

В. А. Липин

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Учебное пособие

**Санкт-Петербург
2022**

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
**«Санкт-Петербургский государственный университет
промышленных технологий и дизайна»
Высшая школа технологии и энергетики**

В. А. Липин

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Учебное пособие

Утверждено Редакционно-издательским советом ВШТЭ СПбГУПТД

Санкт-Петербург
2022

УДК 66.0
ББК 35
Л 612

Рецензенты:

кандидат химических наук, доцент, заведующий кафедрой материаловедения и технологии машиностроения Высшей школы технологии и энергетики СПбГУПТД

А. Н. Евдокимов;

генеральный директор ООО «Алюминиевая компания «АЛКОРУС»

С. Н. Ахмедов

Липин, В. А.

Л 612 Методы оптимизации: учебное пособие / В. А. Липин. — СПб.: ВШТЭ СПбГУПТД, 2022. — 47 с.
ISBN 978-5-91646-310-1

Учебное пособие соответствует программам и учебным планам дисциплины «Методы оптимизации» для студентов, обучающихся по направлениям подготовки 18.04.01 «Химическая технология». В учебном пособии изложены принципы оптимального планирования эксперимента, которые позволяют сократить до минимума число экспериментов для построения адекватных моделей и достичь значительного сокращения времени и материальных затрат на изучение моделируемых процессов.

Учебное пособие предназначено для подготовки магистров очной и заочной форм обучения. Отдельные разделы пособия могут быть полезны аспирантам и специалистам, работающим в области химической технологии.

УДК 66.0
ББК 35

ISBN 978-5-91646-310-1

© ВШТЭ СПбГУПТД, 2022
© Липин В. А., 2022

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. ВВЕДЕНИЕ	4
2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА В НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ	5
2.1. Основные понятия и определения	5
2.2. Применение математического планирования в научных исследованиях ...	10
3. ПАРАМЕТРЫ ОПТИМИЗАЦИИ	11
3.1. Виды параметров оптимизации	11
3.2. Требования к параметру оптимизации	11
3.3. Факторы оптимизации	13
4. МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБЪЕКТА ИССЛЕДОВАНИЯ	16
4.1. Статистический анализ экспериментальных данных	16
4.2. Построение математической модели по результатам эксперимента	17
4.3. Проверка адекватности модели	17
4.3.1. Критерий Фишера	18
4.3.2. Критерий Кохрена	19
4.4. Проверка значимости коэффициентов уравнения регрессии. Критерий Стьюдента	19
5. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПЛАНИРОВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА	21
5.1. Планирование экстремальных поисковых экспериментов	21
5.2. Метод Гаусса–Зайделя	22
5.3. Метод Бокса–Уилсона	23
5.3.1. Полный факторный эксперимент	23
5.3.2. Составление ортогонального плана для числа факторов больше двух	27
5.3.3. Расчет коэффициентов регрессии по результатам эксперимента	28
5.3.4. Дробный факторный эксперимент	31
5.3.5. Алгоритм реализации ПФЭ илиДФЭ	32
5.3.6. Этапы крутого восхождения	34
5.4. Симплексный метод планирования	39
6. СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	45

1. ВВЕДЕНИЕ

Одним из путей ускорения научно-технического прогресса является применение математических методов для организации экспериментов на компьютерной модели и на промышленном объекте, для обработки полученных экспериментальных данных и построения математических моделей процессов, для поиска оптимальных условий ведения технологического процесса, что приведет в конечном итоге к повышению технологической и экономической эффективности проектируемых и действующих химико-технологических объектов.

Применение методов оптимального планирования эксперимента позволяет сократить до минимума число экспериментов для построения адекватных моделей и достичь значительного сокращения времени и материальных затрат на изучение моделируемых процессов. В ряде случаев использование методов регрессионного и корреляционного анализа для изучения промышленных объектов позволяет получить рекомендации по оптимизации их работы на основе статистической обработки данных пассивного эксперимента, путем наблюдений, выполненных на объекте в условиях его нормальной работы. Это особенно важно для химической промышленности, поскольку технологические аппараты и схемы в этой отрасли являются сложными системами, а наличие источников возмущений в большинстве случаев обуславливает их стохастический характер. Приемлемым методом моделирования подобных систем является построение эмпирических зависимостей статистическими методами. Дополнительным преимуществом методов оптимального планирования эксперимента является возможность выявления и исключения взаимного влияния исследуемых факторов, выделения влияния отдельных факторов на выходную характеристику изучаемой системы, что позволяет сформулировать практические рекомендации по управлению изучаемым технологическим процессом.

В настоящем учебном пособии изложены вопросы организации эксперимента, математической обработки экспериментальных данных и математического планирования эксперимента при поиске оптимальных условий проведения технологического процесса.

Дисциплина «Организация и математическое планирование эксперимента» имеет большое значение для получения высшего профессионального образования в области химической технологии. Во-первых, эту дисциплину следует относить к общепрофессиональным, поскольку ее изучение вооружает человека общими знаниями и навыками, которые помогут разобраться в закономерностях любого явления, происходящего в экономике, быту, обществе, природе. Во-вторых, дисциплина «Организация и математическое планирование эксперимента» является специальной дисциплиной, т.к., изучая ее, студенты получают знания и навыки, необходимые для научно-исследовательской работы в магистратуре и позволяющие им продолжить обучение в аспирантуре.

2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА В НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ

2.1. Основные понятия и определения

Принятие проектных решений в любой отрасли промышленности и оценка их качества в основном осуществляются на основании данных эксперимента. Планирование эксперимента позволяет повысить эффективность экспериментальных исследований: интенсифицировать труд исследователя, сократить сроки и затраты на эксперимент, повысить достоверность результатов исследования.

Постановка проблемы предполагает ответ на вопрос: что надо изучить из того, что ранее не было изучено? Необходимо отличать научную проблему от практической задачи. В проблеме находит отражение пробел в научном знании.

Формулируя тему исследования, мы отвечаем на вопрос: как назвать то, чем мы собираемся заниматься. Нужно так обозначить тему, чтобы в ней нашло отражение движение от старого к новому, т.е., с одной стороны, было понятно, с какими более широкими категориями и проблемами тема соотносится, а с другой – какой новый познавательный и практический материал предполагается освоить.

Обосновать актуальность исследования — значит объяснить, почему данную проблему нужно в настоящее время изучать. Следует различать практическую и научную актуальность. Начинать исследование имеет смысл лишь при наличии и той и другой. Может случиться так, что в науке вопрос решен, но по тем или иным причинам полученные наукой знания не дошли до практики. Это значит, что к уже имеющимся научным трудам не стоит добавлять еще один. Лучше сосредоточить усилия не на исследовании того же самого, а на доведении уже состоявшегося научного решения проблемы до практического применения. Определить *объект исследования* — значит выяснить, что именно рассматривается в исследовании.

Однако получить новое знание об объекте во всех его аспектах и проявлениях практически невозможно, поэтому необходимо определить предмет исследования, т. е. обозначить, как рассматривается объект, какие отношения в нем, свойства, аспекты, функции оно раскрывает.

Объект принадлежит всем, а предмет – личное достояние исследователя, его собственное видение объекта. Он целенаправленно конструирует предмет, выделяет в объекте то, о чем он и только он намерен получить новое научное знание. Определяя предмет, мы одновременно открываем возможность прийти к конечному (для данного этапа) результату.

Формулирование предмета исследования – результат учета задач, реальных возможностей и имеющихся в науке описаний объекта, а также других характеристик исследования.

Основой теории планирования эксперимента является математическая статистика, которая применима в тех случаях, когда его результаты могут

рассматриваться как случайные величины или случайные процессы, что практически всегда имеет место.

Эксперимент – это система операций, воздействий и (или) наблюдений, направленных на получение информации об объекте при исследовательских испытаниях. Под экспериментом будем понимать совокупность операций, совершаемых над объектом исследования с целью получения информации о его свойствах. Эксперимент, в котором исследователь по своему усмотрению может изменять условия его проведения, называется *активным экспериментом*. Активный эксперимент позволяет быстро устанавливать закономерности, находить оптимальные режимы функционирования объекта, но его обычно труднее осуществить. Вмешательство в технологический процесс может привести к снижению производительности и выпуску бракованной продукции. Иногда, например, при астрономических наблюдениях активный эксперимент вообще не возможен.

Если исследователь не может самостоятельно изменять условия его проведения, а лишь регистрирует их, то это *пассивный эксперимент*.

Важнейшей задачей методов обработки полученной в ходе эксперимента информации является задача построения математической модели изучаемого явления, процесса, объекта. Ее можно использовать и при анализе процессов, и при проектировании объектов. Можно получить хорошо аппроксимирующую математическую модель, если целенаправленно применяется активный эксперимент. Другой задачей обработки полученной в ходе эксперимента информации является задача оптимизации, т.е. нахождения такой комбинации влияющих независимых переменных, при которой выбранный показатель оптимальности принимает экстремальное значение. Опыт – это отдельная экспериментальная часть.

Планирование эксперимента – выбор плана эксперимента, удовлетворяющего заданным требованиям, совокупность действий, направленных на разработку стратегии экспериментирования (от получения априорной информации до получения работоспособной математической модели или определения оптимальных условий). Это целенаправленное управление экспериментом, реализуемое в условиях неполного знания механизма изучаемого явления.

Планирование эксперимента заключается в процедуре выбора количества и условий проведения опытов, необходимых и достаточных для решения стоящих задач с требуемой точностью.

Таким образом, при планировании эксперимента могут решаться следующие задачи:

1. Поиск оптимальных условий (задача оптимизации). Задача такого типа возникает, когда установлена возможность осуществления какого-либо процесса и требуется найти оптимальные условия его реализации. Оптимальными условия могут быть по каким-то определённым критериям (параметрам оптимизации). Это выходные координаты объекта исследования y_1, y_2, \dots, y_n . Задача оптимизации решается, например, при выборе оптимального состава сплава, при повышении производительности действующей установки, при

снижении затрат на производство, при уменьшении габаритов изделия и т.п. Эксперимент, который ставится для решения задачи оптимизации, является экстремальным, так как связан с поиском экстремума некоторой функции.

2. Поиск интерполяционных формул (задача интерполяции). Подобная задача решается, когда нужно установить количественную связь между значениями *выходного параметра* – $C(y_i)$ и *факторами* – A, B (рис.1) от которых он зависит (входных воздействий или управляющих параметров – $B - x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$ и входных параметров – A).

Входные параметры (A) можно измерить, но возможность воздействия на них отсутствует. Эти параметры не зависят от режима данного процесса, а определяются условиями работы предыдущих отделений. Например, контролируемый состав исходного сырья.

С помощью управляющих параметров (B) меняют состояние системы в соответствии с установленными требованиями, что позволяет управлять процессом. Например, количество сырья, давление и температура.

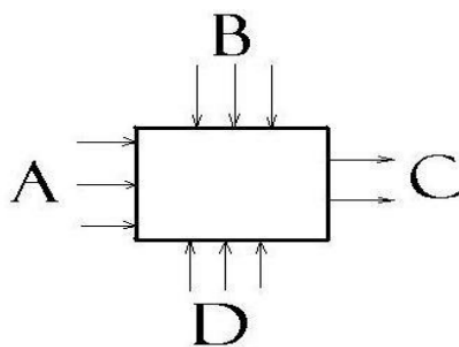


Рис. 1. Схематическое изображение кибернетического «черного ящика»

Возмущающие параметры (D) недоступны для измерения, значения их меняются с течением времени. Например, неконтролируемы: примеси в сырье, метеорологические условия и пр.

Выходные параметры (C) характеризуют состояние объекта под влиянием входных, управляющих и возмущающих факторов. Например, качество и количество выпускаемой продукции.

3. Выбор существенных факторов (входных воздействий – $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$).

Перед экспериментом надо определить основные и второстепенные характеристики, влияющие на исследуемый процесс. Рекомендуется классифицировать факторы и составить убывающий по важности для данного эксперимента ряд. Правильный выбор существенных факторов повышает эффективность эксперимента. Для этого иногда проводят предварительный опыт, объект изучается в зависимости от одной переменной при постоянных других.

4. Определение констант в теоретической модели объекта исследования.

Математическая модель объекта исследования – это уравнение, связывающее параметр оптимизации (выходную координату объекта) с

факторами (входными воздействиями):

$$y = j(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n).$$

Такая функция (уравнение математической модели объекта) называется функцией отклика.

5. Выбор гипотез о механизме явлений.

Каждый фактор в отдельном опыте, как указывалось ранее, может принимать одно из нескольких значений. Эти значения называются уровнями. Фиксированный набор уровней факторов определяет одно из возможных состояний объекта исследования. Этот фиксированный набор факторов является условием проведения одного из опытов. Перебор всех возможных наборов состояний объекта даёт возможное количество различных опытов. Количество этих состояний можно рассчитать путём возведения числа уровней факторов в степень числа факторов n .

В процессе измерений, последующей обработки данных, а также формализации результатов в виде математической модели возникают погрешности и теряется часть информации, содержащейся в исходных данных. Применение методов планирования эксперимента позволяет определить погрешность математической модели и судить о ее адекватности. Если точность модели оказывается недостаточной, то применение методов планирования эксперимента позволяет модернизировать математическую модель с проведением дополнительных опытов без потери предыдущей информации и с минимальными затратами.

Цель планирования эксперимента – нахождение таких условий и правил проведения опытов, при которых удастся получить надежную и достоверную информацию об объекте с наименьшей затратой труда, а также представить эту информацию в компактной и удобной форме с количественной оценкой точности.

