Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

**Санкт-Петербургский государственный технологический
университет растительных полимеров**

М.В. ПОДОБЕД, О.В. ПОДОБЕД

УЧЕБНОЕ ПРИМЕНЕНИЕ MATHCAD и EXCEL в ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ (ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ)

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2008

М.В. ПОДОБЕД, О.В. ПОДОБЕД

УЧЕБНОЕ ПРИМЕНЕНИЕ MATHCAD и EXCEL В ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ (ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ)

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2008

Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ РАСТИТЕЛЬНЫХ ПОЛИМЕРОВ

УЧЕБНОЕ ПРИМЕНЕНИЕ MATHCAD и EXCEL В ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ (ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ)

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2008

ББК 22.18я7
П 444
УДК 681.3:65.5(075)

Подобед М.В., Подобед О.В. Учебное применение MATHCAD и EXCEL в экономических задачах (задачи линейного программирования): учебное пособие ; ГОУВПО СПбГТУРП. - СПб., 2008.- 70 с.

В учебном пособии изложены основные положения курса, приведены примеры. В электронном приложении к данному учебному пособию приведены варианты заданий для выполнения практических работ. Предназначается для организации работы студентов, обучающихся по специальностям: «Экономика и управление на предприятии ЦБП», «Менеджмент организации».

Рецензенты:

доцент кафедры прикладной математики и информатики ГОУВПО СПбГТУРП Пузанкова Л.М.

доцент кафедры эконометрии ГОУВПО Санкт-Петербургский государственный университет водных коммуникаций, канд.техн.наук Полянская Т.И.

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом университета в качестве учебного пособия.

1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

1.1. Цель работы

Целью работы является закрепление у студентов навыков решения оптимизационных задач, связанных с планированием и управлением на предприятии. Особое место среди них занимают задачи, в которых целевая функция представляется в виде линейной функции искомых неотрицательных переменных, а связи между этими переменными описываются посредством линейных уравнений и неравенств (задачи линейного программирования). Для решения задач линейного программирования (ЗЛП) используют обычно универсальный алгебраический метод решения – симплекс-метод. Если число искомых переменных равно двум, можно воспользоваться геометрическим (графическим) методом решения. При решении задач линейного программирования, которые могут быть сведены к классической транспортной задаче, используют специальный метод решения - метод потенциалов.

В работе предлагается на различных этапах разработки планов выпуска и реализации продукции на квартал для предприятия использовать перечисленные выше методы решения задач линейного программирования. При решении задач симплексным методом вручную предлагается использовать шаблоны для оформления симплекс-таблиц в Excel; при решении транспортной задачи вручную предлагается использовать шаблоны для оформления транспортных таблиц в Excel. Для реализации симплексного метода предлагается использовать также инструментальные средства, предоставляемые:

а) Excel - «Поиск решения»,

б) Mathcad - функции Maximize и Minimize с блоком Given.

В результате выполнения работы студенты должны дать оценку возможностей использования различных инструментальных средств, реализующих рассматриваемые методы решения задач линейного программирования с точки зрения пользователя.

1.2. Содержание работы, требования к оформлению пояснительной записки

В работе предлагается найти оптимальные решения для двух взаимосвязанных планово-производственных задач – разработка плана выпуска продукции на квартал и разработка плана реализации выпущенной продукции в течение того же квартала.

Таблица1. Задание

Вариант №	Способ изготовления продукции			Ограничения на запасы ресурсов по месяцам квартала			Выпуск не менее
Цена единицы продукции	первый	второй	третий				
	c_1	c_2	c_3				
ресурсы	Затраты ресурсов на единицу продукции $a_{i,j}$; i=1,2,3;j=1,2,3			1 месяц	2 месяц	3 месяц	-
сырье (усл. ед.)	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$a_{1,3}$	$B_1(1)$	$B_1(2)$	$B_1(3)$	$X_j \geq X_j0$
труд (чел.-час)	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$a_{2,3}$	$B_2(1)$	$B_2(2)$	$B_2(3)$	
оборудование (станко -час)	$a_{3,1}$	$a_{3,2}$	$a_{3,3}$	$B_3(1)$	$B_3(2)$	$B_3(3)$	-
-	-	Заявки по месяцам		b(1)	b(2)	b(3)	Sum {b(j)}

Первая задача связана с составлением оптимального плана выпуска продукции на квартал. Необходимо с учетом заданных ограничений на ресурсы определить объемы выпуска продукции (x_1, x_2, x_3) различными способами, при которых обеспечивается максимальный доход предприятия при заданных ценах на продукцию, изготавливаемую каждым из способов. Определенным (j -м) способом, возможно невыгодным по затратам ресурсов, должно быть выпущено не менее заданного количества продукции X_j0.

При решении первой задачи используются различные методы и инструментальные средства:

1. Симплексный метод решения задачи составления плана выпуска продукции на первый месяц с учетом трех ограничений по ресурсам (вручную);
2. Графический метод для решения двойственной задачи или исходной задачи с учетом ограничений по невыгодному способу производства;
3. Метод определения двойственных оценок на основе теорем двойственности;
4. Метод расчета параметров планов на первый, второй и третий месяцы на основе матрицы коэффициентов структурных сдвигов по полученному в пункте 1 оптимальному плану;
5. Решение задачи составления плана выпуска продукции по месяцам с

помощью функции Excel «Поиск решения»;
6. Разработка документов Mathcad для составления плана выпуска продукции по месяцам.

Разрабатывается план выпуска продукции на квартал с учетом заданных запасов ресурсов на каждый месяц. Для потребителя продукция, выпускаемая каждым из рассматриваемых способов, считается однотипной, поэтому рассчитывается суммарный выпуск продукции всеми способами для каждого месяца. Формируются исходные данные для разработки оптимального плана реализации продукции в течение того же периода в соответствии с заявками.

Вторая задача связана с составлением оптимального плана реализации однородной продукции на квартал. Оптимальный план реализации должен гарантировать минимальные издержки на реализацию с учетом затрат на хранение нереализованной продукции на складах и штрафов за недовыполнение заявок потребителя. Составляются планы реализации при различных вариантах распределения заданного суммарного объема заявок по месяцам: 1) заданное, 2) равномерное, 3) распределение с учетом реального выпуска по месяцам. Рассматриваемые варианты реализации сравниваются по общей стоимости, наличию запасов нереализованной продукции и невыполнению заявок по месяцам и в целом на конец квартала.

При решении второй задачи используются различные методы и инструментальные средства:

1. Метод потенциалов для решения вручную задачи, сведенной к транспортной для заданного варианта распределения заявок по месяцам;
2. Решение задачи для заданного варианта распределения заявок по месяцам с помощью функции Excel «Поиск решения»;
3. Решение задачи для: а) равномерного распределения суммарного количества заявок по месяцам, б) распределения суммарного количества заявок с учетом реального выпуска по месяцам в Excel («Поиск решения»);
4. Разработка документов Mathcad для составления плана реализации продукции для всех вариантов распределения заявок.

Составляются комплексные планы выпуска и реализации продукции на квартал и дается сравнительная оценка эффективности планов для различных вариантов распределения заявок по месяцам.

Результаты разработки должны быть оформлены в электронных таблицах Excel и документах Mathcad в соответствии с образцами – примером, соответствующим конкретному заданию (файл curs2005.xls и файл curs2005.mcd). В пояснительной записке по работе необходимо представить задание на работу, сравнить результаты разработки плана выпуска, полученные различными методами, и результаты разработки плана реализации, полученные различными методами; дать экономическую интерпретацию полученных результатов, сформулировать рекомендации по применению полученных оптимальных планов на практике и оценить целесообразность использования предлагаемых инструментальных средств для решения рассматриваемых в курсовой работе задач.

Пояснительная записка должна быть компактной, написана вручную или распечатана на принтере на одной стороне листа, сброшюрована, иметь титульный лист, возможно оформление записки в виде компьютерного документа.

2. РАЗРАБОТКА ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНА ВЫПУСКА ПРОДУКЦИИ НА КВАРТАЛ

2.1. Решение задачи разработки оптимального плана выпуска продукции симплексным методом

Объемы производства продукции измеряются в условных единицах. При изготовлении однородной продукции используются три технологических способа, различающихся нормативными коэффициентами, определяющими затраты на изготовление единицы продукции основных ресурсов (сырье, труд, оборудование) в определенных единицах измерения. Количество единиц каждого из трех ресурсов, необходимое для изготовления единицы продукции первым способом равно соответственно $a_{1,1}$, $a_{2,1}$, $a_{3,1}$; вторым способом – $a_{1,2}$, $a_{2,2}$, $a_{3,2}$; третьим способом – $a_{1,3}$, $a_{2,3}$, $a_{3,3}$. Запасы каждого из рассматриваемых ресурсов на каждый месяц квартала (l=1,2,3) ограничены и равны: для сырья - $B_1(l)$, для труда - $B_2(l)$, для оборудования - $B_3(l)$. Заданы цены единицы продукции в (д.е.) для каждого из рассматриваемых способов ее изготовления – c_1 , c_2 , c_3 (без учета затрат на реализацию). Количество продукции, изготавливаемое самым невыгодным из рассматриваемых способов, не должно быть меньше заданного значения X_j0 (j=1 или 2 или 3). Исходные данные для составления оптимального плана выпуска продукции в соответствии с номером варианта задания на курсовую работу (приложение 2) записывают в таблицу 1 .

На первом этапе рассматривается классическая задача линейного программирования с n=3 переменными и m=3 ограничениями, так как учитываются только ограничения на ресурсы для 1-го месяца квартала $B_i(1)=B_i$, i=1,2,3; ограничения задачи имеют вид меньше-равно (≤):

$$F=c_1 \cdot x_1+c_2 \cdot x_2+c_3 \cdot x_3 \rightarrow \max;$$
$$a_{1,1} \cdot x_1 + a_{1,2} \cdot x_2 + a_{1,3} \cdot x_3 \leq B_1;$$
$$a_{2,1} \cdot x_1 + a_{2,2} \cdot x_2 + a_{2,3} \cdot x_3 \leq B_2;$$
$$a_{3,1} \cdot x_1 + a_{3,2} \cdot x_2 + a_{3,3} \cdot x_3 \leq B_3;$$
$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0.$$

2.1.1. Алгоритм решения ЗЛП симплекс-методом

Алгоритм решения задачи линейного программирования симплекс-методом можно представить в виде последовательности этапов:

1. Преобразование исходной задачи (n–переменных, m–ограничений) к специальной канонической форме за счет введения дополнительных и/или искусственных переменных. После преобразования число переменных будет равно N, из них m – базисных, остальные (N-m) – свободные.
2. Выбор первого базисного плана – в качестве базисных рассматриваются дополнительные и/или искусственные переменные; искомые переменные относятся к свободным. Для записи планов, соответствующих пробным решениям, используются специальные таблицы, называемые симплекс-таблицами. В верхней строке таблицы перечисляются все N переменных задачи, а ниже записываются соответствующие им коэффициенты целевой функции. В первом слева столбце указываются m линейно независимых базисных переменных, в следующем столбце - соответствующие им коэффициенты целевой функции; далее указываются коэффициенты, связывающие базисные переменные со всеми переменными задачи. Определитель матрицы коэффициентов, связывающих между собой m базисных переменных с одноименными m переменными верхней строки, равен единице, что свидетельствует о линейной независимости переменных, составляющих базис. В предпоследнем столбце симплекс-таблицы записываются соответствующие правым частям исходных уравнений для специальной канонической формы значения B_i, равные принятым в плане значениям базисных переменных.
3. Вычисляется значение целевой функции, при этом коэффициенты для дополнительных переменных в целевой функции принимаются равными нулю, а коэффициенты при искусственных переменных – равными M (со знаком (+) при решении задачи на минимум и со знаком (-) при решении задачи на максимум); M – большое число.
4. Проверка полученного плана на оптимальность - в качестве критерия оптимальности используется показатель d_j, равный разности между заданной стоимостью для j-й переменной (j=1,2,...N) и суммой произведений стоимостей переменных, входящих в базис, на значения коэффициентов при этих переменных в принятом плане. Если для всех N переменных этот показатель будет меньше или равен нулю (при решении задачи на максимум), то полученный план оптимальный, и переходим к п.7; если хотя бы один из показателей имеет значение больше нуля, переходим к п.5. Значения этого показателя для каждой из N переменных приводятся в последней строке симплекс-таблицы, называемой индексной.
5. Преобразование ранее принятого базиса - для введения в базис

предлагается X_k - переменная, для которой $d_k=\max\{d_j\}$ - значение показателя оптимальности является наибольшим (по модулю). Соответствующий этой переменной столбец (k) называется разрешающим. После выбора разрешающего столбца (k) для $a_{i,k}>0$ вычисляются значения $B_i/a_{i,k}$, которые записываются в последнем столбце симплекс-таблицы, называемом индексным. Выбирается переменная X_r, для которой $B_r/a_{r,k}=\min\{B_i/a_{i,k}\}$. Эта переменная будет выводиться из базиса, соответствующая ей строка (r) называется разрешающей. Коэффициент $a_{r,k}$ называется разрешающим.

6. Преобразование симплекс-таблицы и построение нового опорного плана - новая переменная вводится в базис на место старой. Соответствующие коэффициенты для этой строки получаются путем деления коэффициентов предыдущего плана на значение разрешающего элемента $a_{r,k}$. Тогда в новом плане коэффициент, стоящий на месте $a_{r,k}$, будет равен единице; все остальные коэффициенты этого столбца будут равны нулю (ведь речь идет о новой базисной переменной). Коэффициенты для остальных строк (НЭ) рассчитываются по правилу прямоугольника: НЭ=СТЭ-А*В/РЭ, где СТЭ – элемент старого (предыдущего) плана, РЭ - разрешающий элемент, А и В – элементы старого плана, образующие прямоугольник с элементами СТЭ и РЭ. Для вновь составленного опорного плана вычисляется значение целевой функции. Очевидно, что оно должно быть больше предыдущего (при решении задачи на максимум), что свидетельствует о правильности принятого направления преобразований базиса. Далее переходим к п. 3.

7. Анализ полученного оптимального решения - на основании приведенных в финальной симплекс-таблице результатов определяются тип ресурсов, значения двойственных оценок для каждого из ресурсов, выполняется анализ чувствительности полученного оптимального решения к изменениям ресурсов.

При преобразовании исходной задачи к специальному каноническому виду вводятся только дополнительные переменные S_i, для которых коэффициенты в целевой функции принимаются равными нулю:

$$a_{1,1}\cdot x_1 + a_{1,2}\cdot x_2 + a_{1,3}\cdot x_3 + S_1 = B_1;$$
$$a_{2,1}\cdot x_1 + a_{2,2}\cdot x_2 + a_{2,3}\cdot x_3 + S_2 = B_2;$$
$$a_{3,1}\cdot x_1 + a_{3,2}\cdot x_2 + a_{3,3}\cdot x_3 + S_3 = B_3.$$

Общее число переменных задачи увеличится с n=3 до N=6, из них дополнительно введенные переменные (S_1, S_2, S_3) связаны между собой единичной матрицей, определитель которой равен единице. Эти переменные являются линейно независимыми и рассматриваются как базисные для первого опорного плана, а остальные (N-m)=3 переменные задачи (x_1, x_2, x_3) относятся к свободным переменным, их значения для первого опорного

плана могут задаваться произвольно, например, равными нулю. Матрица коэффициентов, связывающих базисные переменные (S_1, S_2, S_3) и со всеми переменными задачи ($X_1=x_1$, $X_2=x_2$, $X_3=x_3$, $X_4=S_1$, $X_5=S_2$, $X_6=S_3$), имеет вид: $A_1=[a_{1,1}\ a_{1,2}\ a_{1,3}\ 1\ 0\ 0]$; $A_2=[a_{2,1}\ a_{2,2}\ a_{2,3}\ 0\ 1\ 0]$; $A_3=[a_{3,1}\ a_{3,2}\ a_{3,3}\ 0\ 0\ 1]$; вектор ограничений имеет вид $B=[B_1;B_2;B_3]$. Составляется симплекс-таблица для первого опорного плана и далее в соответствии с описанным алгоритмом определяют оптимальный план.

