

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования

**Санкт-Петербургский государственный технологический  
университет растительных полимеров**

---

**В.М. ПЕСТРИКОВ**

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ТЕПЛОТЕХНИЧЕСКИХ ЗАДАЧ  
В ПРОГРАММИРУЕМЫХ СРЕДАХ**

**Учебное пособие**

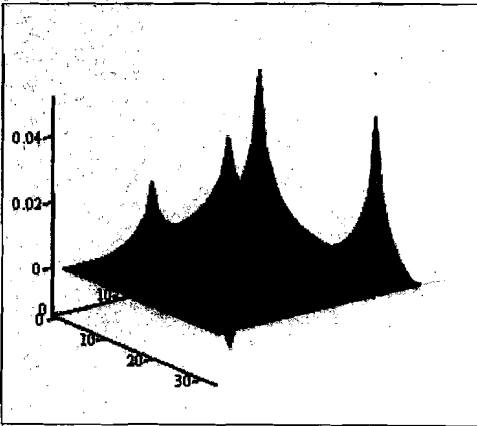
Санкт-Петербург  
2009

681.3/075)  
17286

Пестриков В.М.

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ТЕПЛОТЕХНИЧЕСКИХ ЗАДАЧ  
В ПРОГРАММИРУЕМЫХ СРЕДАХ**

Учебное пособие



Санкт-Петербург  
2009

НАУЧНО-ИНФОРМАЦИОННЫЙ ЦЕНТР САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА РАСТИТЕЛЬНЫХ ПОЛИМЕРОВ

Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение высшего  
профессионального образования

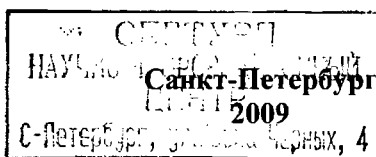
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
РАСТИТЕЛЬНЫХ ПОЛИМЕРОВ»

**Пестриков В.М.**

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ТЕПЛОТЕХНИЧЕСКИХ ЗАДАЧ  
В ПРОГРАММИРУЕМЫХ СРЕДАХ**

Учебное пособие

816 758



УДК 621.1.016.001.57  
ББК 31.3  
П286

Пестриков В.М. Математическое моделирование теплотехнических задач в программируемых средах: учебное пособие / ГОУВПО СПбГТУРП – СПб., 2009. - 104 с.: 25 ил.

В настоящем учебном пособии приведены лекции по математическому моделированию теплотехнических задач на компьютере, предназначенные для выполнения комплексного курсового проекта студентами III курса (6-й семестр) специальности 140104: «Промышленная теплоэнергетика».

**Рецензенты:**

доктор технических наук, профессор кафедры ПМий СПбГТУРП Федоров О.К.;  
ведущий конструктор СКБ «Турбина» филиала ОАО «Силловые машины» «Ленинградский металлический завод», кандидат технических наук, доцент Рыбаков С.Г.

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом университета в качестве учебного пособия.

© ГОУВПО Санкт-Петербургский  
государственный технологический университет  
растительных полимеров, 2009

© Пестриков Виктор Михайлович, 2009

## ПРЕДИСЛОВИЕ

В пособии изложен краткий курс лекций к выполнению комплексного курсового проекта для студентов 3 курса специальности 140104: «Промышленная теплоэнергетика», который читается автором в течение более 10 лет на факультете ПТЭ СПбГТУРП. Отобранный для лекций материал в основном связан с задачами теплотехники, которые обычно встречаются в практике будущих инженеров-теплотехников.

Материал пособия соответствует курсу «Уравнения математической физики», читаемому студентам механико-математических факультетов университетов. К уравнениям математической физики, как известно, относят дифференциальные уравнения в частных производных, а также некоторые родственные уравнения иных типов (интегральные, интегро-дифференциальные и т.д.), к которым приводит математический анализ физических явлений. Для теории уравнений математической физики характерна постановка задач в таком виде, как это необходимо при исследовании физического явления. Описывая физическое явление уравнением, мы, по-существу, строим его математическую модель. В связи с широким использованием вычислительной математики большое внимание уделено исследованию математических моделей физики с помощью прямых численных методов, реализуемых на ЭВМ, и в первую очередь конечно-разностных методов решения краевых задач. Помимо теоретических аспектов предмета, рассмотрены вопросы практической реализации решений уравнений математической физики в различных программируемых средах (MathCad и Excel).

Для усвоения материала достаточно объема знаний курса «Высшая математика», читаемого в вузе, и умения пользоваться программными продуктами символьного и координатного программирования.

Автор считает своим долгом поблагодарить старшего преподавателя Тамару Сергеевну Смирнову за совместную работу в практической реализации данного курса лекций, а также за ценные замечания, сделанные в процессе работы, которые нашли отражение в настоящем пособии. Особенная благодарность доценту Сергею Георгиевичу Рыбакову за рецензирование рукописи и также сделанные при этом замечания, которые способствовали ее улучшению.

Доктор технических наук, профессор Пестриков В.М.

## ГЛАВА 1. МОДЕЛИРОВАНИЕ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

В главе приводятся основные понятия математического и компьютерного моделирования.

### 1.1. Основные понятия

Под моделированием понимается замена сложного по своей природе объекта другим более простым, отображающим его основные свойства с целью получения информации о важнейших свойствах объекта-оригинала с помощью объекта-модели. Таким образом, моделирование может быть определено как представление объекта моделью для получения информации об этом объекте путем проведения модельного эксперимента.

Наука при изучении сложных процессов и явлений в физике, химии, биологии, экономике, социологии и т.д. использует соответствующий математический аппарат для их описания. Более точное математическое описание процессов и явлений, приводит к появлению сложных математических задач, которые не всегда удается решить аналитическими методами в явном виде. Для решения таких задач приходится прибегать к построению более простых математических моделей, которые с достаточной точностью описывают поставленную задачу [1,2].

Выбор модели для решения научно-технической проблемы определяется не только характером моделируемого объекта, но и спецификой самой задачи. Исходя из этого, разрабатываются этапы модельного решения проблемы. Условно можно выделить три основных этапа моделирования поставленной задачи, которые должны привести к решению проблемы:

- построение математической модели;
- компьютерная реализация предложенной математической модели (компьютерное моделирование);
- оценка достоверности предложенной модели и возможность ее практического использования.

Если результаты моделирования подтверждаются и могут служить основой для прогнозирования процессов, протекающих в исследуемых объектах, то говорят, что модель адекватна объекту. При этом адекватность модели зависит от цели моделирования и принятых критериев.

### 1.2. Математическое моделирование

Под математической моделью понимается приближенное описание какого-либо класса явлений внешнего мира представленное с помощью

математических символов в виде системы математических соотношений, описывающих изучаемый процесс или явление.

Математические модели процессов различной природы обычно базируются на некотором упрощении, идеализации, отбрасывании тех факторов, которые в данный момент или на данном этапе исследований представляются несущественными. Например, дифференциальное уравнение (1.1), описывающее поведение колебательного контура (рис.1.1), не учитывает нелинейности элементов контура  $C, L$ :

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{1}{LC} i(t) = 0, \quad (1.1)$$

где  $i$  – ток, вызванный конденсатором,  $C$  – емкость конденсатора,  $L$  – индуктивность катушки.

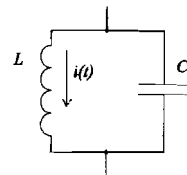


Рис.1.1. Принципиальная схема колебательного контура

Математические модели, исходя из требований практики, могут усложняться, становясь более универсальными и совершенными. Процесс математического моделирования связан с:

- формализацией явления;
- выбором характеристик, которые поддаются математическому описанию;
- нахождением математических соотношений между характеристиками;
- подбором математического аппарата для описания модели.

После этого производится анализ и исследование принятой модели. Создание удачной модели сродни искусству. Современные математические модели обычно представляют собой сложные системы дифференциальных уравнений, допускающие интегрирование только в исключительных случаях. Поэтому важное значение, приобретает разработка методов их решения. Для этого могут быть привлечены как качественные, так и численные методы в зависимости от сложности проблемы [3].

Качественные методы моделирования основываются на различных теоремах существования и единственности решений, теории устойчивости, асимптотических методах и т. п. Исходя из этого, такой подход позволяет делать только качественные выводы о решении задачи, не давая точного его решения.

Изначально дискретные модели рассматривались в основном с инструментальной точки зрения, т.е. исключительно как способ исследования ранее построенной модели, например, на основе дифференциального исчисления. С развитием вычислительных методов ситуация менялась. Опыт, накопленный математиками в прошлом веке, показывает некоторую несостоятельность классических (напр., дифференциальных) математических моделей. Пример Адамара<sup>2</sup>, в частности, показывает, что классическое решение некоторых моделей может не иметь физического смысла. Этот факт способствовал переходу к другим постановкам, среди которых имеются дискретные задачи [4].



*J. Hadamard*

Адамар Жак (фр. *Jacques Salomon Hadamard*, 8 декабря 1865 года - 17 октября 1963 года) - французский математик. Французский математик, иностранный чл.-корр. (02.12.1922) и иностранный почетный член (31.01.1929) АН СССР, член Парижской АН (1912). Известен своими исследованиями в различных областях математики. В теории чисел доказал (1896) высказанный П.Л.Чебышевым асимптотический закон распределения простых чисел, создал значительную часть современной теории целых аналитических функций, получил существенные результаты в теории дифференциальных уравнений. Его идеи оказали большое влияние на создание функционального анализа. В механике занимался проблемами устойчивости и исследованием свойств траекторий механических систем вблизи положения равновесия и др. Его имя носят следующие математические объекты: матрица Адамара, неравенство Адамара, преобразование Адамара, пример Адамара, теорема Адамара о трёх кругах, теорема Адамара о лакунах.

Основным инструментом для решения сложных математических задач являются численные или приближенные методы, которые позволяют свести решение задачи к выполнению конечного числа арифметических действий над числами и представить результаты в виде числовых значений. По-существу, численный алгоритм решения задачи и представляет собой дискретную математическую модель. Эти методы позволяют приближенно, с определенной точностью найти решение соответствующей задачи.

Основным достоинством численных методов является их универсальность, т.е. принципиальная пригодность для анализа любых задач. Это особенно важно в случае, когда не существует общих аналитических методов решения.

Среди приближенных методов наиболее широкое распространение получили так называемые *конечно-разностные*, или сеточные методы. Суть их состоит в сведении дифференциальных уравнений, описывающих сплошную среду, к конечно-мерной системе алгебраических уравнений.

В связи с развитием ЭВМ все отчетливее проявляется связь с

<sup>2</sup> Пример Адамара иллюстрирует возможность некорректной постановки классической задачи Коши для уравнения Лапласа (см. Приложение 1).

интенсификацией процессов использования различных специализированных математических пакетов и систем программирования вычислительных методов как инструмента решения прикладных задач.

Теория приближенного решения математических задач постоянно пополняется все более совершенными численными методами, появление которых стимулируется как особенностями машинной математики, так и расширением функциональных возможностей прикладных программных средств. Все это требует определенного уровня понимания как математических методов, а также умения их использования в различных программируемых средах на персональном компьютере (ПК).

### 1.3. Компьютерное моделирование

**Компьютерная модель** - это модель реального процесса или явления, основанная на математической модели, которая реализована компьютерными средствами. Если состояние системы меняется со временем, то модель называют *динамической*, в противном случае - *статической*.

Процессы в системе могут протекать по-разному в зависимости от условий, в которых находится система. Следить за поведением реальной системы при различных условиях бывает трудно, а иногда и невозможно. В таких случаях, построив модель, можно многократно возвращаться к начальному состоянию и наблюдать за ее поведением. Этот метод исследования систем называется **имитационным моделированием**.

Примером имитационного моделирования может служить вычисление числа  $\pi = 3,1415922653\dots$  методом Монте-Карло. Этот метод позволяет определять площади и объемы фигур (тел), которые сложно вычислить другими методами. Предположим, что требуется определить площадь круга. Опишем вокруг него квадрат (площадь которого, как известно, равна квадрату его стороны) и будем *случайным* образом бросать в квадрат точки, проверяя каждый раз, попала ли точка в круг или нет. При большом числе точек отношение площади круга к площади квадрата будет стремиться к отношению числа точек, попавших в круг, к общему числу брошенных точек.

Теоретическая основа этого метода была известна давно, однако до появления компьютеров этот метод не мог найти сколько-нибудь широкого применения, ибо моделировать случайные величины вручную - очень трудоемкая работа. Название метода происходит от города Монте-Карло в княжестве Монако, знаменитого своими игорными домами, ибо одним из механических приборов для получения случайных величин является рулетка.

Следует заметить, что данный метод вычисления площади круга будет давать корректный результат, только если точки будут не *просто случайно*, но еще и *равномерно* разбросаны по всему квадрату. Для моделирования равномерно распределенных в интервале от 0 до 1

случайных чисел используется датчик случайных чисел - специальная компьютерная программа. На самом деле эти числа определяются по некоторому алгоритму и уже в силу этого они не являются вполне случайными. Получаемые таким способом числа часто называют *псевдослучайными*. Вопрос о качестве датчиков случайных чисел весьма непрост, однако для решения не слишком сложных задач обычно достаточно возможностей датчиков, встроенных в большинство систем программирования и электронных таблиц.

## ГЛАВА 2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

В этой главе приводятся основные сведения из математической теории поля. Подробно рассматриваются понятия градиента и дивергенции.

### 2.1. Поле

*Поле* называется область пространства, в каждой точке  $P$  которой поставлена в однозначное соответствие некоторая величина  $V(P)$  (иногда полем называют функцию  $V(P)$ ).

Если величина  $V(P)$  является физической, то поле называется физическим. При этом, в зависимости от природы функции  $V(P)$ , поля разделяют на *скалярные* и *векторные*. Примерами скалярных физических полей могут быть поля температуры, атмосферного давления, плотности воздуха, электрического потенциала и др. К векторным физическим полям относятся, например, поля силы тяжести, скорости частиц текущей жидкости, сдвига точек упругого тела, магнитной индукции, плотности электрического тока.

Если функция  $V(P)$  не изменяется с течением времени, то поле называется *стационарным*, или *постоянным*, в противном случае - *нестационарным*, или *переменным*. Для получения общих результатов, справедливых для любых конкретных физических полей, всякому физическому полю ставится в соответствие его математическая модель, где абстрагируются от заданной физической величины, заменяя ее математическим понятием функции, а точке пространства приписывают координаты, считая их аргументами.

Математическая теория поля изучает свойства векторных и скалярных полей, к рассмотрению которых приводят многие задачи физики, электротехники, математики и других наук. При этом функцию  $V(P)$  часто рассматривают как функцию векторного аргумента  $z$  (радиус-вектора, указывающего на точку  $P$ ).

Математическим аппаратом, наиболее соответствующим изучаемым в теории поля явлениям, служат векторная алгебра и векторный анализ. Обобщением теории скалярных и векторных полей явилась теория

тензорных полей, которая играет важную роль, например, в общей теории относительности.

## 2.2. Скалярное поле

**Поверхности и линии уровня.** Для задания скалярного поля надо взять скалярную функцию  $U(P) = U(x, y, z)$ . Введем понятие поверхности уровня скалярного поля [5].

**Определение.** Поверхностью уровня скалярного поля  $U(P)$  называется такая поверхность, на которой функция  $U(P)$  имеет постоянное значение.

Уравнение поверхности уровня имеет вид:  $U(x, y, z) = C$ , где  $C$  - некоторая постоянная. При различных значениях постоянной  $C$  получаем семейство поверхностей уровня. Будем считать, что функция  $U(x, y, z)$ , задающая поле, однозначна. Тогда, очевидно, через каждую точку поля проходит лишь одна поверхность уровня. Примерами поверхностей уровня являются поверхности равных температур в некотором теле и поверхности равного потенциала  $V$  в электрическом поле  $V(x, y, z) = C$ .

Для плоского (т.е. двумерного) скалярного поля рассматривают такие линии уровня, на которых функция, задающая поле, имеет постоянное значение. Такими линиями являются, например, на топографических картах горизонтали — линии, вдоль которых высота местности над условным уровнем моря постоянна. Линии уровня (линии равного потенциала или эквипотенциальные линии) находят широкое применение при рассмотрении плоскопараллельных электрических полей. Здесь они являются линиями, вдоль которых электрический потенциал во всех их точках постоянен. Это физически означает, что работа, совершаемая силами электрического поля по переносу единичного положительного заряда из любой точки данной линии уровня в точку, потенциал которой принят равным нулю (в точку нулевого потенциала), будет одинакова. Совокупность линий равного потенциала дает наглядное изображение электрического поля, что облегчает его изучение.

Линии уровня применяются в математике при исследовании поверхностей (методом сечений). Уравнение линий уровня имеет вид:  $U(x, y) = C$ .

**Пример 2.1.** Найти линии уровня поля  $U(x, y) = x^2 - y^2$ . **Решение.** Положим:  $U = C$ , тогда  $x^2 - y^2 = C$ . При  $C > 0$  линии уровня относятся к гиперболе с вершинами на оси  $Ox$ , при  $C < 0$  линии уровня гиперболы с вершинами на оси  $Oy$ . Если  $C = 0$ , то имеем прямые  $y = \pm x$ , которые являются асимптотами этих гипербол.

**Пример 2.2.** Найти поверхность уровня поля  $U(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ , проходящую через точку  $P_0(1, -1, 2)$ . **Решение.** Уравнение поверхности уровня  $U = C$  и  $x^2 + y^2 + z^2 = C$ . Очевидно, в данном случае  $C \geq 0$ . Поверхности уровня - семейство сфер с центром в

начале координат. Из этого семейства надо выбрать сферу, проходящую через точку  $P_0(1, -1, 2)$ . Подставим координаты точки  $P_0$  в уравнение поверхностей уровня:  $1^2 + (-1)^2 + 2^2 = C$ . Тогда  $C = 6$ . Уравнение искомой поверхности уровня имеет вид:  $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ . Данное уравнение представляет собой сферу радиуса  $R = \sqrt{6}$  с центром в начале координат.

## 2.3. Производная по направлению

Пусть дано скалярное поле  $U = U(P)$ . Возьмем в пространстве, где задано это поле, некоторую точку  $P$  и проведем через нее какое-нибудь направление  $\vec{i}$ , рис.2.1. Пусть точка  $P_1$  также находится на направлении  $\vec{i}$ .

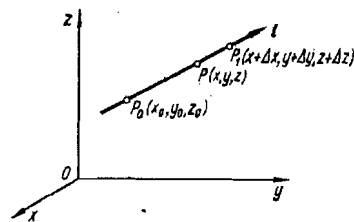


Рис.2.1. Определение производной по направлению

Найдем приращение функции  $U$  при переходе из точки  $P$  в точку  $P_1$ :

$$\Delta U = U(P_1) - U(P).$$

Обозначим величину смещения из точки  $P$  в точку  $P_1$  в направлении  $\vec{i}$  через  $\rho = |PP_1|$ .

Рассмотрим

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\rho} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{U(P_1) - U(P)}{\rho}$$

(предполагается, что точка  $P_1$  неограниченно приближается к точке  $P$ , оставаясь на векторе  $\vec{i}$  и  $\rho \rightarrow 0$ ).

Если этот предел существует, то он называется *производной от функции  $U$  по направлению  $\vec{i}$*  и обозначается  $\frac{\partial U}{\partial \vec{i}}$ . Таким образом,

$$\frac{\partial U}{\partial \vec{i}} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\rho}.$$



Если  $\frac{\partial U}{\partial l} > 0$ , то функция  $U$  в направлении  $\vec{l}$  возрастает, если  $\frac{\partial U}{\partial l} < 0$ , то функция  $U$  в направлении  $\vec{l}$  убывает. Величина  $\left| \frac{\partial U}{\partial l} \right|$  характеризует скорость изменения функции  $U$  в направлении  $\vec{l}$ : чем больше  $\left| \frac{\partial U}{\partial l} \right|$ , тем быстрее изменяется (растет или убывает, в зависимости от знака  $\frac{\partial U}{\partial l}$ ) функция  $U$  в направлении  $\vec{l}$ . В этом состоит физический смысл производной по направлению.

Понятие производной по направлению является обобщением понятия частных производных  $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}$ . Эти частные производные можно рассматривать, как производные от функции  $U$  по направлению соответствующих осей координат.

Выведем формулу для нахождения производной по направлению. Пусть  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  - направляющие косинусы направления  $\vec{l}$ ,  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  - некоторая фиксированная точка на этом направлении. Очевидно, координаты точки  $P(x, y, z)$  на направлении  $\vec{l}$  можно записать в виде:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + t \cos \alpha \\ y &= y_0 + t \cos \beta \\ z &= z_0 + t \cos \gamma \end{aligned} \right\}, \quad (2.1)$$

где  $t$  - длина отрезка  $P_0P$ .

В точках  $P(x, y, z)$ , лежащих на  $\vec{l}$ , функция  $U(x, y, z) = U(x(t), y(t), z(t)) = \varphi(t)$  является функцией одной, переменной  $t$ . Поэтому  $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{d\varphi(t)}{dt}$ . Применяя формулу дифференцирования сложной функций, находим:

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}.$$

Из формул (2.1) следует, что

$$\frac{dx}{dt} = \cos \alpha, \quad \frac{dy}{dt} = \cos \beta, \quad \frac{dz}{dt} = \cos \gamma$$

( $x_0, y_0, z_0, \cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  не зависят от переменной  $t$ ).

Следовательно

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \frac{\partial U}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial U}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial U}{\partial z} \cos \gamma. \quad (2.2)$$

Таким образом, для нахождения производной от функции  $U$  по направлению  $l$  надо найти частные производные  $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}$ , направляющие косинусы, задающие это направление, и применить формулу (2.2).

В случае двумерного случая, т.е. плоского поля  $U = U(x, y)$

$$\cos \beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha, \quad \cos \gamma = 0$$

и

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \frac{\partial U}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial U}{\partial y} \sin \alpha, \quad (2.3)$$

где  $\alpha$  - угол, образованный направлением  $\vec{l}$  с осью  $Ox$ .

**Пример 2.3.** Найти производную от функции  $U(x, y, z) = xyz$  по направлению  $\vec{l}$  от точки  $(1; 1; 1)$  к точке  $(2; 2; 2)$ . Решение. В данном случае

$$\frac{\partial U}{\partial x} = yz, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = xz, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = xy,$$

$$\cos \alpha = \frac{2-1}{\sqrt{(2-1)^2 + (2-1)^2 + (2-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \frac{1}{\sqrt{3}}(yz + xz + xy).$$

В частности, в точке  $(1, 1, 1)$  имеем:

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1+1+1) = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

## 2.4. Градиент

Понятие градиента применяют в тех случаях, когда необходимо связать точки поля со скалярной величиной, например, температуру, электрический или гравитационный потенциал, электрический заряд, плотность и т. д. Как известно, скалярная величина не имеет направления в

пространстве. Однако при её изменении от точки к точке можно указать направление этого изменения. Под градиентом скалярной функции понимают вектор, направленный в сторону быстреего возрастания функции. Чаще всего градиент скалярного поля связывают с декартовой системой координат. При этом он записывается через ее единичные проекции.

Если дано скалярное поле  $U = U(x, y, z)$  и функция  $U$  имеет частные производные  $\frac{\partial U}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial U}{\partial y}$  и  $\frac{\partial U}{\partial z}$ , то вектор вида  $\frac{\partial U}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \bar{k}$  называется градиентом скалярного поля  $U$  (градиентом функции  $U$ ) и обозначается  $\text{grad}$  (иногда  $\text{grad}$ ). Таким образом,

$$\overline{\text{grad}U} = \frac{\partial U}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \bar{k}, \quad (2.4)$$

Если использовать символический дифференциальный оператор вида

$$\bar{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k}, \quad (2.5)$$

который называется *набла-оператор* или *гамильтониан*. Тогда градиент, с использованием набла-оператора (2.5), можно записать так

$$\overline{\text{grad}U} = \bar{\nabla}U = \frac{\partial U}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \bar{k}. \quad (2.6)$$

Из (2.6) видно, что произведение оператора набла на скалярную функцию  $U$  дает градиент этой функции.

Векторный дифференциальный оператор или набла-оператор был введён ирландским математиком У. Р. Гамильтоном в 1853 г. Этот оператор обладает как свойствами вектора, так и свойствами производной.



Уильям Роуэн Гамильтон (*William Rowan Hamilton*, 1806 - 1865) - выдающийся ирландский математик XIX века. В три года уже читал, в 10 лет стал студентом, а в 22 года уже профессор астрономии Дублинского университета. В ходе исследований Гамильтон попутно ввёл понятие векторного поля и создал основы векторного анализа. Он открыл векторное произведение, предложил оператор «набла». На основе работ Гамильтона Гиббс и Хевисайд завершили систему векторного анализа. По рекомендации ирландского математика Уильяма Роуэна

Гамильтона комплексные числа стали выражать парой действительных чисел в виде (а, b).

