимального поведения конфликтно-управляемого процесса переход к нормальной форме не приводит к эффективным способам нахождения решений, хотя и позволяет наглядно иллюстрировать те или иные принципы оптимальности.

Для конечных игр (конечное число шагов и конечное число альтернатив на каждом шаге) с полной информацией справедливо утверждение: **любая конечная игра с полной информацией имеет ситуацию равновесия (по Нэшу).**

Пример 14.2. Приведенная в примере 14.1 игра в нормальной форме является биматричной с матрицей выигрышей

	дефолт	возврат
отказ	0; 0	0; 0
выдача	-100; 110	5; 5

Игра имеет одну ситуацию равновесия по Нэшу (отказ, дефолт) с вектором выигрышей (0; 0). Эта ситуация является сложным равновесием: второй игрок исключает доминируемую стратегию «возврат», потом первый игрок – доминируемую стратегию «выдача».

Для многошаговых игр можно усилить понятие равновесия, вводя понятие абсолютного равновесия.

Ситуация равновесия по Нэшу $u^0 = (u_1^0, \dots, u_n^0)$ называется *ситуацией абсолютного* (или *совершенного*) равновесия по Нэшу в игре Γ , если для любого $z \in X$ ситуация $(u^0)^z = ((u_1^0)^z, \dots, (u_n^0)^z)$, где $(u_i^0)^z$ – сужение стратегии u_i^0 на подигру Γ_z (игра на подграфе с начальной вершиной z графа основной игры), является ситуацией равновесия по Нэшу в подигре Γ_z .

Теорема 14.1 (Куна). *В любой конечной многошаговой игре с полной информацией существует ситуация абсолютного равновесия по Нэшу.*

Для построения ситуации совершенного равновесия используется метод обратной индукции: всем вершинам, начиная с непосредственно предшествующих конечным, приписывается вектор выигрышей всех игроков для подигры, начинающейся с этой вершины.

Пример 14.3. В игре выдача кредита совершенное равновесие $u^0 =$ (отказ, дефолт) совпадает с равновесием по Нэшу. На рис. 14.2 выделены оптимальные стратегии игроков; каждой вершине приписан вектор выигрышей игроков для подигры.

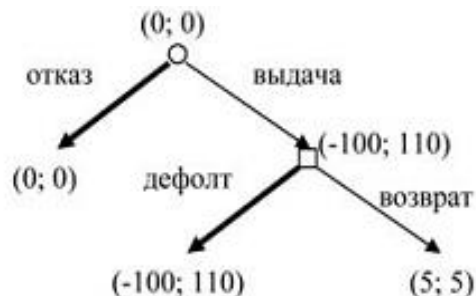


Рисунок 14.2 – Совершенное равновесие в игре «Выдача кредита»

2. Позиционные игры с неполной информацией

Более сложные для исследования являются игры с неполной информацией. Для описания неопределенности, в условиях которой i -й игрок выполняет очередной ход, используется понятие информационного множества. Позиции, принадлежащие одному информационному множеству i -го игрока, для него неразличимы. Выполняя очередной ход, игрок знает только, что он находится в одной из позиций данного информационного множества (но не знает, в какой).

Для того чтобы выбрать свою стратегию, игрок должен делать дополнительные предположения о действиях других игроков и использовать

соответствующий этой информационной гипотезе принцип оптимальности, например, принцип наилучшего гарантированного результата. Позиционную игру с неполной информацией также можно записать в виде игры в нормальной форме, но эта игра может не иметь ситуации равновесия в чистых стратегиях.

Пример 14.4 (контроль качества товара). Рассмотрим сначала случай, когда осуществляется продажа без гарантии. Перерабатывающее предприятие (игрок 1) покупает сырье у поставщика («покупка») или использует собственное («отказ»). Поставщик (игрок 2) может применять хороший контроль качества или плохой. Перерабатывающее предприятие не знает уровень контроля поставщика и проводит собственный контроль на одном из трех уровней: хороший (Х), средний (С), плохой (П). Выигрыши игроков заданы на рис. 14.3.

