Н. Л. Леонова

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Учебно-методическое пособие

Санкт-Петербург
2024

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Санкт-Петербургский государственный университет промышленных технологий и дизайна»
Высшая школа технологии и энергетики

Н. Л. Леонова

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Учебно-методическое пособие

Утверждено редакционно-издательским советом ВШТЭ СПбГУПТД

Санкт-Петербург
2024

УДК 519.872
ББК 65.054
Л47

Рецензенты:
кандидат физико-математических наук, доцент, зав. кафедрой высшей математики Высшей школы технологии и энергетики Санкт-Петербургского государственного университета промышленных технологий и дизайна
Б. Ф. Иванов;
кандидат технических наук, доцент кафедры информационно-измерительных систем и технологий СПбГЭТУ «ЛЭТИ»
Н. В. Орлова

Леонова, Н. Л.
Л47 Математические методы в теории массового обслуживания: учебно-методическое пособие / Н. Л. Леонова. — СПб.: ВШТЭ СПбГУПТД, 2024. — 50 с.

Учебно-методическое пособие соответствует программам и учебным планам дисциплины «Математические методы в теории массового обслуживания» для студентов, обучающихся по направлению подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика». Изложены основные понятия теории массового обслуживания и теории случайных процессов. Приведены примеры решения задач по основам теории массового обслуживания и разделу теории случайных процессов. Рассмотрены основные модели систем массового обслуживания.

Учебно-методическое пособие предназначено для подготовки бакалавров очной формы обучения. Отдельные разделы пособия могут быть полезны аспирантам и специалистам, работающим в области прикладной математики и информатики.

УДК 519.872
ББК 65.054

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Теория систем массового обслуживания (СМО) представляет собой область прикладной математики, связанную с направлениями «Прикладные задачи теории вероятностей» и «Теории случайных процессов». СМО в современном мире имеют широкую область применения: в экономике, в социальной сфере, в военном деле, в области организации производства и обслуживания.

Дисциплина «Математические методы в системах массового обслуживания» играет большую роль в формировании исследовательских компетенций в области оптимизации проектов у студентов направления 01.03.02 «Прикладная математика и информатика». Теория систем массового обслуживания ставит своей целью ознакомить студентов с существующими моделями количественного анализа, необходимыми для выбора управленческих решений в системах массового обслуживания коммерческой деятельности и финансового бизнеса различной сложности.

В учебно-методическом пособии представлен теоретический материал дисциплины, необходимый для самостоятельной работы студентов. В практической части особое внимание уделяется исследованию математических моделей и методов, необходимых для моделирования и анализа деятельности систем массового обслуживания различной степени сложности.

1. ТЕОРИЯ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

1.1. Историческая справка

Теория массового обслуживания выделилась из теории случайных процессов, и на данный момент имеет самостоятельную область исследований со своим типом задач (рис. 1.1).

Рисунок 1.1 – Зарождение теории массового обслуживания.

Теория вероятностей (как исторический родоначальник) теории массового обслуживания зародилась и начала оформляться в XVII в. благодаря необходимости изучения закономерностей случайных явлений. Значительный шаг вперед в развитии теории вероятностей сделал Яков Бернулли (1654–1705 гг.). Он вывел и доказал закон больших чисел (простейшая форма закона больших чисел устанавливает связь между вероятностью события и частотой его появления, т. е. при большом числе опытов относительная частота появления конкретного исхода стабилизируется и приближается к некоему числу – вероятности этого исхода). Позднее Пуассон (1781–1840 гг.) доказал более общую, чем у Бернулли, форму больших чисел, а также впервые применил теорию вероятностей к задачам стрельбы (тем самым положив начало ее использования в военном деле). Пуассон также вывел один из законов распределения, который играет важную роль во всех приложениях теории вероятностей, в том числе в теории массового обслуживания.

В XIX в. при заметном угасании интереса к теории вероятностей в Западной Европе в России создается знаменитая Петербургская математическая школа, которая дала миру важнейшие труды по теории вероятностей и развитие нескольких ее приложений (в том числе теории случайных процессов), большинство из которых в настоящее время имеют самостоятельные области исследования. Основы современной теории случайныхпроцессов (являющейся родоначальницей теории массового обслуживания) заложил А. А. Марков (1856–1922 гг.). Он существенно расширил области применения центральной предельной теоремы и закона больших чисел, распространив их как на зависимые, так и на независимые опыты.

Из теории случайных процессов, как уже говорилось ранее, постепенно выделилась теория массового обслуживания. Ее родоначальником считается датский учёный А. К. Эрланг.

А. К. Эрланг, решая практические задачи совершенствования работы систем связи, вывел ряд формулировок и формул, являющихся базовыми в теории массового обслуживания. Дальнейшее развитие теории происходило в трудах советских ученых. В 30-е гг. XX в. А. Я. Хинчин разработал метод «вложенных цепей Маркова», давший возможность поиска распределения времени ожидания для простейших потоков на один канал, обслуживающий очередь с произвольным распределением времени обслуживания. В 50-е гг. XX в.Б. В. Гнеденко обобщил формулы Эрланга, а также рассмотрел случаи потери заявок при отказе канала обслуживания и переход заявки на другой свободный канал. Б. В. Гнеденко является автором первого в СССР спецкурса по теории массового обслуживания, а написанная им монография до сих пор является основополагающей при изучении теории массового обслуживания как в России, так и за рубежом.

1.2. Основные понятия теории систем массового обслуживания

Предметом теории систем массового обслуживания является установление зависимости между основными характеристиками системы обслуживания (число каналов обслуживания, характер входного потока заявок, которые необходимо обслужить, производительность отдельно взятого канала и пр.)с целью улучшения управления системами.

- *ТМО (теория массового обслуживания)* – раздел теории вероятностей, изучающий СМО.
- *СМО (системы массового обслуживания)* – системы, в которых, с одной стороны, возникают массовые запросы на выполнение каких-либо видов услуг, а с другой стороны, происходит удовлетворение этих запросов.

Основные задачи ТМО заключаются в следующем:

1. Построение математической модели системы массового обслуживания и расчет ее основных характеристик. Использование математических моделей позволяет осуществлять предварительный выбор оптимальных решений по определенным критериям, предложенных поставщиком задачи или руководителем фирмы.
2. Установление зависимости эффективности работы системы массового обслуживания от ее организации.
3. Решение различных оптимизационных задач, связанных с функционированием системы массового обслуживания.
4. Выработка рекомендаций по рациональному построению системы массового обслуживания для обеспечения высокой эффективности ее функционирования.

Все задачи теории массового обслуживания носят оптимизационный характер и в конечном итоге направлены на определение такого варианта работы системы, при котором будет обеспечен минимум суммарных затратот простоев каналов обслуживания, потерь времени и ресурсов на обслуживания и пр.

Каждая СМО включает некоторое число обслуживающих устройств – каналов (приборов, линий) обслуживания. На вход СМО поступает один или несколько потоков запросов (заявок, требований, клиентов), требующих однотипного обслуживания.

Основные элементы СМО:

1) входящий поток требований;
2) очередь;
3) каналы обслуживания;
4) выходящий поток обслуженных требований.

Заявка на обслуживание – это кто-либо или что-либо, что необходимо обслуживать. В системе GPSS заявки носят название транзактов.

Каналы обслуживания – это операции обслуживания, выполняемые кем-либо или чем-либо.

Например, в качестве «заявок» в коммерческой деятельности выступают товары, посетители, тара, деньги, документы и др. Роль «каналов обслуживания» выполняют продавцы, администраторы, повара, официанты, торговое оборудование, банкоматы и др.

«Заявки» в силу массовости поступления на обслуживание образуют потоки, которые до выполнения операций обслуживания называют входящими, а после возможного ожидания начала обслуживания (простой в очереди) образуют поток обслуживания в каналах, а затем формируют выходящий поток заявок.

Поток событий – это последовательность появления событий, следующих одно за другим в случайные моменты времени. *Интенсивность потока событий* –это число событий в единицу времени.

Поток событий называется *стационарным*, если его интенсивность – постоянная величина. Поток событий называется *потоком без последствия*, если количество событий за произвольно взятые непересекающиеся промежутки времени взаимно независимы. Поток событий называется *ординарным*, если события происходят по одному.

Особое место в теории массового обслуживания занимает так называемый простейший или пуассоновский поток заявок. Такое положение объясняется тем, что существует теорема теории вероятностей, согласно которой сумма большого числа независимых событий (потоков) с произвольными законами распределения длительностей интервалов между событиями приближается к простейшему.

Простейшим потоком называется поток, обладающий тремя свойствами:

– ординарностью,
– стационарностью
– отсутствием последействия.

Эти свойства позволяют утверждать, что функция распределения длины промежутка между двумя последовательными наступлениями событий потока равна:

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t},$$

т. е. длины интервалов между очередными событиям потока имеют экспоненциальное распределение, а вероятность наступления ровно k событий на интервале времени t равна

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t},$$

где λ – некоторое положительное число, которое носит название параметра потока.

Легко подсчитать, что для простейшего потока среднее число событий, наступающих за время t, равно

$$\sum_{k=1}^{\infty} kP_k(t) = e^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{\infty} k\frac{(\lambda t)^k}{k!} = e^{-\lambda t} \lambda t \sum_{k=1}^{\infty} k\frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} = e^{-\lambda t} \lambda t e^{\lambda t} = \lambda t.$$

Математическое ожидание числа событий, наступающих в единицу времени, называется интенсивностью потока. Из последнего соотношения видно, что для простейшего потока интенсивность совпадает с параметром потока. Очевидно также, что средняя длительность интервала времени между очередными событиями простейшего потока равна 1/λ.

В силу этого основной характеристикой потока заявокна обслуживания в теории массового обслуживания является *интенсивность потока заявок* (λ), которая рассчитывается как среднее числозаявок в единицу времени.

Выбор законов Fi, определяющих длительности интервалов времени между очередными событиями потока, т. е. собственно определяющие поток событий, в общем случае является достаточно сложной задачей. Необходимо учитывать особенности той реальной или проектируемой системы, для моделирования которой создается система массового обслуживания. Но в некоторых случаях это можно сделать просто.

Задача 1.1. Результаты наблюдения за потоком покупателей в секции универмага и проведение регистрации количества покупателей в течение каждого часа работы представлены в таблице 1.1. Определите интенсивность потока покупателей за час работы магазина.

Таблица 1.1 – Регистрация потока покупателей

Дни / **Часы**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	1	2	4	5	2	8	3	9	8
2	2	4	8	8	8	10	4	5	3
3	3	8	12	5	10	12	8	3	1
4	5	11	10	9	14	14	7	2	4
5	8	5	9	11	6	6	11	4	6
6	7	9	7	12	7	7	13	14	8
7	11	12	5	14	8	9	14	11	3
8	5	14	10	9	7	10	9	12	2
9	9	5	11	1	6	11	8	10	1

Решение. Для того чтобы определить интенсивность потока покупателей, необходимо найти среднее арифметическое из представленного табличного массива. Простейшим вариантом данного действия будет отыскание частного от деления суммы всех значений, представленных в таблице, на произведение количества столбцов и строк.

1. Находим сумму элементов по каждому столбцу:

1	2	4	5	2	8	3	9	8
2	4	8	8	8	10	4	5	3
3	8	12	5	10	12	8	3	1
5	11	10	9	14	14	7	2	4
8	5	9	11	6	6	11	4	6
7	9	7	12	7	7	13	14	8
11	12	5	14	8	9	14	11	3
5	14	10	9	7	10	9	12	2
9	5	11	1	6	11	8	10	1
51	**70**	**76**	**74**	**68**	**87**	**77**	**70**	**36**

2. Находим общую сумму:

51 + 70 + 76 + 74 + 68 + 87 + 77 + 70 + 36 = 609.

3. Находим частное от деления суммы всех значений, представленных в таблице, на произведение количества столбцов и строк:

609 / (9 * 9) = 7,5.

Ответ: 7,5.

Задача 1.2. Результаты наблюдения за потоком покупателей в секции универмага в течение 10 дней работы и проведения регистрации количества покупателей в течение каждого часа работы представлены в таблице 1.2. Определить интенсивность входящего потока покупателей за час работы магазина и, используя критерий Пирсона ($\chi 2$) с уровнем значимости α=0,05, обосновать предположение, что поток описывается пуассоновским законом распределения.

Таблица 1.2 – Результаты наблюдений за покупателями

дни/часы	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	4	2	3	4	3	5	2
2	3	2	3	2	7	2	3	3
3	1	3	4	3	4	6	4	2
4	4	4	4	5	9	3	4	4
5	2	1	3	7	3	6	2	3
6	3	2	3	4	5	5	3	2
7	4	3	4	3	8	3	4	3
8	1	2	2	4	3	4	2	4
9	3	4	6	3	4	2	4	2
10	2	2	3	5	6	4	2	5

Решение. Сгруппируем данные по числу покупателей k_i, посетивших магазин в течение часа (f_i – эмпирические частоты, f_i^T – теоретические частоты). Теоретические частоты ищем по формуле:

$$f_i^T = N \cdot \frac{\lambda^{k_i}}{k_i!} e^{-\lambda},$$
$$N = \sum_{i=1}^{9} f_i = 80,$$
$$\lambda = \frac{\sum_{i=1}^{9} f_i * k_i}{\sum_{i=1}^{9} f_i} = \frac{279}{80} = 3{,}49 \frac{\text{покупателя}}{\text{час}},$$
$$f_1^T = 80 * \frac{3{,}49^1}{1!} e^{-3{,}49} = 8{,}53,\ f_2^T = 80 * \frac{3{,}49^2}{2!} e^{-3{,}49} = 14{,}9\ldots$$

Запишем данные в виде таблицы:

k_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
f_i	3	19	23	21	6	4	2	1	1
f_i^T	8,53	14,9	17,3	15,1	10,5	6,11	3,05	1,33	0,51

Вычисляем наблюдаемое значение Пирсона (χ2наблюд):

$$\chi^2_{\text{наблюд}} = \sum_{i=1}^{9} \frac{(f_i - f_i^T)}{f_i^T} = 12{,}51.$$

Для заданного уровня значимости α=0,05 и числу степеней свободы ν=n-2=7, (где n – число групп в ряду) по таблице значений критических точек χ^2-распределения (см. приложение) находим $\chi^2_{\text{критич}}(0{,}05;\ 7)=14{,}1$.