Пусть интересующее нас свойство (y) объекта зависит от нескольких (n) независимых переменных (x_1, x_2, \dots, x_n) и мы хотим выяснить характер этой зависимости: – $y = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, о которой мы имеем лишь общее представление. Величина y – называется «отклик», а сама зависимость $y = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – «функция отклика».

Отклик должен быть определен количественно. Однако могут встречаться и качественные признаки y . В этом случае возможно применение *рангового подхода*. Пример рангового подхода – оценка на экзамене, когда одним числом оценивается сложный комплекс полученных сведений о знаниях студента.

Независимые переменные x_1, x_2, \dots, x_n – управляющие параметры (факторы), также должны иметь количественную оценку. Если используются качественные факторы, то каждому их уровню должно быть присвоено какое-либо число. Важно выбирать в качестве факторов лишь независимые переменные, т.е. только те, которые можно изменять, не затрагивая другие факторы. Факторы должны быть однозначными. Для построения эффективной математической модели целесообразно провести предварительный анализ значимости факторов (степени влияния на функцию), их ранжирование и исключить малозначимые факторы.

Диапазоны изменения факторов задают область определения y . Если принять, что каждому фактору соответствует координатная ось, то полученное пространство называется *факторным пространством*. При $n = 2$ область определения y представляется собой прямоугольник, при $n = 3$ – куб, при $n > 3$ – гиперкуб.

При выборе диапазонов изменения факторов нужно учитывать их совместимость, т.е. контролировать, чтобы в этих диапазонах любые сочетания факторов были бы реализуемы в опытах и не приводили бы к абсурду. Для каждого из факторов указывают граничные значения

$$x_{imin} \leq x_i \leq x_{imax}, i = 1 \dots n.$$

Регрессионный анализ функции отклика предназначен для получения ее математической модели в виде уравнения регрессии:

$$y = F(x_1, x_2, \dots, x_n; B_1, B_2, \dots, B_m) + e,$$

где B_1, \dots, B_m – некоторые коэффициенты; e – погрешность.

Среди основных методов планирования, применяемых на разных этапах исследования, используют:

- планирование отсеивающего эксперимента, основное значение которого – выделение из всей совокупности факторов группы существенных факторов, подлежащих дальнейшему детальному изучению;
- планирование эксперимента для дисперсионного анализа, т.е. составление планов для объектов с качественными факторами;
- планирование регрессионного эксперимента, позволяющего получать регрессионные модели (полиномиальные и иные);
- планирование экстремального эксперимента, в котором главная задача – экспериментальная оптимизация объекта исследования;
- планирование при изучении динамических процессов и т.д.

При изучении научно-технических объектов различают два вида систем:

1. Хорошо организованные.
2. Плохо организованные, или диффузные.

Для хорошо организованных систем известны причинно-следственные связи. Поведение системы описывается на уровне закона. До начала XX века точные науки стремились иметь дело только с хорошо организованными системами, где результаты исследований представляются в виде строгих функциональных связей.

Любой промышленный процесс – это плохо организованная система, в которой действует много переменных, не подлежащих разграничению. Такие сложные системы описываются только на уровне модели.

Можно выделить два существенно различных подхода к изучению плохо организованных систем.

Первый подход – использование идей и методов многомерной математической статистики. Это направление начало развиваться в 20–30-х гг. прошлого века, его возникновение связано в значительной степени с именем английского ученого Фишера Рональда Эймера (1890–1962).

Многомерная математическая статистика – это, по существу, хорошо обоснованная формализация эмпирических методов изучения диффузных

(плохо организованных) систем, применяемых тогда, когда исследователь сознательно хочет отказаться от детального, традиционного изучения механизма всех явлений, протекающих в системе. При решении задачи одновременно варьируют, возможно, большее число переменных и пытаются найти оптимальные условия проведения процесса. При этом возникают такие проблемы: как выбрать оптимальную стратегию эксперимента, как обрабатывать результаты наблюдений, как принимать обоснованные решения? Это типичные задачи математической статистики.

Второй подход к изучению диффузных систем – логический анализ процесса управления. Здесь мы имеем дело с кибернетическим подходом – его возникновение связано с именем американского математика Винера Норберта (1894–1964). Для получения модели диффузных систем прибегают к кибернетическому принципу «черного ящика», т.е. процесс как кибернетическая система условно изображается в виде «черного ящика» (рис. 1).

К настоящему времени сформировался достаточно большой опыт в области планирования экспериментов с использованием математических методов, изложенный в самого различного уровня научной и учебной литературе [1-42].

На рынке программных продуктов различных производителей представлен целый ряд специализированных пакетов, в которых заложены математические методы планирования эксперимента, в том числе и наиболее популярные – MS Excel, STATISTICA, Minitab, PlanExp B-D13 и др.

2.2. Применение математического планирования эксперимента в научных исследованиях

В современной математической теории оптимального планирования эксперимента существует два основных раздела:

1. Планирование эксперимента для изучения механизмов сложных процессов и свойств многокомпонентных систем.
2. Планирование эксперимента для оптимизации технологических процессов и свойств многокомпонентных систем.

Как уже говорилось выше, планирование эксперимента – это выбор числа опытов и условий их проведения, необходимых и достаточных для решения поставленной задачи с требуемой точностью.

Прежде чем планировать эксперимент, необходимо сформулировать *цель исследования*. От точной формулировки цели зависит успех исследования. Необходимо также удостовериться, что объект исследования соответствует предъявляемым ему требованиям. В технологическом исследовании целью исследования при оптимизации процесса чаще всего является повышение выхода продукта, улучшение качества, снижение себестоимости и т.п.

Эксперимент может проводиться непосредственно на объекте или на его модели. Модель отличается от объекта не только масштабом, а иногда и природой. Если модель достаточно точно описывает объект, то эксперимент на объекте может быть перенесён на модель.

Для проведения эксперимента необходимо воздействовать на поведение объекта. Все способы воздействия обозначаются через «х» и называются входными параметрами или факторами. Каждый фактор может принимать в опыте одно из нескольких значений, и такие значения называются уровнями. Фиксированный набор уровней и факторов определяет одно из возможных состояний объекта, одновременно они являются условиями проведения одного из возможных опытов. Результаты эксперимента используются для получения математической модели объекта исследования. Использование для объекта всех возможных опытов приводит к абсурдно большим экспериментам. В связи с этим эксперименты необходимо планировать.

Задачей планирования является выбор необходимых для эксперимента опытов, методов математической обработки их результатов и принятия решений. Частный случай этой задачи – планирование экстремального эксперимента, т.е. эксперимента, поставленного с целью поиска оптимальных условий функционирования объекта. Таким образом, планирование экстремального эксперимента – это выбор количества и условий проведения опытов, минимально необходимых для отыскания оптимальных условий. При планировании эксперимента объект исследования должен обладать обязательными свойствами: управляемым; результаты эксперимента должны быть воспроизводимыми.

3. ПАРАМЕТРЫ ОПТИМИЗАЦИИ

3.1. Виды параметров оптимизации

Параметр оптимизации – это признак, по которому мы хотим оптимизировать процесс. Он должен быть количественным, задаваться числом. Множество значений, которые может принимать параметр оптимизации, называется областью его определения. Области определения могут быть непрерывными и дискретными, ограниченными и неограниченными. Например, выход реакции – это параметр оптимизации с непрерывной ограниченной областью определения. Он может изменяться в интервале от 0 до 100 %.

Экономические параметры оптимизации, такие, как прибыль, себестоимость и рентабельность, обычно используются при исследовании действующих промышленных объектов, тогда как затраты на эксперимент имеет смысл оценивать в любых исследованиях, в том числе и лабораторных. Если цена опытов одинакова, затраты на эксперимент пропорциональны числу опытов, которые необходимо поставить для решения данной задачи. Это в значительной мере определяет выбор плана эксперимента.

3.2. Требования к параметру оптимизации

Уметь измерять параметр оптимизации – это значит располагать подходящим прибором. В ряде случаев такого прибора может не существовать или он слишком дорог. Если нет способа количественного измерения результата,

то приходится воспользоваться приемом, называемым *ранжированием* (*ранговым подходом*). При этом параметрам оптимизации присваиваются оценки – ранги по заранее выбранной шкале: двухбалльной, пятибалльной и т.д. Ранговый параметр имеет дискретную ограниченную область определения. В простейшем случае область содержит два значения (да, нет; хорошо, плохо). Это может соответствовать, например, годной продукции и браку.

Ранг – это количественная оценка параметра оптимизации, но она носит условный (субъективный) характер. Мы ставим в соответствие качественному признаку некоторое число – ранг. Для каждого физически измеряемого параметра оптимизации можно построить ранговый аналог. Потребность в построении такого аналога возникает, если имеющиеся в распоряжении исследователя численные характеристики неточны или неизвестен способ построения удовлетворительных численных оценок. При прочих равных условиях всегда нужно отдавать предпочтение физическому измерению, так как ранговый подход менее чувствителен и с его помощью трудно изучать тонкие эффекты.

Следующее требование: *параметр оптимизации должен выражаться одним числом*. Например, регистрация показания прибора.

Еще одно требование, связанное с количественной природой параметра оптимизации, – *однозначность* в статистическом смысле. Заданному набору значений факторов должно соответствовать одно с точностью до ошибки эксперимента значение параметра оптимизации.

Для успешного достижения цели исследования необходимо, чтобы параметр оптимизации действительно оценивал эффективность функционирования системы в заранее выбранном смысле. Это требование является главным, определяющим корректность постановки задачи.

Представление об эффективности не остается постоянным в ходе исследования. Оно меняется по мере накопления информации и в зависимости от достигнутых результатов. Это приводит к последовательному подходу при выборе параметра оптимизации. Так, например, на первых стадиях исследования технологических процессов в качестве параметра оптимизации часто используется выход продукта. Однако в дальнейшем, когда возможность повышения выхода исчерпана, нас начинают интересовать такие параметры, как себестоимость, чистота продукта и т.д.

Говоря об оценке эффективности функционирования системы, важно помнить, что речь идет о системе в целом. Часто система состоит из ряда подсистем, каждая из которых может оцениваться своим локальным параметром оптимизации.

Следующее требование к параметру оптимизации – *требование универсальности или полноты*. Под универсальностью параметра оптимизации понимается его способность всесторонне характеризовать объект. В частности, технологические параметры оптимизации недостаточно универсальны: они не учитывают экономику. Универсальностью обладают, например, обобщенные параметры оптимизации, которые строятся как функции от нескольких частных параметров.

Желательно, чтобы параметр оптимизации имел физический смысл, был простым и легко вычисляемым.

Требование физического смысла связано с последующей интерпретацией результатов эксперимента.

3.3. Факторы оптимизации

Фактором называется измеряемая переменная величина, принимающая в некоторый момент времени определенное значение. Факторы соответствуют способам воздействия на объект исследования.

Выбор факторов и параметров оптимизации является очень ответственным этапом при подготовке лабораторного и промышленного эксперимента. Эта задача бывает почти очевидной, если хорошо проработан вопрос о целях или назначении исследования. Трудности возникают при определении, какие факторы вызывают наблюдаемые эффекты и какими из них необходимо манипулировать, чтобы получить желаемые эффекты. К тому же исследователи сталкиваются со следующим противоречием, когда, с одной стороны, стремятся сделать модель как можно проще, чтобы облегчить ее понимание, упростить задачу формулирования и повысить эффективность моделирования, с другой – желательно получить как можно более точную модель. Следовательно, реальные объекты и системы можно упрощать, но лишь до тех пор, пока это не приводит к существенной потере точности. Необходимо найти правильный баланс. Тут приходится полагаться на здравый смысл, интуицию и предыдущий опыт тех, кто хорошо знаком с системой. Обычно на начальных этапах исследования у многих исследователей наблюдается тенденция к учету чрезмерно большого числа факторов и параметров оптимизации. Однако в этом случае, по утверждению многих авторов, степень понимания явления обратно пропорциональна числу переменных, фигурирующих в его описании. Но и без строгого обоснования исследователи не должны исключать из рассмотрения ни одной переменной.

Решив, какие факторы и параметры оптимизации включить в исследуемую модель, необходимо далее определить функциональные связи между ними, а также значения используемых параметров.

При исследовании технологического процесса и его моделировании возможны следующие две ситуации:

1. Исследователь не может по своему усмотрению устанавливать факторы на определенных уровнях и задавать их сочетания. Эксперимент, проводимый в таких условиях в виде обследования участка или аппарата, называется пассивный.

При пассивном обследовании исследователь не вмешивается в технологический процесс. Анализируется работа объекта при нормальном технологическом режиме. Состояние процесса регулярно фиксируется аппаратчиками и лаборантами в сменных журналах. Регистрация параметров может проводиться группой исследователей непосредственно со щитов управления; одновременно отбираются пробы на анализ.

Обязательное условие пассивного эксперимента – одновременная запись значений переменных и отбор проб на анализ через определенные промежутки времени.

При пассивном наблюдении используются методы математической статистики для обработки информации с целью изучения закономерностей технологического или экономического процесса. Для обработки результатов пассивного наблюдения чаще всего используют дисперсионный, корреляционный и регрессионный анализы.

Пассивный эксперимент имеет следующие недостатки:

– диапазон изменений факторов незначителен и не превышает значений, ограничиваемых технологической инструкцией;

– влияние возмущающих параметров может оказаться более существенным, чем изменение контролируемых факторов. Указанные недостатки снижают надежность результатов. Но, несмотря на эти недостатки, пассивный эксперимент широко применяется для глубокого анализа результатов работы металлургических процессов и аппаратов.

Учитывая, что результаты пассивного эксперимента получаются попутно, без особых затрат, полученной информацией не следует пренебрегать. Следует только не забывать возможность некоторого искажения оценок.