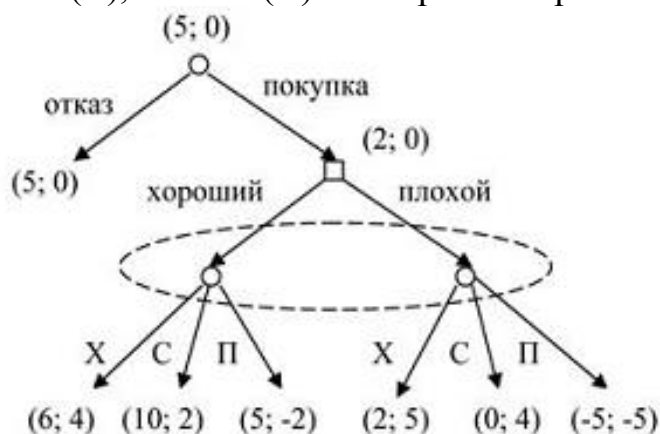


Рисунок 14.3 – Игра «Контроль качества товара (продажа без гарантии)»

Информационное множество игрока 1 при выборе второго хода состоит из двух вершин. Рассмотрим подыгру 1, подграф которой имеет начальную вершину, соответствующую ходу игрока 2 (если игрок 1 выбрал покупку). Матрица этой игры имеет вид

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cc}
 \text{хороший} & \text{плохой} \\
 \text{X} & \begin{pmatrix} 6; 4 & 2; 5 \end{pmatrix} \\
 \text{C} & \begin{pmatrix} 10; 2 & 0; 4 \end{pmatrix} \\
 \text{П} & \begin{pmatrix} 5; -2 & -5; -5 \end{pmatrix}
 \end{array}
 \end{array}$$

Ситуация (Х, плохой) с выигрышами (2; 5) является равновесием по Нэшу и сложным равновесием одновременно. Совершенным равновесием в исходной игре является ситуация с выигрышем (5;0), оптимальные стратегии игроков $u^0 = (\text{отказ}, \text{Х}; \text{плохой})$. Решение не является паретооптимальным.

Изменим условие задачи и рассмотрим ситуацию, когда осуществляется продажа с гарантией. Пусть поставщик платит получателю товара штраф 3 денежных единиц в случае плохого качества. Выигрыши в конечных позициях и равновесие изменятся (рис. 14.4).

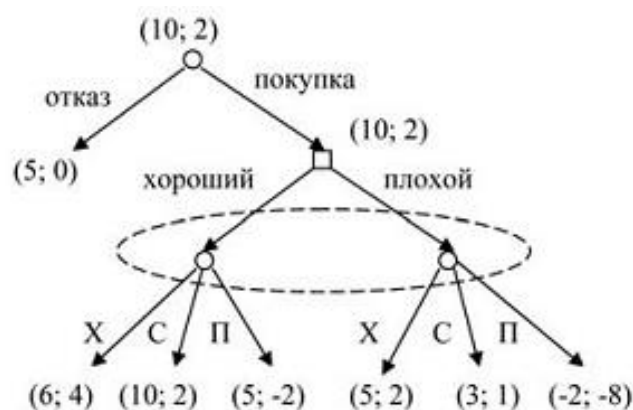


Рисунок 14.4 – Игра «Контроль качества товара (продажа с гарантией)»
Матрица подыгры 1 имеет вид

	хороший	плохой
Х	6; 4	5; 2
С	10; 2	3; 1
П	5; -2	-2; -8

Равновесие по Нэшу (и сложное равновесие) в подыгре 1 – ситуация (С, хороший) с выигрышем (10;2), является совершенным равновесием в исходной игре (эти платежи представлены на рис. 14.4 у хода игрока 2). Оптимальные стратегии (покупка, С; хороший), т. е. введение гарантии в интересах обоих игроков.

ЛЕКЦИЯ № 15. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ИГРЫ

1. Общие сведения

Создателем теории статистических игр считается А. Вальд. Он показал, что в теории принятия решений *статистические игры являются основным подходом, если решение принимается в условиях частичной неопределенности.*

Статистические модели представляют собой игру двух лиц (человека и природы) с использованием человеком дополнительной статистической информации о состояниях природы.

Она существенно отличается от антагонистической игры двух лиц с нулевой суммой, где выигрыш одного равен проигрышу другого.

В статистической игре природа не является разумным игроком, который стремится выбрать для себя оптимальные стратегии. Этот игрок не заинтересован в выигрыше. Другое дело – человек, в данном случае статистик. Он имеет целью выиграть игру с воображаемым противником, т. е. с природой.

Игрок-природа не выбирает оптимальной стратегии, но статистик должен стремиться к определению распределения вероятностей состояния природы.