Модуль градиента записывается в виде

$$|\overline{\text{grad}U}| = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}.$$

Направляющие косинусы градиента:

$$\cos \alpha_1 = \frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{|\overline{\text{grad}U}|}, \quad \cos \beta_1 = \frac{\frac{\partial U}{\partial y}}{|\overline{\text{grad}U}|}, \quad \cos \gamma_1 = \frac{\frac{\partial U}{\partial z}}{|\overline{\text{grad}U}|}.$$

Итак,  $\overline{\text{grad}U}$  является векторной величиной. Говорят, что скалярным полем  $U$  порождается векторное поле градиента  $U$ .

Установим связь между градиентом (2.4) и производной по направлению (2.2) и выясним физический смысл градиента. Возьмем в поле  $U = U(P)$  точку  $P$  (рис.2.2) и найдем  $\text{grad}U(P)$ . Проведем через точку  $P$  некоторое направление  $l$ , образующее с осями координат углы  $\alpha, \beta, \gamma$ .

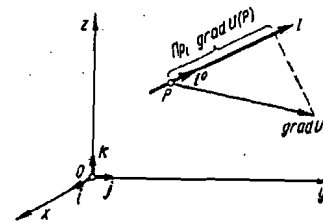


Рис.2.2. Связь между градиентом и производной по направлению

Пусть  $\bar{l}^0 = \cos \alpha \bar{i} + \cos \beta \bar{j} + \cos \gamma \bar{k}$  — единичный вектор направления  $l$ . Скалярное произведение векторов  $\bar{l}^0$  и  $\overline{\text{grad}U(P)}$  имеет вид:

$$\bar{l}^0 \overline{\text{grad}U(P)} = \cos \alpha \frac{\partial U}{\partial x} + \cos \beta \frac{\partial U}{\partial y} + \cos \gamma \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Известно, что скалярное произведение некоторого вектора на какой-нибудь единичный вектор равно проекции данного вектора на этот единичный вектор. Таким образом, левая часть полученного равенства представляет собой проекцию  $\text{Pr}_{\bar{l}^0} \overline{\text{grad}U(P)}$ . Правая же часть равна  $\frac{\partial U}{\partial l}$ , то есть

$$\text{Pr}_{\bar{l}^0} \overline{\text{grad}U} = \frac{\partial U}{\partial l},$$

так как  $\text{Pr}_{\bar{l}^0} \overline{\text{grad}U} = \text{Pr}_{\bar{l}} \overline{\text{grad}U}$ .

При изменении направления  $\bar{l}$  изменяется и проекция  $\text{Pr}_{\bar{l}} \overline{\text{grad}U}$ . Очевидно, эта проекция будет иметь наибольшее положительное значение в том случае, когда  $\bar{l}$  совпадает с вектором  $\overline{\text{grad}U(P)}$ .

Учитывая физический смысл производной по направлению и формулу

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \text{Pr}_1 \overline{\text{grad}U}, \quad (2.7)$$

убедимся в том, что вектор  $\overline{\text{grad}U(P)}$  по величине и направлению есть наибольшая скорость возрастания функции  $U = U(P)$  в данной точке  $P$ . В этом и состоит физический смысл градиента.

На указанном свойстве градиента основано его широкое применение как в математике, так и в других науках. В частности, в электрическом поле градиент электрического потенциала  $\overline{\text{grad}U}$  есть вектор, равный по величине наибольшему положительному приращению потенциала  $V$ , отнесенному к единице длины, и совпадающий с направлением этого наибольшего приращения (то есть наибольшая скорость возрастания потенциала). Дивергенция в случае плоского поля  $U = U(x, y)$  имеем:

$$\overline{\text{grad}U} = \frac{\partial U}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \bar{j}. \quad (2.8)$$

Покажем, что вектор  $\overline{\text{grad}U(P)}$  направлен по нормали к поверхности уровня скалярного поля  $U(P)$ , проходящей через точку  $P$ . Уравнение поверхности уровня:

$$U(x, y, z) = C.$$

Известное, из курса аналитической геометрии, уравнение нормали к поверхности имеет вид:

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial U(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial U(x_0, y_0, z_0)}{\partial y}} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial U(x_0, y_0, z_0)}{\partial z}},$$

где  $x, y, z$  - координаты текущей точки нормали,  $x_0, y_0, z_0$  - координаты точки поверхности, в которой проведена нормаль.

Замечаем, что проекции направляющего вектора нормали к поверхности уровня в точке  $P(x, y, z)$  являются проекциями вектора  $\overline{\text{grad}U(P)}$ . Следовательно, вектор  $\overline{\text{grad}U(P)}$  направлен по нормали к этой поверхности. Отсюда следует, например, что и градиент электрического потенциала всюду направлен по нормали (внутренней) к поверхности равного потенциала - к эквипотенциальной поверхности. В случае плоского поля  $U = U(x, y)$  вектор  $\overline{\text{grad}U(P)}$  направлен по нормали к линии уровня этого поля, проходящей через точку  $P(x, y)$ .

**Пример 2.4.** Найти наибольшую скорость возрастания функции  $U(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  в точке  $P(1, 1, 1)$ .

**Решение.** Найдем:  $\overline{\text{grad}U} = 2x\bar{i} + 2y\bar{j} + 2z\bar{k}$ ;  $\overline{\text{grad}U}(1, 1, 1) = 2\bar{i} + 2\bar{j} + 2\bar{k}$ ;  
 $|\overline{\text{grad}U}(1, 1, 1)| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = 2\sqrt{3}$ .

Следовательно, наибольшая скорость возрастания  $\dot{U}_{\max} = 2\sqrt{3}$ . Поверхностью уровня поля  $U$ , проходящей через точку  $P(1, 1, 1)$  является сфера

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3.$$

Наибольшая скорость возрастания функции  $U$  будет в направлении радиуса этой сферы, проходящего через данную точку  $P(1, 1, 1)$ .

## 2.5. Дивергенция

Тепловой поток, как известно, имеет определенную величину и направление в каждой своей точке, т.е.  $\vec{T} = \vec{T}(x, y, z)$ . В математике для характеристики локальных свойств векторных полей, т.е. их свойств в окрестности некоторой точки, вводятся соответствующие дифференциальные величины<sup>3</sup>. Одной из них является дивергенция (от позднелат. *divergentia* - расхождение). Дивергенция позволяет охарактеризовать векторное поле  $\vec{a}(x, y, z)$  в каждой его точке  $M(x_0, y_0, z_0)$ . Дивергенцией векторного поля  $\vec{a}$  (обозначается  $\text{div} \vec{a}$ ) в точке  $M$  называется предел отношения потока поля через замкнутую поверхность  $S$ , окружающую точку  $M$ , к объему области, ограниченной этой замкнутой поверхностью, при условии, что объем  $V$  стягивается к данной точке.

$$\text{div} \vec{a}(M) = \lim_{V \rightarrow M} \frac{\oiint_S (\vec{a} \cdot \vec{n}) dS}{V}, \quad (2.9)$$

где  $V$  - объем, в котором находится некоторая точка, а  $S$  - окружающая этот объем поверхность произвольной формы.

Существуют и другие определения дивергенции, однако важность определения (2.9) заключается в том, что оно не зависит от координатной системы. Термин «дивергенция» ввел английский математик и философ Уильям Кингдон Клиффорд в 1878 году, он же автор обозначения *div*.

<sup>3</sup> Гамильтон, кроме дифференциального оператора  $\nabla$  («набла»), ввел еще понятие векторного поля, вектор-функции, и многие другие понятия векторного анализа. Компактность и инвариантность векторной символики, использованной в первых трудах Максвелла, заинтересовали физиков; вскоре вышли «Элементы векторного анализа» Гиббса (1880-е годы), а затем Хевисайд (1903) придал векторному исчислению современный вид.

НАУЧНО-ИНФОРМАЦИОННЫЙ ЦЕНТР  
С-Петербург, улица Черных, 4

816788<sup>17</sup>

НАУЧНО-ИНФОРМАЦИОННЫЙ ЦЕНТР САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА РАСТИТЕЛЬНЫХ ПОЛИМЕРОВ



William Kingdon Clifford  
W.K. Clifford

Уильям Кингдон Клиффорд (англ. *William Kingdon Clifford*, 1845 - 1879) - английский математик и философ. Наряду с Гиббсом и Хевисайдом является основоположником векторного анализа. Ввел (1878) современные термины *дивергенция* (которую Максвелл называл *конвергенцией*) и *ротор*. В посмертно изданном труде «Здравый смысл в точных науках» (опубл. 1885) дал современное определение скалярного произведения векторов. Похоронен на Хайгейтском кладбище, Лондон, рядом с могилой основоположника коммунистической теории развития общества Карлом Марксом.

Предположим, что векторная функция  $\vec{a}$  задана в декартовой системе координат. Это означает, что известны три скалярные функции  $a_x(x, y, z)$ ,  $a_y(x, y, z)$ ,  $a_z(x, y, z)$ . Найдем выражение для дивергенции в точке  $P(x, y, z)$  в декартовой системе координат [6]. Выберем область, окружающую точку  $P$  в виде элементарного параллелепипеда со сторонами  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$ . Найдем суммарный поток  $\Phi^{(x)}$  вектора  $\vec{a}$  через две противоположные грани, перпендикулярные оси  $x$ :

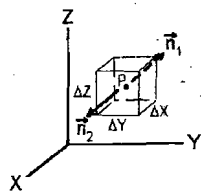


Рис.2.3. Определение дивергенции в декартовой системе координат

$$\Phi^{(x)} = \vec{a} \cdot \vec{n}_1 \Delta y \Delta z + \vec{a} \cdot \vec{n}_2 \Delta y \Delta z = -a_{x1} \Delta y \Delta z + a_{x2} \Delta y \Delta z = (a_{x2} - a_{x1}) \Delta y \Delta z,$$

где  $a_{x1}$  и  $a_{x2}$  средние значения проекций  $a_x$  на гранях, к которым на рис. 2.3 проведены соответствующие нормали. Приближенно можно записать, что

$$a_{x2} - a_{x1} \approx \frac{\partial a_x}{\partial x} \Delta x.$$

Тогда  $\Phi^{(x)} \approx \frac{\partial a_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z = \frac{\partial a_x}{\partial x} \Delta V$ , где  $\Delta V$  - объем параллелепипеда.

По аналогии можно записать и компоненты потока через пары противоположных граней, перпендикулярных осям  $y$  и  $z$ . Тогда полный поток вектора  $\vec{a}$  через всю поверхность параллелепипеда будет

$$\Phi = \Phi^{(x)} + \Phi^{(y)} + \Phi^{(z)} \approx \left( \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) \Delta V.$$

Устремляя объем параллелепипеда к нулю, путем стягивания его к точке  $P$  перейдем от приближенного равенства к точному и получим, согласно определению дивергенции (2.9), что в декартовых координатах

$$\text{div} \vec{a}(P) = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \quad (2.10)$$

Эта несложная формула (2.10) и служит для вычисления дивергенции векторного поля.

**Пример 2.5.** Вычислить дивергенцию векторного поля  $\vec{a}(M) = 4xy^3 \vec{i} - y^2 z \vec{j} + 7z^3 \vec{k}$  в точке  $M_0(1; -3; 2)$ . **Решение.** Тогда

$$a_x = 4xy^3, a_y = -y^2 z \text{ и } a_z = 7z^3. \text{ Значения частных производных:}$$

$$\left. \frac{\partial a_x}{\partial x} \right|_{M_0} = 4y^3 \Big|_{M_0} = -108, \quad \left. \frac{\partial a_y}{\partial y} \right|_{M_0} = -2yz \Big|_{M_0} = 12, \quad \left. \frac{\partial a_z}{\partial z} \right|_{M_0} = 21z^2 \Big|_{M_0} = 84.$$

Теперь, воспользовавшись формулой (2.10) вычислим дивергенцию поля в заданной точке  $\text{div} \vec{a}(M_0) = -108 + 12 + 84 = -12$ .

## 2.6. Физическая интерпретация дивергенции

Для выяснения физического смысла понятия дивергенции в случае электрического поля обратимся к представлению поля  $\vec{a}$  силовыми линиями. Если в окрестности точки  $P$  зарядов нет, то количество линий, входящих в ящик, будет равно числу линий, выходящих из ящика. Таким образом, поток через всю поверхность, окружающую точку  $P$ , будет равен нулю, а с ним будет равна нулю и дивергенция (2.9). Если вблизи точки  $P$  есть положительный заряд, то выходящие из него линии создадут дополнительный поток из ящика, а поскольку выходящие линии ориентированы в сторону внешней нормали к стенкам ящика, то знак этого дополнительного потока будет положительным (в случае же отрицательного заряда в точке  $P$  - отрицательным). Тогда дивергенция будет мерой этого дополнительного потока на единицу объема, возникающего или исчезающего в точке  $P$ .

С точки зрения физики, дивергенция векторного поля является показателем того, в какой степени данная точка пространства является источником или стоком этого поля:

$\text{div} \vec{a} > 0$  - точка поля является источником;

$\text{div} \vec{a} < 0$  - точка поля является стоком;

$div \vec{a} = 0$  - стоков и источников нет, либо они компенсируют друг друга.

Модуль дивергенции  $|div \vec{a}|$  характеризует мощность источника или стока в точке. Если дивергенция равна нулю в каждой точке области  $V$ , то векторное поле называется соленоидальным (или трубчатым) в области  $V$ .

Например, если в качестве векторного поля взять совокупность направлений наискорейшего спуска на земной поверхности, то дивергенция покажет местоположение вершин и впадин, причём на вершинах дивергенция будет положительна (направления спуска расходятся от вершин), а на впадинах отрицательная (к впадинам направления спуска сходятся).

Еще одним, быть может, несколько схематическим, примером может служить озеро (для простоты - постоянной единичной глубины со всюду горизонтальной скоростью течения воды, не зависящей от глубины, давая, таким образом, двумерное векторное поле на двумерном пространстве). Если необходимо иметь более реалистическую картину, то можно рассмотреть горизонтальную проекцию скорости, проинтегрированную по вертикальной пространственной координате, что даст ту же картину двумерного векторного поля на двумерном пространстве, причем картина качественно будет для наших целей не сильно отличаться от упрощенной первой, количественно же являться ее обобщением (весьма реалистическим). В такой модели (и в первом, и во втором варианте) родники, бьющие со дна озера, будут давать положительную дивергенцию поля скоростей течения, а подводные стоки (пещеры, куда вода утекает) - отрицательную дивергенцию.

**Дивергенция** представляет собой дифференциальный оператор, отображающий векторное поле в скалярное или другими словами - дифференциальный оператор, который, действуя на векторное поле, превращает его в скалярное поле. Дивергенция показывает, насколько расходятся входящий и исходящий потоки. Это филологическое определение, объясняющее этимологию термина, сокращается, если учесть, что поток и каждый элемент потока имеют знак, и поэтому нет необходимости учитывать входящий и исходящий потоки по отдельности, всё будет автоматическим учтено при суммировании с учетом знака. Поэтому с учетом сказанного, можно дать более короткое определение дивергенции. Дивергенция - это дифференциальный оператор на векторном поле, характеризующий поток данного поля через поверхность малой окрестности каждой внутренней точки области определения поля. Оператор дивергенции, примененный к полю, обозначают как  $div \vec{F}$ .

Заметим, что при количественном описании векторных полей, кроме градиента и дивергенции, иногда в зависимости от решаемой проблемы. пользуются понятием ротора или вихря. Вихрь (ротатор) векторного поля представляет собой векторную характеристику «вращательной

составляющей» поля  $\vec{U}$ . Вихрь (ротатор) обозначается символом  $rot \vec{U}$ . Если поле  $\vec{U}$  имеет координаты  $U_x, U_y$  и  $U_z$  в базисе  $\vec{i}, \vec{j}$  и  $\vec{k}$ , тогда вихрь запишется в виде:

$$rot \vec{U} = \left( \frac{\partial U_z}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial U_x}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial U_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

В символической форме ротор записывается в виде определителя

$$rot \vec{U} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ U_x & U_y & U_z \end{vmatrix}.$$

Векторное поле  $\vec{U}$  называется *безвихревым* в области  $V$ , если в каждой ее точке  $rot \vec{U} = 0$ .

## 2.7. Дифференциальная форма закона сохранения энергии в физике

На примере из физики покажем важность понятия дивергенции. Выделим в середине неравномерно нагретого тела произвольную замкнутую поверхность  $S$ , которая ограничивает объем  $V$ . Считаем, что в объеме  $V$  тепловые источники отсутствуют. Тогда количество тепла  $Q_1$  вытекающего через поверхность  $S$  в единицу времени будет представлять собой мощность теплового потока  $\vec{q}$  (измеряется в  $\frac{Bm}{m^2}$ ). В этом случае, количество теплоты проходящей в единицу времени через элементарную площадку  $dS$  поверхности можно записать в виде

$$\frac{\partial Q_1}{\partial t} = \oint_S q_n dS, \quad (2.11)$$

где  $q_n$  - проекция вектора  $\vec{q}$  на нормаль  $\vec{n}$  к поверхности  $S$ .

С другой стороны, потерю тепла внутри объема  $V$ , из-за его вытекания через поверхность  $S$ , можно оценить скоростью убывания тепловой энергии  $\frac{\partial Q_2}{\partial t}$  содержащейся в единице объема  $V$ . Выразив количество тепла через объемную плотность энергии, запишем мощность тепловой энергии через объемный интеграл

$$\frac{\partial Q_2}{\partial t} = - \int_V \frac{\partial p}{\partial t} dV, \quad (2.12)$$

где  $p$  - объемная плотность тепловой энергии, а знак минус указывает на уменьшение тепловой энергии во всем объеме  $V$ .

Исходя из закона сохранения энергии, приравняем выражения (2.11) и (2.12). Тогда получим

$$- \int_V \frac{\partial p}{\partial t} dV = \oint_S q_n dS. \quad (2.13)$$

Используя запись формулы Остроградского-Гаусса в векторной форме

$$\int_V \operatorname{div} \bar{q} dV = \oint_S q_n dS,$$

запишем в (2.13) поверхностный интеграл  $\oint_S q_n dS$  через объемный интеграл. После этого (2.13) примет вид:

$$- \int_V \frac{\partial p}{\partial t} dV = \int_V \operatorname{div} \bar{q} dV.$$

Отсюда имеем

$$- \frac{\partial p}{\partial t} = \operatorname{div} \bar{q}. \quad (2.14)$$

Равенство (2.14) представляет собой закон сохранения энергии в дифференциальной форме.

В такой форме часто записываются и другие законы сохранения для различных физических величин:

$$- \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \operatorname{div} \bar{a}, \quad (2.15)$$

где  $\Phi = \Phi(x, y, z, t)$  и  $\bar{a} = \bar{a}(x, y, z, t)$  - некоторые функции.

Из физических законов сохранения, записанных в виде равенств вида (2.15) видна необходимость использования понятия дивергенции в математической теории поля.

## 2.8. Оператор Лапласа и лапласиан функции

Исходя из физических соображений, обоснуем необходимость введения сложного оператора  $\operatorname{div} \operatorname{grad}$ , который называют *оператором Лапласа*.



Пьер-Симон Лаплас (фр. *Pierre-Simon Laplace*, 1749 - 1827) - французский математик и астроном. При решении прикладных задач Лаплас разработал методы математической физики, широко используемые и в наше время. Его именем названо преобразование Лапласа, уравнение Лапласа и оператор Лапласа. В 1785 году на одном из экзаменов Лаплас высоко оценил знания 17-летнего абитуриента Бонапарта. Впоследствии их отношения были неизменно тёплыми. Наполеон наградил Лапласа титулом графа Империи и всеми мыслимыми орденами и должностями. Он даже пробовал его на посту министра внутренних дел, но спустя 6 недель предпочёл признать свою ошибку. Лаплас внёс в управление, как выразился позднее Наполеон, «дух бесконечно малых», т. е. мелочность.

Согласно закону Фурье, тепловой поток  $q$  в середине массива пропорционален градиенту температуры

$$\bar{q} = -k \operatorname{grad} T, \quad (2.16)$$

где  $k$  - постоянный коэффициент теплопроводности. Поставив (2.16) в (2.14), получим:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = k \operatorname{div} \operatorname{grad} T. \quad (2.17)$$

Уравнение (2.17) как раз и показывает необходимость введения оператора Лапласа  $\operatorname{div} \operatorname{grad}$  и соответствующего ему лапласиана функции.

Пусть в пространстве существует скалярное поле  $f(x, y, z)$ . **Лапласианом** функции  $f$  называют выражение  $\operatorname{div} \operatorname{grad} f$ , которое обычно обозначают  $\Delta f$  (читается «лапласиан  $f$ »):

$$\Delta f \equiv \operatorname{div} \operatorname{grad} f. \quad (2.18)$$

Обозначение  $\Delta$  ввел Р. Мёрфи в 1833 году.

Заметим, что скалярное произведение оператора набла на векторную функцию  $\bar{a}$  дает дивергенцию этой функции:  $\bar{\nabla} \cdot \bar{a} = \operatorname{div} \bar{a}$ , а векторное произведение оператора набла на векторную функцию  $\bar{a}$  дает ротор этой функции:  $\bar{\nabla} \times \bar{a} = \operatorname{rot} \bar{a}$ .

В декартовых координатах выражение (2.18) запишется в виде:

$$\Delta f \equiv \frac{\partial}{\partial x} (\operatorname{grad}_x f) + \frac{\partial}{\partial y} (\operatorname{grad}_y f) + \frac{\partial}{\partial z} (\operatorname{grad}_z f)$$

или

$$\Delta f \equiv \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right).$$

Окончательно имеем

$$\Delta f \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \quad (2.19)$$

Как видно из (2.18), лапласиан в декартовой системе координат представляет собой сумму из трех частных производных второго порядка по координатам. Сам оператор Лапласа имеет вид:

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.20)$$

и его можно рассматривать формально, как скалярное произведение  $\nabla \cdot \nabla$ :

$$\nabla \cdot \nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k} \right) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k} \right). \quad (2.21)$$

Если формально перемножить это выражение, то получим (2.20), то есть лапласиан.

Поскольку  $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ , то скалярное произведение равняется квадрату модуля  $\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2$ . Отсюда видно, что лапласиан функции можно обозначать как символом  $\Delta f$ , так и символом  $\nabla^2 f$ .

В случае одной независимой переменной  $x$  (одномерный случай) лапласиан функции имеет вид:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}. \quad (2.22)$$

В случае двух независимых переменных  $x$  и  $y$  (двухмерный случай) лапласиан функции имеет вид:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}. \quad (2.23)$$

Оператор вида  $\Delta^2$  называют бигармоническим оператором. Этот оператор в случае двух независимых переменных он имеет вид:

$$\Delta^2 f = \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4}. \quad (2.24)$$

Рассмотрим запись уравнения теплопроводности с использованием лапласиана. Равенство (2.17) запишем в виде:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = k \cdot \nabla^2 T,$$

где  $\nabla^2 T$  лапласиан температуры массива. Так как  $dQ = C_v dT$ , где  $C_v$  - объемная теплоемкость массива. В этом случае

$$C_v \frac{\partial T}{\partial t} = k \cdot \nabla^2 T \quad \text{или} \\ \frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \cdot \nabla^2 T, \quad (2.25)$$

где  $a^2 = \frac{k}{C_v}$  - константа, а  $T = T(x, y, z)$ .

Выражение (2.25) представляет собой уравнение теплопроводности, которое иногда называют еще уравнением диффузии тепла.

Диффузия вещества при малой концентрации раствора описывается аналогичным дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \cdot \nabla^2 u, \quad (2.26)$$

где  $u$  - концентрация раствора (отношение массы одного вещества раствора к полной массе в данном элементе объема),  $D$  - коэффициент диффузии.

### ГЛАВА 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ИНЖЕНЕРНЫХ ЗАДАЧ, ПРИВОДЯЩИХ К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

При количественном описании физических полей с использованием дифференциальных операций векторного анализа применяются градиент, дивергенция и ротор.

#### 3.1. Дифференциальные уравнения в прикладных научно-технических задачах

Раздел теории дифференциальных уравнений является одним из самых больших в современной математике. Теория дифференциальных уравнений, как известно, состоит из двух областей: теории обыкновенных дифференциальных уравнений и теории уравнений с частными производными. Особенностью теории дифференциальных уравнений

является ее непосредственная связь с техническими приложениями. Довольно часто различные технические процессы можно смоделировать в виде дифференциальных уравнений. Такими оказываются модели различных явлений механики сплошной среды, химических реакций, электрических и магнитных явлений и др. Использование моделей в виде дифференциальных уравнений, связано в основном с возможностью в компактной форме с приемлемой точностью отображения предмета моделирования записать физические законы [7].