2. Исследователь задает параметры и их сочетания (активный эксперимент). При активном эксперименте изменение параметров проводится в более широких пределах, чем при выполнении пассивного эксперимента. По специальной программе выполняется *однофакторный эксперимент – варьирование одного фактора при стабилизации других (метод Гаусса–Зайделя); многофакторный – одновременное изменение нескольких факторов (градиентные методы, метод Бокса–Уилсона, симплексный метод и т.д.)*. Эти методы составляют основу математической теории планирования эксперимента.

Активный эксперимент позволяет получить более полную информацию о процессе, но его проведение имеет определенные организационные трудности. Объект должен быть хорошо управляемым технологически, относительно независимым.

Так же, как и параметр оптимизации, каждый фактор имеет область определения. Фактор считают заданным, если вместе с его названием указана область его определения.

Под областью определения понимается совокупность всех значений, которые в принципе может принимать данный фактор.

Совокупность значений фактора, которая используется в эксперименте, является подмножеством из множества значений, образующих область определения. Область определения может быть непрерывной и дискретной. Однако в основном в задачах планирования эксперимента используются дискретные области определения. Так, для факторов с непрерывной областью определения, таких как температура, время, количество вещества и т.п., всегда выбираются дискретные множества уровней.

В практических задачах области определения факторов, как правило, ограничены. Ограничения могут носить принципиальный либо технический характер.

Факторы классифицируют в зависимости от того, является ли фактор переменной величиной, которую можно оценивать количественно: измерять, взвешивать, титровать и т.п., или же он – некоторая переменная, характеризующаяся качественными свойствами.

Факторы разделяются на количественные и качественные.

Качественные факторы – это разные вещества, разные технологические способы, аппараты, исполнители и т.д.

Хотя качественным факторам не соответствует числовая шкала в том смысле, как это понимается для количественных факторов, однако можно построить условную порядковую шкалу, которая ставит в соответствие уровням качественного фактора числа натурального ряда, т.е. производит кодирование. Порядок уровней может быть произволен, но после кодирования он фиксируется.

Качественным факторам не соответствует числовая шкала, и порядок уровней факторов не играет роли.

Время реакции, температура, концентрация реагирующих веществ, скорость подачи веществ, величина рН – это примеры наиболее часто встречающихся *количественных факторов*. Различные реагенты, адсорбенты, вулканизирующие агенты, кислоты, металлы и прочее являются примером уровней качественных факторов.

При планировании эксперимента *факторы должны быть управляемыми*. Это значит, что экспериментатор, выбрав нужное значение фактора, может его поддерживать постоянным в течение всего опыта, т.е. может управлять фактором. Планировать эксперимент можно только в том случае, если уровни факторов подчиняются воле экспериментатора.

Чтобы точно определить фактор, нужно указать последовательность действий (операций), с помощью которых устанавливаются его конкретные значения (уровни). Такое определение фактора будем называть операциональным. Так, если фактором является давление в некотором аппарате, то совершенно необходимо указать, в какой точке и с помощью какого прибора оно измеряется и как оно устанавливается. Введение операционального определения обеспечивает однозначное понимание фактора.

С операциональным определением связаны выбор размерности фактора и точность его фиксирования.

Точность замера факторов должна быть возможно более высокой. Степень точности определяется диапазоном изменения факторов. При изучении процесса, который длится десятки часов, нет необходимости учитывать доли минуты, а в быстрых процессах необходимо учитывать, быть может, доли секунды.

Факторы должны быть непосредственными воздействиями на объект. Факторы должны быть однозначны. Трудно управлять фактором, который, является функцией других факторов. Но в планировании могут участвовать сложные факторы, такие, как соотношения между компонентами, их логарифмы и т.п.

При планировании эксперимента обычно одновременно изменяется несколько факторов. Поэтому очень важно сформулировать требования, которые предъявляются к совокупности факторов. Прежде всего выдвигается

требование совместимости. Совместимость факторов означает, что все их комбинации осуществимы и безопасны. Это очень важное требование.

При планировании эксперимента важна независимость факторов, т.е. возможность установления фактора на любом уровне вне зависимости от уровней других факторов. Если это условие невыполнимо, то невозможно планировать эксперимент.

4. МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБЪЕКТА ИССЛЕДОВАНИЯ

Детальный анализ сложной ситуации в химико-технологических процессах и аппаратах представляет собой трудную задачу. Исследователи прибегают к некоторой формализации представлений о металлургическом объекте, к упрощениям, иначе говоря, к моделированию.

Моделирование – это метод изучения объектов, систем, при котором вместо интересующего оригинала используется эксперимент на модели, а результаты количественно переносятся на оригинал. Модель служит средством, помогающим в объяснении, понимании или совершенствовании объектов и систем. Модель может быть или точной копией этого объекта (хотя и выполненной из другого материала и в другом масштабе), или отображать некоторые характерные свойства объекта в абстрактной форме. Модель приближительна, эскизна и может уточняться.

К процессу моделирования предъявляют два основных требования:

1. Эксперимент на модели должен быть проще, быстрее, экономичнее, безопаснее.

2. Исследователю должно быть известно правило, по которому проводится расчет параметров оригинала на основе испытания модели. Без этого даже самое лучшее исследование окажется бесполезным.

Теория эксперимента имеет дело в основном с моделями реальных объектов, количественное представление которых получено на основе экспериментальных исследований (в отличие от теоретических моделей).

4.1. Статистический анализ экспериментальных данных

Спецификой экспериментальной статистической модели является то, что она не может точно описать поведение объекта исследований в каждом конкретном опыте, т.е. нельзя указать точное значение y (C), даже если функция отклика определена точно, а векторы x (B) и D стабилизированы. Статистическая модель описывает поведение объекта в среднем, характеризуя неслучайные свойства объекта, которые в полной мере могут проявиться лишь при многократном повторении опытов в неизменных условиях. Экспериментатор не может предсказать точное значение y в каждом конкретном опыте, но с помощью соответствующей статистической модели может указать, вокруг какого центра будут группироваться значения y при данном сочетании факторов x и D , если для этого сочетания опыты повторять многократно; какова степень разброса y и т.д.

В настоящее время для статистической обработки экспериментальных данных, проведения дисперсионного и регрессионного анализов используют специальные компьютерные программы (Excel, STATISTICA, Minitab, PlanExp B-D13 и др.). Наиболее широкое распространение получила программа обработки электронных таблиц Excel операционной системы Windows.

4.2. Построение математической модели по результатам эксперимента

Математическая модель представляет собой зависимость между параметрами и факторами процесса, полученную теоретически или экспериментально. Математическая модель компактна и удобна для исследования и управления реальным процессом.

Применение математической модели позволяет:

- выбрать оптимальный технологический режим процесса;
- сократить план исследовательских работ при разработке технологии производства;
- создать систему управления процессом.

При экспериментальном изучении функциональной зависимости y от x производят ряд измерений величины y при различных значениях величины x .

Результаты могут быть представлены в виде таблиц или графиков. Задача заключается в аналитическом представлении искомой функциональной зависимости, т.е. в подборе формулы, описывающей результаты эксперимента.

Особенность задачи состоит в том, что наличие случайных ошибок измерения (или, как говорят, наличие «шума» в эксперименте) делает невозможным подбор такой формулы, которая точно описала бы все опытные значения.

Прежде всего, исследователь должен выбрать вид кривой, для которой он будет искать аппроксимирующее уравнение. В большинстве компьютерных программ наиболее распространенными видами аппроксимирующих кривых являются прямая линия, квадратная парабола, парабола n -й степени, гипербола, логарифмическая кривая. Чтобы решить, какую аппроксимацию использовать, следует изучить корреляционное поле и сравнить расположение экспериментальных точек с формой кривых, соответствующих различным уравнениям. Нахождение оценок параметров и исследование получаемых моделей получили название *регрессионного анализа*.

Одним из наиболее распространенных методов регрессионного анализа является метод наименьших квадратов, первое изложение которого было дано французским математиком Анриен Мари Александром (1752–1833) и далее разработано немецким ученым Карлом Фридрихом Гауссом (1777–1855).

В настоящее время регрессионный анализ, включая нахождение коэффициентов регрессии, выполняется с помощью компьютерных программ, в частности MS Excel.

4.3. Проверка адекватности модели

В ходе активного эксперимента и в результате пассивного накопления результатов измерений может быть получена модель процесса в виде

математического уравнения. Однако при моделировании происходит формализация связей процесса, из-за чего возможна потеря некоторой информации об объекте. Иногда более тонкие связи или менее важные параметры не учитываются, т.е. модель описывает лишь некоторые свойства процесса с удовлетворяющей исследователя точностью.

Основное требование к математической модели заключается в ее пригодности для решения поставленной задачи и адекватности процессу в пределах ошибки воспроизводимости.

Для проверки гипотезы об адекватности чаще всего принято использовать критерий Фишера и критерий Кохрена.

4.3.1 Критерий Фишера

Критерий Фишера позволяет сравнивать величины выборочных дисперсий двух независимых выборок. Для вычисления $F_{эмт}$ нужно найти отношение дисперсий двух выборок, причем так, чтобы большая по величине дисперсия находилась бы в числителе, а меньшая – в знаменателе. Формула вычисления критерия Фишера:

$$F_{эс.} = \frac{S^2_{ад}}{S^2_{воспр}},$$

где $S^2_{ад}$ – дисперсия адекватности или остаточная дисперсия (большая);

$S^2_{воспр}$ – дисперсия воспроизводимости или дисперсия выходного параметра (меньшая).

Так как согласно условию критерия величина числителя должна быть больше или равна величине знаменателя, то значение $F_{эсп}$ всегда будет больше или равно единице.

Полученная величина сравнивается с табличной величиной F -критерия. Однородность выполняется, если $F_{эсп.}$ не превышает $F_{табл.}$. Рассчитать $F_{эсп.}$ и найти $F_{табл.}$ можно, например, с помощью мастера функций в программе Excel.

Дисперсия адекватности определяется выражением:

$$S^2_{ад} = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta y_i^2}{f},$$

где $\Delta y_i = y_{i \text{ эксп}} - y_{i \text{ расч}}$;

f – число степеней свободы, которое равно числу различных опытов, результаты которых используются при подсчете коэффициентов регрессии, минус число определяемых коэффициентов регрессии уравнения. Для линейного уравнения справедливо:

$$f = n - k + 1,$$

где k – число факторов;

$k + 1$ – число коэффициентов уравнения регрессии.

Табличное значение критерия Фишера $F_{табл.}$ можно найти, например, с помощью программы Excel. Для определения табличного значения критерия Фишера вначале задают желаемую надежность (вероятность) вывода P или уровень значимости ошибки $(1-P)$. Затем при соответствующих числах степеней свободы f_1 и f_2 определяют $F_{табл.}$. Например, выбираем уровень значимости

ошибки 0,05, т.е. дальнейшее утверждение будет справедливо с вероятностью 95 %, или вероятностью ошибки 5 %. По таблице критерия Фишера находим $F_{табл.}$ и, если $F_{эксп.} \geq F_{табл.}$, то дисперсии неоднородны с вероятностью 95 %.

При выполнении неравенства $F_{эксп.} \leq F_{табл.}$ уравнение регрессии адекватно описывает экспериментальные данные. В противном случае принимается альтернативная гипотеза.

4.3.2 Критерий Кохрена

Критерий Кохрена используют, если сравниваемое количество дисперсий больше двух, одна дисперсия значительно превышает остальные и во всех точках имеется одинаковое число повторных опытов.

Критерий Кохрена – это отношение максимальной дисперсии к сумме всех дисперсий:

$$G_{эксп} = \frac{S_{max}^2}{\sum S_i^2}$$

Гипотеза об однородности дисперсий подтверждается, если экспериментальное значение критерия Кохрена не превышает табличного значения:

$$G_{эксп.} \leq G_{табл.}$$

Определение $G_{табл.}$ производится по числам степеней свободы $f = m - 1$ (где m – количество повторных опытов в серии) серий измерений (дисперсий) и количеству сравниваемых дисперсий n при заданной надежности вывода P .

Например, $G_{табл.} = 0,6798$ при $P = 0,95$; $f = 1$; $n = 8$.

Задача 8. Пусть на шести приборах произведено по семь измерений, которые дали эмпирические дисперсии: 3,82; 1,70; 1,30; 0,92; 0,78 и 0,81. Необходимо проверить гипотезу однородности дисперсий.

Решение. Вычисляем отношение:

$$G_{эксп} = \frac{3,82}{3,82 + 1,70 + 1,30 + 0,92 + 0,78 + 0,81} = 0,41$$

Это отношение оказывается меньше критического значения $G_{табл.} = 0,4184$ при $n = 6$ и $f = 7 - 1 = 6$ для доверительной вероятности 0,95. Поэтому данные дисперсии с надежностью вывода 95 % однородны. Если бы такие же данные встретились при 11 измерениях для каждого прибора, то с доверительной вероятностью 0,99 можно считать первую дисперсию 3,82 существенно больше остальных $G_{табл.} = 0,408$ при $P = 0,99$; $f = 10$; $n = 6$, а дисперсии неоднородными.

Расчет критерия Кохрена может быть произведен с помощью программ Excel, STATISTICA и др.

4.4. Проверка значимости коэффициентов уравнения регрессии. Критерий Стьюдента

Проверка значимости каждого коэффициента проводится независимо, ее можно осуществлять двумя равноценными способами:

- 1) построением доверительного интервала;
- 2) проверкой по t-критерию Стьюдента.