Следовательно, *основными отличиями статистической игры от стратегической являются:*

- отсутствие стремления к выигрышу у игрока-природы, т. е. отсутствие антагонистического противника;
- возможность второго игрока-статистика провести статистический эксперимент для получения дополнительной информации о стратегиях природы.

Так, например, статистик, работающий в фирме «Одежда», может изучить многолетние данные о погодных условиях в местностях, где одежда будет продаваться, и в зависимости от наиболее вероятного состояния погоды выработать рекомендации, куда и какое количество партий изделий отправлять, где выгоднее и на каком уровне провести сезонное снижение цен и т. д.

Таким образом, *теория статистических решений является теорией проведения статистических наблюдений, обработки этих наблюдений и их использования.*

В теории статистических решений основные правила могут быть детерминированными и рандомизированными.

В статистических играх *используются понятия: риск (функция риска), потери (функция потерь), решение (функция решения), функции распределения при определенных условиях.*

Необходимо пояснить понятие *рандомизации*. Это статистическая процедура, в которой решение принимается случайным образом. К методам рандомизации относятся: бросание кости, вытягивание соломки, перетасовка карт и т. д. Математическая энциклопедия это определяет более подробно: «Статистическая процедура принятия решения, в которой по наблюдаемой реализации x случайной величины X решение принимается с помощью розыгрыша по вероятностному закону, называется рандомизацией».

Введем условные обозначения:

Ω или B – множество состояний природы;

Θ_j или B_j – отдельное состояние природы, $\Theta_j \in \Omega$;

A – множество действий (решений) статистика;

a – отдельное решение статистика, $a \in A$;

L – функция потерь.

Множества Ω и A предполагаются численно определенными, поэтому представляется возможным установить распределение вероятностей. Если принятое статистиком решение $a \in A$ и состояние природы $\Theta \in \Omega$, то функция потерь запишется $L(\Theta; a)$;

D – совокупность всех нерандомизированных (чистых) функций решения;

$d(\bar{x})$ – функция решения; $\bar{x}$ – случайный вектор. Характеристикой функции решения является функция потерь.

Статистик может перед принятием одного из возможных решений провести эксперимент, который заключается в наблюдении случайной переменной x . В итоге представляется возможным получить распределение этой случайной переменной в зависимости от состояния природы Θ .

$F(x|\Theta)$ – функция условного распределения случайной переменной x . Предполагается, что для каждого состояния природы Θ известно значение функции $F(x|\Theta)$;

n – объем выборки;

X_Θ – множество всех выборок объема n .

После получения результата эксперимента x статистик использует некоторую функцию решения и принимает одно из решений $a \in A$, когда результат эксперимента – вектор $\bar{x} \in X_\Theta$:

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix};$$

R – функция риска;

$R(\Theta, d)$ – функция риска, определенная на прямом произведении $\Omega \times D$ множества состояний природы и множества решений.

Игра (Ω, A, L) – исходная стратегическая игра, соответствующая стратегической задаче принятия решения;

$G = (\Omega, D, R)$ – статистическая игра;

σ – рандомизированная функция решения;

D^* – множество случайных функций решения, $\sigma \in D^*$. Подразумевается, что $D \subset D^*$, так как чистая функция решения (нерандомизированная) может быть рассмотрена как смешанная, которая используется с вероятностью, равной 1;

$G(\Theta)$ – функция априорного распределения состояний природы Θ ;

Ξ – совокупность всех априорных распределений $\xi \in \Xi$.

2. Свойства статистических игр

Функция решения, отображающая множество выборок X_Θ в множество решений статистика A , называется *нерандомизированной (чистой) функцией решения статистика*. Так, по результатам эксперимента статистик определяет, какое решение $a \in A$ он должен выбрать. Для выбора из множества D наилучшей функции решения он использует функцию риска.

Функция риска зависит от множества состояний природы и от множества функций решения и принимает значение, выраженное действительными числами. Она определяет математическое ожидание функции потерь при некотором состоянии природы Θ и известной статистике функции распределения $F(\bar{x}|\Theta)$, когда $a=d(\bar{x})$.

Представим функцию риска:

$$R(\Theta, d) = ML(\Theta, a) = \int_{\bar{x}} L(\Theta, a) dF(\bar{x}|\Theta),$$

где M – знак математического ожидания;

$L(\Theta, a)$ – функция потерь при состоянии природы Θ и $d(\bar{x}) = a$.