2.1.2. Примеры решения ЗЛП симплекс-методом

Рассмотрим реализацию описанного выше алгоритма на примерах.

Таблица 2.Исходные данные для примера 1

	Способ изготовления продукции			Ограничения на запасы ресурсов по месяцам			
Цена единицы продукции	первый	второй	третий				
	60	90	85				
ресурсы	Затраты ресурсов на единицу продукции a(i,j); i=1,2,3;j=1,2,3			1-й месяц	2-й месяц	3-й месяц	Выпуск не менее
сырье (усл. ед.)	1,86	3,72	2,79	1860	2000	1800	$X_1 0=50$
труд (чел.-час)	4,64	1,99	2,65	1420	1500	1420	
оборудование (станко -час)	2,30	1,38	1,73	900	950	900	итого
		Заявки по месяцам		565	575	585	1725

В примере 2 изменим в данных таблицы 2: цены единицы продукции $c_j=[90;85;80]$; ограничение $X_1 0=80$.

Решение задачи линейного программирования симплекс-методом начинается с ее преобразования к специальному каноническому виду. Для этого вводятся дополнительные переменные S_i, коэффициенты в целевой функции при S_i принимаются равными нулю:

$$1{,}86*x_1 + 3{,}72*x_2 + 2{,}79*x_3 + S_1 = 1860;$$
$$4{,}64*x_1 + 1{,}99*x_2 + 2{,}65*x_3 + S_2 = 1420;$$
$$2{,}30*x_1 + 1{,}38*x_2 + 1{,}73*x_3 + S_3 = 900.$$

Преобразуем эти соотношения к виду:

$S_1 = 1860 - (1{,}86*x_1 + 3{,}72*x_2 + 2{,}79*x_3)$;
$S_2 = 1420 - (4{,}64*x_1 + 1{,}99*x_2 + 2{,}65*x_3)$;
$S_3 = 900 - (2{,}30*x_1 + 1{,}38*x_2 + 1{,}73*x_3)$;

В рассматриваемых далее симплекс-таблицах, соответствующих определенным опорным планам, выделены жирным шрифтом: максимальное значение показателя индексной строки $d_k=\max\{d_j\}$, минимальное значение отношения $B_r/a_{r,k}=\min\{B_i/a_{i,k}\}$ и разрешающий элемент $a_{r,k}$.

Таблица 3.1. Первый опорный план

	c_j	60	90	85	0	0	0	B_i	$B_i/a_{i,k}$
базис	c_i	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3		
S_1	0	1,86	**3,72**	2,79	**1,00**	0,00	0,00	1860	**500,00**
S_2	0	4,64	1,99	2,65	0,00	**1,00**	0,00	1420	713,57
S_3	0	2,30	1,38	1,73	0,00	0,00	**1,00**	900	652,17
d_j		60	**90**	85	0	0	0	0	

Максимальное значение показателя индексной строки равно 90 и соответствует переменной x_2, которую вводят в базис. Минимальное значение $B_i/a_{i,2}=500$ и соответствует переменной S_1, которая будет выводиться из базиса; $a_{1,2}=3{,}72$. Значение целевой функции для этого плана равно 0.

Переменную x_2 вводят в базис на место S_1. Коэффициенты 1-й строки второго опорного плана рассчитываются как результат деления коэффициентов 1-й строки предыдущего плана на $a_{1,2}=3{,}72$: $a_{1,1}=1{,}86/3{,}72=0{,}5$; $a_{1,2}=3{,}72/3{,}72=1$; $a_{1,3}=2{,}79/3{,}72=0{,}75$; $a_{1,4}=1/3{,}72=0{,}27$; $a_{1,5}=0/3{,}72=0$; $a_{1,6}=0/3{,}72=0$; $B_1=1860/3{,}72=500$; в остальных строках 2-го столбца второго плана записываем нули: $a_{2,2}=a_{3,2}=0$. Для 2-й и 3-й строк второго плана коэффициенты рассчитываются по правилу прямоугольника:
$a_{2,1}=4{,}64-1{,}86*1{,}99/3{,}72=3{,}65$; $a_{2,3}=2{,}652{,}79*1{,}99/3{,}72=1{,}16$;
$a_{2,4}=0-1*1{,}99/3{,}72=-0{,}53$; $a_{2,5}=1-0*1{,}99/3{,}72=1$;
$a_{2,6}=0-0*1{,}99/3{,}72=0$; $B_2=1420-1860*1{,}99/3{,}72=425$;
$a_{3,1}=2{,}30-1{,}86*1{,}38/3{,}72=1{,}61$; $a_{3,3}=1{,}73-2{,}79*1{,}38/3{,}72=0{,}70$;
$a_{3,4}=0-1*1{,}38/3{,}72=-0{,}37$; $a_{3,5}=0-0*1{,}38/3{,}72=0$;
$a_{3,6}=1-0*1{,}38/3{,}72=1$; $B_3=900-1860*1{,}38/3{,}72=210$.
Результаты расчетов приведены в таблице 3.2.

Таблица 3.2. Второй опорный план

	c_j	60	90	85	0	0	0	B_i	$B_i/a_{i,k}$
базис	c_i	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3		
x_2	90	0,50	**1,00**	0,75	0,27	0,00	0,00	500,00	666,67
S_2	0	3,65	0,00	1,16	-0,53	**1,00**	0,00	425,00	367,17
S_3	0	1,61	0,00	**0,70**	-0,37	0,00	**1,00**	210,00	**302,16**
d_j		15	0	**17,5**	-24,19	0	0	45000,00	-

Значение целевой функции для второго плана равно 45000 (больше предыдущего). Максимальное значение показателя индексной строки равно 17,5 и соответствует переменной x_3, которую вводят в базис. Минимальное значение $B_i/a_{i,3}=302{,}16$ и соответствует переменной S_3, которая будет выводиться из базиса; $a_{3,3}=0{,}70$. В результате преобразования симплекс-таблицы для второго плана в соответствии с алгоритмом получим третий опорный план (таблица 3.3).

Таблица 3.3. Третий опорный план – оптимальный

	c_j	60	90	85	0	0	0	B_i	$B_i/a_{i,k}$
базис	c_i	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3		
x_2	90	-1,24	**1,00**	0,00	0,67	0,00	-1,08	273,38	
S_2	0	0,96	0,00	0,00	0,08	**1,00**	-1,67	75,25	
x_3	85	2,32	0,00	**1,00**	-0,53	0,00	1,44	302,16	
d_j		-25,54	0	0	-14,85	0	-25,18	50287,77	

Для всех переменных третьего плана значение показателя оптимальности $d_j \le 0$ – значит получен оптимальный план. В условиях примера 1 для получения оптимального решения симплексным методом потребовалось три итерации.

Доход в 50288 д.е. обеспечивается при изготовлении 273,38 ед. продукции 2-м способом и 302,16 ед. продукции 3-м способом. 1-й способ оказался невыгодным по сравнению с другими по цене ед. продукции: $\min\{60;90;85\}=60$; по затратам труда: $\max\{4{,}64;1{,}99;2{,}65\}=a_{2,1}=4{,}64$ и по затратам оборудования: $\max\{2;30;1{,}38;1{,}73\}=a_{3,1}=2{,}30$.

Рассмотрим процедуру решения задачи в условиях примера 2.

$$S_1 = 1860 - (1{,}86*x_1 + 3{,}72*x_2 + 2{,}79*x_3);$$
$$S_2 = 1420 - (4{,}64*x_1 + 1{,}99*x_2 + 2{,}65*x_3);$$
$$S_3 = 900 - (2{,}30*x_1 + 1{,}38*x_2 + 1{,}73*x_3);$$

В рассматриваемых далее симплекс-таблицах, соответствующих определенным опорным планам, выделены жирным шрифтом: максимальное значение показателя индексной строки $d_k=\max\{d_j\}$, минимальное значение отношения $B_r/a_{r,k}=\min\{B_i/a_{i,k}\}$ и разрешающий элемент $a_{r,k}$.

Таблица 3.1. Первый опорный план

	c_j	60	90	85	0	0	0	B_i	$B_i/a_{i,k}$
базис	c_i	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3		
S_1	0	1,86	**3,72**	2,79	1,00	0,00	0,00	1860	**500,00**
S_2	0	4,64	1,99	2,65	0,00	1,00	0,00	1420	713,57
S_3	0	2,30	1,38	1,73	0,00	0,00	1,00	900	652,17
d_j		60	**90**	85	0	0	0	0	

Максимальное значение показателя индексной строки равно 90 и соответствует переменной x_2, которую вводят в базис. Минимальное значение $B_i/a_{i,2}=500$ и соответствует переменной S_1, которая будет выводиться из базиса; $a_{1,2}=3{,}72$. Значение целевой функции для этого плана равно 0.

Переменную x_2 вводят в базис на место S_1. Коэффициенты 1-й строки второго опорного плана рассчитываются как результат деления коэффициентов 1-й строки предыдущего плана на $a_{1,2}=3{,}72$: $a_{1,1}=1{,}86/3{,}72=0{,}5$; $a_{1,2}=3{,}72/3{,}72=1$; $a_{1,3}=2{,}79/3{,}72=0{,}75$; $a_{1,4}=1/3{,}72=0{,}27$; $a_{1,5}=0/3{,}72=0$; $a_{1,6}=0/3{,}72=0$; $B_1=1860/3{,}72=500$; в остальных строках 2-го столбца второго плана записываем нули: $a_{2,2}=a_{3,2}=0$. Для 2-й и 3-й строк второго плана коэффициенты рассчитываются по правилу прямоугольника:
$a_{2,1}=4{,}64-1{,}86*1{,}99/3{,}72=3{,}65$; $a_{2,3}=2{,}65-2{,}79*1{,}99/3{,}72=1{,}16$;
$a_{2,4}=0-1*1{,}99/3{,}72=-0{,}53$; $a_{2,5}=1-0*1{,}99/3{,}72=1$;
$a_{2,6}=0-0*1{,}99/3{,}72=0$; $B_2=1420-1860*1{,}99/3{,}72=425$;
$a_{3,1}=2{,}30-1{,}86*1{,}38/3{,}72=1{,}61$; $a_{3,3}=1{,}73-2{,}79*1{,}38/3{,}72=0{,}70$;
$a_{3,4}=0-1*1{,}38/3{,}72=-0{,}37$; $a_{3,5}=0-0*1{,}38/3{,}72=0$;
$a_{3,6}=1-0*1{,}38/3{,}72=1$; $B_3=900-1860*1{,}38/3{,}72=210$.
Результаты расчетов приведены в таблице 3.2.

Таблица 3.2. Второй опорный план

	c_j	60	90	85	0	0	0	B_i	$B_i/a_{i,k}$
базис	c_i	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3		
x_2	90	0,50	1,00	0,75	0,27	0,00	0,00	500,00	666,67
S_2	0	3,65	0,00	1,16	-0,53	1,00	0,00	425,00	367,17
S_3	0	1,61	0,00	**0,70**	-0,37	0,00	1,00	210,00	**302,16**
d_j		15	0	**17,5**	-24,19	0	0	45000,00	-

Значение целевой функции для второго плана равно 45000 (больше предыдущего). Максимальное значение показателя индексной строки равно 17,5 и соответствует переменной x_3, которую вводят в базис. Минимальное значение $B_i/a_{i,3}=302{,}16$ и соответствует переменной S_3, которая будет выводиться из базиса; $a_{3,3}=0{,}70$. В результате преобразования симплекс-таблицы для второго плана в соответствии с алгоритмом получим третий опорный план (таблица 3.3).

Таблица 3.3. Третий опорный план – оптимальный

	c_j	60	90	85	0	0	0	B_i	$B_i/a_{i,k}$
базис	c_i	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3		
x_2	90	-1,24	1,00	0,00	0,67	0,00	-1,08	273,38	
S_2	0	0,96	0,00	0,00	0,08	1,00	-1,67	75,25	
x_3	85	2,32	0,00	1,00	-0,53	0,00	1,44	302,16	
d_j		-25,54	0	0	-14,85	0	-25,18	50287,77	

Для всех переменных третьего плана значение показателя оптимальности $d_j \le 0$ – значит получен оптимальный план. В условиях примера 1 для получения оптимального решения симплексным методом потребовалось три итерации.

Доход в 50288 д.е. обеспечивается при изготовлении 273,38 ед. продукции 2-м способом и 302,16 ед. продукции 3-м способом. 1-й способ оказался невыгодным по сравнению с другими по цене ед. продукции: $\min\{60;90;85\}=60$; по затратам труда: $\max\{4{,}64;1{,}99;2{,}65\}=a_{2,1}=4{,}64$ и по затратам оборудования: $\max\{2{,}30;1{,}38;1{,}73\}=a_{3,1}=2{,}30$.

Рассмотрим процедуру решения задачи в условиях примера 2.

Таблица 4.1. Первый опорный план

	c_j	90	85	80	0	0	0	B_i	$B_i/a_{i,k}$
базис	c_i	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3		
S_1	0	1,86	**3,72**	2,79	**1,00**	0,00	0,00	1860	1000,00
S_2	0	**4,64**	1,99	2,65	0,00	**1,00**	0,00	1420	**306,03**
S_3	0	2,30	1,38	1,73	0,00	0,00	**1,00**	900	391,30
d_j		**90**	85	80	0	0	0	0	

Переменную x_1 вводят в базис на место S_2.

Таблица 4.2. Второй опорный план

	c_j	90	85	80	0	0	0	B_i	$B_i/a_{i,k}$
базис	c_i	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3		
S_1	0	0,00	**2,92**	1,73	**1,00**	-0,40	0,00	1290,78	**441,70**
x_1	90	**1,00**	0,43	0,57	0,00	0,22	0,00	306,03	713,57
S_3	0	0,00	0,39	0,42	0,00	-0,50	**1,00**	196,12	498,30
d_j		0	**46,40**	28,60	0	-19,40	0	27543,10	

Переменную x_2 вводят в базис на место S_1.

Таблица 4.3. Третий опорный план

	c_j	90	85	80	0	0	0	B_i	$B_i/a_{i,k}$
базис	c_i	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3		
x_2	85	0,00	**1,00**	0,59	0,34	-0,14	0,00	441,70	747,10
x_1	90	**1,00**	0,00	0,32	-0,15	0,27	0,00	116,60	367,17
S_3	0	0,00	0,00	**0,18**	-0,13	-0,44	**1,00**	22,28	**121,25**
d_j		0	0	**1,17**	-15,88	-13,03	0	48038,41	

Переменную x_3 вводят в базис на место S_3.

Таблица 4.4. Четвертый опорный план- оптимальный

	c_j	90	85	80	0	0	0	B_i	$B_i/a_{i,k}$
базис	c_i	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3		
x_2	85	0,00	**1,00**	0,00	0,78	1,28	-3,22	370,02	
x_1	90	**1,00**	0,00	0,00	0,09	1,04	-1,73	78,09	
x_3	80	0,00	0,00	**1,00**	-0,73	-2,40	5,44	121,25	
d_j		0	0	0	-15,02	-10,23	-6,35	48179,78	

Для всех переменных четвертого плана значение показателя $d_j \le 0$ – значит получен оптимальный план. В условиях примера 2 для получения оптимального решения потребовалось 4 итерации, при других вариантах заданий возможно потребуется 5 итераций.

Доход в 48180 д.е. обеспечивается при изготовлении 78,09 единиц продукции 1-м способом, 370,02 единиц продукции 2-м способом и 121,25 единиц продукции 3-м способом. 1-й способ оказался по сравнению с другими выгоднее по цене единицы продукции max{90;85;80}=90 и невыгоднее по затратам труда и оборудования: max{4,64;1,99;2,65}=$a_{2,1}$=4,64: max{ 2,30;1,38;1,73}=$a_{3,1}$=2,30.