Исследования модельных дифференциальных уравнений вместе с начальными или граничными условиями открывают возможности получения информации о происходящем процессе, а иногда позволяет заглянуть и в его прошлое, а также узнать еще и его будущее. Изучение математической модели математическими методами позволяет не только получить качественные характеристики физических явлений и рассчитать с заданной степенью точности ход реального процесса, но и дает возможность проникнуть в суть физических явлений, а иногда предсказать и новые физические эффекты. Бывает, что сама природа физического явления подсказывает и подходы, и методы математического исследования. Критерием правильности выбора математической модели является практика, сопоставление данных математического исследования с экспериментальными данными.

Для представления математической модели в виде дифференциальных уравнений, для ряда задач не требуется информации обо всем физическом процессе, а необходимо знать только локальные связи между основными характеристиками явления.

Обыкновенные дифференциальные уравнения возникают тогда, когда неизвестная функция зависит лишь от одной независимой переменной. Соотношение между независимой переменной, неизвестной функцией и ее производными до некоторого порядка представляет собой дифференциальное уравнение. Одной из основных задач этой теории являются существование у дифференциальных уравнений таких решений, которые удовлетворяют начальным условиям Коши при единственности решения и его устойчивости. Под устойчивостью решения понимают малые изменения решения при малых изменениях дополнительных данных задачи и функций, определяющих само уравнение<sup>4</sup>. Важными для приложений являются исследования характера решения, то есть качественного поведения решения и нахождение методов численного решения уравнений.

Инженеру часто приходится сталкиваться с задачами, в которых искомая величина зависит от нескольких переменных. В этом случае решаемые уравнения содержат частные производные и называются дифференциальными уравнениями в частных производных. Теория

<sup>4</sup> Если же малые изменения данных задачи приводят к сравнительно большим изменениям конечного решения, то говорят, что решение неустойчиво.

уравнений с частными производными возникла на основе конкретных физических задач, приводящих к исследованию отдельных уравнений с частными производными, которые получили название основных *уравнений математической физики*. Важнейшими уравнениями математической физики являются: уравнение Лапласа, уравнение теплопроводности и волновое уравнение. В этих уравнениях функция  $\Phi$  зависит от времени, а также исходя из постановки задачи – может зависеть от одной, двух и трех переменных. В общем случае  $\Phi = \Phi(t, x, y, z)$ . Уравнение с частными производными - это соотношение между независимыми переменными, неизвестной функцией и ее частными производными до некоторого порядка. Аналогично определяется система уравнений, когда имеется несколько неизвестных функций.

К уравнению Лапласа сводятся самые разнообразные физические задачи различной природы:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (3.1)$$

Уравнению Лапласа (3.1) встречается в задачах электростатики, теории потенциала, гидродинамики, теории теплопередачи и многих других разделах физики, а также в теории функций комплексного переменного и в различных областях математического анализа. Если в уравнении (3.1) присутствует некоторая функция  $f(x, y)$ , то имеем так называемое *уравнение Пуассона*:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -f(x, y). \quad (3.2)$$

Уравнение (3.2) является простейшим представителем широкого класса так называемых *эллиптических уравнений*.

Важное место занимает уравнение Лапласа в теплотехнике, где оно носит название *уравнение теплопроводности*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad t > 0, 0 < x < l \quad (3.3)$$

с краевыми условиями 1-го рода  $u(0, t) = \mu_1(t)$ ,  $u(l, t) = \mu_2(t)$ ,  $u(x, 0) = u_0(x)$ .

Это уравнение встречается в теории теплопередачи, в теории диффузии, а также в теории вероятностей. Оно является наиболее простым представителем класса так называемых *параболических уравнений*. Некоторые свойства решений уравнения теплопроводности напоминают свойства решений уравнения Лапласа, что находится в согласии с их физическим смыслом, так как уравнение Лапласа описывает, в частности,



стационарное распределение температуры. Уравнение теплопроводности было выведено и впервые исследовано в 1822 году в знаменитой работе Ж. Фурье "Аналитическая теория тепла", которая сыграла важную роль в развитии методов математической физики и теории тригонометрических рядов.

Различные волновые процессы, в частности распространение звуковых волн описывается волновым уравнением. Это уравнение относится к классу так называемых *гиперболических уравнений* и играет важную роль в акустике:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = 0. \quad (3.4)$$

При решении дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных обычно задаются граничные или начальные условия, а также комбинация тех и других. Это значит, что кривая решения должна обязательно пройти через заданные граничные или начальные условия.

Другими словами, задача нахождения функции, удовлетворяющей заданному дифференциальному уравнению в некоторой области и определённым краевым условиям на границе этой области, носит название решение краевой задачи (т.н. задача Дирихле или первая краевая задача). В то время, как краевые условия задаются исключительно на граничных точках области, где ищется решение, начальные условия могут оказаться заданными на определённом множестве точек внутри области. Различают первую и вторую краевые задачи.

Первая краевая задача – задача отыскания решения эллиптического уравнения с краевыми условиями 1-го рода. Эту задачу также называют иногда *задачей Дирихле* (см. гл.8).

Вторая краевая задача или задача Неймана – задача отыскания решения эллиптического уравнения с краевыми условиями 2-го рода. В простейших случаях, в частности, для уравнения Лапласа задача Неймана состоит в отыскании решения в некоторой области, имеющего на границе этой области заданную нормальную производную, то есть производная градиента функции на направление нормали. Впервые подобного рода задачи систематически были исследованы в 1877г. немецким математиком К. Нейманом.

На рубеже XIX века, теория дифференциальных уравнений обогатилась теорией интегральных уравнений Фредгольма. Интегральное уравнение представляет собой, функциональное уравнение с интегральным преобразованием над неизвестной функцией. Если интегральное уравнение содержит также производные от неизвестной функции, то говорят об интегро-дифференциальном уравнении. Примером интегро-дифференциального уравнения может служить уравнение роста трещины в вязкоупругом материале (полимер, бетон и т.д.).

Достоверность математической модели зависит от теорем существования решений соответствующих дифференциальных уравнений. Дело в том, что математическая модель не всегда адекватна конкретному явлению и из существования решения реальной задачи (физической, химической, биологической) еще не следует существование решения соответствующей математической задачи.



Фредгольм (Fredholm) Эрик Ивар (1866 –1927), шведский математик. Первым начал исследование интегральных уравнений (уравнений с неизвестной функцией под знаком интеграла). Разработал общие методы решения некоторых видов интегральных уравнений, получивших название его имени.

### 3.2. Подходы к решению дифференциальных уравнений

Очень многие из дифференциальных уравнений, к сожалению, не имеют аналитического решения, и чтобы решить их, приходится прибегать к численным методам. Если для решения обыкновенных дифференциальных уравнений существует множество различных методов, то для решения дифференциальных уравнений в частных производных приходится выбирать лишь между *методами конечных разностей* и *конечных элементов* [7,8].

При решении конкретных дифференциальных уравнений часто используются методы, обладающие большой общностью. Такими методами являются, например, метод Фурье, метод Рунге, метод Галёркина, методы теории возмущений и другие.

В настоящее время важную роль в развитии теории дифференциальных уравнений играет применение современных электронных вычислительных машин (ЭВМ). Использование ЭВМ облегчает проведение вычислительного эксперимента при решении дифференциальных уравнений и позволяет выявить те или иные свойства их решений. Целью вычислительного эксперимента является построение с необходимой точностью описания изучаемого физического явления за возможно короткое машинное время. В основе такого эксперимента часто лежит численное решение системы уравнений с частными производными. Отсюда происходит связь теории дифференциальных уравнений с вычислительной математикой и, в частности, с такими ее важными разделами, как метод конечных разностей, метод конечных элементов и другие.

В настоящее время теория дифференциальных уравнений с частными производными представляет собой широкую математическую область.

Построена теория краевых задач для эллиптических операторов<sup>5</sup> на основе недавно созданного нового аппарата - теории псевдодифференциальных операторов, решена проблема индекса, изучены смешанные задачи для гиперболических уравнений. Важную роль в современных исследованиях гиперболических уравнений играют интегральные операторы Фурье, которые обобщают оператор преобразования Фурье на тот случай, когда фазовая функция в показателе экспоненты, вообще говоря, нелинейно зависит от независимых переменных и частот. С помощью интегральных операторов Фурье изучен вопрос о распространении особенностей решений дифференциальных уравнений, ведущий начало от классических работ Гюйгенса. Найдены условия корректной постановки краевых задач, исследованы вопросы гладкости решений для эллиптических и параболических систем. Изучены нелинейные эллиптические и параболические уравнения второго порядка и широкие классы нелинейных уравнений первого порядка, исследована для них задача Коши, построена теория разрывных решений. Глубокому изучению были подвергнуты: система Навье-Стокса, система уравнений пограничного слоя, уравнения теории упругости, уравнения фильтрации и многие другие важные уравнения математической физики.

### 3.3. Классификация дифференциальных уравнений в частных производных

Дифференциальные уравнения в частных производных классифицируют либо в зависимости от их математической природы - эллиптические, параболические и т. п., либо в зависимости от физического смысла решаемых с их помощью задач - уравнение диффузии, волновое уравнение и т. п. Чтобы пользоваться математической литературой и литературой по прикладным дисциплинам, инженер должен быть знаком с обеими этими классификациями.

Дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных с двумя независимыми переменными в общем виде может быть представлено так:

$$A(x, y) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + B(x, y) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + E(x, y, f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}) = 0, \quad (3.5)$$

где  $A, B$  и  $C$  некоторые функции, зависящие от переменных  $x$  и  $y$ .

В зависимости от значения определителя  $B^2 - 4AC$ , составленного из коэффициентов уравнения, вводят классификацию рассматриваемых уравнений:

- $B^2 - 4AC < 0$  - эллиптическое уравнение;
- $B^2 - 4AC = 0$  - параболическое уравнение;

- $B^2 - 4AC > 0$  - гиперболическое уравнение.

Зависимость функций  $A, B$  и  $C$  от  $x$  и  $y$  усложняет решение задачи, так как появляется возможность изменить тип уравнения при переходе из одной части рассматриваемой области в другую.

Эллиптические уравнения описывают установившиеся (стационарные) процессы. Задача решается для замкнутой области, и в каждой точке границы этой области задаются граничные условия.

Параболическими и гиперболическими уравнениями описываются эволюционные процессы (процессы «распространения»). В таких задачах на одной части границы ставятся начальные условия, на другой - граничные. Возможны также открытые области, в которые «распространяется решение».



Симеон-Дени Пуассон (фр. *Siméon-Denis Poisson*, 1781 - 1840) - знаменитый французский физик и математик. В статье «Замечание об уравнении теории притяжений» (1813) вывел уравнение названное его именем (см. табл.3.1). Пуассон независимо от Ф. Бесселя открыл функции, которые теперь называются бесселевыми, и дал их разложения в полурасходящиеся ряды. Среди его учеников был П.Г. Лежён-Дирихле.

Наиболее часто встречаемые в инженерной практике уравнения в частных производных, приведены в табл. 3.1.

Таблица 3.1

Известные типы дифференциальных уравнений в частных производных

Уравнение	Математическая форма	В каких технических задачах встречается
Лапласа	$\Delta f = 0$	Установившееся течение жидкости. Стационарные тепловые поля.
Пуассона	$\Delta f = -k$	Теплопередача с внутренними источниками тепла
Диффузии	$\Delta f = \frac{1}{h^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial t}$	Нестационарная теплопроводность
Волновое	$\Delta f = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$	Распространение звуковых волн
Бигармоническое	$\Delta^2 f = F(x, y)$	Деформация пластин

<sup>5</sup> Эллиптический оператор - дифференциальный оператор 2-го порядка в частных производных.

## ГЛАВА 4. НЕКОТОРЫЕ СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ПРИ РЕШЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В этой главе приводятся сведения о специальных функциях, необходимые при построении математических моделей.

### 4.1. Гиперболические функции

В математике и ее приложениях к естествознанию и технике находят широкое применение показательные функции. Это, в частности, объясняется тем, что многие изучаемые в естествознании явления относятся к числу так называемых процессов органического роста, в которых скорости изменения участвующих в них функций пропорциональны величинам самих функций. Если обозначить через  $y$  функцию, а через  $x$  аргумент, то дифференциальный закон процесса органического роста может быть записан в виде

$$\frac{dy}{dx} = ky,$$

где  $k$  - некоторый постоянный коэффициент пропорциональности.

Интегрирование этого уравнения приводит к общему решению в виде показательной функции

$$y = C \exp(kx).$$

Если задать начальное условие  $y = y_0$  при  $x = x_0$ , то можно определить произвольную постоянную  $C = y_0 \exp(-kx_0)$  и, таким образом, найти частное решение

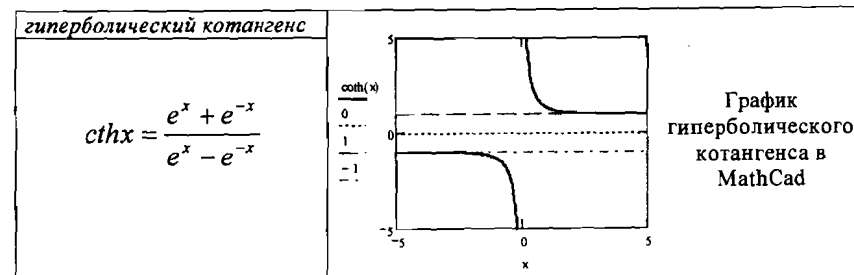
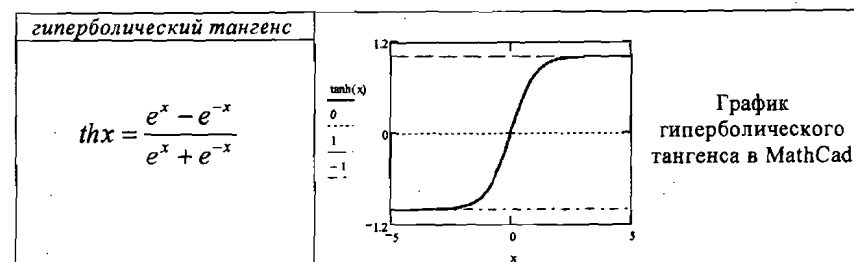
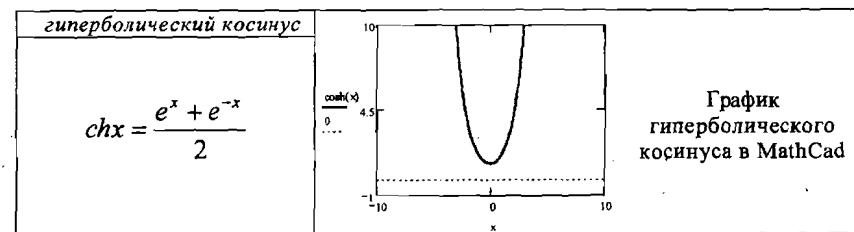
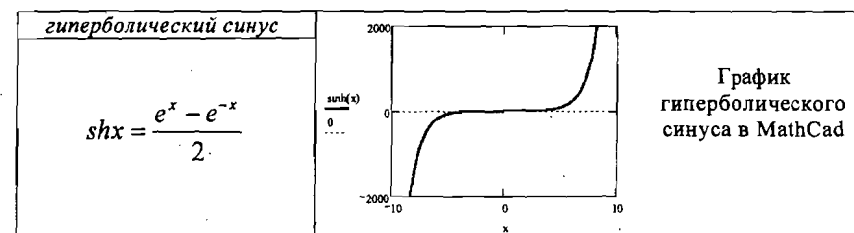
$$y = y_0 \exp(k(x - x_0)),$$

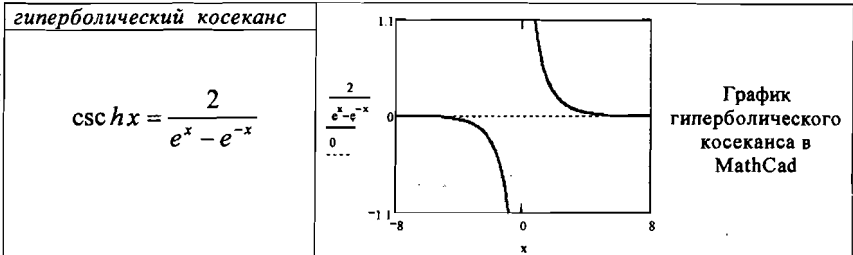
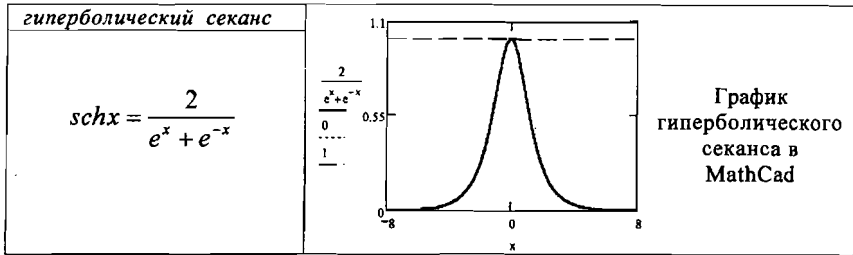
которое представляет собой интегральный закон рассматриваемого процесса.

К процессам органического роста относятся при некоторых упрощающих предположениях такие явления, как, например, изменение атмосферного давления в зависимости от высоты над поверхностью Земли, радиоактивный распад, охлаждение или нагревание тела в окружающей среде постоянной температуры, унимолекулярная химическая реакция (например, растворение вещества в воде), при которой имеет место закон действия масс (скорость реакции пропорциональна наличному количеству реагирующего вещества), размножение микроорганизмов и многие другие.

Возрастание денежной суммы вследствие начисления на нее сложных процентов (проценты на проценты) также представляет собой процесс органического роста. Эти примеры можно было бы продолжить.

Наряду с отдельными показательными функциями в математике и ее приложениях находят применение различные комбинации показательных функций, среди которых особое значение имеют некоторые линейные и дробно-линейные комбинации функций  $e^x$  и  $e^{-x}$  - так называемые гиперболические функции [9]. Этим функциям шесть, для них введены следующие специальные наименования, обозначения и их графики:





Возникает вопрос, почему даны именно такие названия, при чем здесь гипербола и известные из тригонометрии названия функций: синус, косинус и т. д.? В дальнейшем убедимся, что эти названия не случайны. Оказывается, что соотношения, связывающие тригонометрические функции с координатами точек окружности единичного радиуса, аналогичны соотношениям, связывающим гиперболические функции с координатами точек равносторонней гиперболы с единичной полуосью. Этим как раз и оправдывается наименование гиперболических функций.

**4.2. Построение решения дифференциальных уравнений с использованием гиперболических функций**

Гиперболические функции находят применение при интегрировании некоторых дифференциальных уравнений. Не говоря о том, что в процессе интегрирования уравнений можно получить квадратуры, которые сравнительно легко вычисляются при помощи гиперболических подстановок, решения многих дифференциальных уравнений, в частности линейных, удобно выражать через гиперболические функции. При этом значительно сокращаются выкладки, и сами решения получаются в более компактной форме. Кроме того, гиперболические подстановки позволяют иногда упростить дифференциальные уравнения, сводя их к легко интегрируемым видам.

Рассмотрим примеры на отыскание решения линейного однородного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами, наиболее часто встречающегося на практике.

**Пример 4.1.**  $y'' - a^2y = 0$ . Это однородное линейное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Его характеристическое уравнение  $r^2 - a^2 = 0$  имеет корни  $r_1 = a$  и  $r_2 = -a$ . Поэтому частными решениями будут показательные функции  $e^{ax}$  и  $e^{-ax}$ , а также их линейные комбинации. Примем в качестве частных решений полусумму и полуразность показательных функций

$y_1 = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2} = chax$  и  $y_2 = \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2} = shax$ . Легко убедиться в линейной независимости этих частных решений. Для этого составим и вычислим определитель Вронского:

$$W[y] = \begin{vmatrix} chax & shax \\ ashax & achax \end{vmatrix} = a(ch^2ax - sh^2ax) = a \neq 0.$$

Так как  $W[y] \neq 0$ , то данные частные решения образуют фундаментальную систему, и общее решение запишется в виде  $y = C_1 chax + C_2 shax$ .

Если задать начальные условия  $y=1$  и  $y'=0$  при  $x=0$ , то, подставив сначала значения  $x$  и  $y$  в общее решение, получим  $C_1=1$ , а вычислив производную  $y' = aC_1 shax + aC_2 chax$  и подставив в нее значения  $x$  и  $y$ , получим  $C_2=0$ , и таким образом частное решение выражается через гиперболический косинус  $y = chax$ .

Если изменить начальные условия, задав  $y=0$  и  $y'=1$  при  $x=0$ , то в качестве частного решения получим гиперболический синус  $y = shax$ .

**Пример 4.2.**  $y'' - a^2y = f(x)$ . Это неоднородное линейное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Для отыскания его общего решения применим метод вариации постоянных. С этой целью возьмем общее решение соответствующего однородного уравнения (пример 5).

Учитывая, что  $\sigma = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{1 - k^2}$ , преобразуем последнее уравнение к виду

$$\frac{(\alpha_1 + \alpha_2)E}{R_1} + C_2 \beta(1 - k^2) = \frac{2\alpha_1 E}{R_1},$$

откуда

$$C_2 = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)E}{\beta(1 - k^2)R_1}.$$

Окончательно частное решение  $I_1$  запишется так:

$$I_1 = \frac{E}{R_1} + \frac{Ee^{-at}}{R_1} \left[ \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\beta(1-k^2)} \operatorname{sh} \beta t - ch \beta t \right]$$

Аналогичным образом можно найти частное решение  $I_2$ .

### 4.3. Гамма функция

Гамма-функция впервые была введена Л. Эйлером в 1729 году. Она является математической функцией, которая расширяет понятие факториала на поле комплексных чисел (рис.4.1) и определяется формулой

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}{z(z+1) \dots (z+n)} n^z$$

Гамма-функцию часто называют Г-функция, Г-функция Эйлера, эйлеров интеграл 2-го рода.



**Леонард Эйлер** (нем. *Leonhard Euler*; 1707- 1783) - выдающийся математик, внёсший значительный вклад в развитие фундаментальных и ряда прикладных наук. Автор более чем 800 работ по математическому анализу, дифференциальной геометрии, теории чисел, приближённым вычислениям, небесной механике, математической физике, оптике, баллистике, кораблестроению, теории музыки и др. Почти полжизни провёл в России, где внёс существенный вклад в становление отечественной науки. В 1726 году он был приглашён работать в Санкт-Петербург. В 1731—1741 и, начиная с 1766 года, был академиком Петербургской Академии Наук (в 1741—1766 годах работал в Берлине, оставаясь почётным членом Петербургской Академии). Хорошо знал русский язык, и часть своих сочинений (особенно учебники) публиковал на русском.

Через гамма-функцию выражается большое число определённых интегралов, бесконечных произведений и сумм рядов. Она играет важную роль в теории специальных функций - цилиндрических, гипергеометрических и др. Эта функция и её свойства используются также в аналитической теории чисел. Название «гамма-функция» и обозначение  $\Gamma(z)$  предложил французский математик Адриен Мари Лежандр в 1814 г.

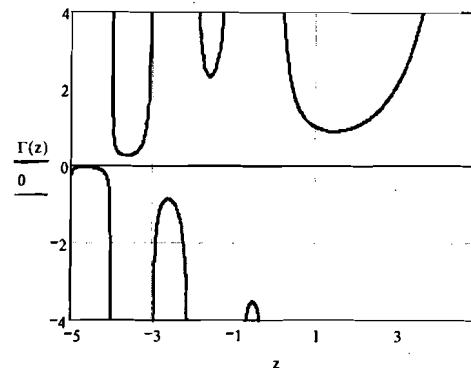


Рис.4.1. График гамма-функции  $y=\Gamma(z)$ , построенный в MathCad для вещественных чисел

Если вещественная часть комплексного числа  $z$  положительна, то интеграл (Эйлеров интеграл 2-го рода)

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad (4.1)$$

сходится абсолютно и можно пользоваться для вычислений формулой (4.1).

Применяя интегрирование по частям, можно показать, что

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

А поскольку  $\Gamma(1) = 1$ , получаем:

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = \dots = n!\Gamma(1) = n!$$

для всех натуральных чисел  $n$ . В дальнейшем это может понадобиться для продолжения  $\Gamma(z)$  в мероморфную функцию, определенную для всех комплексных  $z$ , за исключением  $z=0; -1; -2; -3 \dots$  с помощью аналитического продолжения. Именно эту расширенную версию обычно и считают гамма-функцией.



**Адриен Мари Лежандр** (фр. *Adrien-Marie Legendre*, 1752 – 1833) - французский математик. Первым открыл (1805-1806) и применил в вычислениях *наименьших квадратов метод*. По поводу авторства метода наименьших квадратов, которым Лежандр особенно гордился, он имел спор о приоритете с Гауссом, который открыл этот метод независимо и раньше Лежандра (1795), но опубликовал позже.