В теории статистических функций любую неотрицательную функцию L , определенную прямым произведением $\Omega \times D$, называют *функцией потерь*.

Значение $L(\Theta, d)$ функции потерь L в произвольной точке $(\Theta, d) \in \Omega \times D$ интерпретируют как ущерб, к которому приводит принятие решений $d, d \in D$, если истинное значение параметра есть $\Theta, \Theta \in \Omega$.

Выражение $\Omega \times D$ – прямое произведение множества состояний природы и множества функций решения. Функция $R(\Theta, d)$ не является случайной величиной, а принимается как платеж статистика в его игре с природой при следующих условиях:

- состояние природы фиксировано;
- функция решений выбрана, $d \in D$.

Стратегическая игра (Ω, A, L) становится статистической, $G = (\Omega, D, R)$, если используется результат эксперимента – вектор $\bar{x}$.

Игра называется статистической, если в ней имеется:

X_Θ – множество n -мерных выборок;

D – множество функций решений, которые преобразуют X_Θ в A ;

Ω – множество состояний природы;

$R(\Theta, d)$ – функция риска.

Статистическая игра записывается как $G = (\Omega, D, R)$. Данная игра является игрой двух лиц с нулевой суммой, где $d \in D$ – функция решения статистика, а риск $R(\Theta, d)$ статистика – платеж природе.

Статистик может не прибегать к рандомизации, если он использует как оптимальную байесовскую функцию решения r .

Рандомизация на стороне статистика проводится двумя методами:

1) применение решений $a \in A$ с определенными вероятностями (**смешение решений**);

2) **смешение чистых функций решения** $d \in D$, т. е. рандомизация функций решения.

Чаще применяется второй метод.

Распределение вероятностей δ на множестве D чистых функций решения d называется **рандомизированной (смешанной) функцией решения статистика**.

Функция риска становится случайной величиной, если экспериментатор применяет в статистической игре случайную функцию решения $\delta \in D^*$, т. е. когда каждой чистой функции решения $d \in D$ приписывается вероятность, с которой она должна использоваться.

Платежом будет математическое ожидание функции потерь, взятое для некоторого состояния природы Θ , при распределении δ , определенном на множестве чистых функций решения D :

$$R(\Theta, \delta) = M_\Theta L(\Theta, d) \int_D R(\Theta, d) d\delta.$$

Если статистик использует случайные функции решения $\delta \in D^*$, то этим расширяется (обобщается) статистическая игра.

Расширенная статистическая игра (Ω, D^*, R) называется также **смешанным расширением статистической игры с рандомизацией на стороне статистика**.

Дальнейшее расширение статистической игры может быть достигнуто при предположении, что природа также «применяет» стратегию при «выборе» своего состояния Θ .

Априорное распределение вероятностей ξ на множестве Ω состояний природы означает распределение до проведения эксперимента. Это априорное распределение $\xi \in \Xi$ состояний природы является случайной (смешанной) стратегией природы в статистической игре, где природа не рассматривается как разумный игрок.

Если Θ предполагается случайной величиной с априорным распределением ξ , то риск $R(\Theta, \delta)$ становится случайной переменной при фиксированной функции решения δ . В данном случае математическое ожидание риска $R(\Theta, \delta)$ при априорном распределении ξ , задаваемом функцией распределения $G(\Theta)$, определяется как

$$r(\xi, \delta) = MR(\Theta, \delta) = \int_{\Omega} R(\Theta, \delta) d\xi = \int_{\Omega} R(\Theta, \delta) dG(\Theta),$$

где (ξ, δ) – байесовский риск функции решения δ с учетом априорного распределения ξ .

Если в качестве оптимальной принимается байесовская функция решения, то используется формула $r(\xi, \delta)$.

Вводя рандомизацию на стороне природы, приходим к дальнейшему расширению статистической игры.

Игра (Ξ, D^*, r) со смешанным расширением статистической игры с рандомизацией на стороне статистика и на стороне природы называется **полностью расширенной статистической игрой**.

Поясним в полностью расширенной статистической игре (Ξ, D^*, r) ее составляющие:

Ξ – множество всех априорных распределений ξ состояний природы или множество ее смешанных стратегий;

D^* – множество всех случайных функций решения;

$r = r(\xi, \delta)$ – байесовский риск.