Для обоих способов необходимо найти среднее квадратичное отклонение коэффициентов уравнения регрессии. – $S_{\text{коэф}}$, которое зависит от дисперсии воспроизводимости результатов по всем проведенным опытам $S_{\{K\}}^2$ и вычисляется по формуле:

$$S_{\text{коэф}} = \sqrt{\frac{S_{\{K\}}^2}{n \cdot m}},$$

где $S_{\{K\}}^2$ – дисперсия воспроизводимости:

$$S_{\{K\}}^2 = \frac{1}{n(m-1)} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m (K_{ji} - \bar{K}_j)^2,$$

где m – число опытов в каждом эксперименте, например, 3;

n – число экспериментов, например, 8;

K_{ji} – результат отдельного i -го наблюдения в j -м эксперименте;

\bar{K} – среднее выборочное значение наблюдений для j -го эксперимента (усредненный результат параллельных опытов).

Тогда:

$$S_{\text{коэф}} = \sqrt{\frac{0,13}{24}} = 0,074.$$

Доверительный интервал задается верхней и нижней границами:

$$b_i + \Delta b_i$$

$$b_i - \Delta b_i.$$

Чем уже доверительный интервал, тем с большей уверенностью можно говорить о значимости коэффициента. Доверительный интервал можно рассчитать, как произведение:

$$\Delta b_i = \pm t_{\text{кр}} \cdot S_{\text{коэф}},$$

где $t_{\text{кр}}$ – табличное значение критерия Стьюдента при числе степеней свободы, с которыми определялась дисперсия воспроизводимости и выбранном уровне значимости (обычно 0,05).

Критерий Стьюдента, направленный на оценку различий величин средних значений двух выборок, которые распределены по нормальному закону, был разработан Уильямом Госсетом (1876-1937) для оценки качества пива на пивоваренных заводах Гиннеса в Дублине (Ирландия). В связи с обязательствами перед компанией по неразглашению коммерческой тайны статья У. Госсета вышла в 1908 году в журнале «Биометрика» под псевдонимом «Student» (Студент).

Формулу для доверительного интервала можно записать в следующей эквивалентной форме:

$$\Delta b_i = \pm t_{\text{кр}} \cdot \frac{S_K}{\sqrt{n}}.$$

Коэффициент значим, если его абсолютная величина больше доверительного интервала:

$$| b_i | > | \Delta b_i | .$$

Из таблиц распределения Стьюдента по числу степеней свободы $n(m-1)=8 \cdot 2=16$ при уровне значимости $\alpha = 0,05$ находим $t_{кр.} = 2,12$. Следовательно, $t_{кр.} \cdot S_{коэф.} = 2,12 \cdot 0,074 = 0,156$.

Экспериментальное значение критерия Стьюдента рассчитывается по формуле:

$$t_{эксн.} = \frac{|b_i|}{S_K} .$$

Вычисленное экспериментальное значение t-критерия сравнивается с табличным значением при заданной доверительной вероятности и соответствующем числе степеней свободы. Если соблюдается условие $t_{эксн.} < t_{табл.}$, то коэффициент b_i значим.

Для проверки значимости коэффициентов полученного уравнения регрессии используются компьютерные программы, в том числе программы MS Excel, STATISNICA и др. Они позволяют одновременно провести дисперсионный, корреляционный и регрессионный анализ.

5. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПЛАНИРОВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА

5.1. Планирование экстремальных поисковых экспериментов

Долгое время математическая статистика применялась только для обработки экспериментальных результатов. Математик не вмешивался в постановку эксперимента и процесс экспериментирования не был формализован.

Оказалось, что наибольший эффект математическая статистика может принести тогда, когда ее аппарат используется на самом первом этапе – при планировании эксперимента. Экстремальным экспериментом называется вся совокупность опытов, обеспечивающая получение оптимального значения целевой функции. Планирование экстремального эксперимента позволяет:

- уменьшить его ошибку;
- сократить количество опытов;
- получить математические модели, обладающие некоторыми оптимальными свойствами;
- принимать решение на основе четких формализованных правил.

До начала XX века научных методов планирования эксперимента не было. Идея статистического метода планирования эксперимента принадлежит английскому статистику Рональду Фишеру, который в своих работах «Математические основы статистики» (1921 г.) и «Статистические методы исследований» (1925 г.) впервые показал целесообразность одновременного варьирования всеми факторами в противовес широко распространенному однофакторному эксперименту.

В начале 50-х годов американский математик Дж. Бокс и его коллеги

существенно развили и обогатили идеи и процедуры, предложенные Р. Фишером. В серии публикаций они представили варианты планирования экспериментов в зависимости от степени изученности процесса, инженерных задач моделирования, числа и характера факторов, постоянства условий проведения эксперимента и т.д. Таким образом, были заложены основы методики планирования и обработки результатов физико-химических и технологических экспериментов с использованием аппарата математической статистики, матричной алгебры, численного анализа и других разделов математики.

5.2. Метод Гаусса–Зайделя

Этот метод предусматривает поочередное нахождение частных экстремумов целевой функции по каждому фактору x_i ($i = 1, 2, 3, \dots, k$). При этом на каждом i -м этапе стабилизируют $(k - 1)$ факторов и варьируют только один, i -й фактор.

Покажем графическую интерпретацию метода для двух факторов x_1 и x_2 . Функцию отклика y изобразим топографическим способом с помощью замкнутых линий постоянного уровня (рис. 2).

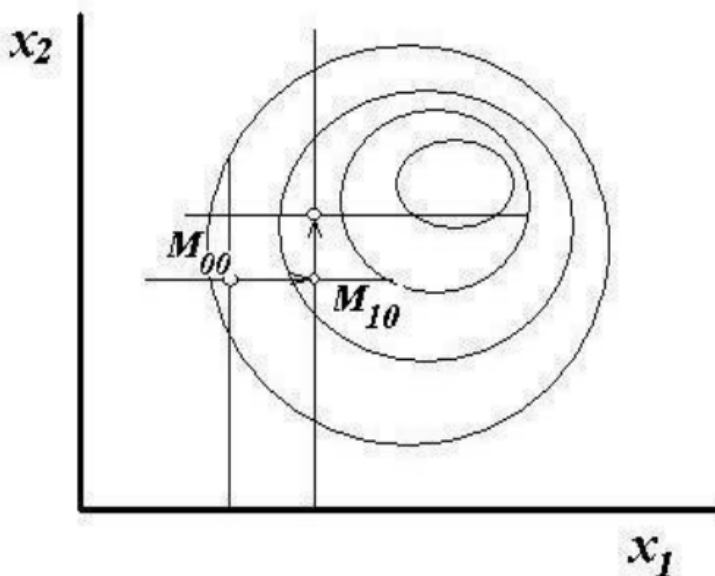


Рис. 2. Графическое изображение движения к оптимуму по методу Гаусса–Зайделя

Экспериментатор решает начать с влияния фактора x_1 на параметр оптимизации y . Для этого он стабилизирует x_2 . Выбирает интервал варьирования Δx_1 по фактору x_1 . После постановки эксперимента определяют наилучшую точку M_{10} . При этом значении стабилизируют x_1 и получают зависимость от x_2 и т.д.

Таким образом, в каждой последующей серии один из влияющих факторов закрепляется на определенном уровне (лучшем, по результатам прошлой серии),

а второй меняется, пока не находится относительный оптимум – оптимум для данной серии. Движение по графику для двухфакторного эксперимента происходит по горизонтальным и вертикальным ступенькам и продолжается до тех пор, пока не достигается область оптимума.

Метод Гаусса–Зайделя весьма широко распространен в практике эксперимента как экстремального, так и других его разновидностей.

Как правило, экспериментаторы стараются изменять варьируемые факторы по очереди, чтобы в каждой серии опытов изменялся только один фактор, а остальные оставались неизменными. Это связано с тем, что в данном методе результаты каждой серии опытов представляются как зависимость исследуемой величины только от одного фактора – такую зависимость можно изобразить графически, для нее можно подобрать эмпирическую функцию и т.д.

Достоинства метода Гаусса–Зайделя:

- 1) очевидная простота стратегии и наглядность;
- 2) высокая помехозащищенность в смысле выбора направления движения.

Недостатки метода Гаусса–Зайделя:

1) путь к главному экстремуму оказывается обычно долгим, особенно при большом числе k -факторов;

2) в условиях промышленного производства трудно стабилизировать ($k - 1$) фактор на длительное время;

3) если поверхность отклика имеет сложную форму (узкие гребни, овраги и т.п.), то использование метода может привести к ложному ответу на вопрос о месте расположения экстремума;

4) метод не дает информации о взаимодействиях факторов.

Расчеты по методу Гаусса–Зайделя может быть произведены с помощью программ Scilab, Excel и др.

5.3. Метод Бокса–Уилсона

Метод Бокса–Уилсона состоит из двух основных этапов:

1. С помощью специально спланированных пробных опытов проводят изучение характера поверхности отклика в районе первоначально выбранной точки факторного пространства. Реализацию пробных опытов вблизи базовой точки осуществляют методом полного факторного (ПФЭ) или дробного факторного эксперимента (ДФЭ).

ПФЭ – это эксперимент, реализующий все возможные неповторяющиеся комбинации уровней независимых факторов. Сокращенный план носит название ДФЭ.

2. На основе математического описания поверхности отклика вблизи базовой точки (по результатам пробных опытов) определяют направление движения и совершают крутое восхождение в сторону оптимума.

5.3.1 Полный факторный эксперимент

Математическое описание поверхности отклика объекта в окрестности точки базового режима можно получить варьированием каждого из факторов на

двух уровнях. Покажем это для простейшего случая двухфакторной задачи.

В этом случае число опытов, необходимых для реализации возможных сочетаний уровней факторов, равно:

$$n = 2^k = 2^2 = 4,$$

где n – число опытов, k – число факторов, 2 – число уровней, а тип эксперимента обозначают 2^2 .

Представим область факторного пространства, подлежащую изучению, в виде прямоугольника 1 – 2 – 3 – 4 с центром в точке $(x_{10}; \tilde{x}_{20})$ (рис.3). Волнистая линия обозначает выражение факторов в натуральных величинах (например, в величинах для измерения температур, давления, скорости нагрева и т.д.).

Попробуем перевести натуральные факторы в безразмерные величины. Для этого используется метод кодирования факторов. Как увидим далее, кодирование факторов значительно упрощает расчеты и представление материалов, а переход к безразмерному масштабу изменения факторов дает возможность их взаимного сопоставления.

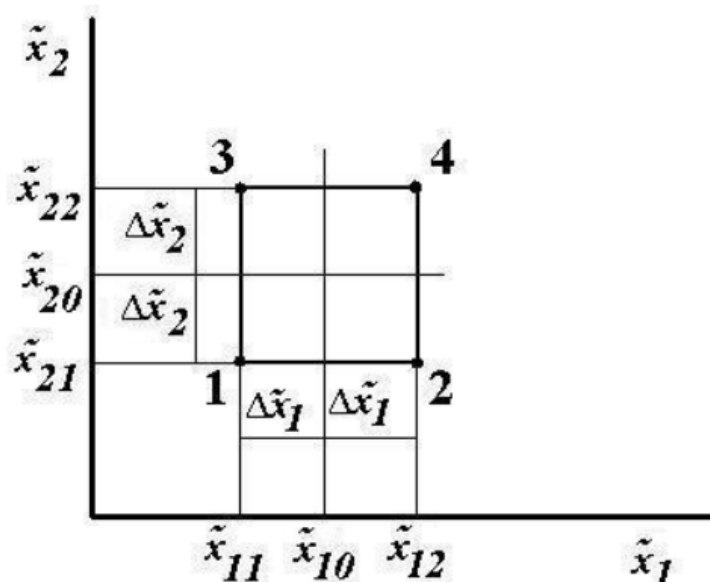


Рис. 3. Вид факторного пространства в натуральных величинах

Закодируем значения переменных по формуле:

$$x_{ij} = \frac{(x_{ij} - x_{i0})}{\Delta x_i},$$

где \tilde{x}_{i0} – значение i -го фактора в центре факторного пространства. Его принято называть нулевым уровнем фактора;

\tilde{x}_{ij} – значение i -го фактора в точках $j = 1, 2, 3, 4$;

$\Delta \tilde{x}_i$ – интервал варьирования фактора.

Это действие соответствует переходу к новой безразмерной системе координат с началом в центре исследуемой области. Подставив в эту формулу вместо \tilde{x}_{ij} координаты точек 1, 2, 3, 4, получим их в новой системе (рис. 4). Значения (+1) и (-1) называются верхним и нижним уровнями факторов.

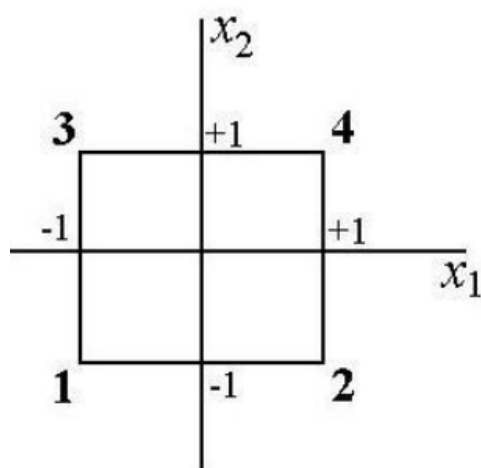


Рис. 4. Вид кодированного факторного пространства в безразмерных координатах

Сделаем несколько замечаний о том, как производится выбор нулевого уровня и интервалов варьирования факторов при постановке экспериментов.

В промышленных условиях нулевой уровень соответствует значениям факторов при существующем технологическом режиме.

Сложнее обстоит дело с интервалом варьирования. Интервал варьирования – это расстояние на координатной оси между основным и верхним или нижним уровнями. Таким образом, задача выбора уровней сводится к задаче выбора интервалов варьирования.