Другое важное функциональное уравнение для гамма-функции имеет формула дополнения

$$\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}.$$

Иногда используется альтернативная запись, так называемая пи-функция, зависящая от гамма-функции следующим образом:

$$\Pi(z) = \Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

Вероятно, наиболее известное значение гамма-функции от нецелого аргумента это

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Гамма-функция имеет полюс в  $z = -n$  для любого натурального  $n$ ; вычет в этой точке задается так

$$\operatorname{Res}(\Gamma, -n) = \frac{(-1)^n}{n!}$$

Следующее бесконечное произведение для гамма-функции, как показал Вейерштрасс, верно для всех комплексных  $z$ , не являющихся неположительными целыми:

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} e^{\frac{z}{n}},$$

где  $\gamma$  - это гамма-константа Эйлера.

Заметим, что в интеграле, определяющем гамма-функцию, пределы интегрирования фиксированы. В *неполной гамма-функции* допускается, чтобы верхний или нижний предел интегрирования был переменным. Неполную гамма-функцию часто обозначают как гамма-функцию от двух аргументов:

$$\Gamma(a, z) = \int_0^a t^{z-1} e^{-t} dt \quad (4.2)$$

Гамма-функция дифференцируема бесконечное число раз, может быть представлена в виде:  $\dot{\Gamma}(x) = \psi(x) \cdot \Gamma(x)$ , где  $\psi(x)$  часто называют "*пси функцией*" или *дигамма-функцией*.

#### 4.4. Функции Хевисайда и Дирака

Функция Хевисайда  $H(x)$  - это специальная математическая функция, значение, которой равно нулю для отрицательных аргументов и единице для положительных аргументов:

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0,5, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}, \quad (4.3)$$

Функцию  $H(x)$  называют еще единичной ступенчатой функцией или ступенькой положения, рис.4.2. Функция широко используется в математическом аппарате теории управления и обработке сигналов для представления сигналов, включающихся в определенный момент и остающихся включенными постоянно. Названа в честь английского учёного-самоучки Оливер Хевисайд. Чаще всего неважно, какое значение функция принимает в нуле ( $H(0)$ ).

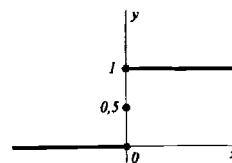


Рис.4.2. Единичная функция Хевисайда



Оливер Хевисайд (англ. *Oliver Heaviside*, 1850 - 1925) - английский учёный-самоучка. Между 1880 и 1887 годами разработывал операционное исчисление (он ввёл обозначение "D" для дифференциального оператора), метод решения дифференциальных уравнений с помощью сведения к обыкновенным алгебраическим уравнениям, который по началу вызвал бурную полемику из-за отсутствия строгого обоснования. Тогда он произнёс известную фразу: «Математика есть наука экспериментальная, определения появляются последними». Это было ответом на критику за использование ещё не вполне определённых операторов. Несмотря на то, что Хевисайд большую часть жизни был не в

ладах с научным сообществом, его работы изменили облик математики и физики на многие годы.

Дискретная форма записи функции Хевисайда от дискретного аргумента  $n$  может быть определена следующим образом:

$$H[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n \geq 0 \end{cases}, \quad (4.4)$$

где  $n$  — целое число.

Для более удобного использования функцию Хевисайда можно аппроксимировать с помощью аналитической функции:

$$H(x) \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{th} kx = \frac{1}{1 + e^{-2kx}}, \quad (4.5)$$

где большому значению  $k$  соответствует более крутой подъём функции в точке  $x = 0$ . Если принять  $H(0) = 0,5$ , то (4.5) можно записать в предельной форме:

$$H(x) = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\tau + i\varepsilon} e^{-ix\tau} d\tau, \quad (4.6)$$

В 1930 году английский физик Поль Адриен Морис Дирак ввел так называемую дельта-функцию, которая выходила далеко за рамки классического определения функции. Функция Дирака позволяет записать пространственную плотность физической величины (масса, заряд, интенсивность источника тепла, сила и т. п.), сосредоточенной или приложенной в одной точке. Эта функция получила обозначение  $\delta$ -функция и определяется следующим образом:  $\delta(x) = 0$  при  $x \neq 0$  и  $\delta(x) = \infty$  при  $x = 0$ , и кроме того

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1. \quad (4.6)$$

Случай (4.6) называют «бесконечный всплеск» «единичной интенсивности».

Из этого определения следует основное свойство функции Дирака

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \delta(x) dx = \varphi(0), \quad (4.7)$$

которое имеет место для всех непрерывных функций  $\varphi(x)$ .



Поль Адриен Морис Дирак (англ. *Paul Adrien Maurice Dirac*, 1902 - 1984), английский физик, один из создателей теоретических основ квантовой механики. Удостоен в 1933 г. (совместно с Э.Шрёдингером) Нобелевской премии по физике за создание квантовой механики. Нашел способ выразить любое натуральное число всего лишь через три двойки и математические операции.

Функцию Дирака обычно называют как дельта-функция, но встречаются и другие ее названия:  $\delta$ -функция Дирака, дираковская дельта, Единичная импульсная функция. Физическая интерпретация функции Дирака заключается в следующем. Например, если вблизи заряженной точки поле бесконечно, то ряды Тейлора для этого поля не сходятся,

поэтому вводят специальные функции. Одной из таких функций и является дельта-функция.

Дельта-функция получается и при вычислении интеграла Фурье от константы:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} dp = 2\pi\delta(x). \quad (4.8)$$

Первообразной функцией для дельта-функции Дирака является функция Хевисайда,  $\dot{H}(t) = \delta(t)$ . Этот факт можно записать как:

$$H(t) = \int_{-\infty}^t \delta(x) dx, \quad (4.9)$$

хотя это выражение не является математически точным.

На рис. 4.3 представлен график, отображающий стремление ускорения в бесконечность при мгновенном наборе скорости. В общем случае ускорение при ударе можно записать как  $a(t) = v\delta(t - t_0)$ .

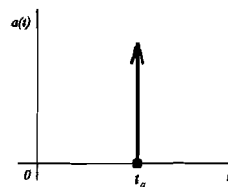
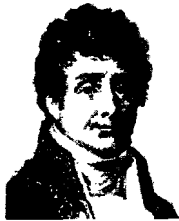


Рис.4.3. График функции Дирака

Заметим, что функция Дирака относится к классу так называемых обобщенных функций, которые на Западе называют распределения. В понятии обобщенной функции находит отражение тот факт, что реально нельзя измерить значение физической величины в точке, а можно измерить лишь ее средние значения в малых окрестностях данной точки. Таким образом, техника обобщенных функций служит удобным и адекватным аппаратом для описания распределений различных физических величин. Поэтому обобщенные функции и получили название распределения.

## 4.5. Интеграл Фурье

При изучении волновых уравнений возникает необходимость в разложении функций в ряды Фурье. При интегрировании уравнений теплопроводности в некоторых случаях требуется использование интеграла Фурье, который можно рассматривать как обобщение рядов Фурье [10]. В связи с этим рассмотрим основные понятия интеграла Фурье.



Жан Батист Жозеф Фурье (*Jean Baptiste Joseph Fourier*, 1768 – 1830), французский математик и физик. В монографии «Аналитическая теория тепла» дал вывод уравнения теплопроводности в твёрдом теле, и разработку методов его интегрирования при различных граничных условиях. Метод Фурье состоял в представлении функций в виде тригонометрических рядов Фурье. Нашёл формулу представления функции с помощью интеграла, играющую важную роль в современной математике.

Как известно, любую периодическую функцию  $f(x)$ , которая удовлетворяет условиям Дирихле<sup>6</sup>, можно представить тригонометрическим рядом Фурье:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \right), \quad (4.10)$$

где коэффициенты ряда определяются формулами

$$a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(u) \cos \frac{k\pi u}{l} du \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (4.11)$$

$$b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(u) \sin \frac{k\pi u}{l} du \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Ряд Фурье (4.10) можно рассматривать как формулу для разложения периодической функции (период равен  $2l$ ) на гармонические компоненты (на сумму гармоник), частоты которых представляют дискретную совокупность значений  $\frac{\pi}{l}, 2\frac{\pi}{l}, 3\frac{\pi}{l}, \dots$

Итак, интеграл Фурье представляет собой формулу для разложения непериодической функции на гармонические компоненты с непрерывной

<sup>6</sup> Говорят, что функция  $f(x)$  удовлетворяет в интервале  $(a, b)$  условиям Дирихле, если она непрерывна в этом интервале или имеет ограниченное количество разрывов первого рода, а также кроме этого имеет ограниченное количество максимумов и минимумов в этом интервале.

совокупностью частот. Если функция  $f(x)$  удовлетворяет на каждом ограниченном отрезке условиям Дирихле и абсолютно интегрируема  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx < \infty$ , то для интеграла справедливо равенство

$$f(x) = \int_0^{\infty} [a(\lambda) \cos \lambda x + b(\lambda) \sin \lambda x] d\lambda, \quad (4.12)$$

где коэффициенты имеют вид

$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \lambda u du, \quad (4.13)$$

$$b(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \sin \lambda u du. \quad (4.14)$$

Сравнение формул (4.13), (4.14) и (4.11) показывает, что интеграл Фурье (4.12) есть обобщение ряда Фурье (4.10). В случае интеграла Фурье частота  $\lambda$  принимает непрерывные значения от 0 до  $\infty$ .

Интеграл Фурье чаще записывают в более компактном виде

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \lambda(u-x) du. \quad (4.15)$$

Формулу (4.15) можно рассматривать как предел формулы ряда Фурье (4.10) для функции с периодом  $2l$ , когда  $l \rightarrow \infty$ . Чтобы в этом убедиться, подставим значения коэффициентов  $a_k$  и  $b_k$  (4.11) в (4.10):

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(u) du + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(u) \cos \frac{k\pi}{l}(u-x) du. \quad (4.16)$$

Так как функция  $f(u)$  абсолютно интегрируема, то  $\lim_{l \rightarrow \infty} \int_{-l}^l f(u) du$  имеет предел и при  $l \rightarrow \infty$  первый член суммы в (4.16) стремится к нулю. Поэтому для любого фиксированного  $x$  имеем

$$f(x) = \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(u) \cos \frac{k\pi}{l}(u-x) du. \quad (4.17)$$

Чтобы найти предел, запишем

$$\lambda_1 = \frac{\pi}{l}, \lambda_2 = \frac{2\pi}{l}, \dots, \lambda_k = \frac{k\pi}{l}. \quad (4.18)$$



$$\text{Отсюда } \Delta\lambda_k = \lambda_{k+1} - \lambda_k = \frac{\pi}{l}.$$

Тогда, исходя из (4.17), сумму в (4.18) можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(u) \cos \lambda_k (u-x) du.$$

Так как  $\frac{1}{l} = \frac{\Delta\lambda_k}{\pi}$ , то

$$\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \Delta\lambda_k \int_{-l}^l f(u) \cos \lambda_k (u-x) du. \quad (4.19)$$

Выражение (4.19) напоминает интегральную сумму для функции переменной  $\lambda$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-l}^l f(u) \cos \lambda (u-x) du.$$

Причем, интегральная сумма в (4.19) содержит только сумму значений  $\lambda_k$ . Если теперь допустить, что  $l \rightarrow \infty$ , то формула (4.19) примет вид (4.15)

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \lambda (u-x) du.$$

Заметим, что более строгий вывод формулы интеграла Фурье приводится в курсе математического анализа.

В заключение заметим, что поскольку  $\cos \lambda (u-x)$  четная функция относительно  $\lambda$ , то разложение функции  $f(x)$  в интеграл Фурье (4.15) можно записать так:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \lambda (u-x) du \quad (4.20)$$

или

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} [a(\lambda) \cos \lambda x + b(\lambda) \sin \lambda x] d\lambda, \quad (4.21)$$

где

$$a(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \lambda u du, \quad b(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \sin \lambda u du. \quad (4.22)$$

## ГЛАВА 5. УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Уравнения параболического типа, как было сказано выше, чаще встречаются в задачах при изучении процессов теплопроводности и диффузии [11].

### 5.1. Уравнение диффузии

Если концентрация раствора в данном объеме не является постоянной величиной, происходит диффузия вещества от места с большей концентрацией к месту с меньшей концентрацией. Получим уравнение диффузии для случая диффузии соли в воде. Пусть соль занимает часть цилиндрической пробирки и диффундирует в воде, рис.5.1. Концентрацию в произвольном поперечном сечении  $x$  в момент  $t$  будем считать некоторой функцией вида  $u(x,t)$ .

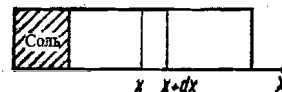


Рис.5.1. Цилиндрическая пробирка с солью

Согласно закону Нернста, масса соли, которая прошла за время  $dt$  через поперечное сечение  $x$  трубки равна

$$dQ_x = -D \frac{\partial u}{\partial x} S dt,$$

где  $D$  – коэффициент диффузии, который считаем постоянным,  $S$  – площадь поперечного сечения. Согласно этому же закону, через элементарный слой  $x+dx$  за время  $dt$  проходит масса

$$dQ_{x+dx} = -D \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \right) S dt.$$

Увеличение количества соли в элементарном объеме  $(x, x+dx)$  за время  $dt$  составляет

$$dQ = dQ_x - dQ_{x+dx} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} S dx dt.$$

Увеличение количества соли приводит к изменению концентрации раствора во времени, то есть

$$dQ = \frac{\partial u}{\partial t} dt S dx$$

Приравняв правые части двух последних выражений получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (5.1)$$

Уравнение (5.1) описывает процесс диффузии соли в воде со временем.



Нернст (Nernst) Вальтер Фридрих Герман (1864 - 1941) - немецкий физик и химик. Автор третьего начала термодинамики (*Приращение энтропии при абсолютном нуле температуры стремится к конечному пределу, не зависящему от того, в каком равновесном состоянии находится система*). Работы Нернста по диффузии позволили количественно связать скорость диффузии растворенных веществ, электропроводность и осмотическое давление, что явилось основой его теории электродвижущих сил в растворах с локальным изменением концентрации (1889). А. Эйнштейн назвал Нернста "одним из наиболее характерных и интересных ученых, обладающих очень редкой объективностью, удачным пониманием наиболее важного, гениальной страстью к познанию неведомого".

## 5.2. Уравнение теплопроводности

Аналогичный вид имеет уравнение теплопроводности (3.2) для линейного однородного стержня

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (5.2)$$

где  $a = \sqrt{\frac{k}{c\rho}}$ , а  $k$  - коэффициент теплопроводности,  $c$  - теплоемкость,  $\rho$  - плотность материала стержня. При этом считается, что боковая поверхность стержня теплоизолирована и тепловые источники внутри стержня отсутствуют.

Уравнение теплопроводности (5.2) можно обобщить для случая, когда существуют тепловые источники, то есть имеются места, в которых выделяется или поглощается теплота. Для характеристики таких тепловых источников введем некоторую функцию  $F(x, y)$ . Пусть на участке стержня  $(x, x + \Delta x)$  во временном интервале  $(t, t + \Delta t)$  выделяется  $\Delta Q$  единиц теплоты. Если существует некоторый предел

$$F(x, y) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} \frac{\Delta Q}{\Delta x \Delta t}, \quad (5.3)$$

то его называют **функцией тепловых источников**.

Если функция источников задана, то согласно с (5.3) количество теплоты, выделившегося на элементе  $\Delta x$  за время  $\Delta t$  с точностью до малых более высокого порядка, равняется

$$\Delta Q = F(x, y) \Delta x \Delta t. \quad (5.4)$$

**Пример 5.1.** При прохождении постоянного электрического тока через металлический стержень согласно закону Джоуля - Ленца выделяется тепло  $\Delta Q = I^2 R \Delta x \Delta t$ , где  $I$  - сила тока,  $R$  - сопротивление стержня. Тогда в этом случае функция тепловых источников имеет вид

$$F(x, y) = I^2 R = const.$$

При наличии тепловых источников уравнение (5.2) имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + g(x, t), \quad (5.5)$$

где  $g(x, t) = \frac{F(x, t)}{c\rho S}$ ;  $S$  - площадь поперечного сечения стержня.

Уравнение теплопроводности (5.5) при наличии тепловых источников является неоднородным.

## 5.3. Начальные и краевые условия

Начальные условия задачи сводятся к заданию температуры во всех точках  $x$  по длине стержня в момент времени  $t = 0$ . В этом случае начальные условия имеют вид

$$T(x, 0) = f(x), \quad (5.6)$$

где  $f(x)$  - заданная функция.

Краевые условия задаются для концов стержня:  $x = 0$  (левый конец) и  $x = l$  (правый конец). Согласно закону Ньютона, через правый конец стержня в окружающую среду за время  $\Delta t$  выделится следующее количество теплоты

$$h_1 (T - T_1) S \Delta t, \quad (5.7)$$

где  $T_1$  - температура окружающей среды правого конца стержня, которая может зависеть от времени. Заметим, что количество теплоты, выделяющееся через сечение стержня на его конце, может быть также определено и на основании закона Фурье

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=l} S \Delta t \quad (5.8)$$

Приравняв выражения (5.8) и (5.7), получим

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=l} = h_1 [T(l, t) - T_1] \quad (5.9)$$

Аналогично запишем для левого конца стержня

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = h_0 [T(0, t) - T_0] \quad (5.10)$$

Краевые условия (5.9) и (5.10) записаны для общего случая, когда у левого и правого концов стержня различный внешний температурный режим. Поэтому в выражениях константы  $h_0, h_1; T_0, T_1$  имеют различные индексы.

При других случаях, краевые условия могут быть иные. Например, правый конец стержня может находиться при постоянной температуре  $T_0$ , тогда  $T(l, t) = T_0$ , а может испускать теплоту по закону Стефана - Больцмана и т. д.

## ГЛАВА 6. РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОТЕХНИКИ, ИМЕЮЩИХ ЗНАЧЕНИЕ ДЛЯ ПРАКТИКИ

В главе рассматриваются задачи распределения температуры при нагреве и охлаждении в стержне, а также тонкой пластине. Решения этих задач получены в аналитическом виде, то есть в виде формул [10].

### 6.1. Стационарное распределение температуры в прямоугольном брусе

Рассматриваемая задача формулируется так: одна из граней длинного прямоугольного бруса (рис. 6.1) поддерживается при заданной температуре, на остальных гранях  $\Gamma = 0$ ; найти установившуюся температуру в произвольной точке внутри бруса.

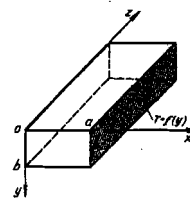


Рис.6.1. Геометрические размеры бруса

Из симметрии бруса ясно, что температура от  $l$  не зависит и что можно ограничиться рассмотрением сечения в плоскости  $XOY$ . Задача состоит в определении функции  $T = T(x, y)$ , удовлетворяющей

$$\Delta T \equiv \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (6.1)$$

и двум парам краевых условий:

$$T|_{x=0} = 0, \quad T|_{x=a} = f(y); \quad (6.2)$$

$$T|_{y=0} = 0, \quad T|_{y=b} = 0. \quad (6.3)$$

Как обычно, ищем решение в виде:

$$T(x, y) = X(x)Y(y). \quad (6.4)$$

Дифференцируя (6.4) дважды по  $x$  и  $y$  и подставляя в (51), получаем:

$$\dot{X}Y + X\dot{Y} = 0,$$

где точка обозначает производную первого порядка.

Умножая последнее равенство на  $\frac{1}{XY}$ , разделим переменные:

$$\frac{\dot{X}}{X} = -\frac{\dot{Y}}{Y}.$$

Приравняв обе части постоянной  $\lambda^2$ , приходим к обыкновенным линейным дифференциальным уравнениям:

$$\dot{X} - \lambda^2 X = 0, \quad (6.5)$$

$$\dot{Y} + \lambda^2 Y = 0. \quad (6.6)$$

Решение уравнения вида (6.5), как известно, записывается в виде:

$$Y(y) = C \cos \lambda y + D \sin \lambda y. \quad (6.7)$$

Что касается уравнения (6.6), то его решение, как известно, отличается только тем, что вместо тригонометрических функций оно содержит гиперболические функции:

$$X(x) = A \operatorname{ch} \lambda x + B \operatorname{sh} \lambda x. \quad (6.8)$$

Выберем теперь постоянные  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  и  $\lambda$  так, чтобы удовлетворить граничным условиям (6.2) и (6.3). Удобнее начать с (6.3) как более простых. Итак,

$$Y(0) = C = 0.$$

Следовательно,

$$Y(y) = D \sin \lambda y. \quad (6.9)$$

Наложив второе граничное условие по  $y$ :

$$Y(b) = D \sin \lambda b = 0,$$

приходим к выводу, что

$$\lambda b = n\pi, \quad \text{где } n = 1, 2, 3, \dots$$

Отсюда

$$\lambda_n = n \frac{\pi}{b}.$$

Подставляя эти дискретные значения параметра  $\lambda$  в (6.8), получаем множество функций  $X(x)$  на  $Y(y)$ :

$$X_n = A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi x}{b} + B_n \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{b},$$

$$Y_n = D_n \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

Перемножив теперь  $X_n(x)$  на  $Y_n(y)$ , находим совокупность функций  $T_n(x, y)$ , удовлетворяющих уравнению (6.1) и краевым условиям (6.3):

$$T_n(x, y) = \left( M_n \operatorname{ch} \frac{n\pi x}{b} + N_n \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{b} \right) \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (6.10)$$

Теперь осталось удовлетворить условиям (6.2). Но первому из них, а именно  $T|_{x=0} = 0$ , мы сразу же удовлетворим, положив  $M_n = 0$ . Таким образом, совокупность функций:

$$T_n = N_n \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{b} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (6.11)$$

удовлетворяет не только уравнению (6.1), но и трем (нулевым) краевым условиям. Чтобы удовлетворить последнему граничному условию  $T|_{x=a} = f(y)$ , составим бесконечную сумму:

$$T(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} N_n \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{b} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (6.12)$$

и подберем коэффициенты  $N_n$  таким образом, чтобы ряд при  $x \rightarrow a$  сходил к функции  $f(y)$ :

$$T|_{x=a} = \sum_n N_n \operatorname{sh} \frac{n\pi a}{b} \sin \frac{n\pi y}{b} = f(y).$$

Отсюда видно, что постоянные множители  $N_n \operatorname{sh} \frac{n\pi a}{b}$  должны являться коэффициентами  $f_n$  разложения в ряд Фурье функции  $f(y)$  по синусам:

$$N_n \operatorname{sh} \frac{n\pi a}{b} = f_n.$$

Отсюда

$$N_n = \frac{f_n}{\operatorname{sh} \frac{n\pi a}{b}}, \quad (6.13)$$

где

$$f_n = \frac{2}{b} \int_0^b f(y) \sin \frac{n\pi y}{b} dy. \quad (6.14)$$

Подставляя значения коэффициентов  $N_n$  в ряд (6.12), получаем окончательно:

$$T(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{\operatorname{sh} \frac{n\pi x}{b}}{\operatorname{sh} \frac{n\pi a}{b}} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (6.15)$$

Полагая, как это обычно бывает, что этот ряд сходится достаточно хорошо, можно утверждать, что его сумма удовлетворяет всем условиям задачи и является ее решением. Если теперь определиться с видом

функции  $f(y)$ , то можно построить график линий уровней температуры внутри бруса.

## 6.2. Охлаждение бесконечного стержня

Пусть температура тонкого теплопроводного стержня бесконечной длины в начальный момент была распределена по закону:

$$T|_{t=0} = f(x). \quad (6.16)$$

Определим температуру в каждой точке стержня в любой последующий момент времени

$t > 0$ . Ясно, что это частный случай задачи Коши, которая сводится к определению функции  $T(x, \tau)$ , удовлетворяющей уравнению

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (6.17)$$

и начальному условию (6.16). В уравнении (6.17)  $\tau = \frac{\kappa}{c\rho} t$ .