Представим схему расширения статистической игры (рис. 15.1). При наличии данных без учета стохастических распределений имеем исходную стратегическую игру двух лиц с нулевой суммой, которая относится к антагонистическим играм. Данная игра является исходной для соответствующей статистической задачи принятия решения.

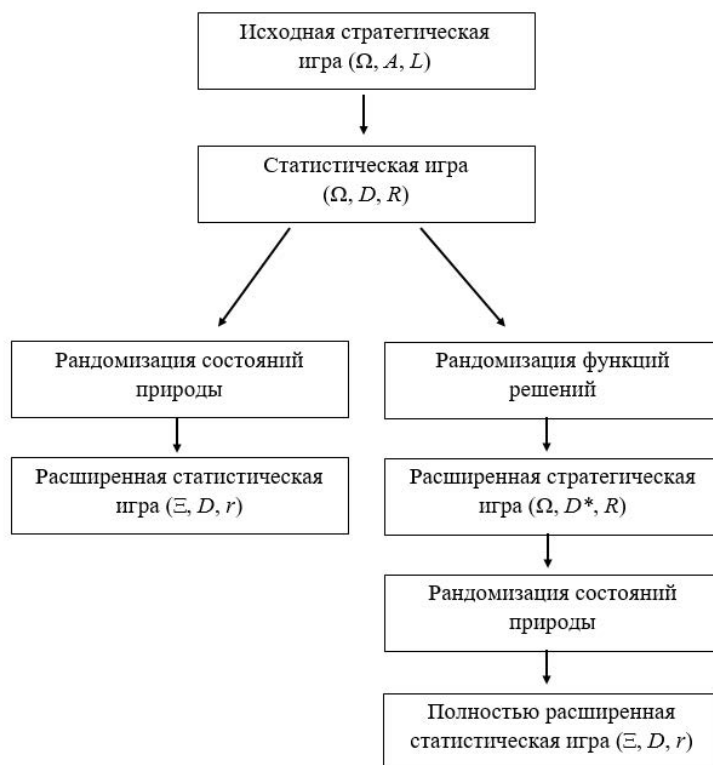


Рисунок 15.1 – Расширение статистической игры

Если статистик (экспериментатор) не имеет возможности провести эксперимент со случайной величиной X , чтобы получить ее распределение, которое зависит от состояния природы, он вынужден будет использовать только стратегическую игру (Ω, A, L) .

Однако очень часто статистик может провести эксперимент и получить в результате вектор $\bar{x}$, которым он в состоянии воспользоваться при принятии решения $a \in A$ функции $d(\bar{x})$. В этом случае платеж $L(\Theta, a)$ становится случайной величиной, а игра – статистической $G(\Omega, D, R)$. Стратегией статистика будет $d \in D$, а платежом природе от статистика станет его риск $R(\Theta, d)$.

Далее у статистика остаются две альтернативы:

- 1) воспользоваться рандомизацией состояний природы и перейти к расширенной (Ξ, D, r) статистической игре;
- 2) воспользоваться рандомизацией функций решения и перейти к расширенной статистической игре (Ω, D^*, R) .

Наконец, если статистик применит смешанные стратегии для обоих игроков, то получит полностью расширенную статистическую игру $((\Omega, D^*, r)$.

На практике статистик для выбора оптимальной стратегии может не производить рандомизацию, а в качестве оптимальной взять байесовскую функцию решения.

А. Вальд, создавая теорию статистических игр, опирался на созданную Д. Нейманом теорию стратегических игр, поэтому **сравним далее понятия стратегических игр двух лиц с нулевой суммой и понятия статистических игр статистика с природой**. Для этого укажем основные обозначения в стратегической и статистической играх:

X – совокупности стратегий игрока 1;
 Y – совокупности стратегий игрока 2;
 W – платежная функция;
 $W(X, Y)$ – платеж игрока 2 игроку 1;
 $G = (X, Y, W)$ – игра игрока 1 с игроком 2;
 $\Gamma = (\Xi, H, R)$ – смешанное расширение игры $G = (X, Y, W)$,
 где: Ξ – множество всех смешанных стратегий ξ игрока 1;
 H – множество всех смешанных стратегий η игрока 2;
 R – риск игрока 2.

Составим сравнительную таблицу задач статистических решений с игрой двух лиц с нулевой суммой (табл. 15.1).