На выбор интервалов варьирования накладываются естественные ограничения сверху и снизу. Они не могут быть меньше той ошибки, с которой экспериментатор фиксирует уровни факторов. Иначе верхний и нижний уровни окажутся неразличимыми. С другой стороны, интервал не может быть настолько большим, чтобы верхний или нижний уровень оказался за пределами области определения.

Определим координаты точек 1, 2, 3, 4 или условия опытов (рис. 3) и запишем их в виде таблицы 1.

Таблица 1 – Матрица планирования экспериментов типа 2^2

№ опыта	X_1	X_2	y
1	-1	-1	y_1
2	+1	-1	y_2
3	-1	+1	y_3
4	+1	+1	y_4

Построенный таким способом план экспериментов обладает рядом весьма ценных свойств:

1. Содержит все комбинации двух значений факторов, равных (+1) и (-1).

2. Для каждого столбца справедливо:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij}^2 = n, \quad i = 1, 2, 3, \dots, k$$

где n – число опытов.

Это свойство иногда называют условием нормировки и формулируют следующим образом.

Сумма квадратов элементов каждого столбца равна числу опытов. Это следствие того, что значения факторов в матрице задаются $+1$ и -1 .

3. Следующее свойство называется симметричностью относительного центра эксперимента – алгебраическая сумма элементов вектор-столбца каждого фактора равна нулю:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 0,$$

где i – номер фактора ($i = 1, 2, 3, \dots, k$); n – число опытов.

Перечисленные свойства относятся к отдельным столбцам.

4. Свойство ортогональности матрицы планирования относится к совокупности столбцов:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} x_{uj} = 0, \quad i \neq u; \quad i, u = 1, 2, \dots, k.$$

Сумма почленных произведений любых двух вектор-столбцов матрицы равна нулю. Поэтому такие планы называют ортогональными. Их называют также планами факторного эксперимента *первого порядка*.

Под планами *первого порядка* понимают такие планы, которые позволяют провести эксперимент для отыскания уравнения регрессии, содержащего только первые степени факторов и их произведения. Планы *второго порядка* позволяют провести эксперимент для отыскания уравнения регрессии, содержащего и вторые степени факторов.

Свойство ортогональности позволяет избавиться от недостатков регрессионного анализа и значительно упростить вычислительные операции, возникающие при расчете коэффициентов регрессии.

Запись матрицы планирования для многих факторов громоздка. Для ее сокращения удобно ввести условные буквенные обозначения. Строку матрицы планирования обозначают строчными буквами латинского алфавита. При этом латинские буквы присваивают лишь факторам, находящимся на верхнем уровне. Порядковый номер фактора соответствует букве латинского алфавита: $x_1 - a$; $x_2 - b$; $x_3 - c$ и т.д. Опыт со всеми факторами на нижних уровнях обозначим (1). Матрица планирования вместе с принятыми буквенными обозначениями имеет вид (табл. 2).

Таблица 2 – Матрица планирования типа 2^2 с буквенными обозначениями

№ опыта	x_1	x_2	Обозначение строк	y
1	-1	-1	(1)	y_1
2	+1	-1	<i>a</i>	y_2
3	-1	+1	<i>в</i>	y_3
4	+1	+1	<i>ав</i>	y_4

Теперь можно пользоваться только буквенными обозначениями: (1), *a*, *в*, *ав*.

Задача 1. Изучали ионообменное разделение смесей группы редкоземельных элементов в кислых растворах. Параметром оптимизации является содержание неодима в выходном растворе (элюате) в процентах. Рассматривали влияние двух факторов: \tilde{X}_1 – концентрация элюанта (входного раствора), мас. %, \tilde{X}_2 – рН элюанта. Необходимо выбрать нулевой уровень и интервал варьирования.

Решение. Начнем с анализа известной информации о процессе и установления области определения факторов. Известно, что предел растворимости вещества при нормальной температуре $\tilde{X}_1 = 3$, что является верхним пределом. Также известно, что с понижением концентрации увеличивается время протекания процесса разделения. При $\tilde{X}_1 = 0,5$ время протекания реакции находится в разумных пределах, что принимаем за нижнюю границу фактора. Предварительные опыты показали, что процесс разделения возможен в интервале рН от 3 до 8, что и принимаем за соответственно нижний и верхний пределы определения фактора \tilde{X}_2 .

Известное оптимальное значение фактора $\tilde{X}_1 = 1,5$ и $\tilde{X}_2 = 8$. Если величину фактора $\tilde{X}_{10} = 1,5$ можно принять за нулевой уровень, то фактор \tilde{X}_2 находится на границе области определения. Поэтому, исходя из требований симметрии экспериментальных точек относительно нулевого уровня, принимаем $\tilde{X}_{20} = 7$.

Учитывая границы области определения факторов, принимаем достаточно широкий интервал варьирования: $\Delta\tilde{X}_1 = 0,5$; $\Delta\tilde{X}_2 = 1,0$, что составляет 20 % от области определения.

5.3.2 Составление ортогонального плана для числа факторов больше двух

Если для двух факторов все возможные комбинации уровней можно найти прямым перебором (или просто запомнить), то с ростом числа факторов возникает необходимость в некотором приеме построения матриц.

Из многих возможных обычно используется два приема, основанных на

переходе от матриц меньшей размерности к матрицам большей размерности.

1. Рассмотрим первый прием. При добавлении нового фактора каждая комбинация уровней исходного плана или матрицы 2^{k-1} встречается дважды в сочетании с нижним и верхним уровнями. Отсюда, естественно, появляется прием: дважды переписывают план полного факторного эксперимента для числа факторов $(k-1)$. В случае для трехфакторного эксперимента необходимо дважды переписать план двухфакторного эксперимента. Колонку для k -го фактора составляют таким образом, чтобы половина опытов (например, верхняя половина) соответствовала нижнему уровню (-1) , а вторая половина – верхнему $(+1)$, как это показано в табл. 3.

Таблица 3 – Матрица планирования эксперимента 2^3

№ опыта	x_1	x_2	x_3	y
1	-1	-1	-1	y_1
2	+1	-1	-1	y_2
3	-1	+1	-1	y_3
4	+1	+1	-1	y_4
5	-1	-1	+1	y_5
6	+1	-1	+1	y_6
7	-1	+1	+1	y_7
8	+1	+1	+1	y_8

2. Рассмотрим второй прием. Если посмотреть на только что построенную матрицу планирования, то увидим закономерность чередования знаков и новый прием составления плана. В первом столбце знаки меняются поочередно, во втором столбце они чередуются через 2, в третьем – через 4, по аналогии можно продолжить: в четвертом – через 8, т.е. через 2^{k-1} . Этот прием получил название правила чередования знаков.

Таким образом, из этих приемов построения плана полного факторного эксперимента следует, что при последовательном увеличении числа переменных на единицу количество точек удваивается, т.е. число точек, содержащихся в k -факторном плане, составляет $n = 2^k$.

5.3.3 Расчет коэффициентов регрессии по результатам эксперимента

По результатам полного факторного эксперимента можно получить уравнение в форме некоторого полинома неполного высшего порядка:

$$\hat{y} = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i x_i + \sum_{i, l=1}^k b_{il} x_i x_l + \dots,$$

где \hat{y} – расчетное значение отклика, являющееся оценкой для математического ожидания $M(y)$;

b_0, b_i, b_{il} , – выборочные коэффициенты регрессии, они также являются оценками для теоретических коэффициентов $\beta_0, \beta_i, \beta_{il}$;

k – число независимых факторов.

При использовании для постановки экспериментов плана ПФЭ формулы для расчета коэффициентов регрессии довольно сильно упрощаются:

$$b_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i,$$
$$b_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ij} y_i,$$

где n – число опытов;

$j = 1, 2, 3, \dots, k$;

k – число факторов.

Все линейные коэффициенты независимы, так как в формулы для их расчета входят только свои одноименные переменные. Поэтому каждый коэффициент характеризует роль соответствующей переменной в процессе или силу влияния факторов. Чем больше численная величина коэффициента, тем большее влияние оказывает фактор. Если коэффициент имеет знак плюс, то с увеличением значения фактора параметр отклика (оптимизации) увеличивается, а если минус – уменьшается. Величина коэффициента соответствует вкладу данного фактора в величину параметра оптимизации при переходе фактора с нулевого уровня на верхний или нижний.

Факторы, имеющие коэффициенты, незначимо отличающиеся от нуля, могут быть выведены из состава уравнения; их влияние на параметр отклика будет отнесено к ошибке эксперимента.

Как видно из уравнения в форме полинома, в зависимости от числа факторов в полином неполного высшего порядка, кроме линейных членов, входят выражения, представляющие произведение нескольких факторов. Они называются эффектами взаимодействия.

Например, при трех факторах может быть получено уравнение:

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_{12} x_1 x_2 + b_{13} x_1 x_3 + b_{23} x_2 x_3 + b_{123} x_1 x_2 x_3,$$

в которое входят три двойных (b_{12}), (b_{13}), (b_{23}) эффекта взаимодействия и один тройной (b_{123}).

Эффекты взаимодействия характеризуют взаимосвязь факторов в процессе, т.е. влияние i -го фактора на связь l -го фактора с параметром оптимизации.

Часто эффекту взаимодействия удастся приписать самостоятельный физический смысл.

Поясним это следующим примером. Пусть на некоторый химический процесс влияют два фактора: температура и время реакции. В области низких температур увеличение времени повышает выход продукта. При переходе в область высоких температур эта закономерность нарушается. Здесь, напротив, необходимо уменьшить время реакции. Это и есть проявление эффекта взаимодействия.

Полный факторный эксперимент позволяет количественно оценивать эффекты взаимодействия. Для этого надо, пользуясь правилом перемножения

столбцов, получить столбец произведения двух факторов. При вычислении коэффициента, соответствующего эффекту взаимодействия, с новым вектором-столбцом можно обращаться так же, как и с вектором-столбцом любого фактора. Для полного факторного эксперимента 2^2 матрица планирования с эффектом взаимодействия имеет вид (табл. 4).

Таблица 4 – Матрица планирования эксперимента 2^2 с эффектом взаимодействия

№ опыта	x_0	x_1	x_2	x_1x_2	y
1	+1	-1	-1	+1	y_1
2	+1	+1	-1	-1	y_2
3	+1	-1	+1	-1	y_3
4	+1	+1	+1	+1	y_4

Очень важно, что при добавлении столбцов эффектов взаимодействия все рассмотренные свойства матриц планирования сохраняются.

Коэффициент эффекта взаимодействия b_{12} вычисляется обычным путем:

$$b_{12} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{1i}x_{2i}y_i.$$

При расчете эффекта взаимодействия, как и раньше при расчете линейных коэффициентов регрессии матрицы планирования типа 2^k , необходимо помнить, что при подстановке значений факторов x_i берут кодированные значения, например:

$$b_{12} = \frac{(+1)y_1 + (-1)y_2 + (-1)y_3 + (+1)y_4}{4}.$$

Столбцами x_1 и x_2 задано планирование. По ним непосредственно определяются условия опытов, а столбцы x_0 и x_1x_2 служат только для расчета. Некоторые авторы для вычисления b_0 вводят в матрицу планирования вектор-столбец фиктивной переменной x_0 , которая во всех опытах принимает значения +1. При этом уравнение для вычисления b_i принимает вид приведенного для расчета b_0 уравнения.

Задача 2. Продолжая планирование эксперимента задачи 1, построили матрицу планирования и получили результаты отклика (параметра оптимизации) (табл. 5).

Таблица 5 – Матрица планирования эксперимента задачи 6.2

№ опыта	x_0	x_1	x_2	x_1x_2	Буквенные обозначение строк	y
1	+1	-1	-1	+1	(I)	95
2	+1	+1	-1	-1	A	90
3	+1	-1	+1	-1	B	85
4	+1	+1	+1	+1	ab	82

Необходимо для движения к точке оптимума построить математическую модель процесса.

Решение. Рассчитаем коэффициенты регрессии:

$$b_0 = \frac{+95 + 80 + 85 + 82}{4} = 88,0;$$

$$b_1 = \frac{-95 + 90 - 85 + 82}{4} = -2,0;$$

$$b_2 = \frac{-95 - 90 + 85 + 82}{4} = -4,5$$

$$b_{12} = \frac{+95 - 90 - 85 + 82}{4} = 0,5$$

Математическая модель имеет вид:

$$y = 88,0 - 2,0x_1 - 4,5x_2 + 0,5x_1x_2$$

5.3.4 Дробный факторный эксперимент

Сначала рассмотрим соотношение количества факторов k , числа опытов n , линейных коэффициентов регрессии q и степеней свободы f :

k	3	4	5	6	7
$n = 2^k$	8	16	32	64	128
$q = k + 1$	4	5	6	7	8
$f = n - q$	4	11	26	57	120

Итак, мы определили, что количество опытов в полном факторном эксперименте значительно превосходит число определяемых коэффициентов линейной модели. Другими словами, полный факторный эксперимент обладает большой избыточностью опытов. Поэтому возникает вопрос: нельзя ли

сократить число опытов, необходимых для определения коэффициентов регрессии? Иначе говоря, как построить ортогональный план, содержащий меньшее число опытов, чем ПФЭ?

Начнем с самого простого – полного факторного эксперимента 2^2 .

Пользуясь таким планированием, можно вычислить четыре коэффициента и представить результаты эксперимента в виде неполного квадратного уравнения:

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2.$$

Допустим, что в выбранных интервалах варьирования процесс может быть описан линейной моделью.