Ответ: $\chi^2_{\text{наблюд}}<\chi^2_{\text{критич}}$, т.к. 12,51<14,1, следовательно, гипотеза подтверждается, входящий поток покупателей описывается пуассоновским законом распределения с λ=3,49.

Выходной поток заявок связан с потоком обслуживания в канале, где длительность обслуживания $\boldsymbol{t_{\text{обсл}}}$ является тоже случайной величиной и подчиняется во многих случаях показательному закону распределения:

$$f\,(t_{\text{обсл}}) = \mu * e^{-\mu t},$$

где μ – интенсивность потока обслуживания, т. е. среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени. Данная интенсивность находится по формуле:

$$\mu = \frac{1}{t_{\text{обсл}}}, \qquad (1.1)$$

где $t_{\text{обсл}}$ – среднее время обслуживания заявок.

Задача 1.3. Результаты наблюдения за работой консультантов в коммерческом банке по времени обслуживания клиентов представлены в таблице 1.3. Определите среднее время обслуживания и интенсивность обслуживания клиентов в банке.

Таблица 1.3 – Регистрация потока покупателей

Номер интервала	Интервал времени обслуживания,мин	Частота (f)
1	0 – 5	12
2	5 – 10	15
3	10 – 15	20
4	15 – 20	14
5	20 – 25	4
6	25 – 30	2

Решение. Для определения интенсивности обслуживания необходимо найти среднее время обслуживания клиентов в банке, а затем найденное значение подставить в формулу вычисления μ. При определении среднего времени обслуживания необходимо выполнить следующую последовательность действий:

1. Находим середину каждого из представленных в табл. 1.3 интервалов:

Номер интервала	Интервал времени обслуживания,мин	Середина интервала
1	0 – 5	2,5
2	5 – 10	7,5
3	10 – 15	12,5
4	15 – 20	17,5
5	20 – 25	22,5
6	25 – 30	27,5

2. Находим сумму произведения середины интервала на частоту:

$$(2{,}5 * 12) + (7{,}5 * 15) + (12{,}5 * 20) + (17{,}5 * 14) + (22{,}5 * 4) + (27{,}5 * 2) = 782{,}5.$$

3. Находим частное от деления суммы произведения середины интервалов на частоту на сумму частоты:

$$782{,}5 / (12 + 15 + 20 + 14 + 4 + 2) = 11{,}68.$$

Таким образом, среднее время обслуживания $t_{обсл}$ = 11,68 мин. Далее полученное значение подставим в формулу (1.1) и найдем интенсивность обслуживания: μ =0,086. Переведём полученное значение в часы, получим: 0,086*60 = 5,16 клиентов в час.

Примечание. В теории массового обслуживания обычно полученные значения не округляют, т. к. считается, что найденная величина характеризует не физическую величину объекта обслуживания (покупателя, клиента и т. д.), а обслуженную величину его покупки, запроса. Например, если расчетное значение интенсивности обслуживания покупателей в зоне кассового узла крупного магазина самообслуживания получилось 2,5 покупателя в минуту,это значит, что за минуту кассир успел пробить все покупки из корзины двух покупателей и половину покупок из корзины третьего покупателя. Таким образом, округление как в одну, так и в другую сторону для характеристики работы системы обслуживания будет некорректным, а использование полученных округленных значений в последующих расчетах может исказить полученные результаты эффективности работы всей системы обслуживания.

Другой важнейшей характеристикой систем массового обслуживания, объединяющей показатели μ и λ, является *интенсивность нагрузки системы (ρ)*, которая показывает степень согласования входного и выходного потоков заявок, определяет устойчивость системы массового обслуживания и находится по следующей формуле:

$$\rho = \lambda / \mu. \qquad (1.2)$$

Существующие варианты заявок, особенности их обслуживания и образования очередей, количество и организация каналов обслуживания послужили причиной появления большого разнообразия систем массового обслуживания, которые классифицируют по ряду признаков.

Кроме понятия простейшего потока заявок часто приходится пользоваться понятиями потоков других типов.

Поток событий называется *потоком Пальма*, когда в этом потоке промежутки времени между последовательными событиями являются независимыми, одинаково распределенными случайными, но в отличие от простейшего потока не обязательно распределенными по показательному закону. Потоки Пальма часто получаются в виде выходных потоков систем массового обслуживания. Если на какую-либо систему поступает какой-то поток заявок, то он этой системой разделяется на два: поток обслуженных и поток не обслуженных заявок.

Основой в теории выходных потоков является *теорема Пальма*:

Пусть на систему массового обслуживания поступает поток заявок типа Пальма, причем заявка, заставшая все каналы занятыми, получает отказ в обслуживании (не обслуживается), если при этом время обслуживания имеет показательный закон распределения, то поток не обслуженных заявок является также потоком Пальма.

Важным частным случаем потока Пальма является ***поток Эрланга***. Этот поток получается прореживанием простейшего потока. Такое прореживание производится путем отбора по определенному правилу событий из простейшего потока. Например, условившись учитывать только каждое второе событие из образующих простейший поток, мы получаем поток Эрланга второго порядка, если брать только каждое 3-е событие, то образуется поток Эрланга третьего порядка и т. д.

Задача 1.4. На рабочем месте консультанта коммерческого банка установлен телефон. Звонки справочного характера следуют в среднем через 5 мин. Какова вероятность того, что за полчаса будет 3 звонка? Определите, какой поток образуют звонки.

Решение. Определим среднее число событий за заданный промежуток времени (по условию задачи – это полчаса, т. е. 30 мин), также в условии сказано, что звонки следуют каждые 5 мин, следовательно, за полчаса будет 6 звонков (30 / 5). Теперь подставим значение в формулу Пуассона:

$$P = \frac{6^3}{3!}\mathrm{e}^{-6} = 0{,}1 \approx 10\%$$

Как следует из расчета, вероятность того, что за полчаса будет только 3 звонка, очень мала и составляет 10%. Звонящие в коммерческийбанк действуют независимо друг от друга, следовательно, поток звонков –простейший без последствия.

В условиях этой же задачи при определении вероятности того, что за полчаса будет хотя бы один звонок, расчет будет следующим:

$$P = 1 - e^{-\lambda} = 1 - e^{-6} = 0{,}998 \approx 99{,}8\%.$$

То есть в этом случае мы бы сказали, что практически со стопроцентной вероятностью звонок будет.

1.3. Классификация систем массового обслуживания

Существует большое количество различных моделей систем массового обслуживания и методов их классификации. В теории массового обслуживания принята комбинативная структура классификации всех имеющихся систем обслуживания. Таким образом, главное понятие (системы массового обслуживания) разделено на пять равно существенных оснований, которые представляют собой классификационные признаки систем. Такими признаками являются: количество каналов обслуживания, расположение каналов, возможность образования очереди, дисциплина очереди и объем заявок, обращающихся в системе.

Прежде всего, СМО разделяются на *марковские* и *немарковские,* что связано с классификацией процессов, которые описывают функционирование системы. Эти два класса систем массового обслуживания аналогичны, соответственно, линейным и нелинейным системам, динамика которых описывается линейными и нелинейными дифференциальными уравнениями. Естественно, не существует общих аналитических методов исследования нелинейных СМО. Поддаются аналитическому исследованию только частные случаи нелинейных систем массового обслуживания, которые выделяются в отдельные классы полумарковских, линейчатых и других СМО.

По своей структуре СМО делят на *одноканальные* и *многоканальные, однофазные* и *многофазные*. В многоканальных системах обслуживание заявок происходит параллельно в нескольких приборах, а многофазные системы предполагают последовательное обслуживание каждой заявки несколькими приборами. Естественно, существуют и смешанные системы, в которых сочетаются различные варианты и параллельного, и последовательного обслуживания.

В зависимости от того, все ли поступающие в систему заявки принимаются на обслуживание, СМО подразделяют на *системы без потерь,* в которых обслуживаются все поступающие в систему заявки, и *системы с потерями*, в которых при определенных условиях заявки не принимаются на обслуживание, т. е. «теряются».

СМО называются *замкнутыми*, если обслуженные в системе заявки снова и снова возвращаются на обслуживание в этой системе. В *разомкнутых* системах заявки после обслуживания покидают систему.

Системы массового обслуживания, состоящие из большого количества взаимосвязанных обслуживающих приборов, часто называют *сетями СМО*, в отличие от одиночных СМО с простой структурой.

На рисунке 1.2 представлена классификация систем массового обслуживания.

Рисунок 1.2 – Классификация систем массового обслуживания

1.4. Контрольные вопросы и задания к разделу 1

Задача 1.4.1

Результаты регистрации входного потока посетителей магазина в течение дня и значения его характеристик представлены в таблице 1.4. Дайте подробную характеристику представленного в таблице потока. Рассчитайте итоговые значения λ max и λ min. Найдите среднее значение интенсивности потока посетителей в течение дня. Можно ли вычислить интенсивность потока посетителей для каждого часа работы магазина? Ответ на вопрос обоснуйте.

Таблица 1.4 – Интенсивности потока покупателей

Интервал времени, ч	max кол-во покупателей, чел.	max интенсивность потока λ max, мин	min кол-во покупателей, чел.	min интенсивность потока λ min, мин	Среднее кол-во покупателей, чел.
8 – 9	300	5	200	3,3	250
9 – 10	500	8,3	400	6,6	450
10 – 11	800	13,3	500	8,3	650
11 – 12	1000	16,6	300	5	650
12 – 13	700	11,6	300	5	500
13 – 14	0	0	0	0	0
14 – 15	900	15	200	3,3	550
15 – 16	800	13,3	300	5	550
16 – 17	700	11,6	100	1,6	400
17 – 18	800	13,3	300	5	550
18 – 19	500	8,3	100	1,6	300
19 – 20	400	6,6	300	5	350
Итого:	7400	λ max=	3000	λ min =	5200

Задача 1.4.2

Результаты наблюдения за работой консультантов специализированного магазина аудио- и видеотехники по времени обслуживания покупателей приведены в табл. 1.5. Определите среднее время и интенсивность обслуживания покупателей.

Таблица 1.5 – Интервалы и частота обслуживания покупателей

Номер интервала	Интервал обслуживания, мин	Частота
1	0 – 5	27
2	5 – 10	23
3	10 – 15	18
4	15 – 20	11
5	20 – 25	8
6	25 – 30	3

Задача 1.4.3

Результаты наблюдения за потоком клиентов в коммерческом банке и проведение регистрации их количества представлены в таблице 1.6. Определите интенсивность потока клиентов за час работы банка, а также среднее время обслуживания и интенсивность обслуживания клиентов в банке при заданном распределении времени обслуживания (табл. 1.7).

Таблица 1.6 – Интенсивности потока клиентов коммерческого банка

Дни / Часы	Пн.	Вт.	Ср.	Чт.	Пт.	Сб.
9 – 10	13	18	15	19	13	29
10 – 11	13	18	15	19	13	29
11 – 12	19	32	23	21	26	58
12 – 13	31	38	38	24	48	69
13 – 14	39	44	46	32	53	102
14 – 15	47	57	59	39	71	117
15 – 16	51	58	63	40	89	128
16 – 17	76	69	71	49	97	97
17 – 18	89	83	86	67	103	84
18 – 19	96	97	98	71	128	76

Таблица 1.7 – Интервалы и частота обслуживания покупателей

Номер интервала	Интервал времени обслуживания, мин	Частота
1	0 – 5	29
2	5 – 10	48
3	10 – 15	26
4	15 – 20	9
5	20 – 25	5
6	25 – 30	3
7	30 – 35	2
8	35 – 40	1

Вопросы

1. Охарактеризуйте основные этапы становления и развития теории систем массового обслуживания.
2. Кого считают родоначальником теории систем массового обслуживания?
3. Перечислите русских ученых, которые внесли значительный вкладв развитие теории массового обслуживания.
4. Перечислите классифицирующие признаки систем массового обслуживания и охарактеризуйте их. Каким образом строятся классификации?

2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

2.1. Граф состояний

При анализе случайных процессов удобно пользоваться вариантом схематического изображения возможных состояний систем массового обслуживания на рисунке 2.1 в виде графа с разметкой его возможных состояний. При построении размеченного графа состояния система обычно изображается либо прямоугольниками, либо кружками, а возможные направления переходов из одного состояния в другое ориентированы стрелками, соединяющими эти состояния [3].

Например, размеченный граф состояний одноканальной системы случайного процесса обслуживания в газетном киоске будет следующим:

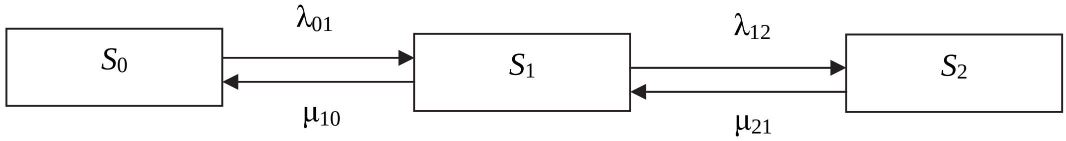


Рисунок 2.1 – Граф состояний системы массового обслуживания

Система может находиться в одном из трех состояний:

- S_0 – канал свободен (простаивает);
- S_1 – канал занят обслуживанием;
- S_2 – канал занят обслуживанием, одна заявка в очереди.