2.1.3. Анализ оптимального решения исходной задачи

Анализ оптимального решения исходной задачи начинается с подстановки значений X_j*(j=1,2,3) в ограничения и определения типа ресурсов:

- если $a_{i,1}$•(X_1*)+$a_{i,2}$•(X_2*)+$a_{i,3}$•(X_3*)=B_i - ресурс называется дефицитным, при этом S_i*=0 - запасы ресурса используются полностью;
- если $a_{p,1}$•(X_1*)+$a_{p,2}$•(X_2*)+$a_{p,3}$•(X_3*)<B_p -ресурс называется недефицитным, при этом S_p*> 0 и равны излишкам соответствующего ресурса.

Подставим оптимальное решение задачи для примеров 1 и 2 в ограничения по ресурсам и определим тип ресурса.

1,86*0 + 3,72*273,38 + 2,79*302,16 = 1860;
S_1*=0;
4,64*0 + 1,99* 273,38 + 2,65* 302,16 = 1344,75;
S_2*=1420-1344,75=75,25;
2,30*0+1,38*273,38 + 1,73* 302,16 = 900;
S_3*=0.

Таблица 5. Определение типа ресурса в условиях примера 1

Xopt		Проверка ограничений – тип ресурса			
X_1*	0	ресурс	запасы	расход	Тип ресурса
X_2*	273,38	сырье	1860	1860	дефицитный
X_3*	302,16	труд	1420	1344,75	недефицитный
S_2*	75,25	оборудование	900	900	дефицитный

В условиях примера 2 имеем полное использование всех ресурсов:

$1,86*78,09 + 3,72*370,02 + 2,79*121,25 = 1860;\ S_1*=0;$
$4,64*78,09 + 1,99*370,02+ 2,65*121,25 = 1420;\ S_2*=0;$
$2,30*78,09 + 1,38*370,02+ 1,73*121,25 = 900;\ S_3*=0.$

В заданиях на работу предполагается полное использование ресурса 1 (сырья), недефицитным может быть ресурс 2 или 3 (труд или оборудование); возможно все ресурсы являются дефицитными (пример 2).

2.2. Двойственная задача линейного программирования

Исходной задаче линейного программирования соответствует двойственная задача, в которой в качестве переменных рассматриваются условные "цены" единицы ресурса (y_1,y_2,y_3), называемые двойственными оценками. Поскольку $a_{i,j}$ – количество единиц i–го ресурса, требуемое для производства единицы продукции j–м технологическим способом, то $a_{i,j} \cdot y_i$ – оценка затрат на количество единиц i–го ресурса, требуемое для производства единицы продукции j–м технологическим способом. Суммарная оценка затрат всех ресурсов, необходимых для производства единицы продукции j–м технологическим способом, составит sum[$a_{i,j} \cdot y_i$]. Эта оценка должна быть не меньше дохода, получаемого от единицы продукции, ибо в противном случае часть продукции была бы произведена без каких-либо затрат. Поэтому в двойственной задаче ограничения записываются в виде: sum[$a_{i,j} \cdot y_i$] $\geq c_j$.

Суммарный расход на все виды ресурсов определяет выражение целевой функции двойственной задачи G=sum[$B_i \cdot y_i$]. Оптимальному решению соответствует минимальное значение целевой функции G. Исходной задаче линейного программирования с ограничениями типа меньше-равно ($\leq$) соответствует двойственная задача с неотрицательными переменными. Математическая формулировка двойственной задачи:

$$G=B_1*y_1 + B_2*y_2 + B_3*y_3 \rightarrow \min;$$
$$a_{1,1}*y_1+ a_{2,1}*y_2 + a_{3,1}*y_3 \geq c_1;$$
$$a_{1,2}*y_1+ a_{2,2}*y_2 + a_{3,2}*y_3 \geq c_2;$$
$$a_{1,3}*y_1+ a_{2,3}*y_2 + a_{3,3}*y_3 \geq c_3;$$
$$y_1,\ y_2,\ y_3 \geq 0.$$

Двойственные оценки могут быть получены при решении двойственной задачи симплекс-методом в соответствии с приведенным алгоритмом.

Возможно получение двойственных оценок на основе соотношений, определяемых теоремами двойственности.

Перечислим основные условия, которым должны удовлетворять компоненты оптимальных планов исходной и двойственной задач X_j* и Y_i*:

1. В соответствии с первой теоремой двойственности оптимальные значения целевых функции исходной и двойственной задач равны: max (F)=min (G).
2. В соответствии со второй теоремой двойственности для оптимального решения: (Y_i*)*{sum[$a_{i,j}$*(X_j*)] - B_i}=0. Отсюда следует:

- Если в оптимальном плане исходной задачи для р–го ресурса справедливо соотношение sum [$a_{p,j}$*(X_j*)] < B_p, то двойственная оценка этого ресурса равна нулю (Y_p*=0). Это означает неполное использование соответствующего ресурса. Ресурсы, имеющиеся в избытке, имеют нулевую оценку, так как дальнейшее увеличение их количества никак не повлияет на оптимальное значение целевой функции исходной задачи.
- Если в оптимальном плане исходной задачи i–е ограничение выполняется как строгое равенство sum [$a_{i,j}$*(X_j*)]=B_i, то двойственная оценка этого ресурса положительна (Y_i*>0). Это означает полное использование соответствующего ресурса, его дефицитность.
- Если в оптимальном плане двойственной задачи значение р–й переменной равно нулю (Y_p*=0), то для оптимального плана исходной задачи справедливо соотношение sum [$a_{p,j}$*(X_j*)] < B_p, т.е. р–й ресурс используется неполностью.
- Если в оптимальном плане двойственной задачи значение i–й переменной больше нуля (Y_i*>0), то для оптимального плана исходной задачи справедливо соотношение sum [$a_{i,j}$*(X_j*)] = B_i, т.е. i–й ресурс используется полностью.

3. В соответствии со второй теоремой двойственности для оптимального решения: (X_j*)*{c_j-sum[$a_{i,j}$*(Y_i*)]}=0. Отсюда следует:

- Если в оптимальном плане исходной задачи отсутствует j–я переменная, т.е. X_j*=0, то в оптимальном плане двойственной задачи имеет место неравенство sum [$a_{i,j}$*(Y_i*)]>c_j. Это означает, что при j–м технологическом способе производства продукции суммарная оценка затрат ресурсов sum [$a_{i,j}$*(Y_i*)] выше дохода c_j, поэтому j-й технологический способ при данных «ценах» ресурсов является убыточным (X_j*=0).

- Если в оптимальном плане исходной задачи j-я переменная больше нуля (X_j*>0), то в оптимальном плане двойственной задачи выполняется соотношение sum [$a_{i,j}$*(Y_i*)] = c_j . Это означает, что при использовании в оптимальном плане j-го способа производства суммарная оценка затрат ресурсов, необходимых для изготовления единицы продукции, равна доходу.
- Если в оптимальном плане двойственной задачи для j-го ограничения справедливо соотношение sum [$a_{i,j}$*(Y_i*)]>c_j , то в оптимальном плане исходной задачи j-я переменная имеет нулевое значение (X_j*=0) - данный способ производства оказывается невыгодным.
- Если в оптимальном плане двойственной задачи j–е ограничение выполняется как равенство sum [$a_{i,j}$*(Y_i*)]=c_j, то в оптимальном плане исходной задачи j-я переменная имеет положительное значение (X_j*>0).

Для рассматриваемых примеров:

$G=1860*y_1+1420*y_2+900*y_3 \rightarrow \min$;
$1{,}86*y_1 + 4{,}64*y_2 + 2{,}30*y_3 \geq c_1$;
$3{,}72*y_1 + 1{,}99*y_2 + 1{,}38*y_3 \geq c_2$;
$2{,}79*y_1 + 2{,}65*y_2 + 1{,}73*y_3 \geq c_3$;
$y_1 \geq 0$; $y_2 \geq 0$; $y_3 \geq 0$.

В соответствии со 2-й теоремой двойственности: Y_i*{sum[$a_{i,j}$*X_j]-B_i =0:

- {sum[$a_{1,j}$*X_j]-B_1}=0, двойственная оценка Y_1*>0;
- {sum[$a_{3,j}$*X_j]-B_3}=0, двойственная оценка Y_3*>0 - ресурсы «сырье» и «оборудование» используются полностью и являются дефицитными;
- в примере 2, кроме того, Y_2*>0 - ресурс «труд» используется полностью и является дефицитным;
- в примере 1 {sum[$a_{2,j}$*X_j]-B_2 }<0, Y_2*=0, ресурс «труд» используется неполностью и является недефицитным.

Следовательно, в условиях примера 1 сформулированную выше задачу линейного программирования можно решить геометрическим методом и определить оптимальные значения двойственных оценок Y_1*и Y_3*.

2.2.1. Решение ЗЛП геометрическим методом

В условиях примера 1 из анализа оптимального решения исходной задачи следует, что Y_2*=0. Необходимо построить многоугольник, определяющий границы области допустимых значений переменных в системе координат y_1, y_3 (ненулевых двойственных оценок). Все неравенства представим в виде равенств:

$1{,}86*y_1+2{,}3*y_3=60$;(L_1); $3{,}72*y_1+1{,}38*y_3=90$;(L_2); $2{,}79*y_1+1{,}73*y_3=85$(L_3);
и запишем уравнения прямых:

$y_31=(60-1{,}86*y_1)/2{,}3$; $y_32=(90-3{,}72*y_1)/1{,}38$; $y_33=(85-2{,}79*y_1)/1{,}73$.
Область допустимых значений (ОДЗ) y_3 расположена правее оси ординат (y_3), выше прямой y_32 до точки пересечения с y_33 и далее выше прямой y_33

(выделена в таблице 6 жирным шрифтом). Точка пересечения y_32 и y_33:
$(90-3{,}72*y_1)/1{,}38=(85-2{,}79*y_1)/1{,}73$; Y_1*=14,85; Y_3*=25,18.

Рассчитаем значения $G=1860*y_1+900*y_3$ и правых частей ограничений для всех точек ОДЗ.

Таблица 6. Графический метод решения двойственной задачи (пример 1)

y_1	y_31	y_32	y_33	G	L_1	L_2	L_3
0	26,09	**65,22**	49,13	58695,65	150,00	90	112,83
2	24,47	**59,83**	45,91	57563,48	141,32	90	109,08
4	22,85	**54,43**	42,68	56431,30	132,64	90	105,33
6	21,23	**49,04**	39,46	55299,13	123,96	90	101,59
8	19,62	**43,65**	36,23	54166,96	115,28	90	97,84
10	18,00	**38,26**	33,01	53034,78	106,60	90	94,09
12	16,38	**32,87**	29,78	51902,61	97,92	90	90,34
14	14,77	**27,48**	26,55	50770,43	89,24	90	86,60
14,85	14,08	**25,18**	**25,18**	**50287,77**	**85,54**	**90**	**85**
16	13,15	22,09	**23,33**	50756,53	83,42	91,71	85
18	11,53	16,70	**20,10**	51573,64	79,72	94,70	85
20	9,91	11,30	**16,88**	52390,75	76,02	97,69	85

Минимальное значение целевой функции, равное 50287,77 будет в точке оптимального решения Y_1*=14,85; Y_3*=25,18. Для оптимального решения прямая L_1 находится выше значения c_1=60: sum[$a_{i,j}$*Y_i*] > c_1. Первое ограничение двойственной задачи ограничение sum[$a_{i,1}$*Y_i*] ≥ c_1 превращается в строгое неравенство: $1{,}86*Y_1*+4{,}64*Y_2*+2{,}30*Y_3*>60$, следовательно: X_1*=0. Этот способ производства невыгоден, поэтому в оптимальном плане X_1*=0.

Следует отметить, что определение двойственных оценок геометрическим методом возможно только в случае, когда при оптимальном решении один из трех ресурсов оказывается недефицитным. Если все ограничения исходной задачи обращаются в равенства, то этот метод определения двойственных оценок использовать нельзя.

Возможно применение геометрического метода решения исходной задачи при условии введения ограничения на одну из переменных. В условиях примера 2 в оптимальном решении задачи с тремя ограничениями присутствуют все переменные (таблица 4.4). Добавление ограничения $x_1 \geq X_10$ можно представить как решение задачи линейного программирования относительно двух переменных x_2 и x_3 при условии $X_1{*}=X_10=80$.

Необходимо построить многоугольник, определяющий границы области допустимых значений переменных в системе координат x_2, x_3. Все неравенства представим в виде равенств:

$1{,}86*80 + 3{,}72*x_2 + 2{,}79*x3 = 1860;$ (L_1)

$4{,}64*80 + 1{,}99*x_2 + 2{,}65*x3 = 1420;$ (L_2)

$2{,}30*80 + 1{,}38*x_2 + 1{,}73*x_3 = 900.$ (L_3)

Запишем уравнения прямых:

$x_31=(1860-1{,}86*80 - 3{,}72*x_2)/2{,}79;$

$x_32=(1420 -4{,}64*80 - 1{,}99*x_2)/2{,}65;$

$x_33= (900 - 2{,}30*80 - 1{,}38*x_2)/1{,}73.$

Область допустимых значений (ОДЗ) x_3 расположена выше оси абсцисс и ниже точки пересечения прямой x_32 с осью ординат x_3, ниже прямой x_32 до точки пересечения ее с x_31 и далее ниже прямой x_31 до точки пересечения ее с осью абсцисс x_2 (выделена в таблице 7 жирным шрифтом). Найдем точку пересечения x_32 и x_31:

$(1860-1{,}86*80-3{,}72*x_2)/2{,}79=(1420-4{,}64*80-1{,}99*x_2)/2{,}65;$

$X_2{*}=373{,}56;\ X_3{*}=115{,}25.$

Рассчитаем значения $F=90*80+85*x_2+80*x_3$ и значения правых частей ограничений для всех точек ОДЗ .

Таблица 7. Графический метод решения исходной задачи (пример 2)

x_2	x_31	x_32	x_33	F	L_1	L_2	L_3
0	613,33	**395,77**	413,87	38861,89	1253,01	1420	868,69
50	546,67	**358,23**	373,99	40108,11	1334,25	1420	872,73
100	480,00	**320,68**	334,10	41,354,34	1415,5	1420	876,78
150	413,33	**283,13**	294,22	42600,57	1496,74	1420	880,82
200	346,67	**245,58**	254,34	43846,79	1577,98	1420	884,86
250	280,00	**208,04**	214,45	45093,02	1659,23	1420	888,91
300	213,33	**170,49**	174,57	46339,25	1740,47	1420	892,95
350	146,67	**132,94**	134,68	47585,47	1821,71	1420	896,99
373,56	**115,25**	**115,25**	115,89	**48172,79**	**1860**	**1420**	898,9
380	**106,67**	110,42	110,75	48033,33	1860	1410,07	892,93
390	**93,33**	102,91	102,77	47816,67	1860	1394,63	883,67
400	**80,00**	95,40	94,80	47600	1860	1379,2	874,4

Максимальное значение целевой функции, равное 48172,79 будет в точке оптимального решения $X_2{*}=373{,}56$; $X_3{*}=115{,}25$. Отметим, что в этой точке прямые x_32 и x_31 пересекаются - ресурсы 1 и 2 используются полностью,: $S_1{*}=0$; $S_2{*}=0$; ресурс 3 используется неполностью: $S_3{*}=900-898{,}9=1{,}1$. Следовательно, по сравнению с оптимальным решением задачи с тремя ограничениями (таблица 4.4) изменился тип 3-го ресурса - он стал недефицитным.