С физической точки зрения, эта задача аналогична рассмотренной в п.6.1 этой главы с тем отличием, что здесь нет граничных условий. Ясно поэтому, что, разделяя переменные по методу Фурье, можно представить решение уравнения (6.17) в виде:

$$T(x, \tau) = (A \cos \lambda x + B \sin \lambda x) e^{-\lambda^2 \tau}. \quad (6.18)$$

В случае стержня конечной длины  $l$  мы определяли из граничных условий дискретное множество возможных значений параметра  $\lambda$ :

$$\lambda_n = n \frac{\pi}{l}, \quad (6.19)$$

где каждому значку  $n$  соответствуют некоторые коэффициенты  $A_n$  и  $B_n$ . Чем длиннее стержень, тем гуще множество значений  $\lambda_n$  (расстояние между  $\lambda_n$  и  $\lambda_{n+1}$  равно  $\frac{\pi}{l}$  и стремится к нулю, когда  $l \rightarrow \infty$ ). Поэтому для бесконечного стержня  $\lambda$  может иметь любое значение от 0 до  $\infty$ . Таким образом, каждому значению  $\lambda$  соответствует частное решение:

$$T_\lambda(x, \tau) = [A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x] e^{-\lambda^2 \tau}. \quad (6.20)$$

Общее решение получается из частных решений (6.20), не суммированием, а интегрированием по параметру  $\lambda$ :

$$T(x, \tau) = \int_0^\infty T_\lambda d\lambda = \int_0^\infty [A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x] e^{-\lambda^2 \tau} d\lambda. \quad (6.21)$$

Полагая, что интеграл (6.21) сходящийся и дифференцируемый по  $x$  и  $\tau$  (это обычно имеет место), можно быть уверенным в том, что функция  $T(x, \tau)$  удовлетворяет уравнению (6.17). Но решение еще должно удовлетворять начальному условию:

$$T|_{\tau=0} = \int_0^\infty [A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x] d\lambda = f(x). \quad (6.22)$$

Отсюда видно, что задача свелась к разложению произвольной функции  $f(x)$  в интеграл Фурье, являющийся обобщением понятия ряда Фурье. В теории интеграла Фурье доказывается, что любая непрерывная функция  $f(x)$ , удовлетворяющая условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty,$$

может быть представлена в виде интеграла от гармонических функций  $\cos \lambda x$  и  $\sin \lambda x$ , частота которых  $\lambda$  пробегает непрерывную совокупность значений:

$$f(x) = \int_0^\infty [f_c(\lambda) \cos \lambda x + f_s(\lambda) \sin \lambda x] d\lambda, \quad (6.23)$$

$$\text{где } f_c(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \lambda x dx, \quad f_s(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \lambda x dx. \quad (6.24)$$

Подставляя значения Фурье-преобразования  $f_c(\lambda)$  и  $f_s(\lambda)$  в интеграл (6.23), получаем:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[ \cos \lambda x \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda \xi d\xi + \sin \lambda x \int_{-\infty}^{-\infty} f(\xi) \sin \lambda \xi d\xi \right] d\lambda$$

или

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) (\cos \lambda x \cos \lambda \xi + \sin \lambda x \sin \lambda \xi) d\xi. \quad (6.25)$$

Учитывая, что выражение в круглых скобках есть косинус разности, приходим к иному выражению для интеграла Фурье:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \lambda(\xi - x) d\xi. \quad (6.26)$$

Таким образом, если в качестве коэффициентов  $A(\lambda)$  и  $B(\lambda)$  в (6.21) выбрать соответственно

$$A(\lambda) = f_c(\lambda), \quad B(\lambda) = f_s(\lambda),$$

то интеграл

$$T(x, \tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [f_c(\lambda) \cos \lambda x + f_s(\lambda) \sin \lambda x] e^{-\lambda^2 \tau} d\lambda \quad (6.27)$$

является решением рассматриваемой задачи.

Другая, эквивалентная форма этого решения получается из (6.25):

$$T(x, \tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 \tau} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \lambda(\xi - x) d\xi. \quad (6.28)$$

Последний интеграл можно еще преобразовать, меняя порядок интегрирования:

$$T(x, \tau) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) d\xi \int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 \tau} \cos \lambda(\xi - x) d\lambda. \quad (6.29)$$

Обозначив  $\xi - x = q$ , можно внутренний интеграл свести к известному в математике определенному интегралу:

$$K(\tau, q) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 \tau} \cos \lambda q d\lambda = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} e^{-\frac{q^2}{4\tau}}. \quad (6.30)$$

Заменяя обратно  $q$  через  $\xi - x$  и подставляя (6.30) в (6.29), получаем окончательно:

$$T(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4\tau}} d\xi. \quad (6.31)$$

Чтобы понять физический смысл полученного решения, допустим, что в начальный момент времени ( $\tau = 0$ ) температура бесконечного стержня была равна нулю всюду, кроме окрестности точки  $x = 0$ , где  $T = T_0$ .

Можно себе представить, что в момент  $\tau = 0$  элементу длины  $2h$  стержня сообщили некоторое количество тепла  $Q_0 = 2hc\rho T_0$ , которое вызвало повышение температуры на этом участке до значения  $T_0$ . Следовательно, формула (6.31) принимает вид:

$$T(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-h}^h T_0 e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4\tau}} d\xi = \frac{Q_0}{4h\sqrt{\pi\tau}c\rho} \int_{-h}^h e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4\tau}} d\xi$$

Будем теперь уменьшать  $h$ , устремляя его к нулю, считая количество тепла  $Q_0$  неизменным, т. е. введем понятие мгновенного точечного источника тепла напряжения  $Q_0$ , помещенного в момент времени  $\tau = 0$  в точке  $x = 0$ . При этом распределение температур в стержне будет определяться формулой:

$$T(x, \tau) = \frac{Q_0}{2c\rho\sqrt{\pi\tau}} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2h} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4\tau}} d\xi$$

или

$$T(x, \tau) = \frac{Q_0}{2c\rho\sqrt{\pi\tau}} e^{-\frac{x^2}{4\tau}}. \quad (6.32)$$

В частности, если  $Q_0 = c\rho$ , то температура любой точки стержня в произвольный момент времени  $t = \frac{\tau}{a}$  ( $a$  — коэффициент температуропроводности) может быть найдена по формуле:

$$T(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} e^{-\frac{x^2}{4at}}. \quad (6.33)$$

Графически решение из (6.33) для различных моментов времени представлено на рис.6.2. Полученные кривые называют *кривыми Гаусса*,

так как их вид напоминает нормальное распределение вероятностей, также называемое распределением Гаусса.

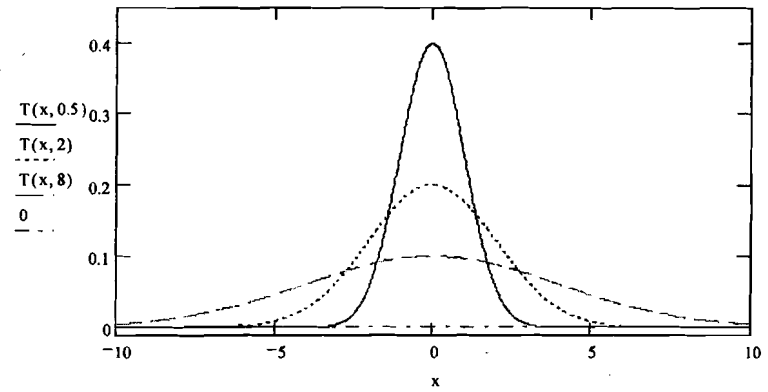


Рис.6.2. Графики распределения температуры в стержне в разные моменты времени, построенные в MathCad

Заметим, что величина

$$c\rho \int_{-\infty}^{\infty} T(x,t) dx$$

есть общее количество тепла, полученное стержнем к моменту времени t:

$$Q(t) = c\rho \int_{-\infty}^{\infty} T(x,t) dx = \frac{c\rho}{2\sqrt{\pi at}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4at}} dx. \quad (6.34)$$

Но последний (справа) интеграл есть интеграл Пуассона:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}. \quad (6.35)$$

Поэтому получаем, что  $Q(t) = c\rho = Q_0 = const$ , что согласуется с законом сохранения энергии.

### 6.3. Охлаждение тонкой пластины

Пусть в начальный момент у пластины, толщина которой значительно меньше длины и ширины (рис. 6.3), температура была распределена по закону  $T|_{t=0} = F(x)$ . Охлаждение пластины происходит по закону Ньютона, т. е. при  $x = \pm a$

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha T.$$

Определим температуру произвольной точки в любой последующий момент времени. Сформулируем задачу аналитически: необходимо найти функцию  $T(x,y)$ , удовлетворяющую одномерному уравнению теплопроводности:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{c\rho} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (6.36)$$

и условиям: начальному

$$T|_{t=0} = F(x) \quad (6.37)$$

и граничному

$$\frac{\partial T}{\partial x} + hT|_{x=\pm a} = 0. \quad (6.38)$$

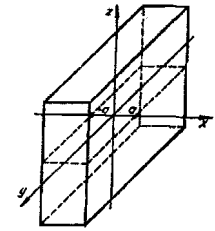


Рис.6.3. Геометрические размеры полосы

Приступим к решению задачи. Прежде всего, как и в п.6.1, введем новую независимую переменную  $\tau = \frac{k}{c\rho} t$ . Тогда уравнение (6.36) упростится:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (6.39)$$

Ищем его интеграл в виде произведения:

$$T(x,\tau) = X(x)Y(\tau). \quad (6.40)$$

Продифференцировав (6.40) по x дважды и τ один раз и подставив полученные выражения в (6.39), получим:

$$\frac{\ddot{X}}{X} = \frac{\dot{Y}}{Y}$$

Приравнивая обе части одной и той же постоянной  $-\lambda^2$ , приходим к двум обыкновенным уравнениям:

$$\begin{aligned}\ddot{X} + \lambda^2 X &= 0, \\ \dot{Y} + \lambda^2 Y &= 0.\end{aligned}$$

Решения их нам хорошо известны:

$$X(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x, \quad (6.41)$$

$$Y(\tau) = c e^{-\lambda^2 \tau}. \quad (6.42)$$

Поскольку в рассматриваемом случае граничные условия не являются нулевыми, то возникает новая ситуация. Так как условия слева и справа от плоскости  $x = 0$  совершенно одинаковы, то в начальный момент времени температура должна была быть распределенной симметрично:

$$F(x) = F(-x).$$

Поэтому и в последующем распределение температуры должно оставаться симметричным. Таким образом, функция  $X(x)$  должна быть четной, т. е.  $X(-x) = X(x)$ .

Отсюда вытекает, что коэффициент  $B$  равен нулю, а вид функции  $X(x)$  упрощается:

$$X(x) = A \cos \lambda x. \quad (6.43)$$

Так как в краевое условие (6.43) входит только производная по  $x$  и  $T(x, \tau) = X(x) \cdot Y(\tau)$ , то функция  $X(x)$  должна удовлетворять условию:

$$\dot{X}(a) + hX(a) = 0. \quad (6.44)$$

Используя (6.43), получаем:

$$-A\lambda \sin \lambda a + hA \cos \lambda a = 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg} \lambda a = \frac{h}{\lambda}, \quad (6.45)$$

Полученное равенство (6.45) является трансцендентным уравнением относительно неизвестной  $\lambda$ , так как присутствует трансцендентная

функция тангенс<sup>7</sup>. Будем решать это уравнение графическим способом, для чего сначала умножим числитель и знаменатель правой части на число  $a$ :

$$\operatorname{tg} \lambda a = \frac{ha}{\lambda a}. \quad (6.46)$$

Обозначим  $\lambda a = z$  и построим в системе координат  $(z, u)$  графики кривых  $u_1 = \operatorname{tg} z$  и  $u_2 = \frac{ha}{z}$  (рис. 6.4). Ясно, что гипербола  $u_2$  пересечет семейство тангенсоид бесчисленное множество раз. Это значит, что уравнение (6.46) имеет бесконечное множество корней, причем с ростом  $z = \lambda a$  точки пересечения  $z_n$  приближаются к  $\lambda_n a = n\pi$  (где  $n = 1, 2, \dots$ ), так как  $\operatorname{tg} z_n \rightarrow 0$ .

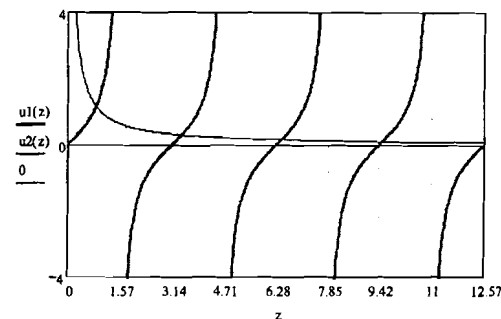


Рис. 6.4. Графическое решение уравнения (6.46) полученное в MathCad

Отметим, что  $\lambda_n$  суть корни уравнения (6.46). Отсюда получается множество функций  $X(x)$ , удовлетворяющих граничному условию (6.44):

$$X_n(x) = A_n \cos \lambda_n x. \quad (6.47)$$

Подставляя (6.46) и (6.42) в (6.40), получаем множество функций:

$$T_n = M_n \exp(-\lambda_n^2 \tau) \cos \lambda_n x,$$

которые удовлетворяют уравнению (6.36) и граничному условию (6.38). Чтобы получить решение, удовлетворяющее еще и начальному условию, составляем уже известным приемом бесконечную сумму:

<sup>7</sup> Трансцендентная функция - аналитическая функция, не являющаяся алгебраической. Простейшими примерами трансцендентных функций служат показательная функция, тригонометрические функции, логарифмическая функция.



$$T(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n = \sum_n M_n \exp(-\lambda_n^2 \tau) \cos \lambda_n x = F(x). \quad (6.48)$$

Выясним теперь, каковы должны быть коэффициенты  $M_n$ , чтобы при  $\tau \rightarrow 0$  ряд, получающийся из функции  $T_n$ , сходил к заданной функции  $F(x)$ , т. е. чтобы выполнялось равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n \cos \lambda_n x = F(x). \quad (6.49)$$

Во всех предыдущих примерах мы сталкивались с разложением функции в ряд по синусам и косинусам кратных аргументов, т. е. с рядами Фурье. В левой же части равенства (6.49) стоит бесконечная сумма косинусов, аргументы которых отличаются нецелочисленными множителями  $\lambda_n$ . Несложно, однако, показать, что функции  $\cos \lambda_n x$  и  $\cos \lambda_m x$  являются взаимно ортогональными, т. е.

$$\int_{-a}^a \cos \lambda_n x \cos \lambda_m x dx = 0$$

С другой стороны, они не нормированы, т. е.

$$\int_{-a}^a \cos^2 \lambda_n dx \neq 1$$

В теории рядов Фурье доказывается, что произвольную функцию  $f(x)$  можно разлагать в ряд по семейству ортогональных ненормированных функций  $X_1(x), X_2(x), \dots$ :

$$f(x) = \sum_n f_n X_n(x).$$

Но в отличие от обычных рядов Фурье, обобщенные коэффициенты Фурье  $f_n$  определяются по формуле:

$$f_n = \left[ \int_{-a}^a X_n^2 dx \right]^{-1} \int_{-a}^a f(x) X_n(x) dx.$$

Таким образом, для удовлетворения условия (6.49) необходимо положить произвольные числа  $M_n$  равными обобщенным коэффициентам Фурье:

$$M_n = F_n = \frac{\int_{-a}^a F(x) \cos \lambda_n x \cdot dx}{\int_{-a}^a \cos^2 \lambda_n x \cdot dx}. \quad (6.50)$$

Подставляя теперь значения  $M_n$  в (6.48), получаем окончательное выражение для искомой функции  $T(x, t)$ :

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \exp\left(-\frac{k}{c\rho} \lambda_n^2 t\right) \cos \lambda_n x. \quad (6.51)$$

## ГЛАВА 7. ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Функции Бесселя в математике представляют собой семейство функций, являющихся каноническими решениями дифференциального уравнения Бесселя. Уравнение Бесселя возникает во время нахождения решений уравнения Лапласа и уравнения Гельмгольца в цилиндрических и сферических координатах. Функции Бесселя впервые были определены выдающимся швейцарским физиком-универсалом и математиком Даниилом Бернулли, а названы в честь немецкого астронома и математика Фридриха Вильгельма Бесселя.



Даниил Бернулли (*Daniel Bernoulli*, 1700 – 1782) - выдающийся швейцарский физик-универсал и математик. В октябре 1725 г. Даниил Бернулли с братом Николаем прибыли в Петербург на работу в Российскую академию наук. Более всего Даниил Бернулли прославился трудами в области математической физики и теории дифференциальных уравнений - его считают, наряду с Д'Аламбером и Эйлером, основателем математической физики.

### 7.1. Решение уравнения Лапласа в цилиндрических координатах. Уравнение Бесселя

Уравнение Лапласа в цилиндрических координатах<sup>8</sup> имеет следующий вид:

$$\Delta U \equiv \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \quad (7.1)$$

<sup>8</sup> Преобразование уравнения Лапласа из декартовой системы координат в цилиндрическую систему координат показано в Приложении 2.

Будем искать решение уравнения (6.1) методом Фурье, имея в виду, что искомая функция  $U(\rho, \varphi, z)$  зависит от трех переменных. Положим, что

$$U(\rho, \varphi, z) = V(\rho, z)\Phi(\varphi). \quad (7.2)$$

Подставив (7.2) в (7.1), получим

$$\frac{\Phi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} V \ddot{\Phi} + \Phi \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

Полученное уравнение умножаем на  $\frac{\rho^2}{V\Phi}$  и преобразуем к равенству:

$$\frac{\rho}{V} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{\rho^2}{V} \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\ddot{\Phi}}{\Phi}.$$

Равенство двух функций от различных аргументов возможно тогда и только тогда, когда они равны одной и той же постоянной. Обозначая эту постоянную через  $v^2$ , получаем два уравнения:

$$\frac{\rho}{V} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{\rho^2}{V} \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - v^2 = 0, \quad (7.3)$$

$$\ddot{\Phi} + v^2 \Phi = 0. \quad (7.4)$$

Для решения уравнения (7.3) воспользуемся методом Фурье, что позволит разделить переменные. Итак, пусть

$$V(\rho, z) = R(\rho)Z(z). \quad (7.5)$$

Разделив уравнение (7.3) на  $\rho^2$  и произведя преобразования, получим:

$$\frac{Z}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho \dot{R}) - \frac{v^2}{\rho^2} RZ + R \ddot{Z} = 0.$$

Откуда после деления на  $RZ$  и преобразований имеем:

$$\frac{1}{\rho R} \frac{d}{d\rho} (\rho \dot{R}) - \frac{v^2}{\rho^2} = -\frac{\ddot{Z}}{Z}$$

Получили равенство двух функций от различных аргументов. Приравнявая обе части этого равенства постоянной  $-\lambda^2$ , получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \dot{R}) + \left[ \lambda^2 - \frac{v^2}{\rho^2} \right] R = 0. \quad (7.6)$$

$$\ddot{Z} - \lambda^2 Z = 0. \quad (7.7)$$

Совокупность уравнений (7.4), (7.6) и (7.7) эквивалентна исходному уравнению Лапласа (7.1), что позволяет определить функции  $\Phi(\varphi)$ ,  $R(\rho)$ ,  $Z(z)$ , а следовательно, и искомую функцию  $U$ , которая, согласно (7.2) и (7.5) равна:

$$U(\rho, \varphi, z) = R(\rho) \Phi(\varphi) Z(z). \quad (7.8)$$

Дифференциальные уравнения (6.4) и (6.7) являются линейными и однородными уравнениями второго порядка и их решение не представляет особых трудностей. Их общие решения хорошо известны и могут быть записаны в виде:

$$\Phi(\varphi) = A \cos v\varphi + B \sin v\varphi, \quad (7.9)$$

$$Z(z) = C \operatorname{ch} \lambda z + D \operatorname{sh} \lambda z. \quad (7.10)$$

Таким образом, задача свелась к решению дифференциального уравнения (7.6) с переменными коэффициентами. Проведя преобразования, представим это уравнение в виде:

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left( \lambda^2 - \frac{v^2}{\rho^2} \right) R = 0.$$

Упростим полученное уравнение, введя новую независимую переменную  $x = \lambda\rho$ . В результате получаем форму записи уравнения в виде так называемого уравнения Бесселя:

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR}{dx} + \left( 1 - \frac{v^2}{x^2} \right) R = 0. \quad (7.11)$$

Интегралы  $R(x)$  уравнения (7.11) называют цилиндрическими функциями или функциями Бесселя. Ниже рассмотрим методы решения уравнения Бесселя (7.11).



Фридрих Вильгельм Бессель (нем. *Friedrich Wilhelm Bessel*, 1784 – 1846) – немецкий астроном и математик. В его честь названы функции Бесселя и неравенство Бесселя. Не учился в гимназии и университете. Получил домашнее образование под руководством отца. Самостоятельно изучил математику и астрономию, и что интересно, получил докторскую степень Гёттингенского университета. В 20 лет вычислил орбиту кометы Галлея. Разработал теорию ошибок астрономических инструментов, открыл личное уравнение, т. е. систематическую ошибку, присущую данному наблюдателю. При обработке наблюдений применял теорию вероятностей и метод наименьших квадратов.

## 7.2. Решение уравнения Бесселя. Функции Бесселя

Запишем уравнение Бесселя в виде:

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0. \quad (7.12)$$

Решение уравнения (6.12) будем искать в форме ряда

$$y = x^s \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+s}. \quad (7.13)$$

Первая и вторая производные этого ряда запишутся так:

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+s) x^{k+s-1}, \quad (7.14)$$

$$y'' = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+s)(k+s-1) x^{k+s-2}. \quad (7.15)$$

Умножим (7.13) на  $\left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)$ , а (7.14) умножим на  $\frac{1}{x}$ . Подставим полученные выражения и (7.15) в уравнение (7.12):

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+s} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+s-2} [(k+s)(k+s-1) + (k+s) - \nu^2] = 0.$$

Произведя сокращение на  $x^{s-2}$  и упрощения в квадратных скобках, преобразуем это тождественное равенство следующим образом:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+s} = - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k [(k+s)^2 - \nu^2]$$

Ряд слева начинается с  $x^2$ , а ряд справа — с  $x$  в нулевой степени. Отсюда следует, что коэффициенты перед  $x^0$  и  $x^1$  равны нулю:

$$a_0 (s^2 - \nu^2) = 0, \quad (7.16)$$

$$a_1 [(1+s)^2 - \nu^2] = 0. \quad (7.17)$$

Что касается коэффициентов при более высоких степенях  $x$ , то они должны удовлетворять рекуррентному равенству:

$$a_{k-2} = -a_k [(k+s)^2 - \nu^2], \quad k = 2, 3, \dots \quad (7.18)$$

Из (7.16) вытекает, что  $s = \pm \nu$  и  $a_1 = 0$ . Положим сначала, что  $s = +\nu$ , тогда согласно (7.18)

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{k(k+2\nu)}, \quad (7.19)$$

где  $k = 2, 3, \dots$ . Поскольку  $a_1 = 0$ , то и все последующие нечетные коэффициенты  $a_3, a_5, a_7, \dots$  также равны нулю. Что касается четных коэффициентов, то их легко выразить через  $a_0$  по формуле (7.19):

$$a_2 = -\frac{a_0}{2(2+2\nu)} = -\frac{a_0}{2^2(1+\nu)},$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{4(4+2\nu)} = \frac{a_0}{2^4 \cdot 2(1+\nu)(2+\nu)}, \quad (7.20)$$

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{2^{2k} k! (1+\nu)(2+\nu)\dots(k+\nu)}.$$

Подставляя (7.20) в (7.13), получаем частное решение уравнения Бесселя (6.12):

$$y_1(x) = I_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+\nu}}{2^{2k} k! (1+\nu)(2+\nu)\dots(k+\nu)}. \quad (7.21)$$

С помощью признака сходимости Даламбера можно показать, что ряд (7.21) сходится при любых значениях  $x$ . Характеризуемая им функция  $I_\nu(x)$  называется *бесселевой функцией первого рода порядка  $\nu$* . Бесселевы функции первого рода  $I_\nu(x)$  хорошо изучены и для них составлены соответствующие таблицы. Заметим, что функции Бесселя часто в математике называют цилиндрическими функциями, которые составляют важный класс специальных функций. Помимо прочего, различают еще и

сферические функции Бесселя I и II рода n-го порядка при решении уравнения Лапласа и уравнения Гельмгольца в сферических координатах.

При  $x \gg 1$  функцию Бесселя можно заменить ее асимптотической формулой:

$$I_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \quad (7.22)$$

Из (7.22) видно, что для больших  $x$  кривая  $I_\nu(x)$  напоминает собой затухающую косинусоиду. На рис. 7.1 приведен график бесселевой функции нулевого порядка.

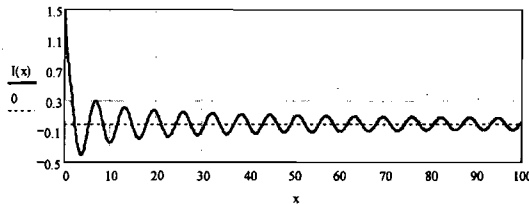


Рис.7.1. График функции Бесселя при  $x \gg 1$ , построенный в MathCad

Как видно из рис.7.1, функции  $I_\nu(x)$  имеют бесчисленное множество корней  $\xi_k^{(\nu)}$  (где  $k=1, 2, \dots$ ), для которых  $I_\nu(\xi_k^{(\nu)}) = 0$ .

Итак, функция Бесселя первого рода  $I_\nu(x)$  является одним частным решением  $y_1(x)$  уравнения (7.12). Чтобы написать его общее решение, нужно знать второе линейно-независимое частное решение  $y_2(x)$ . В теории бесселевых функций показано, что в том случае, когда параметр  $\nu$  является не целым числом, это второе частное решение можно получить, положив  $s = -\nu$ :

$$y_2(x) = I_{-\nu}(x) = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k-\nu}}{2^{2k} k! (1-\nu) \dots (k-\nu)}. \quad (7.23)$$

Функция (7.23) тоже является бесселевой функцией первого рода, но отрицательного порядка, ее график подобен затухающей косинусоиде.