Тогда в линейном приближении $b_{12} \rightarrow 0$ достаточно определить три коэффициента b_0, b_1, b_2 , а свободный вектор-столбец $x_1 x_2$ можно использовать для нового фактора x_3 . Поставим этот фактор x_3 в скобках над взаимодействием $x_1 x_2$. Тогда получается, что из четырех опытов получается четыре коэффициента регрессии. В этом случае при определении коэффициентов регрессии наблюдается смешение, т.е. совместное оценивание нескольких теоретических коэффициентов математической модели.

В рассматриваемом случае оценки смешаются следующим образом:

$$\begin{aligned} b_1 &\rightarrow \beta_1 + \beta_{23}; \\ b_2 &\rightarrow \beta_2 + \beta_{13}; \\ b_3 &\rightarrow \beta_3 + \beta_{12}; \\ b_0 &\rightarrow \beta_0 + \beta_{123}, \end{aligned}$$

где β_i – математические ожидания соответствующих коэффициентов.

Указанные коэффициенты регрессии в таком планировании не могут быть оценены отдельно, поскольку столбцы линейного коэффициента и парного взаимодействия совпадают.

Таким образом, поставив четыре опыта для оценки влияния трех факторов, воспользуемся половиной полного факторного эксперимента 2^3 . Такой сокращенный план ПФЭ называется полуреplikой или планом дробного факторного эксперимента (ДФЭ). Используют также 1/4 реплики, 1/8 реплики и т.д. Например, матрица из восьми опытов для четырехфакторного планирования будет полуреplikой от полного факторного эксперимента 2^4 , а для пятифакторного планирования – четвертьреplikой от 2^5 . В пятифакторном случае два линейных эффекта приравниваются к эффектам взаимодействия. Для обозначения дробных реплик, в которых l линейных эффектов приравнены к эффектам взаимодействия, удобно пользоваться условным обозначением 2^{k-l} . Так, полуреplikу от 2^4 запишем в виде $2^{(4-1)}$, а четвертьреplikу от 2^5 в виде $2^{(5-2)}$. Получается, что количество опытов в дробной реплике сокращается в 2^l раз.

5.3.5 Алгоритм реализации ПФЭ или ДФЭ

Первый этап метода Бокса–Уилсона включает следующие процедуры ПФЭ и ДФЭ:

1. Выбирается нулевая точка x_{i0} в натуральных значениях.
2. Интервал варьирования Δx_i для каждого i -го фактора $i = 1, 2, 3, \dots, k$.
3. Определяются координаты пробных точек для нижнего и верхнего

уровней варьирования факторов x_i в натуральных значениях:

$$x_{in} = x_{i0} - \Delta x_i;$$

$$x_{ig} = x_{i0} + \Delta x_i.$$

4. Составляется ортогональная матрица планирования ПФЭ или ДФЭ, для чего факторы кодируют (нормируют).

5. Выбирается число m серий параллельных опытов, порядок проведения опытов в сериях рандомизируется с помощью таблицы случайных чисел.

Термин «рандомизация» происходит от английского слова random – случайный и означает случайную последовательность при постановке опытов, запланированных матрицей. Рандомизация – это способ включения систематических ошибок в число случайных. Рандомизация рекомендуется для исключения влияния систематических ошибок, вызванных внешними условиями (переменной температуры, сырья, лаборанта и т.д.).

Важность рандомизации опытов попытаемся показать на следующем примере. Допустим, нужно реализовать матрицу 2^3 . Экспериментатор может поставить четыре опыта в день. Если внешние условия первого дня каким-то образом отличались от внешних условий второго дня, то это способствует возникновению некоторой систематической ошибки.

Поэтому нужно рандомизировать опыты во времени, т.е. придать последовательности опытов случайный характер. Если в полном факторном эксперименте 2^3 предполагается каждое значение параметра оптимизации определять по двум параллельным опытам, то тогда нужно провести 16 опытов, которые надо расположить случайно. Присвоим параллельным опытам номера с 9-го по 16-й.

Следующий этап рандомизации – использование таблицы случайных чисел. Обычно таблица случайных чисел приводится в руководствах по математической статистике. Вот один из возможных вариантов: 2, 15, 9, 5, 12, 14, 8, 13, 16, 1, 3, 7, 4, 6, 11, 10. В этом порядке выполняют наблюдения отклика в точках ПФЭ или ДФЭ.

6. Исключаются или отбрасываются грубые, ошибочные результаты путем проверки по t-критерию.

7. Проверяется однородность дисперсий, для чего используется критерии Фишера, Кохрена и др.

8. По результатам ПФЭ или ДФЭ вычисляются оценки коэффициентов уравнения регрессии первого порядка:

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_{kxk}.$$

Могут вычисляться также коэффициенты при взаимодействиях и т.д.

9. Производится статистическая проверка адекватности модели и значимости коэффициентов регрессий по приведенным ранее методикам.

Таким образом, при решении задачи возникают два возможных случая: линейная модель адекватна и неадекватна. Конкретное принятие решения после построения модели процесса зависит от анализа этих ситуаций.

I. Линейная модель адекватна. Здесь возможны следующие варианты:

1) все коэффициенты регрессий значимы;

2) часть коэффициентов регрессий значима, а часть незначимая;

3) все коэффициенты регрессии незначимы. При этом в каждом варианте оптимум может быть близко, далеко или имеем дело с неопределенной ситуацией.

Если известно, что область оптимума близка, возможны следующие решения: окончание исследования, переход к планам второго порядка.

В случае, когда только часть коэффициента регрессии значима, а часть незначима, следует, прежде всего, проанализировать причину незначимости коэффициентов. Причины могут быть самые разные: неудачный выбор интервалов варьирования, большая ошибка опыта, включение в матрицу планирования факторов, не влияющих на параметр оптимизации и пр.

Конкретное решение зависит от анализа причин. Здесь возможны расширение интервалов варьирования по статистически незначимым факторам, проведение параллельных опытов, достройка плана. При достройке плана переходят к реплике меньшей дробности, к планам второго порядка или полному факторному эксперименту.

Если модель адекватна, а все коэффициенты регрессии оказались незначимыми, кроме b_0 , эта ситуация может возникнуть при большой ошибке эксперимента или узких интервалах варьирования. Поэтому следует повысить точность эксперимента и расширить интервалы варьирования.

II. Линейная модель неадекватна. В данной ситуации возможны два диаметрально противоположных решения: движение по градиенту и получение адекватной модели. Первому решению обычно предшествуют оценки кривизны поверхности отклика (по сумме коэффициентов при квадратичных членах) и сопоставление величин линейных факторов и эффектов взаимодействия. Если вклад квадратичных членов и эффектов взаимодействия невелик, то возможно движение по градиенту. Иногда отказываются от построения адекватной модели и постановкой нескольких опытов проверяют возможность движения по градиенту. Это решение возникает чаще при малоисследованных системах, когда исследователь лишен априорной информации или ее недостаточно.

Получение адекватной модели возможно при изменении варьирования факторов, переносе центра плана, достройке плана. Применение этого приема рассмотрено выше.

Таким образом, анализ полученной модели – вопрос творческий, решение о дальнейшем проведении эксперимента зависит от конкретной ситуации, *однозначных рекомендаций на этот счет не существует.*

5.3.6 Этап крутого восхождения

Второй этап метода Бокса–Уилсона представляет собой непосредственное крутое восхождение.

Наиболее короткий путь к оптимуму, находящемуся на вершине поверхности отклика, – это путь в направлении градиента функции отклика. Движение в направлении градиента сравнивают с подъемом к вершине поверхности отклика по самому крутому склону.

Градиентом непрерывной однозначной функции φ называется вектор:

$$\Delta\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\bar{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\bar{j} + \dots + \frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\bar{k},$$

где $\Delta\varphi$ – градиент функции;

$\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – единичные векторы в направлении координатных осей факторного пространства.

Градиентом линейной функции отклика будет выражение:

$$\Delta y = b_1\bar{i} + b_2\bar{j} + \dots + b_k\bar{k}$$

в котором b_i – частная производная линейной функции по каждой из переменных x_i .

Следовательно, для движения по градиенту функции необходимо значения факторов по каждой из осей $\bar{i}, \bar{j}, \dots, \bar{k}$ изменить пропорционально величинам коэффициентов b_1, b_2, \dots, b_k с учетом их знака.

Расчет координат точек в направлении градиента рассмотрим на примере задачи с одним фактором (рис.4). Коэффициент регрессии равен тангенсу угла наклона касательной линии регрессии к оси данного фактора $b_i = \operatorname{tg}\alpha_i$.

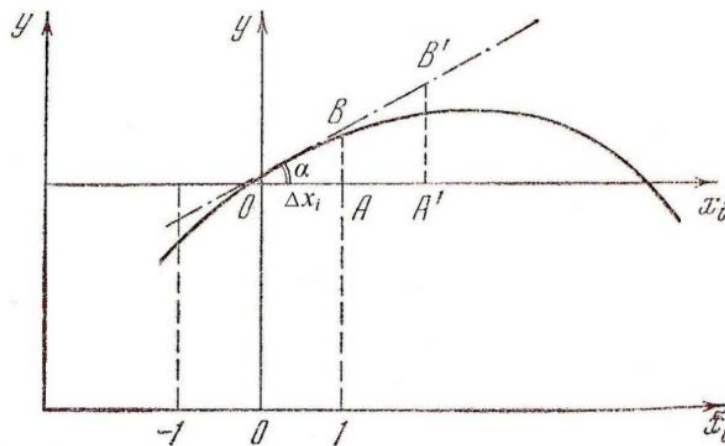


Рис. 4. Расчет координат точек в направлении градиента

При умножении коэффициента регрессии b_i на интервал варьирования Δx_i получают координаты точки B , лежащей на градиенте. Действительно, из треугольника OAB катет $AB = OA \cdot \operatorname{tg}\alpha_i$. Обобщение на k случаев делается в связи с тем, что все эффекты рассчитаны независимо друг от друга. Полученные таким образом шаги последовательно прибавляют к основному уровню или вычитают (в зависимости от знака b_i). Статистически незначимые факторы стабилизируют на любом уровне в интервале ± 1 . В движении по градиенту эти факторы не участвуют. Если в крутом восхождении дальнейшее движение невозможно по какому-либо из факторов (технические затруднения при достижении расчетных температур или, например, температура закалки оказывается выше линии солидуса и др.), то обычно такой фактор стабилизируется на достигнутом уровне, а по остальным движение продолжается.

Рассмотрим выбор шага движения по градиенту. Для этой процедуры не существует формализованного решения. Малый шаг потребует значительного

числа опытов при движении к оптимуму, слишком большой шаг увеличивает вероятность пропуска области оптимума. Однако верхняя граница задается областью определения фактора, а нижняя – отличием двух соседних опытов. С целью облегчения планирования шаги обычно округляют. Таким образом, выбирают единичный шаг λ_i , пропорциональный величине произведения $b_i \Delta x_i$ и являющийся также шагом движения по градиенту для каждого фактора. Далее планируют серию опытов. При достижении оптимума и после анализа новой матрицы планирования приступают к их реализации.

Таким образом, этап крутого восхождения включает следующие процедуры:

1. Вычисление расчетных составляющих рабочих шагов для всех i -х факторов

$$\lambda_i = b_i \Delta x_i$$

2. Один из всех λ_i , чаще всего максимальный по модулю, принимают за базовое $\lambda_{\text{БАЗ}}$.

3. Округляют $\lambda_{\text{БАЗ}}$ до удобного $\lambda_{\text{БАЗ.окр}}$. Здесь «окруление» означает не только округление до какого-то значащего порядка, но и умножение градиента на любое положительное число. При этом такое умножение дает точки, также лежащие на градиенте.

Пропорционально этому округляют остальные λ_i до $\lambda_{i\text{окр}}$ ($i = 1, 2, \dots, k$).

Округление остальных λ_i производят по формуле:

$$\lambda_{i\text{окр}} = \frac{\lambda_{\text{БАЗ.окр}}}{\lambda_{\text{БАЗ}}} \lambda_i$$

до удобного значения либо с учетом погрешностей измерения по каждому фактору x_i . Знаки $\lambda_{i\text{окр}}$ должны соответствовать знакам оценок b_i коэффициентов при поиске максимума, а при поиске минимума знаки $\lambda_{i\text{окр}}$ должны быть противоположны знакам b_i .

4. Вычисляют координаты n -х рабочих точек ($n = 1, 2, \dots, k$) в направлении горизонта:

$$x_{in} = x_{i0} + n \lambda_{i\text{окр}}$$

Размеры λ_i обычно выбирают так, чтобы первая рабочая точка ($n = 1$) не выходила за границы области ПФЭ.

5. В вычисленных координатах последовательно выполняют мысленные и реальные опыты.

Мысленные опыты заключаются в получении предсказанных (расчетных) значений отклика \hat{Y} по линейному уравнению регрессии и позволяют:

а) сокращать объем реальных опытов, т.е. увеличивать скорость продвижения к экстремуму;

б) иметь представление, насколько хорошо уравнение регрессии аппроксимирует (описывает) реальную поверхность отклика, т.е. насколько расчетные значения отличаются от экспериментальных результатов;

в) оценивать правильность выбора размера составляющих практического рабочего шага $\lambda_{i\text{окр}}$ (если за число шагов $n = 3$ достигается и превышает максимально возможное расчетное значение целевой функции, то $\lambda_{i\text{окр}}$ нужно

уменьшить). Если же число n слишком большое, то $\lambda_{iокр}$ следует увеличить либо реже ставить реальные опыты. Реальные опыты в начале движения из базовой точки вдоль направления градиента ставят через 2–4 мысленных опыта.

Рабочее движение продолжают до тех пор, пока не будет достигнут частный экстремум на направлении градиента. Признаком достижения частного экстремума является уменьшение отклика в последующих проверочных опытах (рис. 5).