2.2.2. Определение двойственных оценок из решения системы алгебраических уравнений

На основе анализа оптимального решения исходной задачи и теорем двойственности можно записать систему алгебраических уравнений для переменных y_1, y_2, y_3. Из первой теоремы двойственности имеем:

$$\min(G)=B_1*y_1+B_2*y_2+B_3*y_3=\max(F).$$

Из второй теоремы двойственности следует, что суммарные затраты ресурсов, используемых для изготовления единицы продукции j-м способом, равны в точности стоимости единицы продукции, только для тех способов производства, которые имеют ненулевое значение в оптимальном плане исходной задачи ($X_j{*}> 0$), отсюда имеем: sum $[a_{ij}*(Y_i{*})] = c_j$.

В условиях примера 1:

$1860*y_1+1420*y_2+900*y_3=50287{,}77;$

$X_2{*}>0;\ 3{,}72*y_1+ 1{,}99*y_2+1{,}38*y_3=c_2=90;$

$X_3{*}>0; 2{,}79*y_1 +2{,}65*y_2+1{,}73* y_3 = c_3=85.$

Таблица 8.1. Исходные данные для расчета двойственных оценок

	y_1	y_2	y_3		
A_y	1860	1420	900	B_y	50287,77
	3,72	1,99	1,38		90
	2,79	2,65	1,73		85

В матричной форме система линейных уравнений для y_i имеет вид $A_y*Y=B_y$, где A_y-матрица коэффициентов при y_i из приведенных уравнений для целевых функций и ограничений; B_y-вектор-столбец правых частей указанных уравнений:{max(F); c_2; c_3}. (таблица 8.1). В таблицах 8.1 - 8.3 приведены для примера 1 исходные данные, результаты расчета двойственных оценок; результаты проверки ограничений двойственной задачи.

Таблица 8.2. Результаты расчета двойственных оценок

$A_y^{(-1)}$	0,0011	0,3680	-0,8666	$Y=A_y^{(-1)}*B_y$	14,85
	0,0133	-3,6329	-4,0153		0,00
	-0,0221	4,9713	8,1262		25,18

Таблица 8.3. Проверка ограничений двойственной задачи

	X_1	X_2	X_3
c_j	60	**90**	**85**
$a_{1,j}$	1,86	3,72	2,79
$a_{2,j}$	4,64	1,99	2,65
$a_{3,j}$	2,30	1,38	1,73
Sum[$a_{i,j}$*(Y_i*)]	85,54	**90**	**85**

В условиях примера 2 ненулевое значение в оптимальном плане имеют все три переменные, поэтому исходные данные для определения двойственных оценок могут быть получены непосредственно из исходной матрицы коэффициентов.

Таблица 9.1. Исходные данные для расчета двойственных оценок

	y_1	y_2	y_3		
A_y	1,86	4,64	2,30	B_y	90
	3,72	1,99	1,38		85
	2,79	2,65	1,73		80

Таблица 9.2. Результаты расчета двойственных оценок

$A_y^{(-1)}$	0,0860	0,7756	-0,7330	$Y=A_y^{(-1)}*B_y$	15,02
	1,0378	1,2842	-2,4041		10,23
	-1,7284	-3,2179	5,4427		6,35

Таблица 9.3. Проверка ограничений двойственной задачи

	X_1	X_2	X_3
c_j	**90**	**85**	**80**
$a_{1,j}$	1,86	3,72	2,79
$a_{2,j}$	4,64	1,99	2,65
$a_{3,j}$	2,30	1,38	1,73
Sum[$a_{i,j}$•(Y_i*)]	**90**	**85**	**80**

Полученные в таблицах 8.2 и 9.2 значения двойственных оценок равны по величине и противоположны по знаку значениям в индексной строке таблицы 3.3 и 4.4 в столбцах, соответствующих переменным S_1,S_2,S_3. Следовательно, при решении исходной задачи симплексным методом, одновременно получаются решения двойственной задачи.

В условиях примера 1 имеем:

X*=[0; 273,38; 302,16]; Y*=[14,85; 0; 25,18];

цены: [60;90;85]; F=50288; суммарный выпуск - 575.

Изменение цен на [90;85;80] (пример 2) привело к:

X*=[78,09; 370,02; 121,25];Y*=[15,02; 10,23; 6,35];

F=48180; суммарный выпуск — 569..

2.3. Определение параметров оптимальных планов

2.3.1. Определение параметров оптимальных планов с использованием матрицы коэффициентов структурных сдвигов

В примере 1 полученное на первом этапе оптимальное решение Xopt не включает продукцию, изготавливаемую 1-м способом как самую невыгодную (X_1*=0). В соответствии с заданием принимается решение об обязательном введении определенного количества продукции, изготавливаемой самым невыгодным способом $X_1^* \geq X_10$. К исходным ограничениям задачи добавится ограничение вида $x_1 \geq X_10$.

В общем случае в задание вводится ограничение на j –ю переменную j=1 или j=2, или j=3); следовательно, ограничение $x_j \geq 0$ заменяется на $x_j \geq X_j0$. В соответствии с алгоритмом симплекс - метода выполняется преобразование этого ограничения к каноническому виду. Ограничение $x_j \geq X_j0$ преобразуется к виду: $x_j+A_4-S_4 = X_j0$. К ранее введенным дополнительным переменным S_1, S_2, S_3 добавляются дополнительная переменная S_4 и искусственная переменная A_4, коэффициент целевой функции при A_4 при решении задачи на максимум равен (-M), где M - большое число. Соответствующие данные отражаются в B1=[B_1, B_2, B_3, X_j0] и матрице коэффициентов A1 – последняя строка которой записывается следующим образом: при j=1 ($x_1 \geq X_10$) $A1_4$=[1 0 0 0 0 0 1 -1]; при j=2 ($x_2 \geq X_20$) $A1_4$=[0 1 0 0 0 0 1 -1]; при j=3 ($x_3 \geq X_30$) $A1_4$=[0 0 1 0 0 0 1 -1]; остальные элементы двух последних столбцов матрицы A1 равны нулю. Общее число переменных задачи увеличится до N=8.

В работе для определения оптимального решения задачи линейного программирования с 4 ограничениями предлагается использовать оптимальное решение Xopt, полученное на первом этапе - при решении задачи с тремя ограничениями по ресурсам.

Оптимальное решение задачи линейного программирования с 4 ограничениями можно представить в виде вектора-столбца Xopt1, включающего значения переменных X_1, X_2, X_3 и S_p (p-й ресурс имеет нулевую оценку). Из исходной матрицы A1 путем выделения столбцов, соответствующих базисным переменным оптимального решения Xopt1, может быть получена матрица коэффициентов A10 размерностью 4*4; строки этой матрицы соответствуют значениям B1=[B_1, B_2, B_3, X_j0], а столбцы - переменным, образующим Xopt1, так как должно выполняться ограничение A10*Xopt1=B1.

Тогда Xopt1=D10*B1, где D10=A10$^{(-1)}$ - матрица обратная к A10; строки матрицы D10 соответствуют компонентам Xopt1, а столбцы – значениям [B_1, B_2, B_3, X_j0]. Элементы i-го столбца матрицы коэффициентов структурных сдвигов D10 определяют изменения базисных переменных оптимального плана Xopt (соответствующего значению X_j0=0) при

изменении i-го ресурса на единицу; элементы 4-го столбца матрицы D10 определяют изменения базисных переменных оптимального плана Xopt при изменении на единицу ограничения X_j0 от значения X_j0=0. На основе полученного ранее оптимального плана Xopt и коэффициентов структурных сдвигов для переменной, соответствующей добавленному ограничению, рассчитывается новый оптимальный план, включающий все рассматриваемые способы изготовления продукции: $Xopt1_q=Xopt_q+D10_{q,4}*X_j0$; (q=1,2,3); $Xopt1_{p+3}=Xopt_{p+3}+D10_{4,4}*X_j0$. Рассмотрим для примера 1, как изменится оптимальный план при введении ограничения: $x_1 \geq X_10=50$.

Таблица 10. Матрица коэффициентов ограничений для переменных плана (пример 1)

	X_1	X_2	X_3	S_2
c_j	60	90	85	0
$B1_1$	1,86	3,72	2,79	0
$B1_2$	4,64	1,99	2,65	1
$B1_3$	2,30	1,38	1,73	0
X_10	1	0	0	0

Матрица коэффициентов ограничений для переменных плана составлена с учетом недефицитности ресурса 2.

Таблица 11. Матрица коэффициентов структурных сдвигов

	$B1_1$	$B1_2$	$B1_3$	X_10
X_1	0,000	0,000	0,000	1
X_2	0,669	0,000	-1,079	1,237
X_3	-0,534	0,000	1,439	-2,33
S_2	0,083	1,000	-1,665	-0,964

В оптимальной симплекс-таблице 3.3 в строках для базисных переменных X_2,X_3,S_2 и столбцах для S_1,S_2,S_3 имеем значения, равные элементам строк X_2,X_3,S_2 матрицы коэффициентов структурных сдвигов; в столбце X_1 оптимальной симплекс-таблицы 3.3 имеем значения, равные по величине и противоположные по знаку соответствующим элементам столбца

X_10 матрицы коэффициентов структурных сдвигов для строк X_2, X_3, S_2.

Таблица 12. Показатели оптимального плана на 1 месяц (пример 1)

		$k_{(Xj,X10)}$	$dX_{j,10}$	Xopt1
X_1*	0,00	1,000	50,00	50,00
X_2*	273,38	1,237	61,87	335,25
X_3*	302,16	-2,317	-115,83	186,33
S_2*	75,25	-0,964	-48,18	27,07
F	50287,77			49010,79
Sum(dX_j*c_j)			-1276,98	

Рассчитаем показатели оптимального плана на 1-й месяц с учетом ограничения $x_1 \geq 50$ (пример 1). Условие неотрицательности переменных при введении 4-го ограничения и заданных в таблице 2 изменениях запасов ресурсов на 2-й и 3-й месяцы квартала по сравнению с запасами 1-го месяца выполняется. Это свидетельствует о неизменности двойственных оценок ресурсов, поэтому использование матрицы коэффициентов структурных сдвигов для расчетов планов 2-го и 3-го месяцев квартала допустимо.

По исходным данным ограничений ресурсов для 2-го месяца рассчитываются приращения ресурсов:

$dB_1(2,1)=B_1(2)-B_1(1)$, $dB_2(2,1)=B_2(2)-B_2(1)$, $dB_3(2,1)=B_3(2) - B_3(1)$.

Далее по коэффициентам структурных сдвигов для каждого из ресурсов и заданных приращений ресурсов рассчитываются параметры оптимального плана Xopt2 для 2-го месяца квартала:

$dXopt2_j$= sum $\{D10_{j,i}*dB_i(2,1);\ i=1,2,3\}$; $Xopt2_j=Xopt1_j + dXopt2_j$ $(j=1,2,3)$;

$dXopt2_{p+3}$= sum $\{D10_{4,i}*dB_i(2,1);\ i=1,2,3\}$. $Xopt2_{p+3}=Xopt1_{p+3}+dXopt2_{p+3}$

Значение целевой функции для оптимального плана 2-го месяца определится как: $F2=F1+\mathrm{sum}\{c_j*dXopt2_j, j=1,2,3\}$.

Аналогично рассчитываются параметры оптимального плана для 3-го месяца: $dB_1(3,1)=B_1(3)-B_1(1)$, $dB_2(3,1)=B_2(3)-B_2(1)$, $dB_3(3,1)=B_3(3) - B_3(1)$.

$dXopt3_j$= sum $\{D10_{j,i}*dB_i(3,1);\ i=1,2,3\}$; $Xopt3_j=Xopt1_j + dXopt3_j$ $(j=1,2,3)$;

$dXopt3_{p+3}$= sum $\{D10_{4,i}*dB_i(3,1);\ i=1,2,3\}$. $Xopt2_{p+3}=Xopt1_{p+3}+dXopt2_{p+3}$;

$F3=F1+\mathrm{sum}\{c_j*dX3opt_j, j=1,2,3\}$.

Таблица 13. Изменения запасов ресурсов по месяцам

месяц	B_1	B_2	B_3	X_10				
1	1860	1420	900	50	dB_1	dB_2	dB_3	dX_10
2	2000	1500	950	50	140	80	50	0
3	1800	1420	900	50	-60	0	0	

Таблица 14. Показатели планов на 2 и 3 месяцы квартала (пример 1)

	$Xopt1_j$	$dXopt2_j$	$Xopt2_j$	$dXopt3_j$	$Xopt3_j$
X_1*	50,00	0,00	50,00	0,00	50,00
X_2*	335,25	39,72	374,97	-40,15	295,10
X_3*	186,33	-2,78	183,55	32,03	218,36
S_2*	27,07	8,33	35,40	-4,97	22,10
F	49010,79		52349,15		48119,63
Sum(dX_j*c_j)		3338,36		-891,16	
Sum[dB_i*(Y_i)*]		3338,36		-891,16	

Изменения значения целевой функции за счет изменения запасов ресурсов (таблица 14) можно определить, используя оценки (Y_i*):

$dF(2,1)=\mathrm{sum}\{dB_i*(2,1)*(Y_i*)\ i=1,2,3\}$;
$dF(3,1)=\mathrm{sum}\{dB_i*(3,1)*(Y_i*)\ i=1,2,3\}$.

Двойственные оценки ресурсов в это случае определятся при решении системы уравнений, составленных на основе теорем двойственности:

$G=B_1*y_1 + B_2*y_2 + B_3*y_3 + X_10*y_4 \rightarrow \min$;
$a_{1,1}*y_1+ a_{2,1}*y_2 + a_{3,1}*y_3 + y_4=c_1$;
$a_{1,2}*y_1+ a_{2,2}*y_2 + a_{3,2}*y_3=c_2$;
$a_{1,3}*y_1+ a_{2,3}*y_2 + a_{3,3}*y_3=c_3$.

Таблица 15.1. Исходные данные для расчета Y_i* (пример 1)

y_1	y_2	y_3	y_4		
$A1_y$1860	1420	900	50	$B1_y$	49010,79
1,86	4,64	2,30	1		60
3,72	1,99	1,38	0		90
2,79	2,65	1,73	0		85

В таблице 15.1 приведены исходные данные 1-го месяца для расчета двойственных оценок в условиях примера 1; для 2-го и 3-го месяцев изменятся элементы первой строки матрицы $A1_y$ в соответствии с данными таблицы 13 (запасы ресурсов на 2-й и 3-й месяцы) и первый элемент вектора $B1_y$ -значение целевой функции для 2-го и 3-го месяцев. Значения двойственных оценок определятся как $Y=A1_y^{(-1)}*B1_y$. В таблице 15.2 приведены результаты вычисления обратной матрицы $A1_y^{(-1}$ и значений Y_i по данным таблицы 15.1, в таблице 15.3 – результаты проверки ограничений двойственной задачи.

Таблица 15.2. Результаты расчета двойственных оценок (пример 1)

$A1_y^{(-1)}$	0,0031	-0,1531	-0,3573	-1,1043	$Y=A1_y^{(-1)}*B1_y$	14,85
	0,0369	-1,8469	-12,3837	6,8828		0,00
	-0,0615	3,0760	19,5456	12,9019		25,18
	-0,0356	2,7797	13,1703	4,3157		-25,84

Таблица 15.3. Проверка ограничений двойственной задачи

	X_1	X_2	X_3
c_j	60	**90**	**85**
$a_{1,j}$	1,86	3,72	2,79
$a_{2,j}$	4,64	1,99	2,65
$a_{3,j}$	2,30	1,38	1,73
$a_{4,j}$	1	0	0
sum[$a_{i,j}$*(Y_i*)]	60	**90**	**85**

Значения двойственных оценок {Y_1*,Y_2*,Y_3*} совпадают с полученными ранее (таблицы 6 и 8.2). В индексной строке оптимальной симплекс- таблицы 3.3 в столбце для X_1 имеем значение Y_4*=60-85,54=-25,54 (таблица 8.2). В условиях примера 1 для 2-го и 3-го месяцев получим те же значения двойственных оценок Y_i и те же результаты проверки ограничений двойственной задачи.