Таблица 15.1 – Сравнительная таблица задач статистических решений с игрой двух лиц с нулевой суммой

Игра двух лиц с нулевой суммой X, Y	Задача статистических решений
Игра (X, Y, W) игрока 1 с игроком 2	Статистическая игра (Ω, D, R) природы и статистика
$x \in X, y \in Y$ – чистые стратегии игроков 1 и 2	$\Theta \in \Omega$ состояние природы, $d \in D$ – статистическая функция решения
Платеж $W(x, y)$ игрока 2 игроку 1	$R(\Theta, d)$ – риск статистика
Смешанная стратегия игрока 1	Априорное распределение ξ состояний природы
Смешанная стратегия игрока 2	Случайная функция решения $\delta \in D^*$
Смешанное расширение игры $\Gamma = (\Xi, H, K)$	Полностью расширенная статистическая игра (Ξ, D^*, r)
Максиминная стратегия ξ_0 игрока 1	Наименее благоприятное априорное распределение ξ_0
Минимаксная стратегия η_0 игрока 2	Минимаксная функция решения δ_0

3. Выбор функций решения

Для всех состояний природы не существует одной наилучшей функции решения. От статистика требуется применение таких методов, которые дают оптимальные функции решения в более узком диапазоне.

Для этого необходимо использовать критерии оптимальности. Статистик в статистической игре (Ω, D, R) или в расширенных статистических играх стремится к выигрышу, т. е. к определению наилучшей функции решения, при которой риск $R(\Theta, \delta)$ был бы минимальным. Но это непросто, так как для каждого состояния природы Θ имеется своя лучшая функция.

Пусть у нас имеются две различные функции решения δ_1 и δ_2 (рис. 15.2).

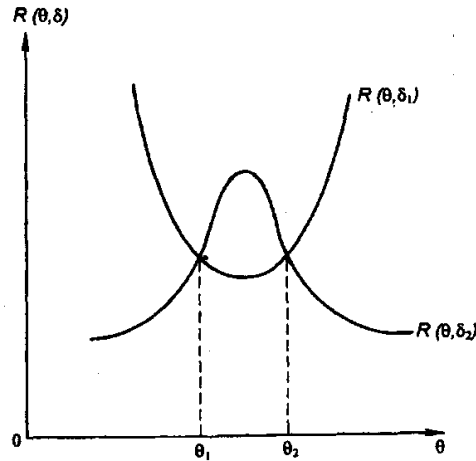


Рисунок 15.2 – Сравнение двух функций решения

Можно выделить область, где функция δ_1 будет лучшей, – в диапазоне состояний природы $\Theta_1 < \Theta < \Theta_2$. Вторая функция δ_2 будет лучшей для состояния природы при $\Theta < \Theta_1$ и при $\Theta > \Theta_2$.

Функция $\delta \in D$ называется *допустимой*, если в множестве D^* нет никакой другой функции решения δ_0 , которая была бы лучшей δ для всех $\Theta \in \Omega$. Данная функция для каждого $\Theta \in \Omega$ должна удовлетворять неравенству $R(\Theta, \delta_0) \leq R(\Theta, \delta)$. Таким образом, допустимая функция решения не будет доминирующей стратегией статистика в статистической игре.

Рассмотрение только допустимых функций существенно уменьшит множество D^* до множества допустимых функций решения. Отметим, что байесовские функции решения входят в класс допустимых функций.

Определение. Функция решения $\delta_0 \in D^*$ называется байесовской относительно априорного распределения $\xi \in \Xi$ состояний природы Θ , если она минимизирует байесовский риск $r(\xi, \delta)$ на множестве D^* .

Формула Байеса используется тогда, когда событие A появляется совместно с каким-либо из полной группы несовместных событий $B_1, B_2, \dots, B_n$. Событие A произошло, и требуется произвести количественную переоценку вероятностей событий $B_1, B_2, \dots, B_n$. При этом известны вероятности $P(B_1), P(B_2), \dots, P(B_n)$ до опыта (априорные). Требуется определить вероятности после опыта (апостериорные).