Переход системы из состояния S_0 в состояние S_1 происходит под воздействием простейшего потока с интенсивностью λ_{01}, а из состояния S_1 в S_0 систему переводит поток обслуживания с интенсивностью μ_{10}.

Граф состояний системы обслуживания с проставленными интенсивностями потоков у стрелок называется размеченным. Переход по стрелке, ведущей из состояния в то же самое состояние, означает задержку системы в данном состоянии.

Поскольку пребывание системы в том или ином состоянии носит вероятностный характер, то вероятность $p_i(t)$ того, что система будет находиться в состоянии S_i в момент времени t, называется вероятностью I-го состояния системы массового обслуживания и определяется числом по ступающих заявок на обслуживание (k).

Случайный процесс, происходящий в системе, заключается в том,что в случайные моменты времени t_0, t_1, $t_{2,\,\dots}t_n$ система оказывается в том или ином заранее известном состоянии последовательно. Такая случайная последовательность событий носит название ***Марковской цепи*** [17].

2.2. Марковские случайные процессы и цепи Маркова

Случайной функцией называется функция, которая в результате опыта может принять тот или иной вид, заранее неизвестно, какой именно. Конкретный вид, принимаемый случайной функцией в результате опыта, называется ее реализацией. На рисунке 2.2 показаны 3 реализации случайной функции.

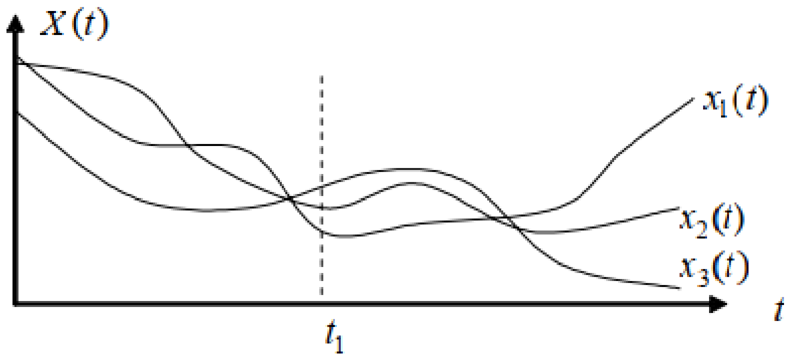


Рисунок 2.2 – Реализации случайных функций

Другими словами, функция $X(t)$ называется *случайной*, если ее значение при любом аргументе t является случайной величиной.

Случайная функция $X(t)$, аргументом которой является время, называется *случайным процессом.*

Пусть *X(t)* – случайный процесс с непрерывным *t* *(t≥0)* и дискретным множеством состояний

$S = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$ – конечное множество,

$S = \{S_1, S_2, \dots\}$ – счетное множество. (S тоже непрерывно в общем случае.)

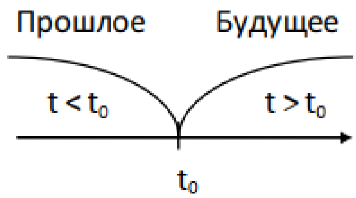


Рисунок 2.3 – Марковский процесс

Случайный процесс называется марковским (рис. 2.3), если для любого момента времени вероятностные характеристики процесса в будущем зависят только от его состояния в данный момент времени и не зависят от того, когда и как система пришла в это состояние. («Будущее зависит от прошлого только через настоящее»). Употребляется также выражение «цепь Маркова»

Определение. Процесс *X(t)* называется марковским, если для любых наборов моментов времени $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_{n+1}$ и состояний $S_1, S_2, \dots, S_{n+1} \in S$ выполняется равенство:

$$P_{ij}^{n+1} = P(S(t_{n+1}) = S_j | S(t_n) = S_i).$$

Процесс будет марковским, если эта вероятность на каждом шаге зависит только от состояния, в которое система попала на предыдущем шаге, и не зависит от предыдущих шагов. Иначе говоря, *для «марковости» процесса* *записанная условная вероятность не должна зависеть от* n.

Классификация Марковских случайных процессов производится в зависимости от непрерывности или дискретности множества значений функции $X(t)$ и параметра t. Различают следующие основные виды Марковских случайных процессов:

1. С дискретными состояниями и дискретным временем (*цепь Маркова);*
2. С непрерывными состояниями и дискретным временем *(Марковские последовательности);*
3. С дискретными состояниями и непрерывным временем (*непрерывная цепь Маркова);*
4. С непрерывным состоянием и непрерывным временем.

Марковская цепь представляет собой разновидность Марковского процесса, в котором будущее зависит от прошлого только через настоящее. Основной задачей исследования Марковской цепи является вычисление безусловных вероятностей нахождения системы S на любом k-м шаге в состоянии S_i .

Если условная вероятность не зависит от n (от момента времени t_n), то цепь называется *однородной*. В этом случае используют матрицу переходных вероятностей (*матрицу перехода*). Переходные вероятности $p_{ij}(k)$ можно записать в виде матрицы.

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mn} \end{pmatrix}.$$

По главной диагонали матрицы стоят вероятности задержки в данном состоянии: p_{11}; p_{22}; ….. $p_{mn}(k)$. Так как на каждом шаге система S может находиться только в одном из взаимоисключающих состояний, то для любой i-й строки матрицы сумма всех стоящих в ней вероятностей $p_{ij}(k) = 1$.Матрица, обладающая таким свойством, называется стохастической. Все элементы стохастической матрицы отвечают условию $0 \leq p_{ij} \leq 1$.

Вероятность задержки в такой матрице можно получить как дополнение до единицы всех остальных членов строки/

$$p_{ii}(k) = 1 - \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(k).$$

При нахождении вероятностей состояний Марковской цепи на k-м шаге $p_i(k)$ удобно пользоваться размеченным графом состояний, где возле каждой стрелки, ведущей из состояния S_i в состояние S_j, проставлена переходная вероятность p_{ij}. Вероятности задержки на размеченном графе не проставляются, а просто получаются дополнением до единицы суммы вероятностей, стоящих у всех стрелок, ведущих из состояния S_i.

Если состояние S_i является поглощающим, то вероятность задержки в этом состоянии равняется 1. Имея матрицу переходных вероятностей, можно по ней построить размеченный граф системы и наоборот. Пример построения графа по матрице показан на рис. 2.4.

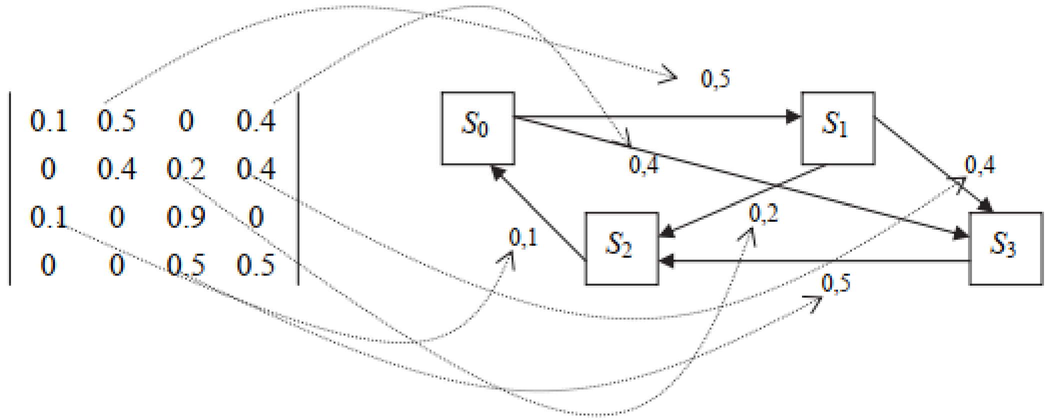


Рисунок 2.4 – Пример составления размеченного графа

Очевидно, что вероятности задержки для такого графа будут следующие:

$p_{11} = 1 - (p_{12} + p_{13} + p_{14}) = 1 - (0,5 + 0 + 0,4) = 0,1;$
$p_{22} = 1 - (p_{21} + p_{23} + p_{24}) = 1 - (0 + 0,2 + 0,4) = 0,4;$
$p_{33} = 1 - (p_{31} + p_{32} + p_{34}) = 1 - (0,1 + 0 + 0) = 0,9;$
$p_{44} = 1 - (p_{41} + p_{42} + p_{43}) = 1 - (0 + 0 + 0,5) = 0,5.$

Задача 2.1. На основе размеченного графа (рис. 2.5) постройте матрицу переходных вероятностей. Определите вероятности задержки в каждом состоянии.

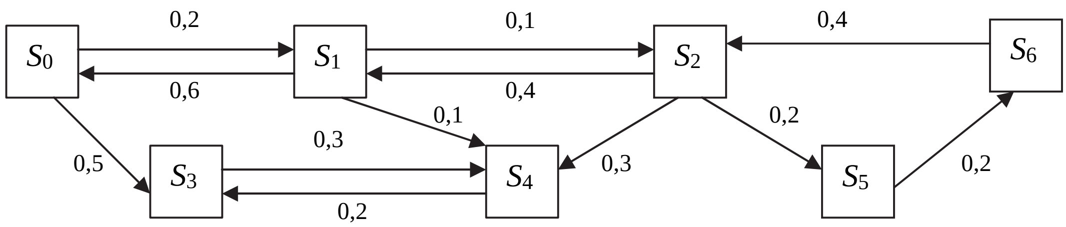


Рисунок 2.5 – Размеченный граф системы

Решение. Представленный на рисунке граф имеет семь состояний, следовательно, матрица будет иметь размерность 7 × 7.

Вероятности задержки в каждом состоянии:

- для S_0 = 1 - (0,2 + 0 + 0,5 + 0 + 0 + 0) = 0,3;
- для S_1 = 1 - (0,6 + 0,1 + 0 + 0,1 + 0 + 0) = 0,2;
- для S_2 = 1 - (0 + 0,4 + 0 + 0,3 + 0,2 + 0) = 0,1;
- для S_3 = 1 - (0 + 0 + 0 + 0,3 + 0 + 0) = 0,7;

- для S_4 = 1 - (0 + 0 + 0 + 0,2 + 0 + 0) = 0,8;
- для S_5 = 1 - (0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0,2) = 0,8;
- для S_6 = 1 - (0 + 0 + 0,4 + 0 + 0 + 0) = 0,6.

Теперь известны все значения для матрицы. Если переход из одного состояния в другое отсутствует, в матрице переходной вероятности ставится ноль.

Ответ:

$$\begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0,6 & 0,2 & 0,1 & 0 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0,1 & 0 & 0,3 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,7 & 0,3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,2 & 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,8 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0,4 & 0 & 0 & 0 & 0,6 \end{pmatrix}.$$

Задача 2.2. Рассмотрим цепь Маркова, обладающую тремя состояниями и предназначенную для моделирования погоды. Предполагается, что раз в день (например, в полдень) состояние погоды описывается одной и только одной из следующих характеристик: S_1 – осадки, S_2 - облачно, S_3 – ясно. Матрица переходных вероятностей имеет вид:

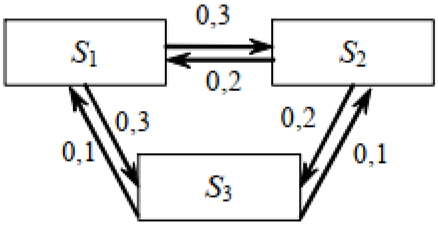
$$\widetilde{P} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 & 0,3 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

(Например, вероятность того, что после облачного дня снова будет облачно, равна 0,6; вероятность того, что после ясного дня будет дождь, равна 0,1 и т.д.).

Составить размеченный граф состояний.

Пусть известно, что сегодня – ясный день. Какова вероятность того, что завтра будет облачно, а послезавтра пойдет дождь?

Решение. При составлении графа состояний указываем только переходы в *иные* состояния (вероятности этих переходов являются недиагональными элементами матрицы перехода).



Вероятность того, что завтра будет облачно, а послезавтра пойдет дождь, находим по закону умножения вероятностей зависимых событий:

$$p = P(S(t_2) = S_2|S(t_1) = S_3) \cdot P(S(t_3) = S_1|S(t_2) = S_2) = P_{32} \cdot P_{21} == 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}02.$$

Поставим другой вопрос: какова вероятность того, что погода останется в некотором известном состоянии S_i ровно x дней? Нетрудно понять, что речь идет о геометрическом распределении случайной величины:

$$p_i(X = x) = (P_{ii})^{x-1}(1 - P_{ii}), \quad i = 1{,}2{,}3.$$

Например, если известно, что сегодня дождь, то вероятность того, что он будет идти ровно 3 дня (включая сегодняшний), равна:

$$p_1(X = 3) = (P_{11})^{3-1}(1 - P_{11}) = 0{,}4^2 \cdot 0{,}6 = 0{,}096.$$

Математическое ожидание случайной величины X можно рассматривать как характеристику длительности данного состояния S_i в цепи Маркова. Для геометрического распределения можно получить:

$$M_i(X) = \sum_{x=1}^{\infty} x p_i(X = x) = \sum_{x=1}^{\infty} x\,(P_{ii})^{x-1}(1 - P_{ii}) = \frac{1}{1-P_{ii}}.$$

Так среднее число дождливых дней подряд оказывается равным $\frac{1}{1-0{,}4} = 1{,}67$, облачных $- 2{,}5$, ясных $- 5$.

2.3. Система уравнений Колмогорова

Система уравнений Колмогорова — это система дифференциальных уравнений, описывающих динамику распределения вероятностей состояний для марковского процесса с непрерывным временем. Пусть $P_1(t)$, $P_2(t), P_3(t)$ – вероятности того, что система в момент времени t находится в состояниях S_1, S_2, S_3. Тогда вероятность того, что в момент времени $t + \Delta t$ система будет в состоянии S_1 следует определять по формуле полной вероятности с учетом того, что это может произойти либо в результате перехода их других состояний, либо что система, находясь в состоянии S_1, в этом состоянии и осталась.