В условиях примера 2 для оптимального решения задачи с 3 ограничениями все ресурсы дефицитны, поэтому при введении ограничения $x_1 \geq X_1 0=80$ нельзя определить, какой из ресурсов будет недефицитным. Следовательно, нельзя составить матрицу коэффициентов ограничений размером 4*4 и невозможно рассчитать матрицу коэффициентов структурных сдвигов. Оптимальный план при $x_1 \geq X_1 0=80$ получен графическим методом: Xopt1=[80; 373,56; 115,25]; S_1*=0; S_2*=0; S_3*=1,1; F= 48172,79 (таблица 7). В оптимальном плане на 1 месяц с 4 ограничениями в условиях примера 2 недефицитным стал ресурс 3.

Таблица 16. Матрица коэффициентов ограничений для примера 2

	X_1	**X_2**	**X_3**	**S_3**
c_j	**60**	**90**	**85**	**0**
$B1_1$	**1,86**	**3,72**	**2,79**	**0**
$B1_2$	**4,64**	**1,99**	**2,65**	**0**
$B1_3$	**2,30**	**1,38**	**1,73**	**1**
$X_1$0	**1**	**0**	**0**	**0**

Таблица 17. Матрица коэффициентов структурных сдвигов (пример 2)

	$B1_1$	**$B1_2$**	**$B1_3$**	**$X_1$0**
X_1	**0,000**	**0,000**	**0,000**	**1,000**
X_2	**0,615**	**-0,648**	**0,000**	**1,862**
X_3	**-0,462**	**0,864**	**0,000**	**-3,149**
S_3	**-0,050**	**-0,600**	**1,000**	**0,579**

Запишем матрицу коэффициентов ограничений (таблица 16) и определим соответствующую матрицу коэффициентов структурных сдвигов. (таблица 17). Рассчитаем показатели плана на 2-й и 3-й месяцы на основе решения Xopt1.

Таблица 18. Показатели планов на 2 и 3 месяцы квартала (пример 2)

	$Xopt1_j$	$dXopt2_j$	$Xopt2_j$	$dXopt3_j$	$Xopt3_j$
X_1*	80,00	0,00	80,00	0,00	80,00
X_2*	373,56	34,32	407,89	-36,93	336,64
X_3*	115,25	4,41	119,66	27,73	142,98
S_3*	1,1	-5,00	-3,90	2,99	4,09
F	48172,79				47252,42

В плане на 2-й месяц значение переменной S_3* стало отрицательным, это означает, что изменились двойственные оценки ресурсов при изменении запасов ресурсов для 2 месяца по сравнению с данными 1-го месяца.

Можно найти оптимальное решение в условиях примера 2 при ограничениях на ресурсы B={2000;1500;950} графическим методом: Xopt2={80;412,1;114,05};S_2*=6,5; F=51352,23 и рассчитать из системы алгебраических уравнений двойственные оценки Y_i*={14,18;0;23,38; 9,86}. Полученные оценки ресурсов отличаются от результатов, приведенных в таблице 9.2 Если для 2-го месяца изменить ограничение по 3-му ресурсу B={2000;1500;955}, то приращения переменных составят: Dxj21={0,00;34,32;4,41;0,00}; новое решение: Xopt2={80;407,89;119,66}; S_3*=1,10; F= 47252,42. соответственно изменятся значения двойственных оценок: Y_i*={15,34;14,04;0;-3,67}. Эти значения будут соответствовать планам 1-го, 2-го и 3-го месяцев, оценки ресурсов совпадают с полученными в таблице 9.2. Возможно, что при расчете показателей оптимального плана на 1 месяц (с учетом введении ограничения $x_j \geq X_j0$) на основе матрицы коэффициентов структурных сдвигов не выполняются условия неотрицательности для одной из переменных: X_1,X_2,X_3,S_i. Примем в условиях примера 1 X_10=100 и рассчитаем для этого случая показатели оптимального плана (пример 3).

Таблица 19. Показатели оптимального плана на 1 месяц (пример 3)

		$k_{(Xj,X10)}$	$dX_{j,10}$	Xopt1
X_1*	0,00	1,000	100,00	50,00
X_2*	273,38	1,237	123,74	397,12
X_3*	302,16	-2,317	-231,65	70,50

		$k_{(Xj,X10)}$	$dX_{j,10}$	Xopt1
S_2*	75,25	-0,964	-96,36	-21,11

Значение переменной S_2* стало отрицательным, это означает, что при введении ограничения $x_1 \geq 100$ изменился тип ресурса и значения двойственных оценок; следовательно, изменились коэффициенты матрицы структурных сдвигов. Область устойчивости двойственных оценок определяется коэффициентами $D10_{3,4}$=-2,317 и $D10_{4,4}$=-0,964 таблицы 11 и значениями переменных X_3*=302,16 и S_2*=75,25 (таблица 3.3):
$\min\{(-X_3*)/(D10_{3,4});(-S_2*)/(D10_{4,4})\} = \min\{130,4;\ 78,1\} = 78,1$.

При X_10>78,1 меняются двойственные оценки ресурсов и, как следствие, меняются коэффициенты матрицы структурных сдвигов. В этом случае нужно определять оптимальное решение задачи с 4-мя ограничениями одним из рассмотренных ранее способов. Например, приняв X_1*=X_10=100, можно найти оптимальные значения переменных исходной задачи графическим методом. Для примера 3 запишем в системе координат x_2, x_3 уравнения прямых:

x_31=(1860-1,86*100 - 3,72*x_2)/2,79;

x_32=(1420 -4,64*100 – 1,99*x_2)/2,65;

x_33= (900 – 2,30*100 – 1,38*x_2)/1,73.

Область допустимых значений (ОДЗ) x_3 расположена ниже прямой x_32 до точки пересечения x_32 с x_31 и далее ниже прямой x_31. Точка пересечения x_32 и x_31: X_2*=410,8; X_3*=52,27. В этой точке F=47414,69; S_3*=900-887,33=12,67; S_1*=0; S_2*=0; при X_10=100 недефицитным стал ресурс 3. Следовательно, матрица коэффициентов структурных сдвигов в условиях примера 3 будет определяться таблицей 16.

Рассчитаем показатели плана на 2-й и 3-й месяцы для примера 3, используя решение для 1-го месяца: Xopt1=[100; 410,8; 52,27]; S_1*=0; S_2*=0; S_3*=12,67.

Таблица 20. Показатели планов на 2-й и 3-й месяцы квартала (пример 3)

	$Xopt1_j$	$dXopt2_j$	$Xopt2_j$	$dXopt3_j$	$Xopt3_j$
X_1*	100,00	0,00	100,00	0,00	100,00
X_2*	410,80	34,32	445,12	-36,93	373,87
X_3*	52,27	4,41	56,68	27,73	80,00
S_3*	12,67	-5,00	7,67	2,99	15,66
F	47414,69		50879,00		46448,34

Значения двойственных оценок: $Y_i^*=\{16,11;15,12;0;-40,11\}$.

2.3.2. Определение параметров плана на квартал с использованием функций Excel «Поиск решения»

Если в меню *Сервис* отсутствует команда «*Поиск решения*», необходимо выбрать команду *Сервис* → *Надстройки* и активизировать надстройку «*Поиск решения*». После выбора команд *Сервис* → «*Поиск решения*» появится диалоговое окно «*Поиск решения*».

В диалоговом окне «*Поиск решения*» есть три параметра:

- Установить целевую ячейку;
- Изменяя ячейки;
- Ограничения.

Сначала нужно заполнить поле «*Установить целевую ячейку*». Во всех задачах для средства «*Поиск решения*» оптимизируется результат в одной из ячеек рабочего листа. Целевая ячейка связана с другими ячейками этого рабочего листа с помощью формул. Средство «*Поиск решения*» использует формулы, которые дают результат в целевой ячейке, для проверки возможных решений. Можно выбрать поиск наименьшего или наибольшего значения для целевой ячейки или установить конкретное значение.

Второй важный параметр средства «*Поиск решения*» это параметр «*Изменяя ячейки*». Здесь указываются ячейки, значения в которых будут изменяться для того, чтобы оптимизировать результат в целевой ячейке.

Третий параметр, который нужно вводить на вкладке «*Поиск решения*», «*Ограничения*».

Для решения задачи необходимо:

1) указать адреса ячеек, в которые будет помещен результат решения (изменяемые ячейки);
2) ввести исходные данные;
3) ввести зависимость для целевой функции и ограничений;
4) запустить команду «Поиск решения»;
5) назначить ячейку для целевой функции (установить целевую ячейку);
6) ввести ограничения;
7) ввести параметры для решения ЗЛП.

Исходные данные следует записать в форме таблицы 21.

Например:

- в ячейках C200:E200 записаны значения коэффициентов целевой функции c_j;
- в ячейках C201:E203 записаны значения коэффициентов $a_{i,j}$;
- в ячейках F201:H203 записаны значения запасов ресурсов $B_i(l)$ на каждый месяц (l=1,2,3);
- в ячейке I201 записано значение X_10.

Таблица 21. Исходные данные для составления планов выпуска по месяцам

c_j	60	90	85	$B_i(1)$	$B_i(2)$	$B_i(3)$	X_10
$a_{1,j}$	1,86	3,72	2,79	1860	2000	1800	50
$a_{2,j}$	4,64	1,99	2,65	1420	1500	1420	
$a_{3,j}$	2,30	1,38	1,73	900	950	900	

Для искомых переменных выделяются ячейки A206:C206 (таблица 22). Первоначально можно принять значения искомых переменных равными нулю. В процессе поиска оптимального решения меняются значения ячеек A206:C206.

Таблица 22 . Значения переменных оптимального решения

x_1	x_2	x_3
00	0	0

Значение целевой функции вычисляется в ячейке B207 с использованием функции СУММПРОИЗВ(C200:E200;A206:C206), в которой указываются адреса массивов коэффициентов целевой функции C200:E200 и массивов изменяемых ячеек A206:C206. Левые части ограничений вычисляются в ячейках E205:E207 с использованием функции СУММПРОИЗВ?, в которой указываются абсолютные адреса ячеек \$A\$206:\$C\$206 и относительные адреса для коэффициентов a_{ij} : для первого ограничения C201:E201; для второго - C202:E202; для третьего – C203:E203). В столбцах F205:F207 можно указать знак ограничений (в примере $\leq$).

После записи исходных переменных и результатов вычислений в принятую форму приступают к вводу параметров функции «Поиск решения».

1. «*Установить целевую ячейку*»: \$B\$207; отметить, что подбирается максимальное значение целевой функции.
2. Ввести адреса изменяемых ячеек: \$A\$206: \$C\$206.
3. Ввести ограничения: 1) поместить указатель мыши на кнопку. «*Добавить*»; 2) в строке ссылка ввести адрес, например, \$E\$205; 3) ввести знак ограничения из предлагаемых в форме знаков; 4) в строке ограничение указать адрес $B_1(1)$, например, \$F\$201. Повторить процедуру для других ограничений.
4. После ввода ограничений установить параметры поиска решения. Установить флажок в окнах: «*Линейная модель*» (это обеспечит применение симплекс-метода) и «*Неотрицательные значения*».
5. Поместить указатель мыши на кнопку ОК. На экране появится

диалоговое окно «*Поиск решения*». Поместить указатель мыши на кнопку «*Выполнить*». Через непродолжительное время появятся диалоговое окно «*Результаты поиска решения*» и исходная таблица с заполненными ячейками A206:C206 для значений переменных, ячейка B207 с максимальным значением целевой функции и значения правых частей ограничений в ячейках E205:E207. Можно вывести отчеты: по результатам и по устойчивости.

Таким образом, будет получено первое решение Xopt, которое следует сравнить с решением, полученным ранее вручную. Далее следует повторить процедуру поиска оптимального решения с учетом введения ограничения $x_1 \geq X_10$ (добавив 4-е ограничение со ссылкой по адресу A206 и I201). Так будет получено решение Xopt1. Затем следует изменить в ограничениях по ресурсам значения запасов $B_i(1)$ на $B_i(2)$ – адреса ячеек F201:F203 на G201:G203 – для плана второго месяца; затем изменить в ограничениях по ресурсам значения запасов $B_i(2)$ на $B_i(3)$ – адреса ячеек G201:G203 на H201:H203 – для плана третьего месяца. При этом меняются значения в ячейках A206:C206 и B207.

Для записи решения задачи на каждом этапе рекомендуется свести все результаты на общий лист, записав решения исходной и двойственной задач и значения целевой функции в виде таблицы, в соответствующие строки и столбцы этой таблицы последовательно при получении очередного решения следует копировать результаты с использованием «*Специальной вставки*» (записывать численные значения). В ту же таблицу рекомендуется поместить результаты вычисления двойственных оценок из отчетов по устойчивости - «теневые цены» для соответствующих ресурсов (ограничений). После записи результатов в подобную таблицу листы с отчетами по устойчивости можно удалить из соответствующего файла Excel.

Таблица 23. Результаты решения задачи с помощью функции Excel

	0	1	2	3
X_1	0,00	50,00	50,00	50,00
X_2	273,38	335,25	374,97	295,10
X_3	302,16	186,33	183,55	218,36
F	50287,77	40010,79	52349,15	48119,63
Y_1	14,85	14,85	14,85	14,85
Y_2	0,00	0,00	0,00	0,00
Y_3	25,18	25,18	25,18	25,1

Результаты, полученные с помощью функции «Поиск решения» совпадают с рассчитанными ранее на основе оптимального плана, полученного вручную симплексным методом.

2.3.3 Разработка плана выпуска продукции в среде Mathcad

Документ Mathcad является одновременно и текстом Mathcad-программы, результатом исполнения этой программы и отчетом. Для создания новых документов Mathcad используют шаблоны.

В приложении представлены несколько видов шаблонов - документов Mathcad, которые могут использоваться студентами при выполнении индивидуального задания: результат выполнения всей курсовой работы в среде Mathcad (пример 1) - файл curs2005.mcd; шаблоны для решения задач составления плана выпуска при ограничениях по j-му виду продукции (j=1,2,3) – соответственно файлы: curs1.mcd, curs2.mcd, curs3.mcd; шаблон для решения задачи составления плана реализации - файл curs05tr.mcd.

Рассмотрим процедуру решения задачи разработки плана выпуска в документах Mathcad в условиях примера 1. Системной переменной ORIGIN присваивается значение 1 (отсчет элементов строк и столбцов матриц начинается с 1). Исходные данные представлены матрицей коэффициентов А; вектором ограничений В и вектором цен С .

Исходные данные для примера 1:

$$A := \begin{pmatrix} 1.86 & 3.72 & 2.79 \\ 4.64 & 1.99 & 2.65 \\ 2.30 & 1.38 & 1.73 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 1860 & 2000 & 1800 \\ 1420 & 1500 & 1420 \\ 900 & 950 & 900 \end{pmatrix} \qquad C := \begin{pmatrix} 60 \\ 90 \\ 85 \end{pmatrix} \qquad X10 := 50$$

Задача линейного программирования в Mathcad формулируется следующим образом: задается вектор переменных, записывается выражение для целевой функции, вводятся начальные значения переменных (инициализация), в блоке Given записываются выражения для ограничений, в том числе и условия неотрицательности переменных; с помощью функций maximize (или minimize) определяется решение.

Решение исходной задачи с тремя ограничениями для примера 1:

$$U(x) := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad F(x) := C^T \cdot U(x) \qquad i := 1..3 \qquad x_i := 0 \qquad \text{Given} \quad A \cdot U(x) \le B^{\langle 1 \rangle} \qquad U(x) \ge 0$$

$$x := \text{Maximize}(F, x) \qquad x^T = (0 \;\; 273.381 \;\; 302.158) \qquad F(x) = 50287.77$$

Подставим оптимальное решение в правые части ограничений по ресурсам, рассчитаем значения дополнительных переменных S_1^*, S_2^*, S_3^* и сформируем оптимальное решение X с учетом дополнительных переменных.