Апостериорные вероятности представляют собой условные вероятности $P(B_1|A), P(B_2|A), \dots, P(B_n|A)$. Вероятность совместного наступления событий A с любым из этих событий B_j по теореме умножения равна:

$$P(AB_j) = P(A)P(B_j|A) = P(B_j)P(A|B_j).$$

$$\text{Если } P(A) \neq 0, \text{ то } P(B_j|A) = \frac{P(B_j)P(A|B_j)}{P(A)}.$$

Эту формулу можно переписать исходя из формулы полной вероятности:

$$P(B_j|A) = \frac{P(B_j)P(A|B_j)}{\sum_{j=1}^n P(B_j)P(A|B_j)}$$

Задача 15.1. Собирается партия исправных изделий с трех предприятий. Первый завод поставляет 60 %, второй – 30 %, третий – 10 % изделий.

B_1, B_2, B_3 – события, соответствующие тому, что изделия изготовлены на первом, втором и третьем предприятиях.

Вероятность исправной работы изделий первого предприятия равна 0,98, второго – 0,99, третьего – 0,96.

Определить вероятность того, что в собранную партию исправных изделий попали соответственно изделия с первого, второго и третьего предприятий.

Введем обозначения:

A – событие, заключающееся в том, что изделие исправно;

$P(A)$ – полная вероятность того, что изделие исправно;

$P(B_1|A), P(B_2|A), P(B_3|A)$ – условные вероятности того, что исправное изделие изготовлено соответственно на первом, втором и третьем предприятиях;

$P(A|B_1), P(A|B_2), P(A|B_3)$ – условные вероятности того, что изделие, изготовленное соответственно на первом, втором и третьем предприятиях, исправно;

$P(B_1), P(B_2), P(B_3)$ – вероятности того, что изделие изготовлено соответственно на первом, втором и третьем предприятиях.

Известно: $P(A|B_1) = 0,98; P(A|B_2) = 0,99; P(A|B_3) = 0,96; P(B_1) = 0,60; P(B_2) = 0,30; P(B_3) = 0,10$.

Требуется определить $P(A); P(B_1|A); P(B_2|A); P(B_3|A)$.

Решение. 1. Определим полную вероятность того, что изделия, прибывшие с разных предприятий, исправны:

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3) = 0,6 * 0,98 + 0,3 * 0,99 + 0,1 * 0,96 = 0,981.$$

2. Вычислим условные вероятности того, что в партию исправных попали изделия с первого, второго и третьего предприятия соответственно:

$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)} = \frac{0,6*0,98}{0,981} = 0,599;$$

$$P(B_2|A) = \frac{P(B_2)P(A|B_2)}{P(A)} = \frac{0,3*0,99}{0,981} = 0,303;$$

$$P(B_3|A) = \frac{P(B_3)P(A|B_3)}{P(A)} = \frac{0,1*0,96}{0,981} = 0,098.$$

3. Проверим: $P(B_1|A) + P(B_2|A) + P(B_3|A) = 0,599 + 0,303 + 0,098 = 1$.

Вывод. По формуле Байеса количественная переоценка доли предприятия в партии исправных изделий составляет: первое предприятие имеет 59,9 %; второе – 30,3 %; третье – 9,8 %.

Остановимся на некоторых нестандартных принципах принятия решений.

Принцип Байеса – Лапласа. Данный принцип отступает от условий полной неопределенности. В нем предполагается, что возможные состояния природы могут достигаться с вероятностями $P_1, P_2, \dots, P_n$ при условии, что $P_1 + P_2 + \dots + P_n = 1$. Байес в 1763 г. предложил считать равными вероятности отдельных состояний природы.

Принцип Гурвица. Этот принцип является упрощенным вариантом принципа Байеса – Лапласа.

Если известны вероятности отдельных состояний, то берут среднее арифметическое результатов при наилучшем решении. Иногда, если существует возможность определить вес наихудшего и наилучшего решений, то используют их взвешенную среднюю арифметическую.

Проиллюстрируем применение данного принципа на примере строительства предприятий при четырех разных состояниях природы и наличии четырех разных типов предприятий.

Задача 15.2. Имеются определенные средства на возведение предприятий. Необходимо наиболее эффективно использовать капиталовложения с учетом климатических условий, подъездных путей, расходов по перевозкам и т. д. Сочетание этих факторов по влиянию на эффективность капиталовложений можно разбить на четыре состояния природы B_1, B_2, B_3, B_4 . Типы предприятий обозначим A_1, A_2, A_3, A_4 . Эффективность строительства определяется как процент прироста дохода по отношению к сумме капитальных вложений. Информацию, отражающую постановку задачи, представим в табл. 15.2.