В случае, если  $\nu$  не является целым числом, то общий интеграл уравнения Бесселя имеет вид:

$$y(x) = C_1 I_\nu(x) + C_2 I_{-\nu}(x). \quad (7.24)$$

Однако, если  $\nu$  есть целое число ( $\nu = n$ ), то функция  $I_{-n}(x)$  отличается от  $I_n(x)$  только постоянным множителем (-1). Иными словами,  $I_{-n}(x)$  и  $I_n(x)$  являются линейно зависимы и из них нельзя составить общий интеграл. В этом случае в качестве второго независимого частного решения выбирают функцию Бесселя второго рода  $Y_n(x)$ , которую еще называют *функцией Неймана* (предложена К. Нейманом в 1867 г.).



Карл Готфрид Нейман (нем. *Carl Gottfried Neumann*; 1832-1925) - немецкий математик, профессор университетов в Галле (с 1863), Тюбингене (с 1865) и Лейпциге (с 1868). В теории дифференциальных уравнений с частными производными Нейману принадлежат работы, относящиеся к теории потенциала (в частности, к теории логарифмического потенциала), где им дан метод (метод Неймана) решения задачи Дирихле для случая выпуклых контуров (на плоскости) и выпуклых поверхностей (в пространстве). Исследовал вторую краевую задачу (т. н. задачу Неймана). Занимался проблемами физики.

Вывод выражения для  $Y_n(x)$  не будем приводить, а ограничимся ее асимптотической формулой, справедливой при  $x \gg 1$ :

$$Y_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \quad (7.25)$$

Наиболее существенное свойство функции  $Y_n(x)$  состоит в том, что при  $x \rightarrow 0$  функция Неймана любого порядка стремится к бесконечности:

$$Y_n(0) = -\infty. \quad (7.26)$$

На рис. 7.2 приведен график функции Неймана нулевого порядка.

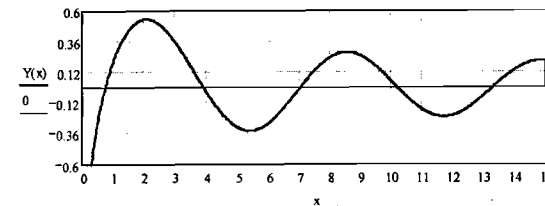


Рис. 7.2. График функции Неймана нулевого порядка, построенный в MathCad

Таким образом, при  $\nu = n$  общий интеграл уравнения Бесселя (7.12) выражается следующей формулой:

$$y(x) = C_1 I_n(x) + C_2 Y_n(x). \quad (7.27)$$

В главе 8 приведен конкретный пример решения теплотехнической задачи с использованием функции Бесселя.

### 7.3. Вычисление функций Бесселя в Excel

Обычно функции Бесселя применяются при интегрировании дифференциальных уравнений в цилиндрических координатах. Эти функции не выражаются через элементарные функции, но достаточно подробно протабулированы. Среди встроенных функций Excel имеется обычная и модифицированная функция Бесселя (табл. 7.1).

На рис. 7.3 представлены построенные с помощью функции БЕССЕЛЬ.J(x;n) графики функций Бесселя  $J_0(x)$  и  $J_1(x)$  в Excel.

Под задачей Дирихле подразумевается отыскание регулярного в области  $D$  решения уравнения Лапласа с краевыми условиями 1-го рода ( $u=h$  на границе области  $D$ , где  $u$  – искомая функция, а  $h$  – заданная функция). Вопросы, связанные с этой задачей, рассматривались ещё К. Гауссом (1840), а затем П. Дирихле (1850).

8.1. Решение задачи Дирихле для цилиндра

Пусть дан цилиндр высоты  $h$  и радиуса  $a$  (рис. 7.4), на боковой поверхности и верхнем торце которого температура равна нулю, а на нижнем торце поддерживается постоянная температура по закону  $T = F(\rho)$ . Найдем распределение температуры в таком цилиндре.



Йоганн Петер Густав Лежен-Дирихле (нем. *Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet*, 1805 - 1859) - немецкий математик. Внёс существенный вклад в математический анализ, теорию функций и теорию чисел. Один из важнейших его трудов «О сходимости тригонометрических рядов, служащих для представления произвольной функции в данных пределах» (1829).

Чтобы сформулировать задачу аналитически, примем во внимание, что из ее условий вытекает симметричность распределения температуры по углу  $\phi$ . Поэтому  $\frac{\partial T}{\partial \phi} = 0$  и уравнение Лапласа упрощается:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial T}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \tag{8.1}$$

Граничные условия задачи имеют следующий вид:

$$T|_{\rho=a} = 0, \quad T|_{z=h} = 0, \tag{8.2}$$

$$T|_{z=0} = F(\rho). \tag{8.3}$$

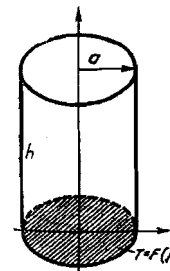


Рис.7.4. Геометрические размеры цилиндра

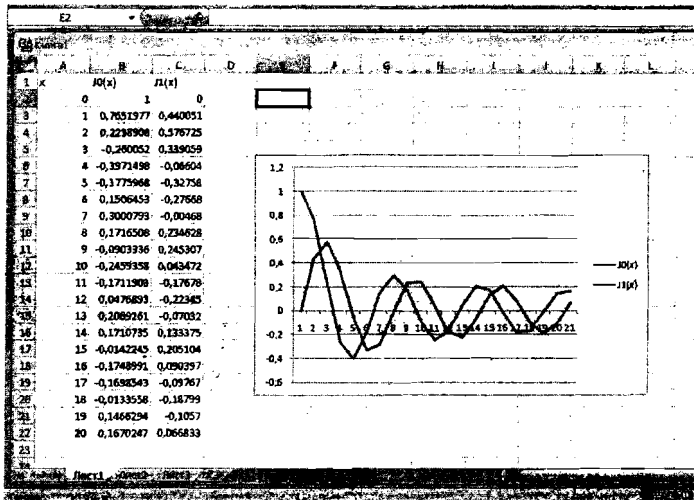
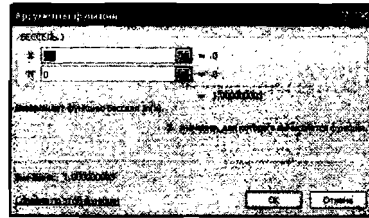
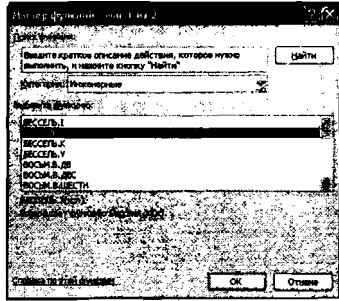


Рис.7.3. Вычисление и построение графиков функций Бесселя  $J_0(x)$  и  $J_1(x)$  в Excel

Таблица 7.1

Имя функции в Excel	Операция	Примечание
БЕССЕЛЬ.J(x;n)	Возвращает функцию Бесселя $J_n(x)$	$n$ - порядок функции Бесселя
БЕССЕЛЬ.Y(x;n)	Возвращает функцию Бесселя $Y_n(x)$	
БЕССЕЛЬ.I(x;n)	Возвращает функцию Бесселя $I_n(x)$	
БЕССЕЛЬ.K(x;n)	Возвращает функцию Бесселя $K_n(x)$	

Согласно методу Фурье, представим искомую функцию в виде произведения:

$$T(\rho, z) = R(\rho)Z(z). \quad (8.4)$$

Подставив это произведение в исходное уравнение (8.1), имеем:

$$Z \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho \dot{R}) + R \ddot{Z} = 0.$$

Деля это равенство на  $RZ$  и перенося второе слагаемое вправо, получаем:

$$\frac{1}{\rho R} \frac{d}{d\rho} (\rho \dot{R}) = -\frac{\ddot{Z}}{Z(z)}.$$

Приравнявая, как обычно, обе части равенства постоянной  $-\lambda^2$ , приходим к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$\ddot{Z} - \lambda^2 Z(z) = 0, \quad (8.5)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho \dot{R}) + \lambda^2 R = 0. \quad (8.6)$$

Общий интеграл уравнения (8.6) записывается сразу:

$$Z(z) = A \operatorname{ch} \lambda z + B \operatorname{sh} \lambda z. \quad (8.7)$$

Что касается (8.6), то оно является уравнением Бесселя нулевого порядка от независимой переменной  $(\lambda \rho)$ :

$$\ddot{R} + \frac{1}{\rho} \dot{R} + \lambda^2 R = 0. \quad (8.8)$$

Его общее решение согласно (7.27) можно записать в виде:

$$R(\rho) = C I_0(\lambda \rho) + D Y_0(\lambda \rho). \quad (8.9)$$

Из условия конечности решения во всех точках цилиндра следует, что  $D = 0$ . В противном случае для точек на оси  $z$ , т. е. при  $\rho = 0$ , мы бы получили  $R \rightarrow \infty$  (так как  $|Y_0(0)| = \infty$ ). Итак,

$$R(\rho) = C I_0(\lambda \rho). \quad (8.10)$$

Потребуем теперь, чтобы на поверхности цилиндра  $R(a) = 0$ :

$$I_0(\lambda a) = 0. \quad (8.11)$$

Отсюда находим параметр  $\lambda$ :

$$\lambda a = \xi_n^0 \quad \text{или} \quad \lambda_n = \frac{\xi_n^0}{a} \quad (8.12)$$

где  $\xi_n^0$  — корни бесселевой функции нулевого порядка. Подставляя (8.12) в (8.9), получаем:

$$R_n(\rho) = C_n I_0\left(\xi_n^0 \frac{\rho}{a}\right). \quad (8.13)$$

Умножая (8.13) на (8.7), находим множество функций:

$$T_n(\rho, z) = \left[ M_n \operatorname{ch}\left(\xi_n^0 \frac{z}{a}\right) + N_n \operatorname{sh}\left(\xi_n^0 \frac{z}{a}\right) \right] I_0\left(\xi_n^0 \frac{\rho}{a}\right), \quad (8.14)$$

удовлетворяющих уравнению (8.1) и первому из граничных условий (8.2).

Чтобы удовлетворить еще второму граничному условию  $T|_{z=h} = 0$ , необходимо положить

$$M_n \operatorname{ch}\left(\xi_n^0 \frac{h}{a}\right) + N_n \operatorname{sh}\left(\xi_n^0 \frac{h}{a}\right) = 0. \quad (8.15)$$

Отсюда

$$N_n = M_n \operatorname{cth}\left(\xi_n^0 \frac{h}{a}\right). \quad (8.16)$$

Подставляя (8.16) в (8.14) и учтя формулу для гиперболического синуса разности двух углов, приходим к соотношению:

$$T_n = M_n \frac{\operatorname{sh}\left(\xi_n^0 \frac{h-z}{a}\right)}{\operatorname{sh}\left(\xi_n^0 \frac{h}{a}\right)} I_0\left(\xi_n^0 \frac{\rho}{a}\right). \quad (8.17)$$

Осталось еще удовлетворить граничному условию (8.3). Для этого составим из решений  $T_n$  бесконечную сумму:

$$T(\rho, z) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n = \sum_{n=1}^{\infty} M_n \frac{\operatorname{sh}\left(\xi_n^0 \frac{h-z}{a}\right)}{\operatorname{sh}\left(\xi_n^0 \frac{h}{a}\right)} I_0\left(\xi_n^0 \frac{\rho}{a}\right) \quad (8.18)$$

и получим, чтобы при  $z=0$  она сходилась к  $F(\rho)$ :

$$T(\rho, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} M_n I_0\left(\xi_n^0 \frac{\rho}{a}\right) = F(\rho).$$

Задача теперь свелась к разложению функции  $F(\rho)$  в ряд по бесселевым функциям нулевого порядка. В теории цилиндрических функций доказывается, что две различные функции одного порядка обобщенно ортогональны, т. е.

$$\int_0^a \rho I_0\left(\xi_n^0 \frac{\rho}{a}\right) I_0\left(\xi_m^0 \frac{\rho}{a}\right) d\rho = 0$$

при  $m \neq n$ . Поэтому любую функцию  $F(\rho)$  можно разложить в ряд Фурье-Бесселя:

$$F(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n I_0\left(\xi_n^0 \frac{\rho}{a}\right). \quad (8.19)$$

При этом коэффициенты Фурье - Бесселя  $F_n$  вычисляются по формуле:

$$F_n = \frac{2}{a^2 [I_1(\xi_n^0)]^2} \int_0^a \rho F(\rho) I_0\left(\xi_n^0 \frac{\rho}{a}\right) d\rho. \quad (8.20)$$

Таким образом, полагая  $M_n = F_n$ , получаем окончательное решение задачи в виде суммы ряда:

$$T(\rho, z) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \frac{\operatorname{sh}\left(\xi_n^0 \frac{h-z}{a}\right)}{\operatorname{sh}\left(\xi_n^0 \frac{h}{a}\right)} I_0\left(\xi_n^0 \frac{\rho}{a}\right). \quad (8.21)$$

В заключение отметим, что функции Бесселя применяются еще и при решении инженерных задач о распространении волн, статических потенциалов и т. п., например:

- электромагнитные волны в цилиндрическом волноводе;
- теплопроводность в цилиндрических объектах.

Функции Бесселя нашли применение также при обработке электрических сигналов.

## 8.2. Решение задачи Дирихле для круга

Пусть в плоскости  $XOY$  имеется круг радиуса  $R$  с центром в начале координат и на его окружности задана функция  $f(\varphi)$ , где  $\varphi$  - полярный угол. Требуется найти функцию  $u(r, \varphi)$ , которая удовлетворяет уравнению Лапласа в полярных координатах:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (8.22)$$

и при  $\rho=R$  и  $u=f(\varphi)$ .

Запишем уравнение Лапласа в полярных координатах в следующем виде:

$$\rho^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (8.23)$$

Полагаем  $u = \Phi(\varphi)R(\rho)$  и подставляя это соотношение в уравнение Лапласа, получаем:

$$\rho^2 \Phi(\varphi) \ddot{R}(\rho) + \rho \Phi(\varphi) \dot{R}(\rho) + \ddot{\Phi}(\varphi) R(\rho) = 0 \quad (8.24)$$

или

$$\frac{\ddot{\Phi}(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = -\frac{r^2 \ddot{R}(\rho) + r \dot{R}(\rho)}{R(\rho)} = -k^2. \quad (8.25)$$

Тогда имеем два уравнения:

$$\ddot{\Phi}(\varphi) + k^2 \Phi(\varphi) = 0, \quad (8.26)$$

$$r^2 \ddot{R}(\rho) + r \dot{R}(\rho) - k^2 R(\rho) = 0. \quad (8.27)$$

Общее решение уравнения (8.26) имеет вид:

$$\Phi = A \cos k\varphi + B \sin k\varphi. \quad (8.28)$$

Решение второго уравнения будем искать в виде:

$$R = \rho^m. \quad (8.29)$$

При подстановке (8.29) в (8.27) получим:

$$\rho^2 m(m-1)\rho^{m-2} + \rho m \rho^{m-1} - k^2 \rho^m = 0, \quad m^2 - k^2 = 0. \quad (8.30)$$

Общее решение уравнения (8.30) имеет вид:

$$R = C\rho^k + D\rho^{-k}. \quad (8.31)$$

Подставляя полученные решения (8.28) и (8.31) в уравнение  $u = \Phi(\varphi)R(\rho)$ , получим:

$$u_k = (A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi)(C_k \rho^k + D_k \rho^{-k}). \quad (8.32)$$

Эта функция будет решением уравнения Лапласа при любом  $k \neq 0$ .

Если  $k = 0$ , то  $\ddot{\Phi}(\varphi) = 0$ ,  $\rho \ddot{R} + \dot{R} = 0$  следовательно  $u_0 = (A_0 + B_0 \varphi)(C_0 + D_0 \ln \rho)$ .

Решение должно быть периодическим, т.к. одно и то же значение будет повторяться через  $2\pi$ . (Тогда рассматривается одна и та же точка круга.) Поэтому  $B_0 = 0$ . Решение должно быть конечным и непрерывным, поэтому  $D_0 = 0$ . Окончательно получаем решение данной задачи:

$$u(\rho, \varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \rho^n, \quad (8.33)$$

$$\text{где } A_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt, \quad B_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt. \quad (8.34)$$

Если подставить коэффициенты (8.34) в полученную формулу (8.33) и произвести упрощение, то получим окончательный результат решения задачи Дирихле, который называется *интегралом Пуассона*:

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{R^2 + \rho^2}{R^2 - 2\rho R \cos(t - \varphi) + \rho^2} dt. \quad (8.35)$$

Интеграл Пуассона выражает значения функции  $u(\rho, \varphi)$ , гармонической внутри круга радиуса  $R$ , через её значения  $f(t)$ , заданные на границе этого круга. Функция  $u(\rho, \varphi)$  является решением задачи Дирихле для круга. Заметим, что изучены также интегралы Пуассона, дающие решение задачи Дирихле для шара, полуплоскости и полупространства. Интеграл Пуассона был впервые рассмотрен С. Пуассоном (1823). Строгая теория этого интеграла была создана Г. Шварцем (1869).

## ГЛАВА 9. РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

При численном решении дифференциальных уравнений в частных производных наиболее часто используют *метод конечных разностей* (другое название – *метод сеток*), метод конечных элементов или спектральный метод. В настоящем пособии рассматривается только метод конечных разностей.

### 9.1. Метод конечных разностей

В основе решения уравнений в частных производных методом конечных разностей лежит конечно-разностная аппроксимация производных. Это позволяет преобразовать исходное уравнение в частных производных (или систему таких уравнений) в систему алгебраических уравнений (или обыкновенных дифференциальных уравнений). Решение полученных систем уравнений производится известными математическими методами и обычно не представляет трудностей, особенно при наличии соответствующих компьютерных программ.

Аппроксимация осуществляется в три этапа. Сначала в области решения вводят равномерную сетку «узловых точек», соответствующую характеру задачи и граничным условиям. Затем решаемое уравнение в частных производных записывают в наиболее удобной системе координат и, представляя производные в конечно-разностной форме, приводят его к виду разностного уравнения. Полученное разностное уравнение используют в дальнейшем для описания функциональной связи между соседними узлами сетки. Разностное уравнение записывают для всех узлов сетки и получают в результате систему  $n$  уравнений с  $n$  неизвестными. На последнем этапе полученную систему  $n$  уравнений с  $n$  неизвестными решают одним из численных методов.

На первый взгляд, эта процедура, состоящая из трех этапов, может показаться простой и прямо ведущей к решению. Однако на самом деле это не так — широкое разнообразие типов и размеров сеток, видов уравнений в частных производных, возможных конечно-разностных аппроксимаций этих уравнений и методов решения получаемых систем уравнений делают задачу численного решения уравнений в частных производных исключительно многогранной и интересным исследованием. Рассмотрим ниже этапы решения [12,13].

### 9.2. Формулы численного дифференцирования

Пусть  $x$  - любой из узлов  $x_i$  интервала  $[a, b]$ . Тогда другие узлы могут быть вычислены по формулам

$$x + kh, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (9.1)$$



Приближенное вычисление производной функции  $y(x)$

$$\frac{d^s y}{dx^s}(x), s \geq 1$$

в узле  $x$  по значениям функции в узлах  $y(x + kh)$  называется *численным дифференцированием*.

Предположим, что  $y(x) \in C^2[a, b]$ ,  $x < b$ . Разложим  $y(x + h)$  в ряд Тейлора до членов второго порядка. Имеем

$$y(x + h) = y(x) + \frac{dy(x)}{dx} h + O(h^2).$$

Отсюда находим, что

$$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} + O(h).$$

Учитывая, что  $x$  - это узел  $x_i$ , получаем двухточечную формулу для первой производной - дифференцирование вперед:

$$\frac{dy(x_i)}{dx} = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} + O(h), \quad 0 \leq i \leq m-1. \quad (9.2)$$

Обычно под формулой численного дифференцирования понимают приближенное равенство

$$\frac{dy(x_i)}{dx} \approx \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h}.$$

Разность

$$R = \frac{dy(x_i)}{dx} - \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h},$$

вычисленная для функции  $y(x) \in C^2[a, b]$ , называется *погрешностью аппроксимации*. Для (9.2) имеем

$$R = O(h), \quad h \rightarrow 0.$$

*Точностью* (или порядком точности) *аппроксимации* называется порядок степени  $h$ , с которым  $R(h)$  стремится к нулю при  $h \rightarrow 0$ . Для (9.2) порядок точности — первый.

Аналогично выводится двухточечная формула для первой производной - дифференцирование назад:

$$\frac{dy(x_i)}{dx} = \frac{y(x_i) - y(x_{i-1})}{h} + O(h), \quad 1 \leq i \leq m. \quad (9.3)$$

Более точной является двухточечная формула для первой производной - центральная разность

$$\frac{dy(x_i)}{dx} = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))}{2h} + O(h^2), \quad 1 \leq i \leq m-1. \quad (9.4)$$

Формула (9.4) верна, если  $y(x) \in C^3[a, b]$ . Для первой производной можно выписать многоточечные формулы, например трехточечная формула имеет вид

$$\frac{dy(x_i)}{dx} = \frac{-y(x_{i-2}) + 4y(x_{i-1}) - 3y(x_i)}{2h} + O(h^2).$$

В общем виде многоточечная формула имеет (при достаточной гладкости  $y(x)$ ) вид

$$\frac{dy(x_i)}{dx} = \sum_{k=0}^m a_k y(x_k) + O(h^p),$$

где коэффициенты  $a_k$  выбираются так, чтобы порядок точности формулы был  $p$ . Аналогичный подход применяется и для высших производных.

Формула численного дифференцирования для второй производной может быть получена следующим образом. Разложим  $y(x + h)$  и  $y(x - h)$  в ряд Тейлора<sup>9</sup> до членов четвертого порядка

$$y(x + h) = y(x) + \frac{dy(x)}{dx} h + \frac{1}{2} \frac{d^2 y(x)}{dx^2} h^2 + \frac{1}{6} \frac{d^3 y(x)}{dx^3} h^3 + O(h^4),$$

$$y(x - h) = y(x) - \frac{dy(x)}{dx} h + \frac{1}{2} \frac{d^2 y(x)}{dx^2} h^2 - \frac{1}{6} \frac{d^3 y(x)}{dx^3} h^3 + O(h^4).$$

Сложив левые и правые части полученных выражений, после преобразований получим:

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} = \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2}.$$

Преобразуем полученную формулу к виду, удобному для практического использования

$$\frac{d^2 y(x_i)}{dx^2} = \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1}))}{h^2} + O(h^2), \quad (9.5)$$

где для внутренних узлов  $1 \leq i \leq m-1$ .

<sup>9</sup> Ряд назван в честь английского математика Брука Тейлора, хотя ряд Тейлора был известен задолго до публикаций Тейлора - его использовали ещё в XVII веке Грегори, а также Ньютон.



Брук Тейлор (англ. *Brook Taylor*, 1685-1731) - английский математик. Принимал участие в знаменитом споре о приоритете между Ньютоном и Лейбницем. В 1715г. опубликовал свой основной научный трактат «Methodus incrementorum directa et inversa» (Прямой и обратный метод приращений). В нем, кроме вывода его знаменитой формулы (разложения функции в степенной ряд), рассмотрены некоторые задачи интерполирования и суммирования последовательностей. Он положил начало математическому изучению задачи о колебании струны и разработал теорию конечных разностей.

### 9.3. Простейшие разностные схемы задачи Коши

Рассмотрим исходную задачу Коши на сетке  $x_i, 0 \leq i \leq m$ :

$$\frac{dy(x_i)}{dx} = f(x_i, y(x_i)), \quad y(x_0) = y^{(0)}$$

Заменяя левую часть дифференциального уравнения формулами (9.2) - (9.4), получаем:

$$\frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} = f(x_i, y(x_i)) + O(h), \quad 0 \leq i \leq m-1,$$

$$\frac{y(x_i) - y(x_{i-1}))}{h} = f(x_i, y(x_i)) + O(h), \quad 1 \leq i \leq m,$$

$$\frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))}{2h} = f(x_i, y(x_i)) + O(h^2), \quad 1 \leq i \leq m-1.$$

Если отбросить погрешность аппроксимации производных в этих соотношениях, то получим разностные схемы:

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_i, y_i), \quad 0 \leq i \leq m-1, \quad y_0 = y^{(0)}; \quad (9.6)$$

$$\frac{y_i - y_{i-1}}{h} = f(x_i, y_i), \quad 1 \leq i \leq m, \quad y_0 = y^{(0)}; \quad (9.7)$$

$$\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} = f(x_i, y_i), \quad 1 \leq i \leq m-1, \quad y_0 = y^{(0)}. \quad (9.8)$$

Разностные схемы (9.6), (9.7) аппроксимируют исходную задачу Коши для достаточно гладких функций на сетке с первым порядком точности, схема (9.8) - со вторым порядком точности.