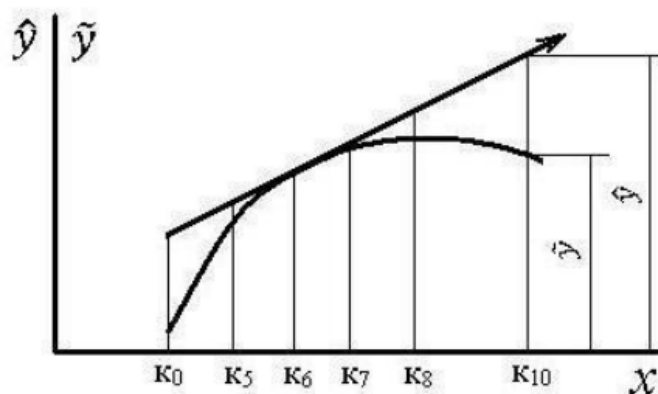


Рис. 5. Реализация метода Бокса–Уилсона

Таким образом, на рис. 5 частным экстремумом является точка k_8 .

6. В районе наилучшей точки снова ставят опыты по плану ПФЭ или ДФЭ, а процедуру повторяют или переходят к планам второго порядка.

7. Поисковое рабочее движение прекращают при достижении области максимума. Признаком достижения экстремума является статистическая незначимость оценок b_i коэффициентов при членах первого порядка, вычисленных по результатам ПФЭ (ДФЭ) вокруг очередной нулевой точки.

Достоинства метода крутого восхождения:

1. Высокая помехозащищенность (помехоустойчивость), т.е. точность оценивания составляющих градиента. Если в градиентных методах каждая составляющая b_i оценивается лишь по двум точкам факторного пространства, то в ПФЭ метода крутого восхождения каждый коэффициент b_i оценивается по всем $n = 2^k$ точкам.

2. Высокая эффективность, т.е. скорость движения к экстремуму. По сравнению с методом Гаусса–Зайделя скорость выше за счет продвижения по градиенту, а по сравнению с градиентными – за счет исключения пробных опытов на каждом рабочем шаге и проведения мысленных опытов.

3. Пробные опыты, выполняемые методом ПФЭ, позволяют получать информацию об оценке b_{il} коэффициентов при взаимодействиях факторов $x_i x_l$, характеризующих кривизну поверхности отклика: увеличение b_{il} при уменьшении b_i обычно характеризует приближение к экстремуму.

4. ПФЭ с помощью параллельных опытов позволяет осуществлять надежную статистическую интерпретацию результатов.

5. Из всех известных методов наиболее эффективен при пологих поверхностях отклика.

Недостатком метода крутого восхождения является несколько большая, чем в предыдущих методах, сложность планирования пробных опытов, требующая одновременного варьирования сразу всех факторов относительно базовой точки.

Задача 3. Рассчитать этапы крутого восхождения для полного факторного эксперимента, исходные данные и результаты которого изложены в задачах 1 и 2. В табл. 6 кроме исходных данных и результатов задач 1, 2 приведены также этапы крутого восхождения.

Таблица 6 – Матрица планирования эксперимента и расчет крутого восхождения
Матрица планирования эксперимента и расчет крутого восхождения

Исходные данные			
Уровень	\tilde{x}_1	\tilde{x}_2	
Основной (\hat{x}_{i0})	1,5	7,0	
Интервал варьирования ($\Delta\tilde{x}_i$)	0,5	1,0	
Верхний	2,0	8,0	
Нижний	1,0	6,0	
Матрица планирования и результаты опытов			
№ опыта	x_1	x_2	y
1	-1	-1	95
2	+1	-1	90
3	-1	+1	85
4	+1	+1	82
b_i	-2,0	-4,5	
λ_i	-1,0	-4,5	
$\lambda_{iокр}$	-0,1	-0,5	
Расчет крутого восхождения			
№ опыта	\tilde{X}_1	\tilde{X}_2	
5	1,4	6,5	
6	1,3	6,0	
7	1,2	5,5	
8	1,1	5,0	
9	1,0	4,5	

Решение. Этапы крутого восхождения:

1. Расчет составляющих рабочих шагов (λ_i):

$$\lambda_1 = -2,0 \cdot 0,5 = -1,0;$$

$$\lambda_2 = -4,5 \cdot 1,0 = -4,5.$$

Теперь мы должны прибавлять составляющие градиента к основному уровню факторов (\tilde{x}_{i0}). Берем условия опыта № 5: $\tilde{x}_1 = 0,5$, $\tilde{x}_2 = 2,5$. В опыте № 6 факторы имеют уже нереальные значения, следовательно, можно сделать вывод, что шаг движения велик.

2. Принимаем за $\lambda_{\text{БАЗ}}$ модуль значения для фактора x_2 , равное 4,5. Воспользуемся условием: умножение составляющих градиента на любое положительное число дает точки, также лежащие на градиенте. В данной задаче удобно менять рН (x_2) на $\lambda_{\text{БАЗ.окр.}} = -0,5$. Пропорционально с этим пересчитаем λ_1 :

$$\lambda_1 = (-0,5 / -4,5) \cdot (-1,0) = -0,111.$$

Округлим: $\lambda_{\text{окр.}} = -0,1$.

Возможно также принять за базовый шаг движения по фактору x_1 и пропорционально отношению $\lambda_{\text{БАЗ.окр.}}$ к $\lambda_{\text{БАЗ}}$ рассчитать шаги по фактору x_2 .

3. Последовательно прибавляем составляющие градиента ($\lambda_{i\text{окр.}}$) к основному уровню. Получаем серию опытов крутого восхождения.

Иногда имеет смысл оценить ожидаемое значение параметра оптимизации в мысленных опытах. Проведем расчет крутого восхождения для опыта № 7. Используем для оценки параметра оптимизации ранее полученное в задаче 2 уравнение регрессии без малозначимого эффекта взаимодействия факторов:

$$\hat{y} = 88,0 - 2,0x_1 - 4,5x_2.$$

Однако в табл. 6 приведены натуральные значения факторов, а в уравнении применяются кодированные значения. Поэтому необходимо перевести натуральные значения в кодированные:

$$x_1 = \frac{1,2 - 1,5}{0,5} = -0,6; \quad x_2 = \frac{5,5 - 7,0}{1} = -1,5.$$

Подставляя эти значения в уравнение регрессии, получим $\hat{y}_7 = 95,95$.

Аналогично для опыта № 8 $x_1 = -0,8$, $x_2 = -2,0$ и $\hat{y}_8 = 98,6$. Экспериментально полученные величины могут не совпадать с расчетными величинами, т.к. значения независимых переменных выходят за область эксперимента.

5.4. Симплексный метод планирования

Под симплексным методом понимается последовательный переход от одного базисного нахождения системы решений к другому. Эта перестановка повторяется до тех пор, пока переменная величина цели не достигнет своего наибольшего или наименьшего значения. Такой подход является универсальным, его можно использовать для решения любой задачи последовательного программирования.

Метод был разработан в 1947 году математиком из США Бернардом Данцигом. Предложенный способ оказался весьма эффективным для решения

задач, связанных с оптимизацией использования ограниченных ресурсов. То есть он позволяет оценить и откорректировать параметры системы, а также получить качественные аналитические результаты.

Метод симплексного планирования позволяет без предварительного изучения влияния факторов найти область оптимума.

В производственных условиях затруднительно варьировать факторами в широких интервалах, так как на области изменения факторов налагаются ограничения, связанные с риском получения бракованной продукции.

Поэтому при оптимизации производственных процессов необходимо постоянно приспосабливаться к изменяющимся условиям производства, т.е. на основании полученных результатов корректировать технологический процесс. Такую оптимизацию называют адаптационной оптимизацией.

Симплексом называют выпуклую фигуру (или тело), образованную $(k + 1)$ вершинами в пространстве k -факторов.

В пространстве одного фактора ($k = 1$) симплексом служит отрезок установленного размера: при $k = 2$ – треугольник; при $k = 3$ – тетраэдр. При $k = 4$ привычным образом интерпретировать симплекс невозможно.

Симплексный метод позволяет совмещать пробные опыты для определения направления движения с рабочим движением по поверхности отклика к области оптимума.

Последовательно чередуя расчет и выполнение экспериментов, исследователь достигает области экстремального значения параметра оптимизации (области оптимума). Основная идея симплексного метода состоит в следующем. Если во всех $(k + 1)$ -вершинах симплекса поставить опыты и измерить отклик, то по его величине в вершинах можно судить, в каком направлении следует двигаться, чтобы приблизиться к экстремуму. Рассмотрим это на примере двухфакторного пространства.

Допустим, построен начальный симплекс I с вершинами C_1, C_2, C_3 и в них измерен отклик (рис. 6). Из рисунка 6 видно, что отклик в точке C_3 является наименьшим по сравнению с откликом в вершинах C_1 и C_2 . Тогда можно полагать, что максимум лежит приблизительно в направлении луча, проведенного из вершины C_3 через центр A симплекса I . В соответствии с этим предположение при использовании симплексного метода продвижения к экстремуму совершается путем зеркального отражения вершины с минимальным значением отклика через противоположную сторону (или грань) симплекса.

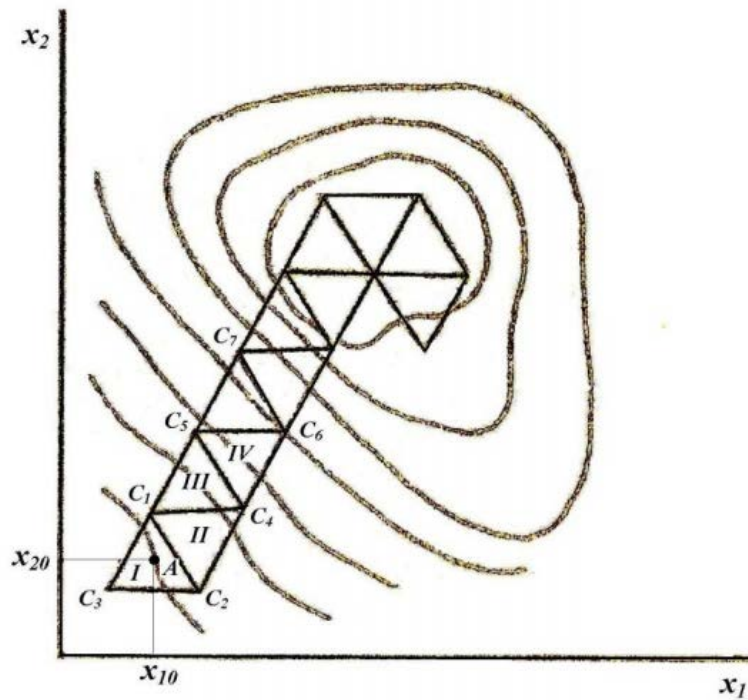


Рис. 6. Поиск оптимума симплекс-методом

Таким образом, новый симплекс *II* образуется постановкой опыта всего лишь в одной новой точке C_4 .

Получив значение отклика в точке C_4 , снова сравнивают величины откликов в вершинах симплекса *II*, выбирают вершину с минимальным откликом и вновь отражают ее относительно противоположной стороны, образуя симплекс *III* и т.д., пока симплекс не совершит полный оборот относительно одной из вершин.

Порядок работы при использовании симплексного метода состоит в следующем:

1. Начальная точка $A(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{k0})$ выбирается в качестве центра симплекса.
2. Устанавливаются интервалы варьирования Δx_i .
3. Определяются координаты вершин k -мерного симплекса по выражению:

$$x_i = x_{i0} + \Delta x_i \tilde{x}_i,$$

где \tilde{x}_i – кодированное значение i -го фактора, взятое из числовой матрицы для симплекс-планирования (табл. 7).

На примере двухмерного симплекса ($k = 2$) рассмотрим один из возможных вариантов получения числовой матрицы (рис. 7).

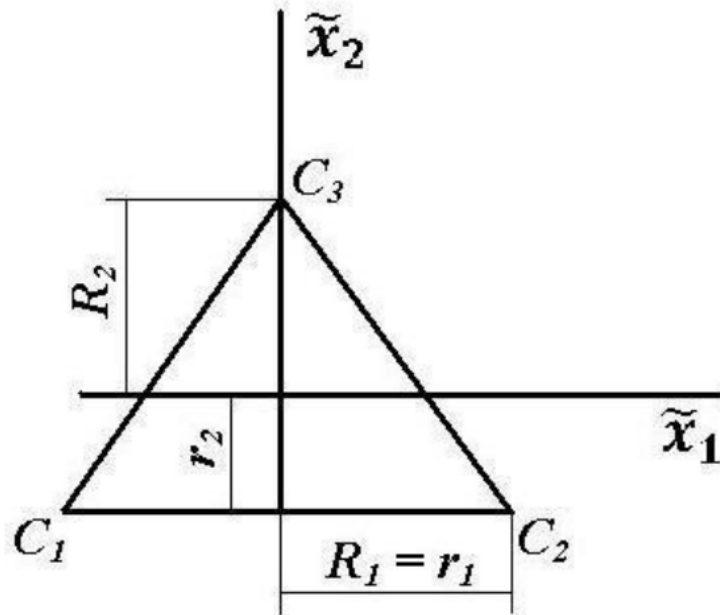


Рис. 7. Расчет координат вершин симплекса

Напишем координаты вершин: $C_1 (-r_1, -r_2)$, $C_2 (R_1, -r_2)$, $C_3 (0, R_2)$.