Результаты решения с учетом дополнительных переменных:

$$(A\cdot x)^T = (1860.00\ \ 1344.75\ \ 900.00) \quad S := B^{\langle 1\rangle} - A\cdot x \quad X := \mathrm{stack}(x, S) \quad X^T = (0.00\ \ 273.38\ \ 302.16\ \ -0.00\ \ 75.25\ \ 0.00)$$

Решение двойственной задачи для примера 1:

$$V(y) := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad G(y) := B^{\langle 1\rangle T}\cdot V(y) \quad j := 1..3 \quad y_j := 0 \quad \text{Given} \quad A^T\cdot y \ge C \quad V(y) \ge 0 \quad y := \mathrm{Minimize}(G, y)$$

$$y^T = (14.853\ \ 0\ \ 25.18) \quad G(y) = 50287.77$$

Запишем матрицу A1 коэффициентов при введении ограничения $x_1 \ge 50$, матрицу A10 коэффициентов, соответствующих базисным переменным оптимального решения, и обратную к A10 матрицу D10 коэффициентов структурных сдвигов.

Расчет матрицы коэффициентов структурных сдвигов:

$$A1 = \begin{pmatrix} 1.86 & 3.72 & 2.79 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4.64 & 1.99 & 2.65 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2.3 & 1.38 & 1.73 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad A10 = \begin{pmatrix} 1.86 & 3.72 & 2.79 & 0 \\ 4.64 & 1.99 & 2.65 & 1 \\ 2.3 & 1.38 & 1.73 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad D10 := A10^{-1} \quad D10 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.669 & 0 & -1.079 & 1.237 \\ -0.534 & 0 & 1.439 & -2.317 \\ 0.083 & 1 & -1.665 & -0.964 \end{pmatrix}$$

Расчет показателей плана на 1-й месяц:

$$X1_1 := X_1 + D10_{1,4}\cdot X10 \quad X1_2 := X_2 + D10_{2,4}\cdot X10 \quad X1_3 := X_3 + D10_{3,4}\cdot X10 \quad X1_4 := X_4 \quad X1_5 := X_5 + D10_{4,4}\cdot X10 \quad X1_6 := X_6$$

$$X1^T = (50.00\ \ 335.25\ \ 186.33\ \ -0.00\ \ 27.07\ \ 0.00) \quad F1 := C^T\cdot \mathrm{submatrix}(X1, 1, 3, 1, 1) \quad F1 = 49010.79$$

Составим оптимальный план на 2-й и 3-й месяцы квартала на основе приведенного выше решения, матрицы коэффициентов структурных сдвигов и данных об изменениях запасов ресурсов относительно запасов 1-го месяца.

Расчет показателей плана на 2-й месяц:

$$B2 := B^{\langle 2\rangle} \quad dB2 := B2 - B^{\langle 1\rangle} \quad dB2^T = (140\ \ 80\ \ 50) \quad X2_1 := X1_1 + D10_{1,1}\cdot dB2_1 + D10_{1,2}\cdot dB2_2 + D10_{1,3}\cdot dB2_3$$

$$X2_2 := X1_2 + D10_{2,1}\cdot dB2_1 + D10_{2,2}\cdot dB2_2 + D10_{2,3}\cdot dB2_3 \quad X2_3 := X1_3 + D10_{3,1}\cdot dB2_1 + D10_{3,2}\cdot dB2_2 + D10_{3,3}\cdot dB2_3$$

$$X2_4 := X1_4 \quad X2_5 := X1_5 + D10_{4,1}\cdot dB2_1 + D10_{4,2}\cdot dB2_2 + D10_{4,3}\cdot dB2_3 \quad X2_6 := X1_6$$

Расчет показателей плана на 3-й месяц :

$$B3 := B^{\langle 3\rangle} \quad dB3 := B3 - B^{\langle 1\rangle} \quad dB3^T = (-60\ \ 0\ \ 0) \quad X3_1 := X1_1 + D10_{1,1}\cdot dB3_1 + D10_{1,2}\cdot dB3_2 + D10_{1,3}\cdot dB3_3$$

$$X3_2 := X1_2 + D10_{2,1}\cdot dB3_1 + D10_{2,2}\cdot dB3_2 + D10_{2,3}\cdot dB3_3 \quad X3_3 := X1_3 + D10_{3,1}\cdot dB3_1 + D10_{3,2}\cdot dB3_2 + D10_{3,3}\cdot dB3_3$$

$$X3_4 := X1_4 \quad X3_5 := X1_5 + D10_{4,1}\cdot dB3_1 + D10_{4,2}\cdot dB3_2 + D10_{4,3}\cdot dB3_3 \quad X3_6 := X1_6$$

Оптимальные планы выпуска на 1-й, 2-й и 3-й месяцы:

$$X1^T = (50\ \ 335.25\ \ 186.33\ \ -0\ \ 27.07\ \ 0) \quad X2^T = (50\ \ 374.97\ \ 183.55\ \ -0\ \ 35.4\ \ 0) \quad X3^T = (50\ \ 295.1\ \ 218.36\ \ -0\ \ 22.1\ \ 0)$$

$$F_1 := C^T\cdot \mathrm{submatrix}(X1, 1, 3, 1, 1) \quad F_2 := C^T\cdot \mathrm{submatrix}(X1, 1, 3, 1, 1) \quad F_3 := C^T\cdot \mathrm{submatrix}(X3, 1, 3, 1, 1) \quad F^T = (49011\ \ 49011\ \ 48120)$$

Полученные результаты совпадают с данными таблицы 14, где параметры плана рассчитывались по матрице коэффициентов структурных сдвигов с использованием матричных функций Excel, и результатами, полученными с помощью функции Excel «Поиск решения» (таблица 23). В рассмотренном примере (файл curs2005.mcd) приведены также результаты решения исходной и двойственной задач для 1-3-го месяцев при введении ограничения. Результаты вычисления двойственных оценок также совпадают с полученными ранее в таблице 23. Документ curs2005.mcd может быть использован при выполнении курсовой работы по индивидуальному заданию при ограничениях по 1-му способу: необходимо изменить исходные данные: A, B, C, X10 и просмотреть документ до конца вычислений. При ограничениях по 2-му или 3-му способу производства необходимо внести в документ curs2005.mcd соответствующие изменения в программу; кроме того, для любых ограничений можно использовать документы curs1.mcd - curs3.mcd .

2.4. Формирование оптимального плана выпуска продукции на квартал

На основе полученных оптимальных планов Xopt1, Xopt2, Xopt3 формируется план выпуска продукции на квартал. Количество продукции, выпускаемое тем или иным способом принимается целым (ближайшее меньшее целое к компонентам оптимальных планов).

С точки зрения потребителя выпускаемая продукция является однородной, поэтому для каждого месяца (l =1,2,3) определяются:

- ✓ суммарный выпуск однородной продукции sum $\{X_j(l);j=1,2,3\}$;
- ✓ предполагаемый суммарный доход $F(l)=sum\{c_j*X_j(l);j=1,2,3\}$;
- ✓ средняя стоимость условной единицы продукции для каждого месяца $C_{cp}(l) =F(l)/(sum\{X_i(l);j=1,2,3\})$ и по кварталу в целом.

Результаты расчета представлены в таблице 24.

Таблица 24. План выпуска на квартал

месяц	$X_1(l)$	$X_2(l)$	$X_3(l)$	sum$\{X_j(l)\}$	F(l)	$C_{cp}(l)$
1	50	335	186	587	48960	85,74
2	50	374	183	607	52215	86,02
3	50	295	218	563	48080	85,40
итого	150	1004	587	1741	149255	85,73

В последней строке приведены результаты по кварталу в целом и значение средней цены условной единицы продукции за квартал C_{cp}. Таким образом, определяются исходные данные для составления оптимального плана реализации продукции: выпуск однородной продукции по месяцам и по кварталу в целом (5-й столбец таблицы 23), значение C_{cp}.

3. РАЗРАБОТКА ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНА РЕАЛИЗАЦИИ ПРОДУКЦИИ

3.1. Математическая формулировка задачи

Исходными данными для решения этой задачи являются:

- ✓ объемы производства продукции по месяцам a(i), (i=1,2,3) ;
- ✓ объемы спроса на продукцию по месяцам b(j), (j=1,2,3);
- ✓ стоимость реализации единицы продукции $c0\approx0,1*C_{cp}$;
- ✓ затраты на хранение единицы продукции в течение месяца $r\approx(0,1\text{-}0,15)*c0$;

- ✓ размер штрафа, выплачиваемого потребителю за недовыполнение заявки на единицу продукции в течение месяца $h\approx(0,15\text{-}0,25)*C_{cp}$.

Заявку j-го месяца (j=1, 2,3) можно выполнить за счет продукции, произведенной в течении текущего месяца (i=j); затраты на реализацию единицы продукции равны Cp(i,j)=c0 при j=i; продукции, произведенной в прошлом месяце (i < j) и сохраняющейся для реализации в будущем на складах; затраты на реализацию единицы продукции равны Cp(i,j)=c0+(j-i)*r; продукции, произведенной в более поздние месяцы (i >j); затраты на реализацию единицы продукции равны Cp(i,j)=c0 + (i-j)*h.

Таблица 25. Матрица стоимостей реализации {Cp(i,j)}

Месяцы выпуска (i)	Месяцы реализации (j)		
	1	2	3
1	c0	c0+r	c0+2*r
2	c0+h	c0	c0+r
3	c0+2*h	c0+h	c0

Разрабатывается план выполнения заявок на продукцию по месяцам, гарантирующий минимальные суммарные затраты на реализацию. Неотрицательные переменные X(i,j) – количество единицы продукции, выпущенной в i-м и реализованной в j-м месяце; число переменных равно m*n=3*3=9.

Целевая функция задачи : F=sum{sum[Cp(i,j)*X(i,j);i=1,2,3];j=1,2,3}→ min.

В случае когда суммарный выпуск продукции равен суммарному спросу на продукцию, будут выполнены все заявки и реализована вся продукция. Тогда ограничения на переменные запишутся в виде равенств:

sum{X(i,j);j=1,...,n}=a(i); i=1,2,3; sum{X(i,j);i=1,...,m}=b(j); j=1,2,3;

В сформулированной задаче линейного программирования:

- коэффициенты при переменных в ограничениях равны единице;
- размерность переменных задачи X(i,j) и ограничений a(i) и b(j) одинакова;
- все ограничения представлены в виде равенств;
- системы ограничений связаны между собой линейной зависимостью sum{a(i);i=1,2,3}=sum{b(j);j=1,.2,3}.

Рассматриваемая задача может быть решена симплекс-методом. При этом следует учесть, что из (m+n)=6 уравнений только (m+n-1)=5 линейно независимы, поэтому число базисных переменных равно (m+n-1)=5, число свободных переменных равно (m-1)*(n-1)=4.

Наличие перечисленных выше особенностей позволяет рассматривать задачу составления плана реализации продукции на квартал как сбалансированную (классическую) транспортную задачу, для решения которой используют специальный метод - методом потенциалов.

Таблица 26. Эквивалентность рассматриваемой задачи с транспортной задачей

Транспортная задача	Задача разработки плана реализации продукции
1. Исходный пункт i	1. Период выпуска продукции i-й месяц
2. Пункт назначения j	2. Период реализации продукции j -й месяц
3. Предложение в пункте i	3. Объем выпуска продукции за i-й месяц
4. Спрос в пункте j	4. Объем реализации продукции в j-м месяце
5. Стоимость перевозки единицы груза из пункта i в пункт j	5. Стоимость реализации единицы продукции, выпущенной в i-м месяце и реализованной в j-м месяце

В заданиях на работу условие баланса не выполняется: либо выпуск больше спроса, либо спрос больше выпуска .

Если суммарный выпуск продукции больше суммарного спроса на продукцию, то будут выполнены все заявки, но не будет реализована вся выпущенная продукция. В этом случае ограничения запишутся в виде: sum{X(i,j);j=1,2,3}≤a(i);i=1,2,3; sum{X(i,j);i=1,2,3}=b(j); j=1,2,3. Для приведения задачи составления плана реализации к сбалансированной транспортной задаче необходимо ввести фиктивного потребителя b(n+1)=b(4)=[sum{a(i); i=1,2,3}- sum{b(j);j=1,2,3}], при этом m=3; n=4; число переменных задачи X(i,j) увеличивается до N=m*n=3*4=12. Стоимость выполнения заявок фиктивного потребителя принимается равной нулю: Cp(i,4)=0; i=1,2,3; рассмотренная выше матрица стоимости реализации дополняется столбцом [0;0;0]. Целевая функция запишется в виде: F=sum{sum[Cp(i,j)*X(i,j); i=1,2,3]; j=1,2,3,4}→ min. Ограничения запишутся в виде: sum{X(i,j);j=1,2,3,4}=a(i); i=1,2,3; sum{X(i,j);i=1,2,3}=b(j); j=1,2,3,4.

Если суммарный выпуск продукции меньше суммарного спроса на продукцию, то не будут выполнены все заявки, но будет реализована вся выпущенная продукция. В этом случае ограничения запишутся в виде: sum{X(i,j);j=1,2,3}=a(i); i=1,2,3; sum{X(i,j);i=1,2,3}≤b(j); j=1,2,3. Для приведения задачи составления плана реализации к сбалансированной транспортной задаче необходимо ввести фиктивного поставщика a(m+1)=a(4)=[sum{b(j);j=1,2,3}- sum{a(i);i=1,2,3}], при этом m=4; n=3; число переменных задачи X(i,j) увеличивается до N=m*n=4*3=12. Стоимость реализации продукции, выпущенной фиктивным поставщиком, Cp(4,j) принимается равной нулю; рассмотренная выше матрица стоимости реализации дополняется строкой [0 0 0]. Целевая функция запишется в виде: F=sum{sum[Cp(i,j)*X(i,j);i=1,2,3,4];j=1,2,3}→ min. Ограничения запишутся в виде: sum{X(i,j);j=1,2,3}=a(i); i=1,2,3,4; sum{X(i,j);i=1,2,3,4}=b(j); j=1,2,3.

3.1.1. Разработка плана реализации продукции методом потенциалов

Задача разработки плана реализации продукции, приведенная к сбалансированной транспортной задаче, в общем случае записывается в виде:

- переменные X(i,j)=>0; число переменных N=12;
- целевая функция: F=sum{Cp(i,j)*X(i,j);i=1,...,m; j=1,...,n}→min;
- ограничения: sum[X(i,j);j=1,...,n]=a(i); i=1,...,m;
  sum[X(i,j); i=1,...,m]=b(j); j=1...,n; m+n=7.

Условие баланса: sum{a(i); i=1,...,m}=sum{b(j); j=1,...,n}; поэтому из 7 ограничений независимых 6. Следовательно, число базисных переменных (значений X(i,j) >0) равно 6, а остальные 6 переменных являются свободными (принимают нулевое значение: X(i,j) =0).

Решение сбалансированной транспортной задачи можно выполнять на основе последовательного преобразования так называемых транспортных таблиц (вручную). Результаты решения предлагается оформить в электронных таблицах Excel на основе соответствующих шаблонов транспортных таблиц.

Транспортная таблица составляется после проверки условия баланса с учетом введения фиктивного потребителя или поставщика, если это необходимо. В левом столбце таблицы записывают месяц выпуска продукции, в верхней строке – месяц реализации продукции.

При введении фиктивного потребителя таблица имеет три строки и четыре столбца; при введении фиктивного поставщика – четыре строки и три столбца: общее число переменных равно 12; таблица содержит m*n=12 клеток для искомых переменных X(i,j). В каждую клетку при составлении плана реализации заносится X(i,j) - количество единиц продукции, выпущенной в i-м месяце и реализованной в j-м месяце. В верхнем углу соответствующей клетки по заданной матрице стоимостей записывается значение Cp(i,j) - стоимости реализации в j-м месяце единицы продукции, выпущенной в i-м месяце. В предпоследнем столбце таблицы задаются объемы выпуска по месяцам, а в предпоследней строке – заявки на продукцию по месяцам.