Схема (9.6) называется явной разностной схемой, схемы (9.7), (9.8) -

неявными. Термины связаны с тем, что формула (9.6) дает возможность вычислить значение  $y_{i+1}$  в следующей точке сети  $x_{i+1}$  по явной формуле

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i),$$

если известно значение  $y_i$ , в то время как формулы (9.7), (9.8) задают значения в следующей точке как неявную функцию от значений в предыдущих точках.

Схема (9.8) - незамкнутая разностная схема в том смысле, что система уравнений (9.8) имеет  $m+1$  неизвестное  $y_i, 0 \leq i \leq m$ , и только  $m$  уравнений. Замокнуть систему можно по-разному. Чтобы не потерять второй порядок точности аппроксимации, обычно заменяют

$$f(x_i, y_i) = \frac{1}{2} [f(x_{i-1}, y_{i-1}) + f(x_{i+1}, y_{i+1})]$$

шаг сетки увеличивают вдвое и получают следующую неявную схему:

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = \frac{1}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})], \quad (9.9)$$

$$1 \leq i \leq m, \quad y_0 = y^{(0)}.$$

Разностная схема называется устойчивой на модельной задаче, если накопление погрешности по шагам не зависит от числа шагов, т. е.

$$\left| \sum_{k=1}^i p^{i-k} e^{h\lambda(k-1)} \right| \leq c, \quad 1 \leq i \leq m, \quad (9.10)$$

где константа  $c$  не зависит от  $m$ .

Разностная схема называется *сходящейся на модельной задаче*, если

$$\max_{1 \leq i \leq m} |y_i - y(x_i)| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad h \rightarrow 0$$

### 9.4. Метод сеток для уравнения параболического типа

Рассмотрим смешанную задачу для уравнения теплопроводности, а именно: найдем функцию  $u(x, t)$ , удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (9.11)$$

начальному условию

$$u(x, 0) = f(x) \quad (0 < x < s) \quad (9.12)$$

и краевым условиям

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad u(s, t) = \psi(t). \quad (9.13)$$

К задаче (9.11) - (9.13) приводит, в частности, задача о распространении тепла в однородном стержне длины  $s$  [13]. Путем введения новой переменной  $\tau = a^2 t$  в уравнение (9.1) приведем к виду

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Для простоты, примем,  $a=1$ . Построим в полуполосе  $t \geq 0, 0 \leq x \leq s$  (рис. 9.1) два семейства параллельных прямых:

$$x = ih \quad (i = 0, 1, 2, \dots), \quad t = jl \quad (j = 0, 1, 2, \dots).$$

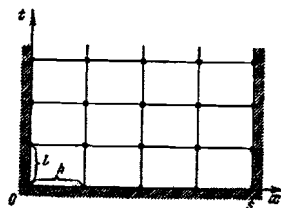


Рис.9.1.Разбивка полуполосы на узлы

Обозначим  $x_i = ih, t_j = jl, u(x_i, t_j) = u_{ij}$  и приближенно заменим в каждом внутреннем узле  $(x_i, t_j)$  производную  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  разностным отношением

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{ij} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}. \quad (9.14)$$

Производную первого порядка  $\frac{\partial u}{\partial t}$  представим одним из двух разностных отношений

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{ij} \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{l}, \quad (9.15)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{ij} \approx \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{l}. \quad (9.16)$$

Тогда для уравнения (9.11) при  $a = 1$  получаем два типа конечно-разностных уравнений:

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{l} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}, \quad (9.17)$$

$$\frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{l} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}. \quad (9.18)$$

Обозначив  $\sigma = \frac{l}{h^2}$ , приводим эти уравнения к виду

$$u_{i,j+1} = (1 - 2\sigma)u_{i,j} + \sigma(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}), \quad (9.19)$$

$$(1 + 2\sigma)u_{i,j} - \sigma(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - u_{i,j-1} = 0. \quad (9.20)$$

Отметим, что для составления уравнения (9.17) была использована схема узлов - явная схема (рис.9.2), а для уравнения (9.18) схемы узлов взята неявная схема (рис.9.3).

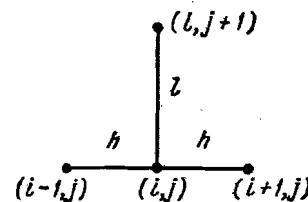


Рис.9.2. Явная схема узлов

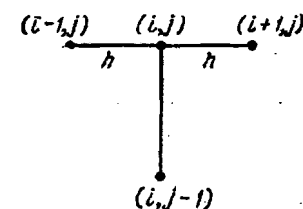


Рис.9.3. Неявная схема узлов

При выборе числа  $\sigma$  в уравнениях (9.19), (9.20) следует учитывать два обстоятельства:

- 1) погрешность замены дифференциального уравнения разностным должна быть наименьшей;
- 2) разностное уравнение должно быть устойчивым. Уравнение (9.19) будет устойчивым при  $0 < \sigma \leq 1/2$ , а уравнение (9.20) - при любом  $\sigma$ . Наиболее удобный вид уравнение (9.19) имеет при  $\sigma = 1/2$ :

$$u_{i,j+1} = \frac{u_{i-1,j} + u_{i+1,j}}{2}, \quad (9.21)$$

и при  $\sigma = 1/6$ :

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{6}(u_{i-1,j} + 4u_{i,j} + u_{i+1,j}). \quad (9.22)$$

Оценки погрешностей приближенных решений, полученных из уравнений

(9.20), (9.21), (9.22) в полосе  $0 \leq x \leq s$ ,  $0 \leq t \leq T$ , соответственно имеют вид:

$$|u - \tilde{u}| \leq \frac{T}{3} M_1 h^2, \quad (9.23)$$

$$|u - \tilde{u}| \leq \frac{T}{135} M_2 h^4, \quad (9.24)$$

$$|u - \tilde{u}| \leq T \left( \frac{l}{2} + \frac{h^2}{12} \right) M_1, \quad (9.25)$$

где  $\tilde{u}$  - точное решение задачи (9.11) - (9.13),

$$M_1 = \max \{ |f^{(4)}(x)|, |\varphi''(t)|, |\psi''(t)| \}$$

при  $0 \leq t \leq T$ ,  $0 \leq x \leq s$ ,

$$M_2 = \max \{ |f^{(6)}(x)|, |\varphi^{(4)}(t)|, |\psi^{(4)}(t)| \}$$

при  $0 \leq t \leq T$ ,  $0 \leq x \leq s$ .

Из приведенных оценок погрешностей видно, что уравнение (9.22) дает более высокую точность решения, чем уравнение (9.21). Но уравнение (9.21) имеет более простой вид, а, кроме того, шаг  $l$  по аргументу  $t$  для уравнения (9.22) должен быть значительно меньше, что приводит к большему объему вычислений. Уравнение (9.20) дает меньшую точность, но при этом шаги  $l$  и  $h$  выбираются независимо друг от друга. Из формулы (9.25) видно, что для уравнения (9.20) оценка погрешности зависит как от величины  $l$ , так и от величины  $t$ .

Уравнения (9.21) и (9.22), реализующие явную узловую схему, позволяют вычислить значения функции  $u(x, y)$  на каждом слое по явным формулам через значения на предыдущем слое; уравнение (9.20) (неявная схема) этим свойством не обладает. Методом сеток можно решать смешанную краевую задачу для неоднородного параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t).$$

Тогда соответствующее разностное уравнение, использующее явную схему узлов, имеет вид

$$u_{i,j+1} = (1 - 2\sigma) u_{i,j} + \sigma (u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + l F_{i,j}. \quad (9.26)$$

Отсюда получаем при  $\sigma = 1/2$

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{2} (u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + l F_{i,j}, \quad (9.27)$$

а при  $\sigma = 1/6$

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{6} (u_{i-1,j} + 4u_{i,j} + u_{i+1,j}) + l F_{i,j}. \quad (9.28)$$

В этом случае оценка погрешности решения для уравнения (9.27) может быть определена из следующего выражения:

$$|u - \tilde{u}| \leq \frac{T}{4} \left( M_2 + \frac{1}{3} M_4 \right) h^2.$$

## ГЛАВА 10. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕПЛОТЕХНИКИ В MATHCAD И EXCEL

Для решения стационарных задач теплопроводности в **MathCad**, в зависимости от типа уравнения и задаваемых граничных условий, могут быть использованы опции **relax**, **multigrid** или **Pdsolve**. В других, более сложных случаях, приходится прибегать к программированию в **MathCad**. В **Excel** подобных опций **MathCad** нет и поэтому необходимо тоже запрограммировать, с учетом особенностей электронной таблицы.

### 10.1. Опция relax

Для решения уравнения Пуассона или Лапласа на области, имеющей квадратную форму  $D = \{(x, y) : a < x < b, c < y < d\}$  в **MathCad** можно воспользоваться функциями **relax** и **multigrid** [14-16]. Функция **relax** использует метод релаксации для нахождения приближенного решения. При этом уравнение Пуассона или Лапласа представляется в виде конечных разностей:

$$a_{j,k} u_{j+1,k} + b_{j,k} u_{j-1,k} + c_{j,k} u_{j,k+1} + d_{j,k} u_{j,k-1} + e_{j,k} u_{j,k} = f_{j,k}. \quad (10.1)$$

Опция **relax(a, b, c, d, e, f, u, r)** содержит: **a, b, c, d, e** - квадратные матрицы одного и того же размера, содержащие коэффициенты разностного уравнения (10.1). Матрица **u** представляет собой квадратную матрицу, которая содержит значения искомой функции на границах области и начальные значения для поиска искомой функции внутри области. Опция **relax** ищет искомое решение итерационным методом, а параметр **r** является спектральным радиусом итерации Якоби. Этот параметр контролирует сходимость релаксационного алгоритма. Он принимает значение в интервале (0, 1), однако, его оптимальная величина зависит от конкретной задачи и может быть определена в зависимости от

количества узлов  $n$  сетки из формулы  $r = 1 - \frac{2\pi}{n}$ . Однако, на практике значение  $r$  обычно находится подбором. Этот параметр, как правило, имеет значение 0,95.

**Пример 10.** Имеется тонкая *квадратная* металлическая пластина (рис. 10.1). На каждой из четырех граней (границ)  $\Gamma$  известно распределение температуры (скалярное поле). Граничные условия, заданные на гранях пластины приведены в табл.10.1. Требуется найти поле температуры  $T(x,y)$  внутри пластины.

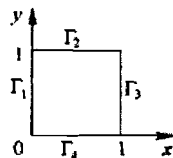


Рис. 10.1. Форма пластины

Таблица.10.1

		<b>Верхняя грань пластины</b>		
		<b>граничные условия</b> $T(\Gamma_2) = 273 + 11 \cos(\pi x/4)$ К		
<b>Левая грань пластины</b>	<b>граничные условия</b> $T(\Gamma_1) = 273 + 67y^2$ К	<b>Распределение температуры <math>T(x,y)</math> на поверхности пластины описывается уравнением Лапласа <math>\Delta T = 0</math></b>	<b>граничные условия</b> $T(\Gamma_3) = 328 - 18y^2$ К	<b>Правая грань пластины</b>
		<b>граничные условия</b> $T(\Gamma_4) = 380 - 20 \sin(\pi x/2)$ К		
		<b>Нижняя грань пластины</b>		

Решение задачи в MathCad приведено на рис.10.2.

Решение уравнения Лапласа

Создание равномерной сетки:  $\Delta x := 0.1$   $\Delta y := 0.1$   $i := 0..4$   $j := 0..4$

$x_j := \Delta x \cdot j$   $y_i := \Delta y \cdot i$

Граничные условия

Левая сторона пластины  $\Gamma_1(y) := 273 + 67 \cdot y^2$   $J_{i,0} := \Gamma_1(y_i)$

Верхняя сторона пластины  $\Gamma_2(x) := 273 + 11 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot x}{4}\right)$   $T_{0,i} := \Gamma_2(x_i)$

Правая сторона пластины  $\Gamma_3(y) := 328 - 18 \cdot y^2$   $T_{j,4} := \Gamma_3(y_j)$

Нижняя сторона пластины  $\Gamma_4(x) := 380 - 20 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{2}\right)$   $T_{4,i} := \Gamma_4(x_i)$

Матрица с граничными условиями

$$T = \begin{pmatrix} 284 & 283.966 & 283.865 & 283.696 & 328 \\ 273.67 & 0 & 0 & 0 & 327.82 \\ 275.68 & 0 & 0 & 0 & 327.28 \\ 279.03 & 0 & 0 & 0 & 326.38 \\ 380 & 376.871 & 373.82 & 370.92 & 368.244 \end{pmatrix}$$

Коэффициенты из уравнения Лапласа в конечных разностях

$a_{j,i} := 1$   $b_{j,i} := 1$   $c_{j,i} := 1$   $d_{j,i} := 1$   $e_{j,i} := -4$   $f_{j,i} := 0$

Решение уравнения  $r := 0.5$

$T := \text{relax}(a, b, c, d, e, f, T, r)$

$$T = \begin{pmatrix} 284 & 283.966 & 283.865 & 283.696 & 328 \\ 279.84 & 300.234 & 307.548 & 314.049 & 327.64 \\ 332 & 329.582 & 332.045 & 337.314 & 348.122 \\ 356 & 354.048 & 353.738 & 355.039 & 358.183 \\ 380 & 376.871 & 373.82 & 370.92 & 368.244 \end{pmatrix}$$

Распределение температуры по поверхности пластины

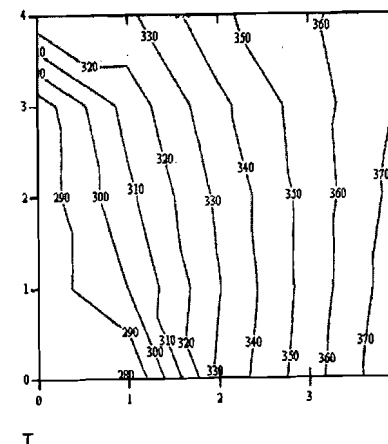


Рис.10.2. Листинг программы решения уравнения Лапласа в MathCad

## 10.2. Опция multigrid

Если на границах области решения поддерживаются нулевые граничные условия, более удобной является опция **multigrid**(M, n), где  $M = 1 + 2^n$  - квадратная матрица, элементы которой равны функции источника в соответствующих точках *квадратной области*. Параметр *n* показывает число циклов на каждом уровне итерации опции multigrid. Обычно хорошее приближение к решению дает значение  $n = 2$ .

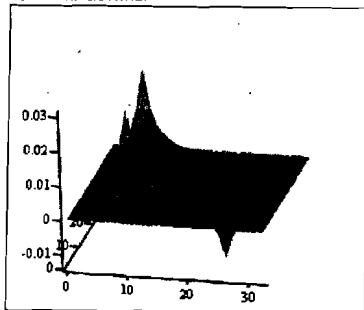
Рассмотрим пример решения стационарного уравнения теплопроводности с помощью опции multigrid. Решим численно двумерное уравнение Пуассона  $\Delta T = -k$  с заданным расположением трех точечных источников тепла и нулевой температурой на краях пластины. При этом найдем стационарное распределение температуры *T* внутри пластины размером  $32 \times 32 \text{ м}^2$ , где содержится 3 точечных источника тепла: №1 мощностью 25 кВт с координатами (24;8), №2 мощностью -45 кВт с координатами (8;20) и №3 мощностью -40 кВт с координатами (8;8). Один источник с положительной мощностью выделяет тепло, и в двух точках происходит локальный отток тепла. Решение задачи показано на рис. 10.3.

Решение уравнения Пуассона с тремя источниками тепла  
 Размер пластины  $R_x = 32$  Краевые условия  $M_{R,R} := 0$

Мощность источника тепла №1 с координатами (24;8)	Мощность источника тепла №2 с координатами (8;20)	Мощность источника тепла №3 с координатами (8;8)
$M_{R,R} := 25$ $3 \cdot \frac{R}{4}, \frac{R}{4}$	$M_{R,R} := -45$ $\frac{R}{4}, 3 \cdot \frac{R}{4}$	$M_{R,R} := -40$ $\frac{R}{4}, \frac{R}{4}$

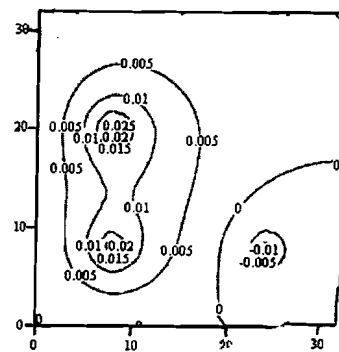
Решение уравнения  
 $n := 2$   
 $S := \text{multigrid}(M, n)$

Пространственный график температурных полей пластины



S

График температурных линий уровня



S

Рис.10.3. Листинг программы решения уравнения Пуассона с тремя источниками тепла в MathCad

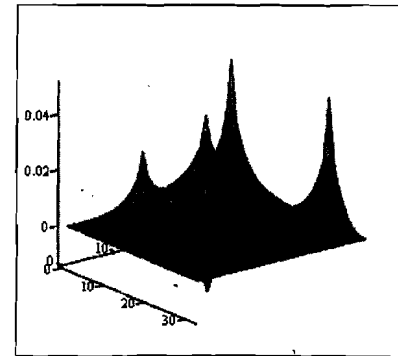
На рис.10.4 представлено решение уравнения Пуассона с пятью источниками тепла.

Решения уравнения Пуассона с пятью источниками тепла  
 Размеры пластины  $R_x = 32$  Краевые условия  $M_{R,R} := 0$

$M_{R,R} := -45$ $3 \cdot \frac{R}{4}, \frac{R}{4}$	$M_{R,R} := 25$ $\frac{R}{4}, \frac{R}{4}$	$M_{R,R} := -40$ $\frac{R}{4}, \frac{R}{4}$	$M_{R,R} := -90$ $\frac{R}{8}, 3 \cdot \frac{R}{4} + 4$	$M_{R,R} := -95$ $M_{R-4, R-4}$
--	---	--	--	------------------------------------

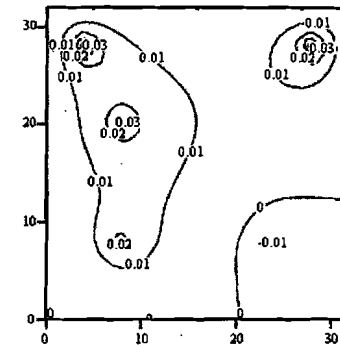
Решение уравнения  
 $n := 2$   
 $S := \text{multigrid}(M, n)$

Пространственный график температурных полей пластины



S

График температурных линий уровня



S

Рис.10.4. Листинг программы решения уравнения Пуассона с пятью источниками тепла в MathCad

## 10.3. Опция Pdesolve

В качестве математической модели часто используется одномерное уравнение теплопроводности для тонкого стержня конечной длины. Такое уравнение, например, может быть использовано для описания процесса разогрева термоэмиссионного катода в газоразрядных приборах [17]:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{c \cdot \rho} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - k_1(T^4 - T_0^4) - k_2(T - T_0) + \frac{P_n}{S \cdot C \cdot \rho \cdot l}, \quad (10.2)$$

где *T* - температура катода; *T*<sub>0</sub> - температура окружающей среды; *l*, *S* - длина и площадь поперечного сечения стержня, соответственно; *C* - теплоемкость стержня; *λ* - коэффициент теплопроводности стержня; *P*<sub>*n*</sub> - мощность накала; *ρ* - плотность материала стержня. Первый, второй и третий члены правой части уравнения связаны с тепловыми потерями за

счет держателей катода, лучистого теплообмена и теплопроводности газа, соответственно, а четвертый член обусловлен мощностью накала.

Уравнения (10.2) принимает более простой вид, если пренебречь влиянием лучистого теплообмена и теплопроводности газа. В этом случае уравнение (10.2) имеет

следующий вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \beta, \quad \text{где } \alpha = \frac{\lambda}{c \cdot \rho} \text{ и } \beta = \frac{P_n}{S \cdot C \cdot \rho \cdot l}. \quad (10.3)$$

Для решения дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа, а к нему относится и уравнение (10.2), в последних версиях MathCad, например, MathCad 13, имеется функция Pdsolve. Функция Pdsolve(u, x, xrange, t, trange, Nx, Nt) включает следующее аргументы:

- u - имя функции  $u(x, t)$ , относительно которой решается уравнение. Для системы уравнений здесь должен быть вектор имен функций;
- x - имя пространственной переменной;
- xrange - двухкомпонентный вектор, задающий начало и конец интервала изменения пространственной переменной;
- t - имя временной переменной;
- trange - двухкомпонентный вектор. Этот вектор задает начало и конец временного интервала, на котором решается задача;
- Nx, Nt - количество точек, разбивающих для интегрирования пространственный и временной интервалы соответственно. Эти два параметра можно не указывать, тогда количество точек будет выбрано автоматически из соображений достаточной точности.

Варианты записи функции Pdsolve:

1. С вариантами разбивки пространственного и временного интервалов.

$$Pdsolve\left(u, x, \begin{pmatrix} 0 \\ L \end{pmatrix}, t, \begin{pmatrix} 0 \\ T \end{pmatrix}, Nx, Nt\right) - \text{для решения одного уравнения:}$$

$$Pdsolve\left(\begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix}, x, \begin{pmatrix} 0 \\ L \end{pmatrix}, t, \begin{pmatrix} 0 \\ T \end{pmatrix}, Nx, Nt\right) - \text{для решения системы из двух уравнений.}$$

2. Без разбивки пространственного и временного интервалов:

$$Pdsolve\left(u, x, \begin{pmatrix} 0 \\ L \end{pmatrix}, t, \begin{pmatrix} 0 \\ T \end{pmatrix}\right) - \text{для решения одного уравнения,}$$

$$Pdsolve\left(\begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix}, x, \begin{pmatrix} 0 \\ L \end{pmatrix}, t, \begin{pmatrix} 0 \\ T \end{pmatrix}\right) - \text{для решения системы из двух уравнений.}$$

Встроенная функция Pdsolve применяется в рамках вычислительного блока, начинающегося ключевым словом Given, и пригодна для решения различных гиперболических и параболических уравнений. Она предназначена для решения одномерного уравнения (или системы уравнений) в частных производных, с переменными по времени t и пространственной координате x. Опция Pdsolve имеет следующие особенности:

- уравнения в частных производных записывают с помощью булевских знаков равенства;
- все функции и производные должны определяться как функции двух переменных;
- в качестве граничных условий в точках 0 и L можно использовать как условия Дирихле, так и условия Неймана;
- для решения уравнения Пуассона или уравнения Лапласа данная опция непригодна (вместо нее следует использовать встроенные функции multigrd или relax);
- в качестве метода решения используется метод прямых;
- для решения систем дифференциальных уравнений в частных производных следует использовать опцию numol.

Для корректного использования функции Pdsolve предварительно, после ключевого слова Given, следует записать само уравнение и граничные условия при помощи логических операторов (панель «Булево»). Уравнение должно содержать имя неизвестной функции  $u(x, t)$  вместе с именами аргументов. Для идентификации частных производных в пределах вычислительного блока следует использовать нижние индексы, например,  $u_{xx}(x, t)$ , для обозначения второй производной функции  $u$  по пространственной координате  $x$ .

Решение дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа с использованием функции Pdsolve состоит из следующих элементов:

1. Ключевое слово given - начало решения.
2. Уравнение, которое нужно решить, должно быть записано в виде:  $u(x, t) = f(x, t, u, u_x, u_{xx})$ . Для ввода производных в данном случае нельзя использовать обычный оператор производной, а нужно пользоваться нижним индексом, как это обычно делается в литературе для записи уравнений в частных производных. При этом нижний индекс следует вводить не как элемент массива (клавиша < [ >), а как текстовый нижний индекс (клавиша < . >). Для того чтобы ввести вторую производную от функции  $u$  по переменной  $x$ , следует набрать на клавиатуре:  $u . x x$ .

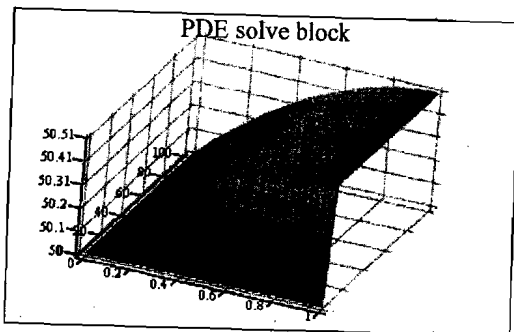
Решение одномерного уравнения теплопроводности для тонкого стержня конечной длины

$$\begin{aligned} L_x &:= 1 & L_y &:= 10 & \alpha &:= 3. \epsilon & \beta &:= 3. \epsilon \\ & \text{Given} \\ u_t(x, t) &= \alpha \cdot u_{xx}(x, t) + \beta \\ u(x, 0) &= 50 & u(0, t) &= 50 & u_x(L, t) &= 0.01 \end{aligned}$$

$$u := \text{Pdesolve} \left[ u, x, \begin{pmatrix} 0 \\ L \end{pmatrix}, t, \begin{pmatrix} 0 \\ T \end{pmatrix} \right]$$

3D graph:

$$\begin{aligned} T0 &:= 0 \\ A1 &:= \text{CreateMesh}(u, 0, L, T0, T) \end{aligned}$$



A1

Рис.10.5. Решение одномерного уравнения теплопроводности (9.3)

3. Граничные условия для функции  $u(x, t)$ . Если уравнение второго порядка по  $x$ , то и граничных условий должно быть два. Вы можете использовать как граничные условия Дирихле ( $u(x_0, t) = w(t)$ ), так и граничные условия Неймана ( $u_x(x_0, t) = w(t)$ ) или даже их комбинацию.