При длине ребра симплекса, равной единице, величины R_i и r_i рассчитаем по формулам:

$$R_i = \sqrt{\frac{k}{2(k+1)}}; r_i = \frac{1}{\sqrt{2k(k+1)}}$$

Аналогично можно записать и координаты вершин k -мерного симплекса в кодированных значениях (табл. 7):

Таблица 7 – Числовая матрица для симплекс-планирования

Вершина симплекса	\tilde{x}_1	\tilde{x}_2	\tilde{x}_3	\tilde{x}_{k-1}	\tilde{x}_k
C_1	$-r_1$	$-r_2$	$-r_3$	$-r_{k-1}$	$-r_k$
C_2	R_1	$-r_2$	$-r_3$	$-r_{k-1}$	$-r_k$
C_3	0	R_2	$-r_3$	$-r_{k-1}$	$-r_k$
.....
C_k	0	0	0	R_{k-1}	$-r_k$
C_{k+1}	0	0	0	0	R_k

Таблицу 7 для числа факторов $k = 3$ можно представить в следующем виде (табл. 8).

Таблица 8 – Числовая матрица симплекс-планирования для трехфакторного эксперимента

Номер вершины	\tilde{x}_1	\tilde{x}_2	\tilde{x}_3
1	-0,5	-0,289	-0,204
2	0,5	-0,289	-0,204
3	0	0,578	-0,204
4	0	0	0,612

Для этого необходимо выделить часть матрицы, содержащую количество первых столбцов, равное числу факторов, и количество строк на единицу больше числа факторов. Из этого числового вывода получим координаты вершин исходного симплекса любой размерности.

4. В вершинах симплекса выполняются наблюдения отклика и сравниваются по величине. Выбирают вершину с минимальным откликом и отражают ее относительно противолежащей стороны или грани.

Координаты новой вершины рассчитывают по уравнению:

$$X_i = \frac{2}{k} \sum_{i=1}^k X_i^* - X_i^{**},$$

где X_i^* – координаты оставленных точек (вокруг этой стороны вращают);

X_i^{**} – координаты наилучшей точки;

k – число факторов.

Ставят эксперимент в новой отраженной вершине нового симплекса, и отклик в ней сравнивают с откликами в остальных k -вершинах, а затем снова выбирают вершину с минимальным откликом и отражают ее через противолежащую сторону (или грань) симплекса.

Эксперимент продолжают до тех пор, пока симплекс не совершит полный оборот вокруг одной из вершин (рис. 6).

Достоинства симплексного метода:

- 1) высокая помехоустойчивость при выборе направления движения к экстремуму;
- 2) изучение поверхности отклика сочетается с одновременным рабочим движением к экстремуму;
- 3) обеспечивается высокая скорость выхода к области экстремума;
- 4) высокая оперативность, позволяющая рекомендовать симплексный метод (особенно для непрерывной оптимизации объектов с дрейфующим экстремумом).

Недостатки симплексного метода:

- 1) относительно высокая сложность вычисления координат вершин симплекса;
- 2) метод не позволяет непосредственно получать математическое описание изучаемого участка поверхности отклика, как, например, в методе Бокса–Уилсона;
- 3) в условиях пологих поверхностей отклика симплексный метод дает

менее точное решение, чем метод крутого восхождения.

Задача 4. Начальная точка двухфакторного эксперимента имеет координаты: $x_{10} = 4$; $x_{20} = 15$. Выберем интервал варьирования факторов: $\Delta x_1 = 2$; $\Delta x_2 = 3$. Необходимо рассчитать координаты вершин симплекса и новой вершины при наименьшем отклике в вершине с минимальным порядковым номером.

Решение. Возьмем кодированные значения факторов из числовой матрицы для симплекс-планирования (табл. 8) и рассчитаем вершины симплекса:

$$C_1 - x_1 = 4 + 2 \cdot (-0,5) = 3;$$

$$x_2 = 15 + 3 \cdot (-0,289) = 14,133$$

$$C_2 - x_1 = 4 + 2 \cdot 0,5 = 5;$$

$$x_2 = 15 + 3 \cdot (-0,289) = 14,133$$

$$C_3 - x_1 = 4 + 2 \cdot 0 = 4;$$

$$x_2 = 15 + 3 \cdot 0,578 = 16,734.$$

Рассчитаем координаты новой вершины при минимальном отклике в точке

C_1 :

$$C_4 - x_1 = 1 \cdot (5 + 4) - 3 = 6$$

$$x_2 = 1 \cdot (14,133 + 16,734) - 14,133 = 16,734;$$

при минимальном отклике в точке C_2 :

$$C_5 - x_1 = 6 + 4 - 5 = 5$$

$$x_2 = 16,734 + 16,734 - 14,133 = 19,335;$$

при минимальном отклике в точке C_3 :

$$C_6 - x_1 = 6 + 5 - 4 = 7$$

$$x_2 = 19,335 + 16,734 - 16,734 = 19,335 \text{ и т.д.}$$

Расчеты с использованием симплексного метода могут быть произведены с помощью встроенных программ большинства производителей, например, для Windows – Симплекс-метод 1.9.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахназарова, С. Л. Методы оптимизации эксперимента в химической технологии [Текст] / С. Л. Ахназарова, В. В. Кафаров. – М.: Высш. шк., 1985. – 327 с.
2. Бояринов, А. И. Методы оптимизации в химической технологии [Текст] / А. И. Бояринов, В. В. Кафаров. – М.: Химия, 1975. – 576 с.
3. Закгейм, А. Ю. Введение в моделирование химико-технологических процессов [Текст] / А. Ю. Закгейм. – М.: Химия, 1982. – 288 с.
4. Кафаров, В. В. Математическое моделирование основных процессов химических производств [Текст] / В. В. Кафаров, М. Б. Глебов. – М.: Высш. шк., 1991. – 400 с.
5. Кафаров, В. В. Системный анализ процессов химической технологии. Основы стратегии / [Текст] В. В. Кафаров, И. Н. Дорохов. – М.: Наука, 1976. – 499 с.
6. Кафаров, В. В. Гибкие автоматизированные системы в химической промышленности [Текст] / В. В. Кафаров, В. В. Макаров. – М.: Химия, 1990. – 320 с.
7. Кафаров, В. В. Математические основы автоматизированного проектирования химических производств. Методология проектирования и теория разработки оптимальных технологических схем [Текст] / В. В. Кафаров, В. П. Мешалкин, В. Л. Перов. – М.: Химия, 1979. – 320 с.
8. Трубаев, П. А. Моделирование и оптимизация технологических процессов производства строительных материалов [Текст] / П. А. Трубаев. – Белгород, 1999. – 178 с.
9. Крылова, А. В. Планирование и организации эксперимента [Текст] : учебное пособие / А. В. Крылова, Е. И. Шмитько, Т. Ф. Ткаченко. – Воронеж, 2011. – 116 с.
10. Ткаченко, Т. Ф. Планирование и организации эксперимента [Текст] : метод. указания / Т. Ф. Ткаченко, А. В. Крылова. – Воронеж, 2015. – 20 с.
11. Хартман, К. Планирование эксперимента в исследовании технологических процессов [Текст] / К. Хартман, Э. Лецкий, В. Шефех ; перевод с немецкого; под ред. Э. К. Лецкого. – М.: Мир, 1977. – 552 с.
12. Методы исследований и организация экспериментов [Текст] ; под ред. К. П. Власова. – Харьков: Издательство «Гуманитарный центр», 2002. 255 с.
13. Адлер, Ю. П. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий [Текст] / Ю. П. Адлер, Е. В. Маркова, Ю. В. Грановский. – М.: Наука, 1976.
14. Дворецкий, С. И. Компьютерное моделирование и оптимизация технологических процессов и оборудования [Текст] : учебное пособие / С. И. Дворецкий, А. Ф. Егоров, Д. С. Дворецкий. – Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2003.
15. Светозаров, В. В. Основы статистической обработки результатов измерений [Текст] : учебное пособие / В. В. Светозаров. – М.: Изд. МИФИ, 2005.

16. Власов, К. П. Методы научных исследований и организации эксперимента [Текст] / К. П. Власов. – СПб, РИЦ СПГГИ, 2000. 116 с.
17. Ахназарова, Л. С. Методы оптимизации эксперимента в химической технологии [Текст] : учебное пособие для хим.-технол. спец. Вузов / Л. С. Ахназарова, В. В. Кафаров. – Изд. 2-е, перераб. и доп. – М., 1985.
18. Саврасов, Ю. С. Оптимальные решения [Текст] / Ю. С. Саврасов. – М.: Радио и связь, 2000.
19. Воронина, О. А. Математические основы планирования и проведения эксперимента [Текст] : учебное пособие / О. А. Воронина. – Орел: ОрелГТУ – 2007.
20. Блохин, В. Г. Современный эксперимент: подготовка, проведение, анализ результатов [Текст] / В. Г. Блохин, О. П. Глудкин, А. И. Гуров, М. А. Ханин; под ред. О.П. Глудкина. – М.: Радио и связь, 1997.
21. Бородюк, В. П. Статистические методы в инженерных исследованиях (лабораторный практикум) [Текст] : учебное пособие / В. П. Бородюк, А. П. Воцинин, А. З. Иванов и др.; под ред. Г. К. Круга. – М.: Высшая школа, 1983.
22. Автоматизация физических исследований и эксперимента: компьютерные измерения и виртуальные приборы на основе Lab VIEW 7 [Текст] / под ред. П. А. Бутырина – М.: ДМК Пресс, 2009. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://e.lanbook.com/view/book/1089/>.
23. Грачев, Ю. П. Математические методы планирования эксперимента [Текст] / Ю. П. Грачев, Ю. М. Плаксин. – М.: ДеЛи принт, 2005.
24. Кобзарь, А. И. Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников [Текст] / А. И. Кобзарь. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006.
25. Вуколов Э. А. Основы статистического анализа. Практикум по статистическим методам и исследованию операций с использованием пакетов STATISTICA и Excel: учебное пособие – М.: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2010.
26. Денисенко, В. В. Компьютерное управление технологическим процессом, экспериментом, оборудованием [Текст] / В. В. Денисенко. – М.: Горячая линия-Телеком, 2009.
27. ГОСТ Р 50.1.040-2002 `Статистические методы. Планирование экспериментов. Термины и определения [Текст]. – Введ. 2003–07–01.
28. Яворский, В. А. Планирование научного эксперимента и обработка экспериментальных данных [Текст] : учебно-методическое пособие / В. А. Яворский. – М.: МФТИ, 2006. – 24 с. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://window.edu.ru/resource/079/39079/files/mipt026.pdf>.
29. Охорзин, В. А. Прикладная математика в системе MATHCAD [Текст] : учебное пособие / В. А. Охорзин. – СПб.: Лань, 2008.
30. Суранов, А. Я. LabVIEW 7: справочник по функциям [Текст] / А. Я. Суранов. – М.: ДМК Пресс, 2005.
31. Лагутин, М. Б. Наглядная математическая статистика [Текст] / М. Б. Лагутин. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2007.
32. Тюрин, Ю. Н. Анализ данных на компьютере [Текст] / Ю. Н. Тюрин, А. А. Макаров. – М.: Инфра-М, 2003.

33. Львович, Я. Е. Теоретические основы конструирования, технологии и надежности РЭА [Текст] : учебное пособие для вузов / Я. Е. Львович, В. Н. Фролов. – М.: Радио и связь, 1986.
34. Журнал Математическое моделирование [Текст]. [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.mathnet.ru/php/journal.phtml?jrnid=mm&option_lang=rus.
35. Ушаков, Л. С. Активный факторный эксперимент. Математическое планирование, организация и статистический анализ результатов [Текст] : учебное пособие / Л. С. Ушаков, С. А. Рябчук, Ю. Е. Котылев. – Орел: Изд-во ОрелГТУ, 2002. – 38с. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.ostu.ru/libraries/polnotekst/Uhebn_izd/2009/Ushakov_akt_faktUP.pdf.
36. Бабин, А. В. Организация и математическое планирование эксперимента [Текст] / А. В. Бабин, Д. Ф. Ракипов. – Екатеринбург, 2014. 114 с.
37. Румшинский, П. З. Математическая обработка результатов эксперимента [Текст]: справочное пособие / П. З. Румшинский. – М. : Наука, 1971. – 192 с.
38. Montgomery, D. C. Design and Analysis of Experiments, 2019. 10th Edition, John Wiley & Sons, Inc. – 688 p.
39. Соколовская, И. Ю. Полный факторный эксперимент [Текст] : методические указания для самостоятельной работы студентов / И. Ю. Соколовская. – Новосибирск: НГАВТ, 2010. – 36 с.
40. Гатапова, Н. Ц Основы теории и техники физического моделирования и эксперимента [Текст]: учебное пособие / Н. Ц. Гатапова, А. Н. Колиух, Н. В. Орлова, А. Ю. Орлов. – Тамбов, 2014. – 77 с.
41. Гайдадин, А. Н. Применение полного факторного эксперимента при проведении исследований [Текст] : методические указания / А. Н. Гайдадин, С. А. Ефремова, ВолгГТУ. – Волгоград, 2008. – 16 с.
42. Лавров, В. В. Методы планирования и обработки результатов инженерного эксперимента [Текст] / В. В. Лавров, Н. А. Спирин. – Екатеринбург, ГОУ ВПО УГТУ-УПИ, 2004. – 257 с.

Учебное издание

Липин Вадим Аполлонович

Методы оптимизации

Учебное пособие

Редактор и корректор М. Д. Баранова
Техн. редактор Д. А. Романова

Учебное электронное издание сетевого распространения

Системные требования:
электронное устройство с программным обеспечением
для воспроизведения файлов формата PDF

Режим доступа: http://publish.sutd.ru/tp_get_file.php?id=202016, по паролю.
- Загл. с экрана.

Дата подписания к использованию 30.08.2022 г. Изд. № 5015/22

Высшая школа технологии и энергетики СПбГУПТД
198095, СПб., ул. Ивана Черных, 4.