Таблица 15.2

Тип предприятия \ Состояние природы	B_1	B_2	B_3	B_4	$\min_i a_{ij}$	$\max_i a_{ij}$	Средняя эффективность $\left(1/2 (\min_i a_{ij} + \max_i a_{ij})\right)$
A_1	6	3	9	5	3	9	6
A_2	3	4	5	13	3	13	8
A_3	9	6	4	11	4	11	7,5
A_4	2	5	3	9	2	9	5,5
$\max_i a_{ij}$	9	6	9	13			

Варианты решений

1. Решение по принципу стратегических игр, по принципу максимина: $\max_i \min_j a_{ij} = 4$. Нужно строить предприятие A_3 .

Изменим условия задачи и предположим, что в табл. 15.2 отражены затраты на строительство предприятий, тогда выбор типа предприятий следует осуществить по принципу минимакса: $\min_i \max_j a_{ij} = 9$. Нужно строить предприятие A_1 или A_4 .

2. Решение по принципу Гурвица.

Если известны все вероятности, определяющие состояния природы, сделаем выбор с помощью среднего арифметического лучшего и худшего результатов.

Согласно табл. 15.2, это будет рекомендация строить предприятие A_2 , обеспечивающее максимальную среднюю эффективность $\Phi = (13+3)/2 = 8$.

4. Применим принцип Байеса при равных вероятностях состояний природы $P(B_1)=P(B_2)=P(B_3)=P(B_4)=1/4$. Определим рентабельность, соответствующую решению A_1 , т. е. M_1 :

$$M_1 = (6 + 3 + 9 + 5) * \frac{1}{4} = \frac{23}{4} = 5,75.$$

Далее определяем M_2 , M_3 , и M_4 .

$$M_2 = (3 + 4 + 5 + 13) * \frac{1}{4} = \frac{25}{4} = 6,25;$$

$$M_3 = \frac{30}{4} = 7,5; \quad M_4 = \frac{19}{4} = 4,75.$$

Выводы. Предполагая, что все вероятности состояний природы равны, следует строить предприятие A_3 , так как $M_3 = 7,5 = \max (M_1, M_2, M_3, M_4)$. Отметим, что принцип Байеса-Лапласа имеет смысл применять, если возможно оценить вероятности отдельных состояний природы. При этом необходимо, чтобы решения также повторялись многократно.

Когда события повторяются многократно, действует закон больших чисел, согласно которому достигается максимальный средний результат. При единичных решениях принцип Байеса – Лапласа не следует применять.

Принцип Гурвица фактически является упрощением байесовских оценок. Гурвиц допускает, в частности, при отсутствии информации о вероятностях возникновения отдельных состояний природы брать среднее арифметическое значение результатов наилучшего и наихудшего решений.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бородачёв, С. М. Теория принятия решений: учебное пособие / С. М. Бородачёв; науч. ред. О. И. Никонов; Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина. – Екатеринбург: Издательство Уральского университета, 2014. – 124 с. ISBN 978-5-7996-1196-5.
2. Данилин, Г. А. Математическое программирование с Excel: Учебное пособие / Г. А. Данилин. – М: МГУЛ, 2005. – 113 с.
3. Есипов, Б. А. Методы исследования операций: учебное пособие / Б. А. Есипов. – 2-е изд., испр. и доп. – Санкт-Петербург: Лань, 2021. – 304 с. – ISBN 978-5-8114-0917-4.
4. Математические методы и модели исследования операций: учебник / В. А. Колемаев, В. И. Соловьев, В. И. Малыхин и др. – М.: ЮНИТИ ДАНА, 2017. – 593 с. ISBN 978-5-238-01325-1.
6. Мендель, А. В. Модели принятия решений: учебное пособие / А. В. Мендель. – Москва: Юнити, 2017. – 463 с. – ISBN 978-5-238-01894-2.
7. Теория принятия решений: учебник и практикум для бакалавриата и магистратуры. – В 2 т. – Т 1. / под ред. В. Г. Халина. – М.: Юрайт, 216. – 250 с. – Серия: Бакалавр и магистр. Академический курс. ISBN 978-5-9916-6964-1 (т.1).
8. Теория принятия решений: учебное пособие для магистрантов / В. А. Горелик. – Москва: МПГУ, 2016. – 152 с. ISBN 978-5-4263-0428-4.