Представим работу простейшей системы массового обслуживания в виде размеченного графа. Для этого проанализируем процессы обслуживания небольшого киоска. Работа киоска в течение рабочего дня может быть описана с использованием трех состояний:

S_0 – система свободна, простаивает (т. е. покупателей нет, продавец не занят обслуживанием);

S_1 – система занята обслуживанием (подошел один покупатель, продавец приступил к его обслуживанию);

S_2 – система занята обслуживанием, образуется очередь (во время обслуживания первого покупателя подошли еще один, два и более человек,которые встали в очередь).

Размеченный граф такой системы представлен на рисунке 2.6:

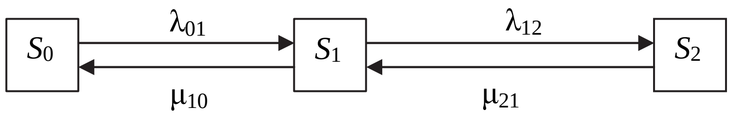


Рисунок 2.6 – Граф, описывающий работу простейшей системы

Будем полагать, что все переходы системы из состояния S_i в S_j происходят под воздействием простейших потоков событий с интенсивностями λ_{ij} (i, j = 0, 1, 2). Так, переход системы из состояния S_0 в S_1 будет происходить под воздействием потока покупателей (к киоску подошел один человек), а обратный переход из состояния S_1 в S_0 – под воздействием потока «интенсивности обслуживания» – продавец обслужил первого покупателя и т. д.

Вероятностью i-го состояния называется вероятность $p_i(t)$ того, что в момент t система будет находиться в состоянии S_i. Очевидно, что для любого момента t сумма вероятностей всех состояний равна единице $\sum p_i(t) = 1$.

Рассмотрим систему в момент t и, задав малый промежуток Δt, найдем вероятность $p_0(t + \Delta t)$ того, что система в момент $t + \Delta t$ будет находиться в состоянии S_0. Это достигается разными способами.

1. Система в момент t с вероятностью $p_0(t)$ находилась в состоянии S_0, а за время Δt не вышла из него.

Вывести систему из этого состояния можно суммарным простейшим потоком с интенсивностью $(\lambda_{01} + \lambda_{12})$, т. е. с вероятностью, приближенно равной $(\lambda_{01} + \lambda_{12})\,\Delta t$. А вероятность того, что система не выйдет из состояния S_0, равна $[1 - (\lambda_{01} + \lambda_{12})\Delta t]$. Вероятность того, что система будет находиться в состоянии S_0, по первому способу (т. е. того, что находилась в состоянии S_0 и не выйдет из него за время Δt), равна по теореме умножения вероятностей

$$p_0(t)\,[1 - (\lambda_{01} + \lambda_{12})\,\Delta t].$$

2. Система в момент t с вероятностями $p_1(t)$ (или $p_2(t)$) находилась в состоянии S_1 или S_2 и за время Δt перешла в состояние S_0. Потоком интенсивностью μ_{10} (или μ_{21} – см. рис. 2.6) система перейдет в состояние S_0 с вероятностью, приближенно равной $\mu_{10}\Delta t$ (или $\mu_{21}\Delta t$). Вероятность того, что система будет находиться в состоянии S_0 по этому способу, равна

$$p_1(t)\,\mu_{10}\Delta t \text{ (или } p_2(t)\,\mu_{21}\Delta t).$$

Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$ (приближенные равенства, перейдут в точные), получим в левой части уравнения производную $p_0'(t)$ (обозначим ее для простоты p_0')

$$p_0' = p_1 \cdot \mu_{10} + p_2 \cdot \mu_{21} - (\lambda_{01} + \lambda_{12}) \cdot p_0.$$

Получили дифференциальное уравнение первого порядка, т. е. уравнение, содержащее как саму неизвестную функцию, так и ее производную первого порядка.

Рассуждая аналогично для других состояний системы S, можно получить систему дифференциальных уравнений Колмогорова.

Сформулируем правило составления уравнений Колмогорова:

В левой части каждого из них стоит производная вероятности i-го состояния. В правой части – сумма произведений вероятностей всех состояний (из которых идут стрелки в данное состояние) на интенсивности соответствующих потоков событий, минус суммарная интенсивность всех потоков, выводящих систему из данного состояния, умноженная на вероятность данного (i-го состояния).

В теории случайных процессов доказывается, что *если число состояний системы конечно, и из каждого из них можно (за конечное число шагов) перейти в любое другое состояние, то предельные вероятности существуют.*

Предельная вероятность состояния S_i имеет четкий смысл: она показывает *среднее относительное время пребывания системы в этом состоянии*. Например, если предельная вероятность состояния S_0, $p_0 = 0{,}5$, то это означает, что в среднем половину времени система находится в состоянии S_0.

Систему уравнений Колмогорова можно составить непосредственно по размеченному графу состояний, если руководствоваться следующимправилом:

1. Слева от знака равенства в уравнении стоит предельная вероятность рассматриваемого состояния, умноженная на суммарную интенсивность всех потоков, выходящих из данного состояния.
2. Справа от знака равенства ставится сумма произведений интенсивности всех потоков, входящих в данное состояние, на вероятность тех состояний, из которых эти потоки выходят.
3. Для решения подобной системы добавляют нормировочное условие (сумма вероятностей всех состояний системы массового обслуживания равна 1).

Применяя правила составления уравнения Колмогорова, получим следующую систему уравнений для простейшей системы массового обслуживания, рассмотренной на рис. 2.6:

$$\begin{cases} p_0\lambda_{01} = p_1\mu_{10} \\ p_1(\lambda_{12} + \mu_{10}) = p_0\lambda_{01} + p_2\mu_{21} \\ p_2\mu_{21} = p_1\lambda_{12} \\ p_0 + p_1 + p_2 = 1 \end{cases}.$$

Решить систему уравнений Колмогорова можно с использованием процессов «гибели и размножения».

2.4. Процессы «гибели и размножения»

Среди однородных марковских процессов существует класс случайных процессов, имеющих широкое применение при построении математических моделей в областях демографии, биологии, экономики и т. д. Это процессы «гибели и размножения». Для марковских процессов «гибели и размножения» также находятся финальные вероятности, пользуясь правиламисоставления уравнения для конечного числа предельных вероятностей состояния системы (например, пользуясь правилами составления уравнения Колмогорова). Решая подобные системы уравнений, можно получить выражения, определяющие финальные состояния.

Процессом гибели и размножения называется процесс со следующим графом состояний (рис.2.7):

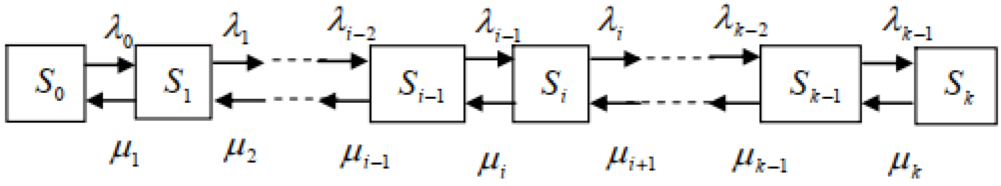


Рисунок 2.7 – Размеченный граф процесса «рождения-гибели»

Здесь через λ и μ обозначены интенсивности переходов (для процесса с дискретным временем вместо интенсивностей ставятся вероятности переходов). Поскольку все состояния сообщающиеся, будет существовать предельное стационарное распределение вероятностей состояний. Матрица интенсивностей для процесса гибели и размножения:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \mu_1 & -(\mu_1+\lambda_1) & \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \mu_{k-1} & -(\mu_{k-1}+\lambda_{k-1}) & \lambda_{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \mu_k & -\mu_k \end{pmatrix}.$$

Пользуясь правилом составления уравнения Колмогорова, запишем систему уравнений для данного графа:

$$\begin{cases} p_0\lambda_0 = p_1\mu_1 \\ p_2\mu_2 = p_1\lambda_1 \\ \dots \\ p_i\mu_i = p_{i-1}\lambda_{i-1} \\ \vdots \\ p_k\mu_k = p_{k-1}\lambda_{k-1} \\ p_0 + p_1 + \dots + p_k = 1 \end{cases}.$$

Решая данную систему уравнений, можно получить выражения, определяющие финальные состояния системы массового обслуживания:

$$\begin{cases} p_i = \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} p_{i-1}, \quad i = 1,2, \dots k \\ p_0 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0 + \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} p_0 + \dots + \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_i} p_0 + \dots + \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} p_0 = 1 \end{cases}.$$

Предельная вероятность p_i представляет собой произведение p_0 на дробь, в числителе которой стоит произведение интенсивностей на верхних стрелках, а в знаменателе – произведение интенсивностей на нижних стрелках левее i*-го* состояния. В свою очередь, сама вероятность есть величина, обратная сумме этих же дробей. Из последнего уравнения:

$$p_0 = (1 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} + \dots + \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_i} + \dots + \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k})^{-1}.$$

Задача 2.3. Узел расчета минимаркета состоит из двух кассовых аппаратов, размеченный граф состояний которого имеет следующий вид (рис. 2.8). Найдите предельные вероятности p_0, p_1, p_2 при следующих исходных данных: $\mu_0 = \mu_1 = 0{,}6$ пок./мин, $\lambda_0 = 1$ пок./мин, $\lambda_1 = 0{,}8$ пок./мин.

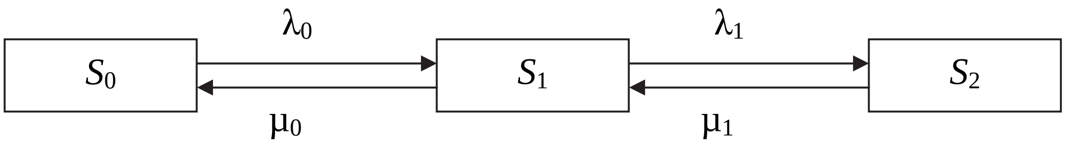


Рисунок 2.8 - Размеченный граф кассового узла мини-маркета: S_0 – обе кассы свободны (простаивают); S_1 – одна касса занята (любая из двух); S_2 – обе кассы заняты обслуживанием

Решение.

1. Найдем p_0:

$$p_0 = (1 + \frac{1}{0{,}6} + \frac{1 * 0{,}8}{0{,}6 * 0{,}6})^{-1} = 0{,}204.$$

2. Вычислим p_1 и p_2:

$$p_1 = \frac{1}{0{,}6} 0{,}204 = 0{,}341$$

$$p_2 = \frac{1 * 0{,}8}{0{,}6 * 0{,}6} 0{,}204 = 0{,}455.$$

3. Проверка: 0,204 + 0,341 + 0,455 = 1 (сумма всех вероятностей равна единице, следовательно, решение верно).
4. Интерпретация полученных значений, в соответствии с описанной выше теорией, заключается в следующем: 20 % рабочего времени обе кассы магазина простаивают (вероятность $p_0 = 0{,}204 \approx 20$ % (p_0 соответствует состоянию S_0 – т. е. кассы свободны, простаивают)), и только 46 % рабочего времени обе кассы заняты обслуживанием.

2.5. Контрольные вопросы и задания к разделу 2

Задача 2.5.1

По заданной матрице переходных вероятностей постройте размеченный граф состояний. Определите вероятность задержки системыв состоянии S_2 и S_1.

$$\begin{pmatrix} 0,3 & 0,3 & 0 & 0,4 \\ 0 & 0,3 & 0,2 & 0,5 \\ 0,1 & 0 & 0,7 & 0,2 \\ 0 & 0,1 & 0,4 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Задача 2.5.2

По заданной матрице переходных вероятностей постройте размеченный граф состояний. Определите вероятность задержки системыв состоянии S_3 и S_1.

$$\begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,2 & 0,3 \\ 0 & 0,5 & 0,1 & 0,4 \\ 0,1 & 0,5 & 0,3 & 0,1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

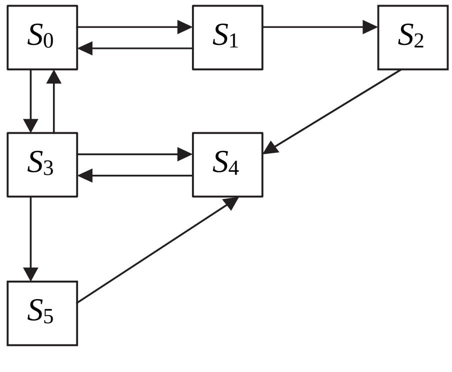
Задача 2.5.3

Работу кассового аппарата в узле расчета магазина можно описать следующими состояниями: S_0 – устройство полностью исправно, S_1 – имеются незначительные неисправности, позволяющие работать, S_2 – устройство сломано, требуется ремонт, S_3 – устройство списано, ремонту не подлежит. Переходные вероятности из одного состояния в другое следующие: P_{01} = 0,3; P_{02} = 0,2; P_{03} = 0,4; P_{10} = 0,1; P_{12} = 0,3; P_{13} = 0,2; P_{20} = 0,3; P_{23} = 0,4.

Найдите вероятности задержки в каждом состоянии, постройте размеченный граф и матрицу переходных вероятностей.

Задача 2.5.4

Имеется неразмеченный граф. Сделайте разметку на графе таким образом, чтобы вероятности задержки в каждом состоянии соответствовали следующим значениям: S_0 = 0,3; S_1 = 0,2; S_2 = 0,5; S_3 = 0,6; S_4 = 0,3;S_5 = 0,4.