На рис.10.5 приведено решение одномерного уравнения теплопроводности (10.3) для тонкого металлического стержня конечной длины  $L=1$  ед. длины. Для построения трехмерного графика решения использована опция  $\text{CreateMesh}(u, 0, L, 0, T, Nt, Nt)$ .

#### 10.4. Опция numol

Для решения уравнений и систем *параболического* и *гиперболического* типов без создания группы решения (конечно, уравнения гиперболического типа должны быть приведены к системе уравнений первого порядка по времени) в MathCAD имеется встроенная функция **numol**. Решение задач с ее использованием осуществляется в таком порядке:

1. Строится векторная функция **pdef(x,t,u,ux,uxx)**. Эта функция является аналогом функции  $D(x,y)$ , которая используется при решении систем обычных дифференциальных уравнений (ОДУ). Количество элементов этого вектора равно сумме  $npde + nprae$  ( $npde$  - количество дифференциальных уравнений в частных производных, которые входят в систему,  $nprae$  - количество алгебраических условий, связывающих между собой неизвестные функции). Первые  $npde$  элементов вектора pdef задают правые части дифференциальных уравнений (подразумевается, что в левую часть уравнения перенесены производные по времени). Остальные элементы задают алгебраические уравнения, связывающие между собой неизвестные функции (в этих элементах подразумевается, что левая часть равна нулю).

2. Задаются начальные условия для неизвестных функций в виде векторной функции **init(x)**. Каждый элемент этого вектора должен содержать начальное условие для соответствующей функции.

3. Задаются граничные условия в виде матричной функции **bc(t)**. Эта матрица должна содержать три столбца и столько строк, сколько функций в системе. В первых двух столбцах этой матрицы задаются условия. Эти условия накладываются на ту или иную функцию в начальной и конечной точках отрезка интегрирования соответственно. Третий столбец определяет тип условий. Если для функции задаются условия Дирихле, то в третьем столбце соответствующей строки нужно ввести "D", а если условия Неймана - "N". Если в системе отсутствует вторая производная от той или иной функции по пространственной переменной, тогда для нее нужно задавать только одно граничное условие, а вместо второго ввести "NA" (при этом в третьем столбце обязательно должно быть введено "D"). Если в системе для функции отсутствуют производные по пространственной переменной, то граничные условия для нее не указывают, и соответствующая строка в матрице bc должна иметь вид: "NA", "NA", "D".

4. Для решения задачи вводим обозначения для numol:  
 $\text{sol} := \text{numol}(\text{xend}, \text{xppts}, \text{tend}, \text{tppts}, \text{npde}, \text{nprae}, \text{pdef}, \text{init}, \text{bc})$ , где аргументы встроенной функции имеют следующий смысл:

- $\text{xend}$  - двухкомпонентный вектор, элементы которого задают начало и конец пространственного отрезка интегрирования;
- $\text{xppts}$  - количество точек, разбивающих пространственный интервал;
- $\text{tend}$  - также двухкомпонентный вектор, но который задает границы временного интервала;
- $\text{tppts}$  - количество точек, разбивающих временной интервал;
- $\text{npde}$ ,  $\text{nprae}$  - эти числа задают количество уравнений и алгебраических условий в системе.

Результат решения системы уравнений с помощью функции **numol** представляется в виде матрицы, состоящей из  $\text{xppts}$  строк и  $\text{tppts} \cdot (\text{npde} + \text{nprae})$  столбцов. Эта матрица объединяет несколько матриц размера  $\text{xppts} \times \text{tppts}$ , каждая из которых содержит значения одной из неизвестных функций



системы. Решение для любой функции может быть выделено из результата `numol` с помощью функции `submatrix`.

**Заметим**, что функция `numol` не может быть использована для решения задач со смешанными граничными условиями, когда на одной границе интервала задается значение самой функции, а на другой - ее производной. Для решения подобных задач обычно применяется функция `Pdsolve`.

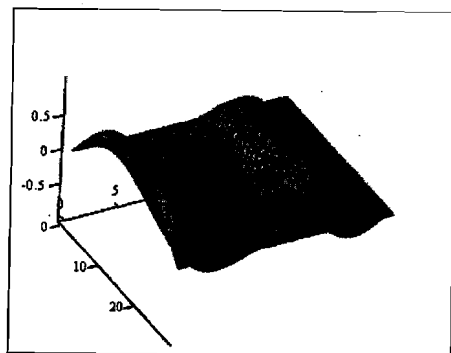
На рис.10.6 приведен пример решения волнового уравнения, с помощью встроенной функции `numol`.

Решение волнового уравнения  
 $a = 3$        $L = 2\pi$        $T = 2\pi$

```

num_pde := 2      num_pae := 0      rhs(x,t,u,u_x,u_xx) := ( u_t
                                                                a^2*u_xx )
init(x) := ( sin(pi*x/L) )          bc_func(t) := ( init(0)_0  init(L)_0  "D"
                                                                "NA"      "NA"      "D" )
sol := numol( [ ( 0 ) , 30, ( 0 ) , 20, num_pde, num_pae, rhs, init, bc_func ]
              [ L ) , T )
rows(sol) = 30  cols(sol) = 40
SOL := submatrix(sol, 0, 29, 0, 20)

```



SOL

Рис.10.6. Решение волнового уравнения с помощью встроенной функции `numol`

Отметим, что функция `numol` имеет большее число аргументов, нежели `Pdsolve`, благодаря чему позволяет автоматизировать применение

метода сеток. Однако, пользоваться этой функцией намного сложнее, чем вычислительным блоком. Это связано с тем, что уравнения и начальные и граничные условия должны быть записаны в специальном формате. Применение функции `numol` оправдано в том случае, когда необходимо включить решение уравнений в частных производных в более сложные вычисления в качестве подпрограммы, организовать серию расчетов с меняющимся параметром, подготовить анимацию графиков решения и т. п.

График решения параболических и гиперболических уравнений в частных производных, с использованием функции `numol`, может быть оформлен в виде анимационного ролика, причем расчетное время следует выразить через константу `frame`, а затем применить команду `View / Animate` (Вид / Анимация).

### 10.5. Решение задачи теплопроводности в Excel

Рассмотрим нестационарную задачу для медного стержня длиной 10 см, на одном конце которого поддерживается температура  $20^{\circ}\text{C}$ , а на другом  $0^{\circ}\text{C}$ . Требуется рассчитать изменение температуры в стержне со временем в Excel [18,19]. Тепловыми потерями через боковую поверхность стержня пренебречь. Теплопередача энергии вдоль стержня описывается дифференциальным уравнением в частных производных в виде

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (10.4)$$

Это уравнение в конечных разностях запишется в виде:

$$\frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\Delta t} = \alpha \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta x^2}, \quad (10.5)$$

где  $\Delta x$  - шаг сетки по пространству  $x$ , индекс  $i$ , а  $\Delta t$  - шаг сетки по времени, индекс  $j$ .

Разрешим это уравнение относительно температуры в будущий момент времени

$$T_{i,j+1} = T_{i,j} + r(T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}), \quad (10.6)$$

$$\text{где } r = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2}. \quad (10.7)$$

Для обеспечения вычислительной устойчивости данного разностного уравнения коэффициент  $r$  при сумме температур не должен превышать  $1/2$ :

$$r \leq \frac{1}{2}.$$

Если коэффициент  $r = 1/2$ , то разностное уравнение примет вид:

$$T_{i,j+1} = \frac{1}{2}(T_{i+1,j} + T_{i-1,j}). \quad (10.8)$$

Для медного стержня коэффициент теплопередачи  $\alpha = 1,155 \text{ см}^2/\text{с}$ . Тогда, получаем следующее соотношение между шагом сетки по времени  $\Delta t$  и по пространству  $\Delta x$ :

$$\Delta x^2 = 2,31 \cdot \Delta t. \quad (10.9)$$

Граничные условия задачи имеют вид:

$$T_{0,j} = 20^\circ \text{C} \text{ при } x=0, \quad T_{n,0} = 0^\circ \text{C} \text{ при } x=10 \text{ см}. \quad (10.10)$$

Примем шаг по пространству 1 см, тогда шаг сетки по времени будет  $\Delta t = 1/2,31 = 0,433 \text{ с}$ . Заполнение электронной таблицы производим в таком порядке:

1. Делаем все надписи.
2. Делаем рамки.
3. Заносим в ячейки B6-L6 значения длины стержня с шагом 1 см;
4. Заносим в ячейки A7-A20 значения моментов времени с шагом 0,433с.
5. Заносим в ячейку B7 граничное условие температуры  $20^\circ \text{C}$  и копируем его в ячейки B8-B20.
6. Заносим в ячейку L7 граничное условие температуры  $0^\circ \text{C}$  и копируем его в ячейки L8-L20.
7. Заносим в ячейку C7 значение температуры  $0^\circ \text{C}$  D7-K7.
8. В ячейку C8 вводим формулу  $=0,5*(B7+D7)$  и копируем ее в ячейки C8:K20.

После проделанных операций лист электронной таблицы имеет вид рис.10.7.

Теплопроводность в медном стержне  
решение уравнения гиперболического типа в частных производных

Зависимость температуры в стержне от координаты и времени

Время, t	Координаты, см									
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	20	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,433	20	20	0	0	0	0	0	0	0	0
0,866	20	10	5	0	0	0	0	0	0	0
1,299	20	12,5	5	2,5	0	0	0	0	0	0
1,732	20	12,5	7,5	2,5	1,25	0	0	0	0	0
2,165	20	13,75	7,5	4,875	1,25	0,625	0	0	0	0
2,598	20	13,75	9,0625	4,875	2,5	0,625	0,3125	0	0	0
3,031	20	14,5125	9,0625	5,78125	2,5	1,40625	0,3125	0,15625	0	0
3,464	20	14,5125	10,15625	5,78125	3,56875	1,40625	0,78125	0,15625	0,078125	0
3,897	20	15,07813	10,15625	6,475	3,56875	1,875	0,78125	0,429688	0,078125	0,039063
4,33	20	15,07813	10,79688	6,475	4,53125	2,1875	1,308594	0,429688	0,234375	0,079063
4,763	20	15,48828	10,79688	7,28906	4,53125	2,919922	1,308594	0,773484	0,234375	0,117188
5,196	20	15,48828	11,82109	7,28906	5,338814	2,919922	1,845703	0,773484	0,464136	0,117188
5,629	20	15,81055	11,82109	8,479004	5,338814	3,951809	1,845703	1,14503	0,464136	0,222106

Рис.10.7. Теплопроводность в медном стержне. Решение в Excel

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведенные в пособии задачи теплотехники являются базовыми в практике будущих инженеров-теплоэнергетиков. Для решения таких задач вполне могут быть использованы такие программные продукты, как MathCAD и Excel. Однако для решения более сложных задач, возможностей встроенных функций MathCAD может не хватить, так как они способны решать только определенный класс задач. В этом случае следует прибегнуть к программированию метода сеток в MathCAD или другой среде, например, Бейсик или Паскаль.

Что касается решения дифференциальных уравнений в частных производных в Excel, то в этой среде могут быть решены в основном одномерные и двухмерные уравнения. Графическое представление результатов решения задачи получается менее информационным, чем в MathCAD. Нельзя построить график линий уровней температуры. Решение трехмерных уравнений в этой среде вызывает большие трудности при программировании, что представляется нерациональным с практической точки зрения, так как программа получается довольно громоздкой и сложной. При этом нужно помнить, что Excel предназначен, как известно, для решения в основном экономических задач. Однако, благодаря наличию мощного математического аппарата, в нем можно решать и некоторые технические задачи, хотя с меньшим успехом, нежели в других программируемых средах. В связи с этим, выбор решения инженерной задачи в среде Excel должен быть обоснован с позиций простоты

программирования, наглядности представления результатов решения для анализа и выводов.

Для расчетов тепловых полей в сложных геометрических областях часто применяют метод конечных элементов (МКЭ). Одним из главных отличительных признаков МКЭ является нерегулярная, адаптирующаяся к геометрии объекта и особенностям температурного поля сетка.

Для решения больших инженерных задач применяют специальные математические пакеты. На базе МКЭ построен универсальный вычислительный комплекс ANSYS 41 (<http://www.cadfem.ru>, <http://www.ansys.com>), предназначенный для решения задач различной физической природы (прочность, теплофизика, гидрогазодинамика, тепломассообмен, электромагнетизм). Вычислительные пакеты STAR-CD (<http://www.cd.co.uk>), PHOENICS (<http://www.cham.co.uk>, <http://213.210.25.174/website/new/top.htm>) специально ориентированы на компьютерное моделирование в области динамики жидкости и тепломассообмена.

Пакеты STAR-CD, PHOENICS, ANSYS относятся к так называемым «тяжелым» пакетам. Они велики по объему, оснащены эффективными численными алгоритмами, удобным интерфейсом, мощными графическими средствами для формирования сложной геометрии объектов и для визуализации результатов. Самое главное, практически отсутствуют ограничения на сложность задач, за исключением памяти и быстродействия компьютера. Работа с такими программами требует специальной подготовки, а сами пакеты являются дорогостоящими.

В связи с этим для современного инженера важно не только хорошее знание математических методов решения задач, но и умение их реализовать на персональном компьютере с привлечением современного программного обеспечения и последующим анализом полученных результатов.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Юдович В.И. Лекции по курсу «Математические модели естественных наук»/ Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, 2008. - 338 с.
2. Математические модели естественных наук. - <http://www.math.rsu.ru/mexmat/kvm/MME/>
3. Ахмеров Р. Р. Введение в математическое моделирование. - <http://www.ict.nsc.ru/rus/textbooks/akhmerov/matmodel/index.html>.
4. Мокин А.Ю. Влияние вычислительной техники на развитие математики: тезисы докладов научной конференции "Философия математики: актуальные проблемы". - <http://www.philos.msu.ru/fac/dep/scient/confdpt/2007/theses/index.html>.
5. Чинаев П. И., Черенков А. А., Минин Н. А., Перевозников А. Ю. Высшая математика. Специальные главы. - Киев: Издательское объединение «Вища школа», 1977. - 368 с.
6. Кальницкий Л. А., Добротин Д.А., Жевёржеев В.Ф. Специальный курс высшей математики для вузов: учеб. пособие. - М.: Высшая школа, 1976. - 389 с.
7. Олейник О.А. Роль теории дифференциальных уравнений в современной математике и ее приложениях. - <http://www.mmonline.ru/articles.php?mid=1367&topic=207>
8. Шуп Т. Решение инженерных задач на ЭВМ: Практическое руководство / пер. с англ. - М.: Мир, 1982. - 238 с.
9. Янпольский А.Р. Гиперболические функции. - М.: Физматгиз, 1960. - 195 с.
10. Несис Е.И. Методы математической физики: учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов. - М.: Просвещение, 1977. - 199 с.
11. Араманович И.Г., Левин В.И. Уравнения математической физики. Изд-е 2-е, стереотипное. - М.: Наука, 1969. - 287 с.
12. Боглаев Ю.П. вычислительная математика и программирование: учеб. Пособие для студентов вузов. - М.: Высшая школа, 1990. - 544 с.
13. Копченова Н. В., Марон И. А. Вычислительная математика в примерах и задачах. - М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1972. - 367 с.
14. Семененко М.Г. Математическое моделирование в MathCad. - М.: Альтекс-А, 2003. - 208 с.
15. Дмитриева С.И. Расчет схем паротурбинных и парогазовых установок и их элементов: учебно-методическое пособие к выполнению комплексного курсового проекта для студентов специальности 140104: «Промышленная теплоэнергетика» / СПбГТУРП. СПб., 2000. - 41 с.
16. Левицкий А.А. Основы численных методов. - <http://www.exponenta.ru/educat/systemat/levitsky/index.asp>

17. И.К.Белова, М.Г. Семенов. Моделирование теплофизических процессов в идеальном термокатоде. - <http://www.exponenta.ru/educat/systemat/semenenko/cathode/main.asp>.
18. Орвис В. EXCEL для ученых, инженеров и студентов / пер. с англ. - Киев: Юниор, 1999. - 528 с.
19. Ларсен Р.У. Инженерные расчеты в Excel / пер. с англ. - М.: Издательский дом «Вильямс», 2002. - 544 с.

Подставим в функцию  $u(x, y)$  выражения (П2.2), получим  $u(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ . Возьмем от полученного выражения как от сложной функции первые производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \quad (\text{П2.3})$$

Для нахождения частных производных в (П2.3) воспользуемся выражением  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ :

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos \varphi \quad \text{и} \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin \varphi. \quad (\text{П2.4})$$

Поскольку  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$ , то

$$\frac{1}{\cos^2 \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\cos^2 \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{x}. \quad (\text{П2.5})$$

Подставив (П2.2) в (П2.5) получим:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\sin \varphi}{r} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\cos \varphi}{r}. \quad (\text{П2.6})$$

Подставив (П2.4) и (П2.6) в равенства (П2.3), окончательно найдем выражения частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \cos \varphi - \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{r}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r} \sin \varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{r}. \quad (\text{П2.7})$$

Продифференцировав  $\frac{\partial u}{\partial x}$  из выражения (П2.7) по правилу сложной функции, найдем вторые производные функции  $u(x, y)$ :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (\text{П2.8})$$

Из равенств (П2.7) получим:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \cos \varphi - \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi \partial r} \frac{\sin \varphi}{r} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{r^2}, \quad (\text{П2.9})$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi} \cos \varphi - \frac{\partial u}{\partial r} \sin \varphi - \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \frac{\sin \varphi}{r} - \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{r}. \quad (\text{П2.10})$$

Умножим равенство (П2.9) на  $\frac{\partial r}{\partial x} = \cos \varphi$ , а равенство (П2.10) на

$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\sin \varphi}{r}$  и получившиеся выражения сложим:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \cos^2 \varphi - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} + 2 \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r^2} + \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\sin^2 \varphi}{r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \frac{\sin^2 \varphi}{r^2}. \quad (\text{П2.11})$$

Подобным образом воспользовавшись соотношением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad (\text{П2.12})$$

найдем

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \sin^2 \varphi + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} - 2 \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r^2} + \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\cos^2 \varphi}{r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \frac{\cos^2 \varphi}{r^2}. \quad (\text{П2.13})$$

Сложив выражения (П2.11) и (П2.12), получим выражение оператора Лапласа в полярных координатах

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u(r, \varphi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u(r, \varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u(r, \varphi)}{\partial \varphi^2}. \quad (\text{П2.14})$$

Выражение (П2.14) несимметрично относительно перестановки  $x - y$ , то есть координаты  $x$  и  $y$  неравноправны.

Заметим, что полярная система координат является частным случаем цилиндрической, когда у последней системе  $z = 0$ . Выражение (П2.14) часто используют в виде

$$\Delta u(r, \varphi) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u(r, \varphi)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u(r, \varphi)}{\partial \varphi^2}. \quad (\text{П2.15})$$

Тождественность правых частей формул (П2.14) и (П2.15) проверяется дифференцированием.

Рассмотрим трехмерный случай оператора Лапласа в цилиндрических координатах. Цилиндрические координаты, как известно,  $x$ ,  $y$  и  $z$  связаны с декартовыми координатами соотношением:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z. \quad (\text{П2.16})$$

Функция  $u(x, y, z)$  преобразуется в функцию  $u(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z)$ . Здесь координата  $z$  остается неизменной, и в выражении (П15) двумерного оператора Лапласа в полярных координатах добавляется только вторая производная по  $z$ :

$$\Delta u(r, \varphi, z) = \frac{\partial^2 u(r, \varphi, z)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u(r, \varphi, z)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u(r, \varphi, z)}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u(r, \varphi, z)}{\partial z^2}. \quad (\text{П2.17})$$

Выражение (П2.17) и есть вид оператора Лапласа в цилиндрической системе координат.

Для сферических координат  $r, \theta$  и  $\varphi$  имеем формулы:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta, \quad (\text{П2.18})$$

где  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  - расстояние точки  $(x, y, z)$  от начала координат,  $\theta$  - угол между радиусом-вектором точки и осью  $Oz$ , а  $\varphi$  - угол между проекцией радиуса-вектора на плоскость  $Oxy$  и осью  $Ox$ . Здесь непосредственное преобразование производных функции  $u(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta)$  очень громоздко, и поэтому его проводить не будем, ограничившись тем, что выпишем окончательное выражение оператора Лапласа в сферических координатах:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}. \quad (\text{П2.19})$$

Формулу (П2.18) часто записывают в виде

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}. \quad (\text{П2.20})$$

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	3
Глава 1. Моделирование научно-технических задач.....	4
1.1. Основные понятия.....	4
1.2. Математическое моделирование.....	4
1.3. Компьютерное моделирование.....	8
Глава 2. Основные понятия математической теории поля.....	9
2.1. Поле.....	9
2.2. Скалярное поле.....	10
2.3. Производная по направлению.....	11
2.4. Градиент.....	13
2.5. Дивергенция.....	17
2.6. Физическая интерпретация дивергенции.....	19
2.7. Дифференциальная форма закона сохранения энергии в физике.....	21
2.8. Оператор Лапласа и лапласиан функции.....	22
Глава 3. Моделирование инженерных задач, приводящих к дифференциальным уравнениям.....	25
3.1. Дифференциальные уравнения в прикладных научно-технических задачах.....	25
3.2. Подходы к решению дифференциальных уравнений.....	29
3.3. Классификация дифференциальных уравнений в частных производных.....	30
Глава 4. Некоторые специальные функции, используемые при решении дифференциальных уравнений.....	32
4.1. Гиперболические функции.....	32
4.2. Построение решения дифференциальных уравнений с использованием гиперболических функций.....	34
4.3. Гамма-функция.....	36
4.4. Функции Хевисайда и Дирака.....	39
4.5. Интеграл Фурье.....	42
Глава 5. Уравнения параболического типа.....	45
5.1. Уравнение диффузии.....	45
5.2. Уравнение теплопроводности.....	46
5.3. Начальные и краевые условия.....	47
Глава 6. Решение некоторых задач теплотехники, имеющих значение для практики.....	48
6.1. Стационарное распределение температуры в прямоугольном брусе.....	48
6.2. Охлаждение бесконечного стержня.....	52
6.3. Охлаждение тонкой пластины.....	56
Глава 7. Интегрирование уравнений математической физики в цилиндрической системе координат.....	61
7.1. Решение уравнения Лапласа в цилиндрических координатах. Уравнение Бесселя.....	61

7.2. Решение уравнения Бесселя. Функции Бесселя .....	64
7.3. Вычисление функций Бесселя в Excel .....	67
Глава 8. Задачи Дирихле .....	69
8.1. Решение задачи Дирихле для цилиндра .....	69
8.2. Решение задачи Дирихле для круга .....	73
Глава 9. Решение дифференциальных уравнений методом конечных разностей .....	75
9.1. Метод конечных разностей .....	75
9.2. Формулы численного дифференцирования .....	75
9.3. Простейшие разностные схемы задачи Коши .....	78
9.4. Метод сеток для уравнения параболического типа .....	79
Глава 10. Решение задач теплотехники в MathCad и Excel .....	83
10.1. Опция relax .....	83
10.2. Опция multigrid .....	86
10.3. Опция Pdesolve .....	87
10.4. Опция num01 .....	90
10.5. Решение задачи теплопроводности в Excel .....	93
Заключение .....	95
Библиографический список .....	97
Приложения .....	99
Приложение 1. Пример Адамара .....	99
Приложение 2. Вид оператора Лапласа в цилиндрической и сферической системах координат .....	99

Учебное издание

Пестриков Виктор Михайлович

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ТЕПЛОТЕХНИЧЕСКИХ ЗАДАЧ  
В ПРОГРАММИРУЕМЫХ СРЕДАХ**

Учебное пособие

Редактор и корректор Т.А. Смирнова  
Техн. редактор Л.Я. Титова

Темплан 2009 г., поз.16

---

Подп. к печати 10.06.09. Формат 69 x 84/16. Бумага тип. №1. Печать офсетная.  
Печ. л. 6,75. Уч. изд. л. 6,75.  
Тираж 100 экз. Изд. № 16. Цена «С»

Заказ 2001

---

Ризограф ГОУ ВПО Санкт-Петербургского государственного технологического  
университета растительных полимеров, 198095, СПб., ул. Ивана Черных, 4