- Всякое неотрицательное решение исходной системы уравнений - ограничений, определяемое матрицей {X(i,j)} ((i=1,..,m;j=1,..,n), называется допустимым планом задачи.
- Число базисных переменных равно (m+n-1), поэтому в транспортной таблице должны быть заполнены (m+n-1) клеток. Остальные (m-1)*(n-1) клеток остаются незаполненными, так как соответствующие им переменные задачи относятся к свободным переменным и принимаются равными нулю.
- Допустимый план задачи, имеющий не более (m+n-1) отличных от

нуля величин X(i,j), называется опорным.

- Если в опорном плане число отличных от нуля компонент равно в точности (m+n-1), то план называется невырожденным, если меньше, то план называется вырожденным.
- План X*={X(i,j)*}, при котором целевая функция принимает свое минимальное значение, называется оптимальным планом задачи.
- Для построения первого опорного плана используют несколько методов, в том числе и метод северо-западного угла.
- Дальнейшее улучшение первого опорного плана и получение оптимального плана производится специальным методом, основанным на теории двойственности и получившим название метода потенциалов.

Рассматриваемой исходной задаче линейного программирования соответствует двойственная задача с n+m=7 переменными y(k) и N=12 ограничениями. Обозначим как u(i) двойственные оценки y(k) для k=1,...,m (i=1,...,m) и как v(j) (j=1,...,n) двойственные оценки y(k) для k=m+1,...,n+m.

Применительно к рассматриваемой задаче переменные двойственной задачи можно интерпретировать следующим образом. Переменные u(i) обозначают затраты на реализацию в любом месяце квартала ед. продукции, выпущенной в i-м месяце, а переменные v(j) обозначают затраты на реализацию в j-м месяце единицы продукции, выпущенной в любой месяц квартала. Эти переменные принято называть потенциалами; сумма потенциалов u(i)+v(j) определяет так называемую «псевдостоимость» CP(i,j) реализации в j-м месяце единицы продукции, выпущенной в i-м месяце.

Ограничения двойственной задачи определяют соотношения между «псевдостоимостью» CP(i,j) и стоимостью реализации Cp(i,j). Для оптимального решения двойственной задачи должно выполняться условие-«псевдостоимость» CP(i,j) реализации в j-м месяце единицы продукции, выпущенной в i-м месяце, не должна превышать реальную стоимость реализации Cp(i,j), т. е. CP(i,j)=u(i)+v(j)≤Cp(i,j).

Отметим, что переменные двойственной задачи u(i) и v(j) могут иметь отрицательные значения в отличие от неотрицательных переменных исходной задачи X(i,j). Это связано с тем, что ограничения исходной задачи записаны в виде равенств. Отметим также, что число независимых уравнений ограничений исходной задачи равно n+m-1=K-1. Это означает, что при определении оптимального решения двойственной задачи одну из (n+m) искомых переменных {u(i),v(j)} можно задать произвольно (например, принять u(1)=0 или v(n)=0). Для значений потенциалов u(i) и v(j), соответствующих допустимому плану, предназначены последний столбец и последняя строка транспортной таблицы.

Двойственная задача запишется в следующем виде:

- переменные u(i), v(j); число переменных K=7;
- целевая функция G=sum[u(i)*ai;i=1,...,m]+sum[v(j)*bj;j=1,...,n]→max;
- ограничения u(i)+v(j) ≤ Cp(i,j); i=1,...,m;j=1,...,n.

В оптимальном решении исходной задачи отличны от нуля только (n+m-1)=6 независимых базисных переменных, а остальные N-(n+m-1)=6 переменных имеют нулевое значение.

Тогда для оптимального решения двойственной задачи в соответствии с теоремами двойственности ограничения принимают следующий вид:

- для (i,j), для которых X(i,j)>0, ограничение превращается в равенство - «псевдостоимость» равна стоимости реализации CP(i,j) = Cp(i,j);
- для (i,j), для которых X(i,j)=0, ограничение превращается в неравенство - «псевдостоимость» меньше стоимости реализации CP(i,j) < Cp(i,j).

В качестве оценок клеток транспортной таблицы можно рассматривать разность между заданной стоимостью реализации и полученной суммой потенциалов: d(i,j)=Cp(i,j)- (u(i)+v(j)).

Очевидно, что для заполненных клеток эти оценки будут равны нулю. Для свободных клеток соотношение между заданной стоимостью Cp(i,j) и «псевдостоимостью» - суммой потенциалов (u(i)+v(j)) для допустимого плана может быть различным.

Для оптимального плана оценки свободных клеток должны быть неотрицательны при решении исходной задачи на минимум целевой функции.

Оптимальный опорный план задачи строят методом последовательных приближений, задаваясь сначала произвольной системой потенциалов, удовлетворяющих условию u(i)+v(j)=Cp(i,j) для заполненных клеток плана.

Целевая функция двойственной задачи определяется выбранной системой платежей - потенциалов u(i) и v(j). Если в допустимом плане исходной задачи имеются незаполненные клетки, для которых u(i) +v(j)>Cp(i,j), или d(i,j)<0, то план реализации может быть улучшен за счет перераспределения продукции в эти клетки и выбора новой системы потенциалов, что приведет к увеличению значения целевой функции G= sum{u(i)*a(i)}+sum{v(j)*b(j)}.

Если в допустимом плане имеется несколько клеток, для которых d(i,j)<0, то следует выбрать клетку с минимальной отрицательной оценкой (максимальной по модулю) и составить цикл перераспределения продукции из заполненных клеток в выбранную свободную клетку.

Условимся отмечать знаком (+) те клетки (вершины цикла), в которые продукция будет добавляться, а знаком (-), те клетки, в которых количество продукции будет уменьшаться. В цикл перераспределения, кроме выбранной свободной клетки, отмечаемой знаком (+), включаются заполненные клетки. Каждый цикл должен иметь четное число вершин. Для этого в каждой строке транспортной таблице знаку (+) должен соответствовать знак (-); аналогичное соотношение должно выполняться для каждого столбца таблицы.

При перераспределении продукции не должна меняться сумма объемов продукции в заполненных клетках по строкам, равная a(i), и сумма объемов продукции в заполненных клетках по столбцам, равная b(j). Для обеспечения неотрицательности переменных перераспределяемое количество продукции выбирается по минимальному значению из всех X(i,j), отмеченных знаком (-).

Цена цикла переноса определяется как произведением оценки свободной клетки на перераспределяемое количество продукции (при решении задачи на минимум цена цикла переноса отрицательна или равна нулю). Значение целевой функции для нового плана получается путем прибавления к прежнему значению цены цикла переноса.

Алгоритм метода потенциалов включает следующие этапы:

1. Проверка выполнения условия баланса суммарных запасов и суммарных заявок. Если задача сбалансирована, то переходим к п.2 , иначе необходимо преобразовать исходную несбалансированную задачу к сбалансированной путем введения либо фиктивного поставщика, либо фиктивного потребителя.
2. Построение первого опорного плана методом северо-западного угла. Для первого опорного плана, представленного в виде транспортной таблицы, определяется значение целевой функции.
3. Проверка вырожденности плана. Если число занятых клеток в плане равно (m+n-1), значит план невырожденный, переходим к п.4. Иначе - план вырожденный; для заполнения недостающего числа свободных клеток вводят фиктивные (нулевые) поставки, так чтобы число заполненных клеток стало равно (m+n-1). Примечание: при подсчете необходимого числа заполненных клеток следует учесть введенные в п.1 фиктивного поставщика или фиктивного потребителя.
4. Проверка оптимальности полученного плана. Эта процедура включает: расчет потенциалов для заполненных клеток u(i)+v(j)=Cp(i,j); расчет оценок для всех свободных клеток d(i,j)=Cp(i,j)-(u(i)+v(j)). Если для всех свободных клеток d(i,j)≥0 (при решении задачи на минимум), то план оптимальный, переходим к п.6; если иначе - к п.5.
5. Составление цикла перераспределения продукции. Сначала выбирают для перераспределения продукции свободную клетку, для которой значение оценки d(i,j) минимально. Составляют цикл перераспределения, так чтобы во всех остальных вершинах находились заполненные клетки; отмечаются (+) и (-) все клетки цикла с учетом выполнения условия баланса. Выбирается количество переносимого количества продукции минимальное из всех X(i,j) в клетках, отмеченных знаком (-). Вычисляется значение целевой функции. Далее к п.3.
6. Оценка полученного оптимального плана. Рассчитываются потенциалы по всем занятым клеткам и оценки для всех свободных клеток. Если для всех свободных клеток оптимального плана d(i,j) больше нуля, то

для всех свободных клеток оптимального плана d(i,j) больше нуля, то полученный оптимальный план – единственный. В противном случае существуют другие варианты распределения продукции, приводящие к тому же оптимальному значению целевой функции.

3.1.2. Примеры разработки плана реализации продукции

Составим оптимальный план реализации продукции для примера 1. В соответствии с оптимальным планом выпуска продукции (таблица 24) имеем суммарный выпуск продукции за квартал равный 1741 единице (таблица 27).

Таблица 27. Исходные данные для составления плана реализации

	Выпуск	Наименование показателя	Обозначение	Величин
1-й месяц	571	средняя цена	$C_{ср}$	85,73
2-й месяц	607	стоимость реализации	c0	9,00
3-й месяц	563	стоимость хранения	r	2,00
Итого	1741	штраф за невыполнение	h	15,00

В соответствии с заданием (таблица 2) суммарный спрос на продукцию за квартал составляет 1725 единиц; распределение заявок по месяцам: b=[565;575;585]. Рассматриваются еще два варианта распределения суммарного спроса в 1725 единиц по месяцам: b=[575;575;575] – равномерное распределение спроса по месяцам; b=[565;595;565] – распределение суммарного спроса в 1725 единиц по месяцам с учетом изменений ситуации с выпуском продукции a=[571;607;565]. В примере суммарное число заявок меньше суммарного выпуска – вводим фиктивного потребителя: m=3;n=4; b(4)=1741-1725=16. Определим матрицу стоимостей реализации {Cp(i,j)}(таблица 28).

Таблица 28. Матрица стоимостей реализации {Cp(i,j)}

	1	2	3	4(фикт)
1	9	11	13	0
2	24	9	11	0
3	30	24	9	0

Таблица 29.Исходные данные для составления плана реализации

Месяц	1	2	3	Итого	
Выпуск	571	607	563	1741	$b_{фикт}$
Заявки	575	575	575	1725	16

Рассмотрим вариант равномерного распределения суммарного спроса (таблица 29). При составлении первого опорного плана используется метод северо-западного угла.

Таблица 30.1. Первый опорный план

	1	2	3	4(фикт)	a(i)	u(i)
1	571 9	11	13	0	571	0
2	4 24	575 9	28 11 (-)	0 (+)	607	15
3	39	24	547 9 (+)	16 0 (-)	563	13
b(j)	575	575	575	16	15641	
v(j)	9	-6	-4	-13		

В первую очередь заполняется клетка (1,1) - в нее записывается значение, равное X(1,1)=min[a(1),b(1)]=min[571,575]=571. Запасы a(1) использованы, поэтому клетки (1,2), (1,3) и (1,4) остаются незаполненными: X(1,2)=X(1,3)=X(1,4)=0. Осталось невыполненной заявка первого месяца b(1)-a(1)=575-571=4; она может быть выполнена за счет продукции, выпущенной во 2-м месяце – в клетку (2,1) записывается 4: X(2,1)=4; клетка (3,1) остается незаполненной: X(3,1)=0, так как заявка b(1) выполнена. Для выполнения заявки b(2) в клетку (2,2) записывается значение, равное X(2,2)=min[b(2),a(2)-(b(1)-a(1)]=min[575,607-4=603]=575, выпущенных во 2-м месяце. Заявка b(2) выполнена, и потому клетка (3,2) остается незаполненной: X(3,2)=0. От выпуска a(2) осталось 603-575=28, эта продукция используется для выполнения заявки b(3): X(2,3)=28; запас a(2)

использован, клетка (2,4) остается незаполненной: X(2,4)=0. Для выполнения оставшейся заявки 3-го месяца в клетку (3,3) записывается значение, равное X(3,3)=min[(b(3)-X(2,3)),a(3)]=min[(575-28=547);563]=547единиц, выпущенных в 3-м месяце. Оставшиеся a(3)-X(3,3)=563-547=16 единиц продукции записываются в клетку (3,4): X(3,4)=16. В правом нижнем углу таблицы 30.1 записывается значение целевой функции, равное 15641.

Расчет потенциалов выполняется по заполненным клеткам:

X(1,1) > 0; u(1)+v(1)=Cp(1,1)=9; X(2,1) > 0; u(2)+v(1)=Cp(2,1)=24;
X(2,2) > 0; u(2)+v(2)=Cp(2,2)=9; X(2,3) > 0; u(2)+v(3)=Cp(2,3)=11;
X(3,3) > 0; u(3)+v(3)=Cp(3,3)=9; X(3,4) > 0; u(3)+v(4)=Cp(3,4)=0.

Приняв u(1)=0, получим v(1)=9; отсюда u(2)=15; следовательно, v(2)=-6; v(3)=-4; далее получим u(3)=13; отсюда v(4)=-13. Значения потенциалов проставляем в соответствующих строках и столбцах таблицы 30.1.

Рассчитаем оценки свободных клеток, в которых X(i,j)=0.

X(1,2)=0; d(1,2)=Cp(1,2)- [u(1)+v(2)]=11 – [0+(-6)] =17;
X(1,3)=0; d(1,3)=Cp(1,3)- [u(1)+v(3)]=13 – [0+(-4)] =17;
X(1,4)=0; d(1,4)=Cp(1,4)- [u(1)+v(4)]= 0 – [0+(-13)] =13;
X(2,4)=0; d(2,4)=Cp(2,4)- [u(2)+v(4)]= 0 – [15+(-13)]=-2;
X(3,1)=0; d(3,1)=Cp(3,1)- [u(3)+v(1)]=39 – [13+9] = 17;
X(3,2)=0; d(3,2)=Cp(3,2)- [u(3)+v(2)]=24 – [13+(-6)]=17.

Полученный план неоптимальный - отрицательную оценку имеет клетка (2,4). План может быть улучшен за счет перераспределения продукции в клетку с отрицательным значением оценки и выбора новой системы потенциалов. В цикл перераспределения, кроме выбранной свободной клетки (2,4), включаются заполненные клетки; каждый цикл имеет четное число вершин. В первом опорном плане (+) отмечены клетки (2,4) и (3,3), а (-) клетки (3,4) и (2,3). Из условия неотрицательности переменных выбираем минимальное значение из заполненных клеток, отмеченных (-) min(28;16)=16.

Составляем второй опорный план: в клетку (2,4) записываем 16: X(2,4)=16; в клетку (3,3) записываем X(3,3)=547+16=563; в клетку (2,3) записываем X(2,3)=28-16=12; клетка (3,4) освобождается: X(3,4)=0; остальные клетки для второго опорного плана соответствуют первому опорному плану.