Задача 2.5.5

Кредитный отдел коммерческого банка состоит из двух рабочих мест. В течение рабочего дня работа отдела может быть описана следующими состояниями:

S_0 – оба кредитных эксперта свободны;

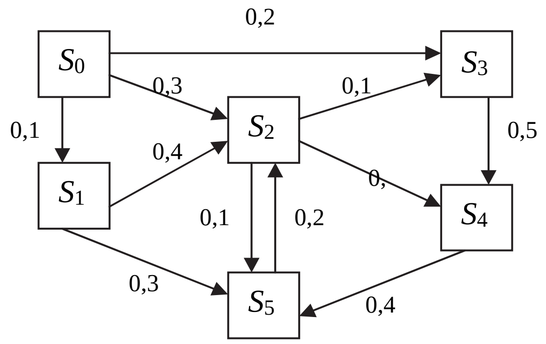
S_1 – один кредитный эксперт занят выдачей кредита (любой из двух);

S_2 – оба кредитных эксперта заняты.

Найдите предельные вероятности p_0, p_1, p_2 при следующих исходных данных: μ_0 = 0,6 кл./мин, λ_0 = 0,3 кл./мин, μ_1 = 0,5 кл./мин, λ_1 = 0,7 кл./мин. Сделайте вывод о работе кредитного отдела банка.

Задача 2.5.6

На основе размеченного графа постройте матрицу переходных вероятностей. Определите вероятности задержки в каждом состоянии.



Задача 2.5.7

В отделении коммерческого банка работает один консультант, который консультирует клиентов по всем вопросам работы отделения. В среднем на консультацию одного клиента уходит 12 мин. Клиенты к консультанту подходят независимо друг от друга в среднем через каждые 40 мин,в случае если консультант занят, они уходят. Определите долю потери клиентов.

Задача 2.5.8

В мастерской по мелкому (срочному) ремонту обуви работает один мастер. Клиенты в мастерскую приходят независимо друг от друга в среднем через каждые 35 мин. Мастер выполняет заказ одного клиента в среднем 25 мин; в случае, если мастер занят, клиенты уходят. Определите долю потери клиентов.

Задача 2.5.9

Взрослое население пос. Селижарово составляет 3897 чел. Безработный Коля решил организовать у себя в поселке сеть распространения продуктов «Гербалайф». Каждый входящий в пирамиду «Гербалайфа» вербует нового клиента в среднем за полдня. Распространение «Гербалайфа» может надоесть даже основоположнику этого бизнеса Коле. В среднем человек увлекается распространением «Гербалайфа» 2 недели, затем бросает.Однако его можно опять убедить в прибыльности этого дела. Если в поселке не останется никого, кто распространял бы «Гербалайф», то бизнес погибнет. Нарисуйте размеченный граф, описывающий изменение во времени численности населения пос. Селижарово, занимающегося распространением «Гербалайфа». Запишите систему уравнений Колмогорова.

Задача 2.5.10

В кондитерском цехе работают три мастера. Первый – пекарь – занимается исключительно приготовлением теста и выпечкой коржей для тортов. Второй – кондитер – приготовлением кремов и оформлением тортов. Третий – ученик кондитера – помогает и пекарю, и кондитеру, а также занимается упаковкой тортов и выдачей заказов. В среднем в день пекарь и кондитер выпекают и оформляют два торта. Ученик может упаковать и выдать пять тортов. Заказы на изготовления тортов поступают нерегулярно, в среднем на три торта в день, причем, если на данный день уже есть заказы, клиенты уходят в другие кондитерские. Постройте размеченный граф, описывающий работу в кондитерском цехе. Запишите систему уравнений Колмогорова и вычислите финальное распределение вероятностей.

Задача 2.5.11

Инвестиционный паевой фонд «Селена» открыл филиал в пос. Черниговка. Филиал состоит из одного управляющего и действует по принципу финансовой пирамиды. Каждый входящий в фонд может завербовать нового клиента в среднем за 1 день. Человек, вступивший в фонд и сделавший денежный вклад, может выйти из него и забрать деньги только через месяц. Взрослое население пос. Черниговка составляет 1873 чел. Если в поселке не останется никого, кто не вошел бы в фонд, бизнес погибнет. Нарисуйте размеченный граф, описывающий изменение во времени численности населения пос. Черниговка, входящего в фонд. Запишите систему уравнений Колмогорова.

Задача 2.5.12

В секции овощи-фрукты центрального универсама города находится 1 кассовый аппарат, возможные состояния которого: S_0 – касса свободна,S_1 – касса занята. Найдите предельные вероятности при следующих данных: среднее время обслуживания заявок составляет 7 пок./ч, результаты наблюдения за потоком покупателей представлены в таблице 2.1. Сделайте вывод о работе системы.

Таблица 2.1– Хронометраж потока покупателей в секции овощи-фрукты

Дни / Часы	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	4	4	1	4	2
2	3	1	2	5	4	3	3	4	1
3	1	3	1	1	3	3	1	3	1
4	2	3	4	5	2	4	2	1	1
5	3	2	3	4	5	3	3	2	1

3. МОДЕЛИ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

3.1. Экономико-математическая постановка задач массового обслуживания

Основными показателями, характеризующими работу системы массового обслуживания, являются:

а) P_0 – вероятность простоя системы;
б) $P_{\text{отк}}$ – вероятность отказа в обслуживании;
в) $P_{\text{обсл}}$ – вероятность обслуживания;
г) $L_{\text{оч}}$ – длина очереди;
д) $T_{\text{оч}}$ – среднее время ожидания обслуживания (ожидания в очереди);
е) $P_{\text{оч}}$ – вероятность образования очереди;
ж) $T_{\text{смо}}$ – среднее время пребывания заявки в системе;
з) А – абсолютная пропускная способность системы;
и) Q – относительная пропускная способность системы;
к) $t_{\text{пр}}$ – среднее время простоя канала;
л) $n_{\text{з}}$ – среднее число занятых каналов;
м) $n_{\text{св}}$ – среднее число свободных каналов;
н) $t_{\text{обсл}}$ – среднее время обслуживания.

Для анализа эффективности деятельности любой системы массового обслуживания необходимо связать общеэкономические показатели со специфическими показателями деятельности систем. Для этого затраты системы делят на две группы:

1. ***Cио* – издержки обращения –** связаны со следующими показателями: числом занятых обслуживанием каналов;
   – затратами на содержание системы;
   – интенсивностью обслуживания;
   – степенью загрузки каналов;
   – эффективным использованием каналов;
2. пропускной способностью системы обслуживания.***Cип* – издержки потребления –** это издержки собственно заявок, поступающих на обслуживание, связаны со следующими показателями:
   – длиной очереди;
   – временем ожидания в очереди;
   – вероятностью отказа в обслуживании;
   – временем пребывания заявки в системе.

Показатели обеих групп составляют общие затраты ($C_{\text{об}}$), однако они противоречивы, т. е. улучшение показателей в одной группе обязательно повлечет за собой ухудшение в другой. Например, чтобы снизить время ожидания в очереди или длину очереди, можно добавить еще один канал обслуживания, но это повлечет за собой дополнительные затраты на содержания системы обслуживания. Поэтому моделировать работу любой системы массового обслуживания необходимо таким образом, чтобы установить разумный компромисс между показателями двух групп (собственно заявок и полнотой использования возможностей системы). То есть, как $C_{ио}$ – издержки обращения, так и $C_{ип}$ – издержки потребления, должны иметь оптимальные значения при минимуме общих затрат:

$$C_{об} = (C_{ио} + C_{ип}) \rightarrow \min.$$

3.2. Одноканальная система массового обслуживания с отказами

Если заявка, поступившая в момент занятости СМО, покидает ее без обслуживания, то данная СМО называется СМО *с отказами*. Пусть такая система имеет только один канал обслуживания, а входящий и выходящий потоки являются простейшими с интенсивностями λ и μ соответственно. Введем показатели эффективности такой СМО:

- Вероятность того, что заявка не будет обслужена, называется *вероятностью отказа* $P_{отк}$;
- Вероятность обслуживания поступившей заявки $Q = 1 - P_{отк}$ называется *относительной пропускной способностью* СМО.
- Среднее число заявок, которые СМО сможет обслужить в единицу времени, $A = \lambda Q$ называется *абсолютной пропускной способностью* СМО.

Эти показатели меняются во времени, если только речь не идет об установившемся (стационарном) режиме.

Классическим примером одноканальной системы с отказом в обслуживании может служить диспетчерская с одним телефонным номером. В тот момент, когда телефон занят, заявка, пришедшая на обслуживание, покидает систему необслуженной, т. е. образование очереди в такой системе невозможно.

Размеченный граф состояний одноканальной системы с отказом в обслуживании представлен на рисунке 3.1, где λ и μ – интенсивность потока заявок и интенсивность обслуживания соответственно. Состояние системы S_0 обозначает, что канал свободен, а S_1 – что канал занят обслуживанием заявки.

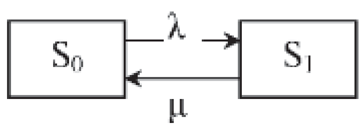


Рисунок 3.1 – Граф состояний одноканальной системы массового обслуживания с отказом

Основные характеристики системы (вероятность простоя системы и вероятность занятости канала обслуживания) можно определить, используя уравнение Колмогорова. Имеем процесс гибели-размножения с матрицей интенсивностей:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}.$$

Пусть $P_0(t)$ и $P_1(t)$ – вероятности состояний системы в момент времени t. Тогда система уравнений Колмогорова принимает вид:

$$\begin{cases} P_0{}'(t) = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) \\ P_1{}'(t) = \lambda P_0(t) - \mu P_1(t) \end{cases}.$$

Начальное условие: $P_0(0) = 1$ и $P_1(0) = 0$ (в начальный момент СМО свободна). К системе уравнение следует добавить уравнение нормировки $P_0(t) + P_1(t)$=1 и одно из уравнений исключить как лишнее. В результате получим:

$$P_0{}'(t) + (\lambda + \mu)P_0(t) = \mu.$$

Решая данное дифференциальное уравнение с учетом начальных условий получим:

$$P_0(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}.$$

Полученная величина представляет собой относительную пропускную способность СМО в произвольный момент времени t. В установившемся режиме $(t \to \infty)$ получаем:

$$P_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu}, \qquad P_1 = 1 - P_0 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$$

Величина $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ называется коэффициентом загрузки канала. Таким образом:

$$P_0 = \frac{1}{\rho + 1}, \qquad P_1 = \frac{\rho}{\rho + 1}.$$

При высокой загрузке канала относительная пропускная способность приближается к нулю, а вероятность отказа – к единице**.**

Найдём абсолютную пропускную способность канала:

$$A = \lambda P_0 = \frac{\lambda}{\rho+1}.$$

Пример 3.1. В мастерской по мелкому (срочному) ремонту обуви работает один мастер. Клиенты в мастерскую приходят независимо друг от друга в среднем через каждые 30 мин. Мастер выполняет заказ одного клиента в среднем 20 мин, в случае если мастер занят, клиенты уходят. Определите долю потери клиентов.

Решение. Система обслуживания, описанная в задаче, является одноканальной (т. к. в мастерской работает только один мастер – т. е. канал обслуживания один) и с отказом в обслуживании, т. к. из условия следует, что образование очереди невозможно (если мастер занят, клиенты не ждут, а уходят).

Работа системы будет описана двумя состояниями:

1) система свободна;

2) система занята обслуживанием (граф системы изображен на рис. 3.1). Следовательно, долю потери клиентов будет характеризовать P_1, вероятность состояния S_1, т. к. клиенты уходят, когда мастер занят. Таким образом, рассчитав P_1, узнаем долю потери клиентов.

Для решения нам также необходимо определиться с характеристиками системы. Интенсивность потока клиентов (λ) здесь будет равна 2 клиента/час (клиенты подходят к мастеру в среднем каждые 30 мин). Интенсивность обслуживания (μ) – 3 заказа/час (мастер выполняетодин заказ в среднем 20 мин). Тогда:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2}{3};\ P_0 = \frac{1}{\rho+1} = \frac{1}{\frac{2}{3}+1} = 0{,}6,\ \ P_1 = \frac{\rho}{\rho+1} = \frac{2/3}{\frac{2}{3}+1} = 0{,}4.$$

Вывод. Доля потери клиентов составляет 40 %, т. е. из 100 % приходящих клиентов мастер в состоянии обслужить только 60 %. Исходя из складывающегося потока клиентов, в данную мастерскую целесообразно порекомендовать принять второго мастера.

3.3. Одноканальная система массового обслуживания с ограничением на длину очереди

В системах массового обслуживания с ограниченной очередью числомест в очереди (m) ограничено. Следовательно, заявка, поступившая в момент времени, когда все места в очереди заняты, отклоняется и покидает систему не обслуженной. Классическим примером такой системы является, например, кинотеатр с одной билетной кассой. Купить билеты на конкретный сеанс можно только в таком количестве, сколько мест в зале кинотеатра. Граф одноканальной системы с ограничением на длину очереди представлен на рисунке 3.2.

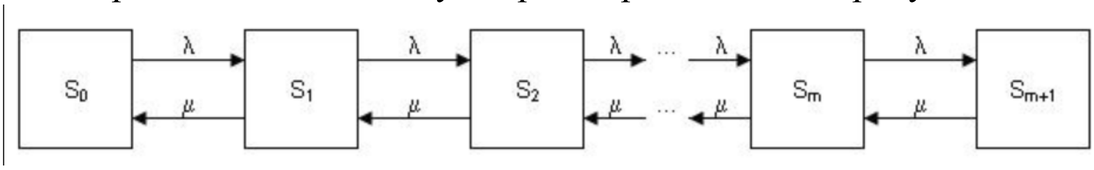


Рисунок 3.2 – Граф состояний одноканальной системы массового обслуживания с ограниченной очередью

Возможные состояния системы будут следующие:

S_0 – канал обслуживания свободен;
S_1 – канал обслуживания занят, но очереди нет;
S_2 – канал обслуживания занят, в очереди одна заявка;
S_{k+1} – канал обслуживания занят, в очереди k заявок;
S_{m+1} – канал обслуживания занят, все m мест в очереди заняты.

Анализ деятельности одноканальных систем с ограниченной очередью проводят по следующим формулам:

Вероятность отказа: $P_{\text{отк}} = P_{m+1} = \rho^{m+1} \cdot P_0$;
Относительная пропускная способность: $Q = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - \rho^{m+1} \cdot P_0$;
Абсолютная пропускная способность: $A = Q \cdot \lambda$.

Все остальные показатели системы зависят от показателя нагрузки системы (ρ). Рассмотрим общий и частный случаи расчета показателей в зависимости от значения нагрузки системы.

Частный случай при ρ=1

Вероятность простоя системы: $P_0 = \frac{1}{m+2}$;

Среднее число заявок, стоящих в очереди на обслуживании ($L_{оч}$):

$$L_{оч} = \frac{m(m+1)}{2} P_0;$$

Среднее время ожидания обслуживания ($T_{оч}$): $T_{оч} = \frac{L_{оч}}{\lambda}$;

Важной характеристикой системы является среднее время пребывания заявки в системе ($T_{смо}$), которое включает среднее время пребывания в очереди и среднее время обслуживания. Рассчитывается $T_{смо}$ по формуле: $T_{смо} = \frac{m+1}{2\mu}$.

Общий случай при $\rho \neq 1$

Вероятность простоя системы: $P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}$;

Среднее число заявок, стоящих в очереди на обслуживании ($L_{оч}$):

$$L_{оч} = \rho^2 \frac{1-\rho^m(m-m*\rho+1)}{(1-\rho)^2} P_0;$$

Среднее время ожидания обслуживания ($T_{оч}$): $T_{оч} = \frac{L_{оч}}{\lambda}$

Среднее время пребывания в системе ($T_{смо}$): $T_{смо} = \left(\frac{L_{оч}}{\lambda} + \frac{L_{об}}{\lambda}\right) = \frac{L_{смо}}{\lambda}$,

где $L_{об}$ –среднее число заявок, находящихся на обслуживании.

$$L_{об} = m + \frac{1}{m} + 2;\ L_{смо} = L_{об} + L_{оч}.$$

Задача 3.2. В магазине самообслуживания поток покупателей простейший с интенсивностью 2 покупателя в минуту. В зоне кассового узла установлен один кассовый аппарат, позволяющий добиться такой производительности труда, при которой интенсивность потока обслуживания составляет 2 покупателя в минуту. Определите основные характеристики работы системы массового обслуживания (магазина) при условии, что очередь при входе в зал самообслуживания ограничена 5 покупателями.

Решение. В задаче дано λ = 2 пок./мин; μ= 2 пок./мин; m= 5 покупателей. Здесь необходимо применять формулы частного случая, т.к. $\rho = \frac{2}{2} = 1$.

$$P_0 = \frac{1}{5+2} = 0{,}143 \approx 14\%;$$

$$L_{оч} = \frac{5(5+1)}{2} * 0{,}143 \approx 2{,}15 \approx 2 \text{ покупателя};$$

$$T_{оч} = \frac{2{,}15}{2} \approx 1 \text{ минута}.$$

Вывод. Расчетные значения основных показателей работы системы массового обслуживания (магазина) находятся в пределах допустимыхзначений, за исключением показателя вероятности простоя системы, который незначительно (на 3 %) превышает нормативное значение, следовательно, работу рассматриваемой системы массового обслуживания следует оценить удовлетворительно.

Задача 3.3. На автомойку в среднем за час приезжают шесть автомобилей. Если в очереди уже находятся два автомобиля, вновь подъезжающие клиенты не встают в очередь, а проезжают мимо. Среднее время мойки автомобиля составляет 20 мин, а мест для мойки всего одно. Средняя стоимость мойки автомобиля составляет 700 р. Определите характеристики работы системы массового обслуживания и долю потери выручки автомойки (при условии 12-часового рабочего дня).

Решение. В задаче дано λ= 6 авто/ч; $t_{обсл}$=20 мин =>

$\mu = \frac{1}{20} = 0{,}05$ авто/минуту или 3 авто/час, m=2 автомобиля.

$\rho = \frac{6}{3} = 2$ – это общий случай.

Замечание. При решении задач все исходные данные должны быть приведены к одной системе измерения, т. е. если один показатель (в данном случае интенсивность входного потока заявок) дан в часах, то второй показатель (интенсивность обслуживания) также необходимо перевести в часыи наоборот.

$$P_0 = \frac{1-2}{1-2^{2+2}} = 0{,}067 \approx 7\%;$$

$$P_{отк} = \frac{(1-\rho)\rho^{m+1}}{(1-\rho)^{m+2}} = 0{,}5 \approx 50\%;$$

$$L_{оч} = \rho^2 \frac{1-\rho^m(m-m*\rho+1)}{(1-\rho)^2} P_0 = 1{,}33 \approx 1 \text{ автомобиль};$$

$$T_{оч} = \frac{L_{оч}}{\lambda} = \frac{1{,}33}{6} = 0{,}22 \text{ часа} = 13{,}2 \text{ минуты}.$$

Потерю выручки можно рассчитать, используя показатель вероятности отказа в обслуживании ($P_{отк}$). При условии 12-часового рабочегодня потеря клиентов в пересчете на количество автомобилей составит: 6 * 12 * 0,5 =36; соответственно потеря в выручке будет равна:

36 * 700 =25200 р.

Вывод. Показатель отказа в обслуживании свидетельствует о том, что половина всех приезжающих автомобилей не обслуживается, для улучшения работы системы необходимо добавить дополнительное место для мойки автомобилей, что приведет к сокращению доли потери клиентов и увеличит выручку автомойки.

3.4. Одноканальная система массового обслуживания без ограничений на длину очереди

Довольно часто СМО функционирует таким образом, что заявка, пришедшая в момент занятости системы, становится в очередь. Будем считать, что на очередь не наложено никаких ограничений (ни по длине очереди, ни по времени ожидания).

В одноканальных системах массового обслуживания с неограниченной очередью длина очереди (теоретически) может расти до бесконечности. Примером такой системы массового обслуживания может служить очередь в хлебном магазине (булочной) с одним кассиром. Граф одноканальной системы без ограничений на длину очереди изображен на рисунке 3.3:

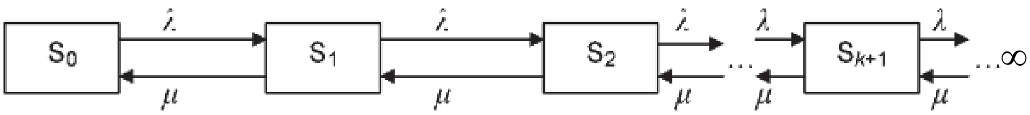


Рисунок 3.3 – Граф состояний одноканальной системы массового обслуживания с неограниченной очередью

Возможные состояния системы будут следующие:

S_0 – канал обслуживания свободен;

S_1 – канал обслуживания занят, но очереди нет;

S_2 – канал обслуживания занят, в очереди одна заявка;

S_{k+1} – канал обслуживания занят, в очереди k заявок.

Показатели эффективности такой СМО (одноканальной, с неограниченной очередью):

– среднее число заявок в системе Lсист;
– среднее время пребывания заявки в системе Тсист;
– среднее число заявок в очереди Lоч;
– среднее время пребывания заявки в очереди Точ;
– вероятность того, что канал занят (степень загрузки канала) Рзан.

Справедливы следующие формулы Литтла, связывающие между собой первые четыре из перечисленных характеристик:

$$T_{\text{сист}} = \frac{1}{\lambda} N_{\text{сист}},\ T_{\text{оч}} = \frac{1}{\lambda} N_{\text{оч}}.$$

Для расчета характеристик эффективности СМО с ожиданием необходимо решить вопрос о распределении вероятностей состояний СМО в установившемся режиме. Пусть в одноканальную СМО с неограниченной очередью поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ. Поток обслуживания также является простейшим и имеет интенсивность μ. Всегда ли существуют предельные вероятности состояний? По-видимому, не всегда. Ясно, что если система перегружена и не справляется с обслуживанием, то при $t \to \infty$ очередь будет неограниченно возрастать и никакого предельного распределения вероятностей не получится. Как только приходит заявка, система переходит из текущего состояния в соседнее правое состояние. Интенсивности этих переходов одинаковы и равны λ. Обратные переходы происходят при обслуживании заявок. Это схема гибели и размножения, но с бесконечным числом состояний.

$$P_0 = (1 + \frac{\lambda}{\mu} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i + \dots)^{-1} = (1 + \rho + (\rho)^2 + \dots + (\rho)^i + \dots)^{-1},$$

где ρ– коэффициент загрузки (величина неотрицательная). В скобках геометрическая прогрессия, сходящаяся лишь при $0 < \rho < 1$. Таким образом, при $\rho \geq 1$система оказывается перегруженной.

Допустим, что условие $0 < \rho < 1$ выполнено. Тогда, учитывая формулу для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, получим:

$$P_0 = \left(\frac{1}{1-\rho}\right)^{-1} = 1 - \rho;$$

$$P_1 = \rho * \ P_0,\ P_2 = \rho^2 * \ P_0, \dots,\ P_i = \rho^i * \ P_0, \dots$$

Если СМО не перегружена и справляется с потоком заявок, то предельное распределение вероятностей представляет собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем ρ; самую высокую вероятность имеет состояние, когда нет ни одной заявки.

Поскольку в системах массового обслуживания отсутствует ограничение на длину очереди, то любая заявка может быть обслужена, т. е. относительная пропускная способность равна $Q = P_{обсл} = 1$. Вероятность отказа $P_{отк} = 1$. Абсолютная пропускная способность А = λ * Q = λ.

Среднее число заявок в системе является математическим ожиданием случайной величины, распределение которой было только что найдено:

$$L_{сист} = \sum_{i=1}^{\infty} i \ \cdot P_i = \frac{\rho}{1-\rho}.$$

Среднее время пребывания заявки в системе можно найти по формуле Литтла: $T_{сист} = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)}$.

Среднее число заявок в очереди равно среднему число заявок в системе минус среднее число обслуживаемых заявок. Но число обслуживаемых заявок — это случайная величина с распределением.

X	0	1
P	$1-\rho$	ρ

Математическое ожидание этой случайной величины равно ρ, поэтому:

$$L_{оч} = L_{сист} - \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho}.$$

Среднее время пребывания заявки в очереди: $T_{оч} = \frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)}$.

Задача 3.4. В булочной один контролер-кассир. В течение часа в булочную в среднем приходят 54 покупателя. Среднее время обслуживания одного покупателя составляет 1 мин. Определите характеристики системы массового обслуживания и проведите анализ ее работы.

Решение. Даны следующие показатели системы λ=54 покупателя/час; $t_{обсл} = 1 мин \Rightarrow \mu = \frac{1}{1} = 1$ покупатель/минуту или 60 покупателей в час; $\rho = \frac{54}{60} = 0{,}9$.

$$P_0 = \left(\frac{1}{1-\rho}\right)^{-1} = 1 - \rho = 0{,}1 \approx 10\%;$$

$$L_{оч} = \frac{\rho^2}{1-\rho} = 8{,}1 \approx 8 \text{ человек};$$

$$T_{оч} = \frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)} = \frac{L_{оч}}{\lambda} = 9 \text{ минут}.$$

Вывод. Система работает неудовлетворительно, несмотря на незначительный процент простоя. Среднее время ожидания обслуживания большое (практически в два раза превышает норматив), что соответственно приводит к росту очереди. В булочной, учитывая складывающийся входящий поток покупателей, целесообразно организовать дополнительный канал обслуживания.

3.5. Многоканальная система массового обслуживания с отказами

В коммерческой деятельности примерами многоканальных систем массового обслуживания могут являться офисы коммерческих предприятий с несколькими телефонными каналами, справочные службы, диспетчерские такси и пр.

Пусть имеется k каналов, на которые поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ. Заявка, поступившая в момент, когда все каналы заняты, получает отказ и покидает СМО. Поток обслуживания каждого канала также является простейшим и имеет интенсивность μ. Для нахождения показателей эффективности такой СМО (многоканальной, с отказами) рассмотрим граф ее состояний (рисунок 3.4.)

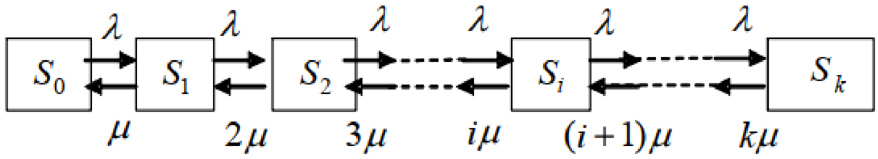


Рисунок 3.4 – Граф состояний многоканальной системы массового обслуживания с отказами

Возможные состояния системы будут следующие:

- S_0 – система свободна (простаивает);
- S_1 – занят один канал обслуживания;
- S_2 – занято два канала обслуживания;
- S_i – занято i каналов обслуживания;
- S_k – все каналы системы заняты обслуживанием.

Состояния системы нумеруются по числу заявок, находящихся в ней. Иначе говоря, номер состояния системы совпадает с числом занятых каналов. Как только приходит заявка, система переходит из текущего состояния в соседнее правое. Интенсивности этих переходов одинаковы и равны λ (открытая СМО). Обратные переходы происходят при обслуживании каналов. Переход $S_1 \rightarrow S_0$ происходит с интенсивностью μ, а вот переход $S_2 \rightarrow S_1$ имеет интенсивность 2μ, так как любой из двух занятых каналов обслуживает с интенсивностью μ (сумма двух выходящих простейших потоков с интенсивностью μ даёт простейший поток с суммарной интенсивностью 2μ) и т. д.

Случайный процесс, протекающий в системе массового обслуживания, представляет собой частный случай процесса «рождения-гибели» и описывается системой дифференциальных уравнений Эрланга, которые позволяют получить выражения для предельных вероятностей состояния рассматриваемой системы, называемые формулами Эрланга:

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0, P_2 = \frac{\lambda^2}{2\mu^2} P_0, \dots, P_i = \frac{\lambda^i}{i!\mu^i} P_0, \dots, P_k = \frac{\lambda^k}{k!\mu^k} P_0.$$

$$P_0 = (1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \dots + \frac{1}{i!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i + \dots + \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k)^{-1} = (1 + \rho + (\rho)^2/2! + \dots + (\rho)^i/i! + \dots (\rho)^k/k!)^{-1}.$$

Вероятность отказа в обслуживании определяется вероятностью того, что поступившая заявка на обслуживание найдет все каналы занятыми, т. е. $P_{\text{отк}} = P_k = \frac{\lambda^k}{k!\mu^k} P_0 = \frac{\rho^k}{k!} P_0$.

Относительная пропускная способность: $Q = P_{\text{обсл}} = 1 - P_{\text{отк}} = \frac{k_з}{\rho}$.

Абсолютная пропускная способность: $A = \lambda * Q$.

Число каналов, занятых обслуживанием и коэффициент занятости каналов:

$$k_з = \rho \cdot P_{\text{обсл}} = \frac{A}{\mu};\ m_з = \frac{k_з}{k}$$

Среднее время пребывания заявки в системе определяется по формуле Литтла:

$$T_{\text{смо}} = \frac{k_з}{\lambda}.$$

Задача 3.5. В коммерческом банке, в отделе кредитования физических лиц, три телефонные линии. В среднем в отдел поступает 75 звонков в час. Среднее время предварительных переговоров справочного характера составляет 2 мин. Определите основные характеристики системы, оцените ее работу.

Решение. В задаче дано количество каналов обслуживания k=3; λ=75 звонков/час; $t_{\text{обсл}}$ = 2 мин $\Rightarrow \mu = \frac{1}{2} =$ 0,5 звонков в минуту или 60*0,5=30 звонков в час; ρ=75/30=2,5.

Находим вероятность того, что обслуживанием не занят ни один канал:

$$P_0 = (1 + 2{,}5 + \frac{2{,}5^2}{2!} + \frac{2{,}5^3}{3!})^{-1} = 0{,}11 \approx 11\%;$$

$$P_{\text{отк}} = \ P_k = \frac{\rho^k}{k!} P_0 = 0{,}282 \approx 28\%;$$

$$Q = P_{обсл} = 1 - P_{отк} = 1 - 0,282 = 0,718;$$
$$k_з = \rho \cdot P_{обсл} = 2,5 * 0,718 = 1,795 \approx 2 \text{ канала};$$
$$m_з = \frac{k_з}{k} = 2/3 \approx 0,67$$

Вывод. Согласно представленным расчетам, в отделе необходима еще одна телефонная линия, т. к. входящий поток звонков обслуживается только на 72 %, в отделе в постоянном режиме занято две телефонные линии – это неудовлетворительно характеризует работу системы в целом.

3.6. Многоканальная система массового обслуживания с ограничением на длину очереди

Пусть на вход системы массового обслуживания, имеющей n каналов обслуживания, поступает пуассоновский поток заявок с интенсивностью λ. Интенсивность обслуживания заявки каждым каналом равна μ, а максимальное число мест в очереди равно m. Граф такой системы представлен на рисунке 3.5.

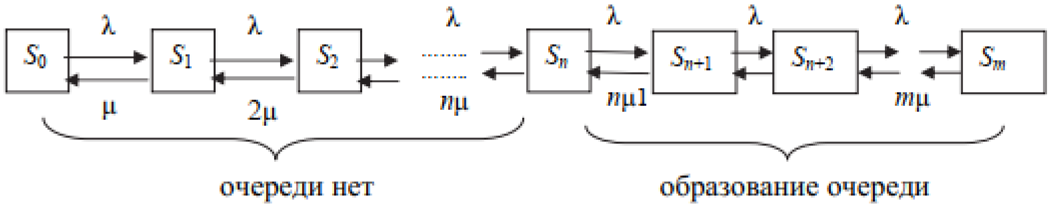


Рисунок 3.5 – Граф состояний многоканальной системы массового обслуживания с ограничением на длину очереди

Возможные состояния системы будут следующие:

S_0 – система свободна (простаивает);
S_1 – занят один канал обслуживания;
S_2 – занято два канала обслуживания;
S_n – все каналы системы заняты обслуживанием;
S_{n+1} – все каналы заняты обслуживанием, в очереди одна заявка;
S_{n+2} – все каналы заняты обслуживанием, в очереди две заявки;
S_m – все каналы заняты, все m мест в очереди заняты.

Все показатели системы массового обслуживания с ограничением на длину очереди зависят от показателя нагрузки системы и количества каналов обслуживания. В этих системах, так же как и в одноканальных системах с ограничением, выделяют общий и частный случаи.

Частный случай при ρ/*n*=1:

Вероятность простоя системы определяется по формуле:

$$P_0 = (1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \cdots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{m * \rho^{n+1}}{n * n!})^{-1}.$$

Вероятность того, что в системе массового обслуживания находится какое-либо количество заявок:

$$P_1 = \frac{\rho}{1!} * \ P_0, \ P_2 = \frac{\rho^2}{2!} * \ P_0, \dots, \ P_n = \frac{\rho^n}{n!} * \ P_0.$$

Вероятность образования очереди и вероятность отказа в обслуживании соответственно равны:

$$P_{\text{оч}} = \frac{\rho^n}{n!} * \frac{1 - \left(\rho/_n\right)^m}{1 - \rho/_n} * P_0;$$

$$P_{\text{отк}} = P_{n+m} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m * n!} * P_0.$$

Относительная пропускная способность системы и абсолютная пропускная способность рассчитываются по следующим формулам:

$$Q = P_{\text{обсл}} = 1 - P_{\text{отк}};$$

$$A = \lambda * Q.$$

Среднее число занятых и среднее число простаивающих каналов определяются по формулам: $n_{\text{з}} = \frac{\text{A}}{\mu}$; $n_{\text{пр}} = n - n_{\text{з}}$.

Среднее число заявок, находящихся в очереди, находится в зависимости от величины ρ/n:

$$L_{\text{оч}} = \frac{\rho^{n+1}}{n * n!} * \frac{m(m+1)}{2} * P_0.$$

Среднее время ожидания в очереди рассчитывается в зависимости от величины ρ/n:

$$T_{\text{оч}} = \frac{L_{\text{оч}}}{\lambda}.$$

Среднее время пребывания заявки в системе вычисляется по формуле:

$$T_{\text{смо}} = \frac{L_{\text{оч}}}{\lambda} + \frac{Q}{\mu}.$$

Коэффициенты занятости и простоя каналов определяются по формулам:

$$K_{\text{з}} = \frac{n_{\text{з}}}{n}, K_{\text{пр}} = 1 - K_{\text{з}}.$$

Общий случай при $\rho/n \neq 1$:

Вероятность простоя системы находится по формуле:

$$P_0 = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{n+1}}{n! * (n-\rho)} * \left(1 - \left(\rho/_n\right)^m\right)\right)^{-1}.$$

Среднее число заявок, находящихся в очереди (длина очереди), рассчитывается по формуле:

$$L_{\text{оч}} = \frac{\rho^{n+1}}{n * n!} * \frac{1 - \left(\rho/_n\right)^m * \left(m + 1 - m * \rho/_n\right)}{\left(1 - \rho/_n\right)^2} * P_0.$$

Среднее время ожидания в очереди определяется по формуле:

$$T_{оч} = \frac{L_{оч}}{\lambda}.$$

Все остальные показатели системы для общего случая рассчитываются по тем же формулам, какие представлены в частном случае, т. к. не зависят от нагрузки системы и количества каналов обслуживания.

Задача 3.6. В магазине поток покупателей простейший с интенсивностью 6 человек в минуту. Покупателей обслуживают три контролера-кассира с интенсивностью 2 покупателя в минуту. Длина очереди ограничена 5 покупателями. Определите основные показатели системы, дайте оценку ее работы.

Решение. n=3; λ=6 чел./мин; μ=2 пок./мин; m=5 чел.

Представлен частный случай, т. к. $\rho/_n = \frac{3}{3} = 1.$

$$P_0 = (1 + \frac{3}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \frac{5 * 3^{3+1}}{3 * 3!})^{-1} = 0{,}0282 \approx 3\%;$$

$$P_{отк} = P_{3+5} = \frac{3^8}{3^5 * 3!} * 0{,}0282 = 0{,}127 \approx 13\%;$$

$$L_{оч} = \frac{3^{3+1}}{3 * 3!} * \frac{5(5+1)}{2} * 0{,}0282 = 1{,}9 \approx 2 \text{ человека};$$

$$T_{оч} = \frac{1{,}9}{6} = 0{,}32 \text{ минуты}.$$

Вывод. Система работает хорошо, т. к. все показатели (за исключением вероятности отказа в обслуживании) находятся в пределах допустимых значений.

3.7. Многоканальная система массового обслуживания без ограничений

В системах массового обслуживания без ограничений теоретически предполагается, что очередь будет расти бесконечно, следовательно, вероятность отказа в обслуживании будет равна нулю. Размеченный граф такой системы представлен на рисунке 3.7.

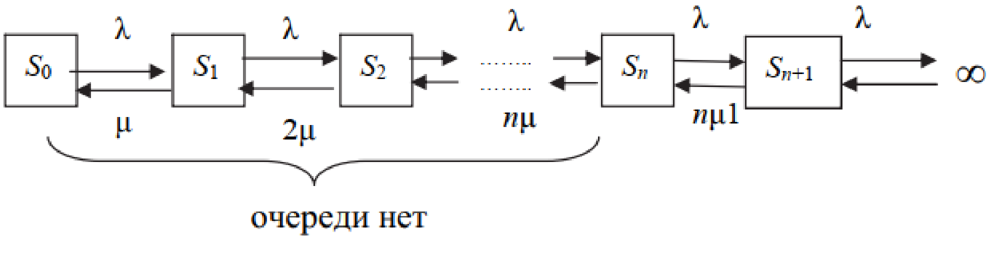


Рисунок 3.7 – Граф состояний многоканальной системы массового обслуживания без ограничений

Возможные состояния системы будут следующие:

S_0 – система свободна (простаивает);

S_1 – занят один канал обслуживания;

S_2 – занято два канала обслуживания;

S_n – все каналы системы заняты обслуживанием;

S_{n+1} – все каналы заняты обслуживанием, в очереди одна заявка.

……→ ∞ – бесконечное число заявок, образующих очередь.

Основные характеристики данной системы можно получить из формул многоканальной системы массового обслуживания с ограничением на длину очереди, при переходе к пределу при $m \to \infty$:

Вероятность простоя системы определяется по формуле:

$$P_0 = (1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)})^{-1}.$$

Вероятность образования очереди вычисляется по формуле:

$$P_{оч} = \frac{\rho^{n+1}}{n!\,(n-\rho)} * P_0.$$

Среднее число заявок, находящихся в очереди, будет определятьсяпо формуле:

$$L_{оч} = \frac{n}{n-\rho} * P_{оч}.$$

Среднее время ожидания в очереди рассчитывается по формуле:

$$T_{оч} = \frac{L_{оч}}{\lambda}.$$

Среднее время пребывания заявки в системе находится по формуле:

$$T_{смо} = T_{оч} + t_{обсл}.$$

3.8. Контрольные вопросы и задания к разделу 3

Задача 3.8.1

Станция наведения истребителей имеет 3 канала. Каждый канал может одновременно наводить один истребитель на одну цель. Среднее время наведения истребителей на цель равно 2 мин. Поток целей простейший с плотностью 1,5 самолета в минуту. Найдите среднюю долю целей, проходящих через зону действия не обстрелянными, если цель, по которой наведение не началось в момент, когда она вошла в зону действия истребителей, вообще остается неактивной. Сделайте вывод о работе станции.

Задача 3.8.2

В сельской парикмахерской работает один мастер, который делает только простейшие прически. В среднем он стрижет одного клиента 20 мин.Клиенты к парикмахеру подходят независимо друг от друга в среднем через каждые 55 мин, в случае если парикмахер занят, они уходят. Определите долю потери клиентов (задачу решите двумя способами, используя характеристики системы массового обслуживания и без них).

Задача 3.8.3

Автоматическая телефонная станция имеет 4 линии связи. На станцию поступает простейший поток заявок с интенсивностью 3 вызова в минуту. Вызов, поступивший в момент, когда все линии заняты, получает отказ. Средняя продолжительность разговора 2 мин. Найдите вероятность отказа и среднюю долю времени, в течение которой станция вообще не загружена.

Задача 3.8.4

На плодоовощную базу в среднем через 30 мин прибывают машины с плодоовощной продукцией. Среднее время разгрузки одной машины составляет 1,5 ч. Разгрузку производят две бригады грузчиков. На территории базы у дебаркадера могут находиться в очереди в ожидании разгрузки не более 4 автомашин. Определите показатели и дайте оценку работы системы массового обслуживания.

Задача 3.8.5

Железнодорожная сортировочная горка, на которую подается простейший поток составов с интенсивностью 2 состава в час, обслуживает (распускает) состав на горке в среднем за 20 мин. Определите основные характеристики системы массового обслуживания, сделайте вывод о еерaботе.

Задача 3.8.6

Вычислите непосредственно по графу состояний, пользуясь схемой процесса рождения и гибели, финальные вероятности состояний для простейшей двухканальной системы массового обслуживания с тремя местами в очереди при интенсивности заявок 0,6 и интенсивности обслуживания0,2.

Найдите для этой системы массового обслуживания характеристики $\acute{L}_{оч}$, $\acute{L}_{смо}$, $T_{оч}$, $T_{смо}$, не пользуясь формулами характеристики системы, а непосредственно через финальные вероятности.

Задача 3.8.7

Подсчитайте характеристики эффективности для простейшей одноканальной системы массового обслуживания с тремя местами в очереди при интенсивности потока заявок, равной 4 заявки в час, интенсивности обслуживания, равной 2 заявки в час. Выясните, как эти характеристики изменятся, если увеличить число мест в очереди до 4.

Задача 3.8.8

Система массового обслуживания – обувной магазин, в которомкаждый покупатель проходит три фазы обслуживания:

1) выбор и примерка обуви;
2) уплата денег в кассу;
3) получение покупки на контроле.

Поток покупателей в магазине простейший с интенсивностью 45 человек в час.В отделе примерки имеются 4 стула. Среднее время примерки и выбора обуви равно 5 мин. Выбравший обувь покупатель направляется в кассу, где вторично становится в очередь (касса в магазине одна). Среднее время оплаты товара в кассе равно 1 мин. После оплаты покупатель идет на контроль, где становится в новую очередь и получает покупки. На контроле работают три продавца, среднее время выдачи покупки равно 2 мин. Все потоки событий простейшие. Определите характеристики эффективности работы магазина. Ответьте на следующий вопрос:

В каком звене и как нужно улучшить обслуживание для того, чтобы сократить затраты времени покупателей?

Задача 3.8.9

Определите оптимальное число телефонных номеров, необходимых для установки на коммерческом предприятии, при условии, что заявки на переговоры поступают с интенсивностью 90 звонков в час, а средняя продолжительность разговора по телефону составляет 2 мин.

Задача 3.8.10

В торговом павильоне покупателей обслуживает 1 продавец. Площадь павильона равна 24 м^2, из них 10 м^2 приходится на торговый зал. Если в павильоне очередь на обслуживание составляет 10 человек, потенциальный покупатель туда не входит. Дайте оценку такой системы массового обслуживания и определите рекомендации по созданию оптимальногорежима работы, если интенсивность прихода покупателей составляет 120 человек в час, а среднее время обслуживания одного покупателя равно 3 мин.

Задача 3.8.11

На АЗС имеется только одна колонка для заправки. Интенсивность потока автомобилей на АЗС к колонке за бензином составляет 30 авто вчас. Среднее время заправки равно 5 мин. Проведите анализ работы системы массового обслуживания.

Задача 3.8.12

Имеется простейшая трехканальная система массового обслуживания с отказами. На нее поступает поток заявок с интенсивностью 4 заявки в минуту, время обслуживания заявки одним каналом равно 0,5 мин. Выгодно ли с точки зрения пропускной способности системы массового обслуживания заставить все три канала обслуживать заявки сразу? Причем в этом случае среднее время обслуживания уменьшается втрое? Как это скажется на среднем времени пребывания заявки в системе массового обслуживания?

Задача 3.8.13

Имеется простейшая трехканальная система массового обслуживания с неограниченной очередью. Интенсивность потока заявок – 4 заявки в час, среднее время обслуживания составляет 0,5 ч. Выгодно ли, имея в виду:

1) среднюю длину очереди;
2) среднее время пребывания заявки в очереди;
3) среднее время пребывания заявки в системе,

объединить все три канала в один с втрое меньшим средним временем обслуживания?

Задача 3.8.14

Среднее число покупателей, поступающих на узел расчета в магазине самообслуживания, 100 человек в час. Кассир может обслуживать 60 человек в час. Определите, какое число кассиров необходимо для того, чтобы вероятность появления очереди не превысила 0,60.

Задача 3.8.15

На АТС поступают заявки на междугородние переговоры. В среднем за 1 ч поступает 13 заявок. Приведите аргументы против того, что поток заявок на телефонную станцию является ординарным. Найдите среднее число заявок, поступающих за сутки. На телефонной станции появляются сбои в работе, если за полчаса на нее поступит более 50 заявок. Найдите вероятность сбоя станции.

Задача 3.8.16

Двое рабочих обслуживают 6 станков. Станок требует наладки всреднем каждые полчаса. Наладка занимает у рабочего в среднем 10 мин. Все потоки событий простейшие. Определите характеристики системы массового обслуживания. Установите, улучшатся ли характеристики системы массового обслуживания, если рабочие будут налаживать станки совместно, тратя вдвоем на наладку в среднем 5 мин.

Задача 3.8.17

Рабочий обслуживает 4 станка, каждый станок отказывает с интенсивностью 0,5 отказа в час. Среднее время ремонта одного станка 0,8 ч. Все потоки событий простейшие. Определите основные показатели, характеризующие систему массового обслуживания.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В пособии рассмотрены основные положения теории систем массового обслуживания (теории очередей) в той последовательности, которая позволяет наиболее быстро освоить ключевые темы дисциплины. Изложенный материал тесно связан с высшей математикой и способствует закреплению знаний, полученных в ходе изучения математических дисциплин. Весь представленный в пособии теоретический материал подкреплен примерами решения практических задач с последовательными комментариями и выводами.

Практические задачи и задания для самостоятельного решения составлены таким образом, чтобы обучающиеся получили основные навыки оценки и анализа реально существующих систем массового обслуживания.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бережная, Е. В. Математические методы моделирования экономических систем: учеб. пособие / Е. В. Бережная, В. И. Бережной. – М.: Финансы и статистика, 2006. – 432 с.

2. Вентцель, Е. С. Теория вероятностей: учебник / Е. С. Вентцель. – М.: Академия, 2003. – 576 с.

3. Вентцель, Е. С. Теория случайных процессов и ее приложения: учеб. пособие / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – М.: Академия, 2003. – 432 с.

4. Просветов, Г. И. Математические методы в экономике: учеб.-метод. пособие / Г. И. Просветов. -3-е изд. – М.: Изд-во РДЛ, 2007. –160 с.

5. Солнышкина, И. В. Теория систем массового обслуживания: учеб. пособие / И. В. Солнышкина. – Комсомольск-на-Амуре: ФГБОУ ВПО КнАГТУ, 2015. – 76 с.

6. Гефан, Г. Д. Марковские процессы и системы массового обслуживания: учеб. пособие / Г. Д. Гефан. – Иркутск: ИрГУПС, 2009. – 77 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

ЗНАЧЕНИЕ $P = \frac{a^m}{m!} e^{-a}$ (РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПУАССОНА)

m	a = 0,1	a = 0,2	a = 0,3	a = 0,4	a = 0,5	a = 0,6	a = 0,7	a = 0,8	a = 0,9	
0	0, 9048	0, 8187	0, 7408	0, 6703	0, 6065	0, 5488	0, 4966	0, 4493	0, 4066	
1	0, 0905	0, 1638	0, 2222	0, 2681	0, 3033	0, 3293	0, 3476	0, 3595	0, 3659	
2	0, 0045	0, 0164	0, 0333	0, 0536	0, 0758	0, 0988	0, 1217	0, 1438	0, 1647	
3	0, 0002	0, 0019	0, 0033	0, 0072	0, 0126	0, 0198	0, 0284	0, 0383	0, 0494	
4		0, 0001	0, 0002	0, 0007	0, 0016	0, 0030	0, 0050	0, 0077	0, 0111	
5				0, 0001	0, 0002	0, 0004	0, 0007	0, 0012	0, 0020	
6							0, 0001	0, 0002	0, 0003	
m	a = 1	a = 2	a = 3	a = 4	a = 5	a = 6	a = 7	a = 8	a = 9	a = 10
0	0, 3679	0, 1353	0, 0498	0, 0183	0, 0067	0, 0025	0, 0009	0, 0003	0, 0001	0, 0000
1	0, 3679	0, 2707	0, 1494	0, 0733	0, 0337	0, 0149	0, 0064	0, 0027	0, 0011	0, 0005
2	0, 1839	0, 2707	0, 2240	0, 1465	0, 0842	0, 0446	0, 0223	0, 0107	0, 0050	0, 0023
3	0, 0613	0, 1804	0, 2240	0, 1954	0, 1404	0, 0892	0, 0521	0, 0286	0, 0150	0, 0076
4	0, 0153	0, 0902	0, 1680	0, 1954	0, 1755	0, 1339	0, 0912	0, 0572	0, 0337	0, 0189
5	0, 0031	0, 0361	0, 1008	0, 1563	0, 1755	0, 1606	0, 1277	0, 0916	0, 0607	0, 0378
6	0, 0005	0, 0120	0, 0504	0, 1042	0, 1462	0, 1606	0, 1490	0, 1221	0, 0911	0, 0631
7	0, 0001	0, 0037	0, 0216	0, 0595	0, 1044	0, 1377	0, 1490	0, 1396	0, 1171	0, 0901
8		0, 0009	0, 0081	0, 0298	0, 0653	0, 1033	0, 1304	0, 1396	0, 1318	0, 1126
9		0, 0002	0, 0027	0, 0132	0, 0363	0, 0688	0, 1014	0, 1241	0, 1318	0, 1251
10			0, 0008	0, 0053	0, 0181	0, 0413	0, 0710	0, 0993	0, 1186	0, 1251
11			0, 0002	0, 0019	0, 0082	0, 0225	0, 0452	0, 0722	0, 0970	0, 1137
12			0, 0001	0, 0006	0, 0034	0, 0126	0, 0263	0, 0481	0, 0728	0, 0948
13				0, 0002	0, 0013	0, 0052	0, 0142	0, 0296	0, 0504	0, 0729
14				0, 0001	0, 0005	0, 0022	0, 0071	0, 0169	0, 0324	0, 0521
15					0, 0002	0, 0009	0, 0033	0, 0090	0, 0194	0, 0347
16						0, 0003	0, 0014	0, 0045	0, 0109	0, 0217
17						0, 0001	0, 0006	0, 0021	0, 0058	0, 0128
18							0, 0002	0, 0009	0, 0029	0, 0071
19							0, 0001	0, 0004	0, 0014	0, 0037
20								0, 0002	0, 0006	0, 0019
21								0, 0001	0, 0003	0, 0009
22									0, 0001	0, 0004
23										0, 0002
24										0, 0001

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ e^{-x}

x	e^{-x}	Δ	x	e^{-x}	Δ	x	e^{-x}	Δ	x	e^{-x}	Δ
0, 00	1, 000	10	0, 40	0, 670	7	0, 80	0, 449	4	3, 00	0, 050	5
0, 01	0, 990	10	0, 41	664	7	0, 81	0, 445	5	3, 10	0, 045	4
02	980	10	42	657	7	82	440	4	3, 20	41	4
03	970	9	43	650	6	83	436	4	3, 30	37	4
04	961	10	44	644	6	84	432	5	3, 40	33	3
05	951	9	45	638	7	85	427	4	3, 50	30	3
06	942	10	46	631	6	86	423	4	3, 60	27	2
07	932	9	47	625	6	87	419	4	3, 70	25	3
08	923	9	48	619	6	88	415	4	3, 80	22	2
09	914	9	49	613	7	89	411	4	3, 90	20	2
0, 10	0, 905	9	0, 50	0, 606	6	0, 90	0, 407	4	4, 00	0, 0183	17
11	896	9	51	600	5	91	403	4	4, 10	166	16
12	887	9	52	595	6	92	399	4	4, 20	150	14
13	878	9	53	589	6	93	395	4	4, 30	136	13
14	869	8	54	583	6	94	391	4	4, 40	123	12
15	861	9	55	577	6	95	387	4	4, 50	111	10
16	852	8	56	571	6	96	383	4	4, 60	101	10
17	844	9	57	565	5	97	379	4	4, 70	0, 0091	9
18	835	8	58	560	6	98	375	3	4, 80	82	8
19	827	8	59	554	5	99	372	4	4, 90	74	7
0, 20	0, 819	8	0, 60	0, 549	6	1, 00	0, 368	35	5, 00	0, 0067	6
21	811	8	61	543	5	1, 10	333	31	5, 10	61	6
22	802	8	62	538	5	1, 20	302	29	5, 20	55	5
23	795	8	63	533	6	1, 30	273	26	5, 30	50	5
24	787	8	64	527	5	1, 40	247	24	5, 40	45	4
25	779	8	65	522	5	1, 50	223	21	5, 50	41	4
26	771	8	66	517	5	1, 60	202	19	5, 60	37	4
27	763	7	67	512	5	1, 70	183	18	5, 70	33	3
28	756	8	68	507	5	1, 80	165	15	5, 80	30	3
29	748	7	69	502	5	1, 90	150	15	5, 90	27	2
0, 30	0, 741	8	0, 70	0, 497	5	2, 00	0, 135	13	6, 00	0, 0025	3
31	733	7	71	492	5	2, 10	122	11	6, 10	22	2
32	726	7	72	487	5	2, 20	111	11	6, 20	20	2
33	719	7	73	482	5	2, 30	100	9	6, 30	18	1
34	712	7	74	477	5	2, 40	0, 091	9	6, 40	17	2
35	705	7	75	472	4	2, 50	82	8	6, 50	15	1
36	698	7	76	468	5	2, 60	74	7	6, 60	14	2
37	691	7	77	463	5	2, 70	67	6	6, 70	12	1
38	684	7	78	458	4	2, 80	61	6	6, 80	11	1
39	677	7	79	454	5	2, 90	55	5	6, 90	10	1
0, 40	0, 670		0, 80	0, 449		3, 00	0, 050		7, 00	0, 0009	

Учебное издание

Леонова Надежда Львовна

Математические методы в теории массового обслуживания

Учебно-методическое пособие

Редактор и корректор Е. О. Тарновская
Техн. редактор Е. О. Тарновская

Учебное электронное издание сетевого распространения

Системные требования:
электронное устройство с программным обеспечением
для воспроизведения файлов формата PDF

Режим доступа: http://publish.sutd.ru/tp_get_file.php?id=202016, по паролю.
- Загл. с экрана.

Дата подписания к использованию 26.12.2024 г. Рег. № 5085/24

Высшая школа технологии и энергетики СПбГУПТД
198095, СПб., ул. Ивана Черных, 4.