Таблица 30.2. Второй опорный план - оптимальный

	1		2		3		4(фикт)		a(i)	u(i)
1	571	9		11		13		0	571	0
2	4	24	575	9	12	11	16	0	607	15
3		39		24	575	9		0	563	13
b(j)	575		575		575		16		15609	
v(j)	9		-6		-4		-15			

Цена переноса составляет d(2,4)*X(3,4)=(-2)*16=-32. Значение целевой функции для второго опорного плана равно F2=15641+(-32)=15609. Для второго плана: u(1)=0; v(1)=9; u(2)=15; v(2)=-6; v(3)=-4; u(3)=13. Изменился потенциал v(4): X(2,4) > 0; u(2)+v(4)=Cp(2,4)=0; v(4)=-15. Не изменились: d(1,2)=17; d(1,3)=17; d(3,1)=17; d(3,2)=17. Изменились: d(1,4)= 0–[0+(-15)] =15; d(3,4)=0–[13+(-15)]=2. Все свободные клетки имеют положительную оценку, значит план оптимальный. Заявка 1-го месяца в 575 единиц обеспечивается продукцией, выпущенной в 1-м месяце, а 4 единицы берутся из выпуска 2-го месяца; заявка 2-го месяца обеспечивается за счет продукции 2-го месяца, при этом 12 единиц продукции используются для выполнения заявки 3-го месяца, а 16 единиц продукции, выпущенной во 2-м месяце остаются нереализованными до конца квартала; заявка 3-го месяца обеспечивается за счет продукции, выпущенной в 3-м месяце. В суммарных затратах на реализацию за квартал не учитываются затраты на хранение 16 единиц от 2-го месяца в течение 3-го месяца.

В качестве примера 4 рассмотрим план выпуска примера 1, изменим заявки на продукцию: b=[570; 600; 590}; суммарный спрос составляет 1760 единиц продукции и превышает суммарный выпуск (1741). Следовательно, при преобразовании задачи к сбалансированной необходимо ввести фиктивного поставщика a(4)=19 единицам, m=4; n=3; матрица стоимостей реализации дополняется строкой [0 0 0].

Таблица 31. Первый опорный план - оптимальный

	1		2		3		a(i)	u(i)
1	570	9	1	11		13	571	0
2		24	599	9	8	11	607	-2
3		39		24	563	9	563	-4
4(фикт)		0		0	19	0	19	-13
b(j)	570		600		590		15687	
v(j	9		11		13			

В первую очередь заполняется клетка (1,1): X(1,1)=min[a(1),b(1)]=min[571,570]=570. Заявка b(1) выполнена, поэтому: X(2,1)=X(3,1)=X(4,1)=0. Осталась 1 единица продукции от выпуска a(1) . Она используется для выполнения заявки b(2): X(1,2)=1. Выпуск a(1) использован полностью: X(1,3)=0. X(2,2)=min[b(2)-X(1,2),a(2)]=min[600-1,607]=599 единиц продукции, выпущенной во 2-м месяце. Заявка b(2) выполнена: X(3,2)=0. От выпуска a(2) осталось 607-599=8 единиц, эта продукция используется для выполнения заявки b(3): X(2,3)=8. X(3,3)=min[(b(3)-X(2,3)), a(3)]=min[590-8;563]=563 единицы продукции, выпущенной в 3-м месяце. X(4,3)=590-8-563=19 единиц. В правом нижнем углу таблицы 31 записывается значение целевой функции, равное 15687. Расчет потенциалов выполняется по заполненным клеткам:

X(1,1) > 0; u(1)+v(1)=Cp(1,1)=9; X(1,2) > 0; u(1)+v(2)=Cp(1,2)=11;
X(2,2) > 0; u(2)+v(2)=Cp(2,2)=9; X(2,3) > 0; u(2)+v(3)=Cp(2,3)=11;
X(3,3) > 0; u(3)+v(3)=Cp(3,3)=9; X(4,3) > 0; u(4)+v(3)=Cp(4,3)=0.

Приняв u(1)=0, получим v(1)=9, v(2)=11, отсюда, u(2)=-2; далее получим u(3)=-4, отсюда v(3)=13, u(4)=-13. Рассчитаем оценки свободных клеток, для которых X(i,j)=0.

X(1,3)=0; d(1,3)=Cp(1,3)- [u(1)+v(3)]=13 – [0+13] = 0;
X(2,1)=0; d(2,1)=Cp(2,1)- [u(2)+v(1)]=24 – [(-2)+9] =17;
X(3,1)=0; d(3,1)=Cp(3,1)- [u(3)+v(1)]= 39 – [(-4)+9] =34;
X(3,2)=0; d(3,2)=Cp(3,2)- [u(3)+v(2)]= 24 – [(-4)+11]=17;

X(4,1)=0; d(4,1)=Cp(4,1)- [u(4)+v(1)]= 0 - [(-13)+9] = 4;
X(4,2)=0; d(4,2)=Cp(4,2)- [u(4)+v(2)]= 0 – [(-13)+11]=2.

Все свободные клетки имеют неотрицательную оценку, значит план оптимальный, но имеется одна свободная клетка с нулевой оценкой, значит полученный оптимальный план не единственный. Заявка 1-го месяца обеспечивается выпуском 1-го месяца; заявка 2-го месяца в основном выпуском 2-го месяцев, заявка 3-го месяца обеспечивается в основном выпуском 2-го месяца; 19 ед. заявки 3-го месяца не выполнены.

3.2. Решение задачи разработки плана реализации с использованием функций Excel

В работе для разработки плана реализации продукции предлагается использовать также функцию Excel - «*Поиск решения*». При этом для решения задачи используется симплексный метод; число переменных равно 9 (без учета фиктивных потребителя или поставщиков).

Предварительно составляется форма записи исходных данных и результатов решения задачи при использовании функции «*Поиск решения*».

В курсовой работе рассматриваются три варианта распределения суммарного спроса по месяцам b(j). Эти данные записываются в трех первых строках таблицы . В первом столбце той же таблицы записываются сведения о выпуске по месяцам a(i). Далее в 2-4 столбцах, 4-6 строках записываются значения матрицы стоимости реализации Cp(i,j).

Таблица 32. Исходные данные для решения в Excel для примера 1

3 вариант	565	595	565	∑=1725
2 вариант	575	575	575	∑=1725
1 вариант	565	575	585	∑=1725
571	9	11	13	
607	24	9	11	
563	39	24	9	
∑=1741	F	149	min	

Например, в ячейках С128:Е128 записаны данные о заявках по месяцам для 1-го варианта (в ячейках С127:Е127 – для второго и в ячейках С126:Е126 – для третьего), в ячейках В129:В131 – значения a(i) - выпуск

продукции по месяцам; в ячейках С129:Е131 – матрица стоимостей реализации.

Искомые переменные X(i,j) будут записываться в «таблицу реализации», например, ячейки (С136:Е138); начальные значения для этих переменных примем равными 1.

Таблица 33. Форма для записи начальных значений и решений

∑=3	1	1	1
∑=3	1	1	1
∑=3	1	1	1
	∑=3	∑=3	∑=3

Ограничения запишем в той же таблице: в крайнем левом столбце – суммы переменных по столбцам (ячейки В136:В138; в нижней строке – суммы по строкам (ячейки С139:Е139). Начальные значения этих сумм равны 3.

Для вычисления целевой функции F выделим, например, в таблице 27, ячейку D132 и запишем в нее формулу с помощью функции СУММПРОИЗВ; в качестве первого массива функции указываются стоимости реализации (С129:Е131); в качестве второго массива переменные (С136:Е138).

Далее переходим к вводу данных в диалоговое окно «*Поиск решения*». «*Установить целевую ячейку*»: $D$132; отметить, что подбирается минимальное значение целевой функции, «Изменяя ячейки»: ($C$136:$E$138) – ячейки, значения в которых будут меняться, чтобы оптимизировать результат в $C$132.

В условиях примера 1 sum[(a(i)]>sum[(b(j)], поэтому необходимо:

- ввести ограничения в виде равенств для сумм переменных по строкам sum{X(i,j)}=b(j)(выполняются все заявки): $C$139:$E$139=$C127:$E127 (для 2-го варианта распределения заявок, рассмотренного в разделе 3.3.3);
- ввести ограничения в виде неравенств для сумм переменных по столбцам

sum{X(i,j);j=1,2,3}<=a(i) (не реализуется вся выпускаемая продукция): $B$136:$B$138<=$B$129:$B$131.

В результате получим в ячейках $C136:$E$139 оптимальный план, а в ячейке $D$132 – значение целевой функции для этого плана. В ячейках $B$136:$B$138 получим использование выпуска по месяцам, а в ячейках $C$139:$E$139 – выполнение заявок.

Скопируем полученные результаты ячеек В136:Е139 (как числа) в приведенную ниже таблицу, рассчитаем излишки выпускаемой продукции по месяцам(5 столбец) и запишем значение целевой функции из ячейки D132.

Таблица 34.1. План реализации для равномерного распределения спроса

571	571	0	0	0
591	4	575	12	16
563	0	0	563	0
1725	575	575	575	16
	F	15609		

Приведенный план соответствует полученному по методу потенциалов оптимальному опорному плану (таблица 30.2). Значения целевой функции также совпадают. Повторим решение при 1-м и 3-м вариантах заявок.

Таблица 34.2. План реализации для заданного распределения спроса

565	565	0	0	6
597	0	575	22	10
563	0	0	563	0
1725	565	575	585	16
	F	15569		

Таблица 34.3. План реализации для распределения спроса, согласованного с выпуском

565	565	0	0	6
597	0	595	2	10
563	0	0	563	0
1725	565	595	565	16
	F	15529		

Минимальное значение суммарной стоимости реализации получается при 3-м варианте спроса, когда заявки на продукцию формировались с учетом реального выпуска: - во 2-м месяце выпуск (597) и заявок (595), а в 1-м и 3-м месяцах выпуск меньше (565) и меньше заявок (565).

3.3. Решение задачи разработки плана реализации в Mathcad

Рассмотрим процедуру разработки плана реализации продукции в Mathcad для примера 1 при равномерном распределении заявок по месяцам. Исходные данные записываются в виде векторов a, b, матрицы C0p:

Исходные данные для составления плана реализации:

$$a = \begin{pmatrix} 571 \\ 607 \\ 563 \end{pmatrix} \quad b1 = \begin{pmatrix} 575 \\ 575 \\ 575 \\ 16 \end{pmatrix} \quad c0 := 9 \quad r := 2 \quad h := 15$$

$$C0p := \begin{pmatrix} c0 & c0 + r & c0 + 2 \cdot r \\ c0 + h & c0 & c0 + r \\ c0 + 2 \cdot h & c0 + h & c0 \end{pmatrix} \qquad C0p = \begin{pmatrix} 9 & 11 & 13 \\ 24 & 9 & 11 \\ 39 & 24 & 9 \end{pmatrix}$$

Зададим вектор-столбец искомых переменных Q(x). Запишем соотношения для решения исходной задачи линейного программирования в матричной форме.

Для этого сформируем вектор-столбец В ограничений и преобразуем матрицу стоимостей к представленному ниже виду.

Вектор переменных и исходные данные задачи для примера 1

$$Q(x) := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix}$$

$Bp := \mathrm{stack}(a, b1) \qquad Bp^T = (571\ \ 607\ \ 563\ \ 575\ \ 575\ \ 575\ \ 16)$

$j := 1..n \qquad CF_j := Cp_{1,j} \quad CF_{j+n} := Cp_{2,j} \quad CF_{j+2 \cdot n} := Cp_{3,j}$

$CF^T =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	9	11	13	0	24	9	11	0	39	24	9	0

В условиях примера 1 суммарное количество производимой за квартал однородной продукции, равное 1741 ед. больше суммарного количества по заявкам, равного 1725 ед. Поэтому вводим фиктивного потребителя b(4)=16.

Обозначим переменные x_k (k=1,2,...,N=12) и запишем ограничения: $x_1+x_2+x_3+x_4=a(1)=571$; $x_5+x_6+x_7+x_8=a(2)=607$; $x_9+x_{10}+x_{11}+x_{12}=a(3)=563$; $x_1+x_5+x_9=b(1)$; $x_2+x_6+x_{10}=b(2)$; $x_3+x_7+x_{11}=b(3)$; $x_4+x_8+x_{12}=b(4)=16$.

В соответствии с ограничениями формируется матрица коэффициентов Ap .

Формирование матрицы коэффициентов ограничений

$n := n+1 \qquad N := n \cdot m \qquad K := n+m$

$k := 1..K \qquad l := 1..N \qquad Ap_{k,l} := 0 \qquad j := 1..n \qquad Ap_{1,j} := 1 \qquad Ap_{2,j+n} := 1 \qquad Ap_{3,j+2\cdot n} := 1$

$Ap_{4,1} := 1 \qquad Ap_{4,5} := 1 \qquad Ap_{4,9} := 1 \qquad Ap_{5,2} := 1 \qquad Ap_{5,6} := 1 \qquad Ap_{5,10} := 1$

$Ap_{6,3} := 1 \qquad Ap_{6,7} := 1 \qquad Ap_{6,11} := 1 \qquad Ap_{7,4} := 1 \qquad Ap_{7,8} := 1 \qquad Ap_{7,12} := 1$

Матрица коэффициентов ограничений для примера 1

Ap =

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
4	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
5	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
6	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0
7	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1

Запишем последовательность решения исходной задачи в Mathcad.
Решение задачи при равномерном распределении заявок.

$F(x) := CF \cdot Q(x) \qquad l := 1..N \qquad x_l := 0 \qquad \text{Given} \qquad Ap \cdot Q(x) = Bp \qquad Q(x) \ge 0$

$x := \text{Minimize}(F,x) \qquad F(x) = 15609 \qquad (Ap \cdot Q(x))^T = (571\ \ 607\ \ 563\ \ 575\ \ 575\ \ 575\ \ 16)$

Представление результатов решения исходной задачи

$x^T =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	571	0	0	0	4	575	12	16	0	0	563	0

$$Xlr := \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \\ x_9 & x_{10} & x_{11} & x_{12} \end{pmatrix} \qquad Xlr = \begin{pmatrix} 571 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 575 & 12 & 16 \\ 0 & 0 & 563 & 0 \end{pmatrix}$$

Полученное решение соответствует оптимальному плану, представленному в таблице 30.2. Запишем соотношения для решения двойственной задачи линейного программирования в матричной форме. Для этого зададим вектор-столбец переменных двойственной задачи W(y)={u(i),v(j)}, приняв u(i)=y(i); v(j)=y(j+m); тогда CP(i,j)=y(i)+y(j+m).

Переменные и решение двойственной задачи

$$W(y) := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \end{pmatrix} \qquad G(y) := Bp \cdot W(y) \qquad k := 1..K \qquad y_k := 0 \qquad \text{Given} \qquad Ap^T \cdot W(y) \le CF$$

$$y := \text{Maximize}(G,y) \qquad G(y) = 15609 \qquad i := 1..m \qquad j := 1..n \qquad CP_{i,j} := y_i + y_{j+m}$$

Представление результатов решения двойственной задачи

$$y^T = (-15.00\ \ 0.00\ \ -2.00\ \ 24.00\ \ 9.00\ \ 11.00\ \ 0.00) \qquad Cp - CP = \begin{pmatrix} 0 & 17 & 17 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 17 & 17 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Сравним потенциалы оптимального плана, представленного в таблице 30.2 u=[0;15;13]; v=[9;-6;-4;-15], с полученными при решении двойственной задачи в Mathcad. При расчете потенциалов одно из значений принимается произвольно. В методе потенциалов u(1)=0; вектор переменных двойственной задачи для метода потенциалов определится как: y0=[0;15;13;9;-6;-4;-15]. В решении Mathcad v'(4)=0; u'=[-15;0;-2]=u-15;

v'=[24;9;11;0]=v+15. Сумма потенциалов, определяющая «псевдостоимость» CP, одинакова для обоих решений.

Матрица разностей [Cp-CP] содержит нулевые элементы для тех значений i,j, при которых X(i,j)*>0 (i=j=1; i=2, j=1;i=j=2; i=2, j=4;i=j=3; i=3, j=4); элементы матрицы для значений i,j, при которых X(i,j)*=0 положительны - стоимости Cp(i,j) больше "псевдостоимостей" CP(i,j). Значения коэффициентов матрицы [Cp-CP] для свободных клеток совпадают с оценками : d(1,2)=17; d(1,3)=17; d(1,4)=15; d(3,1)=17; d(3,2)=17; d(3,4)=2, рассчитанными по данным таблицы 30.2.

Рассмотрим процедуру разработки плана реализации продукции в Mathcad в условиях примера 4. В исходных данных примера 1 меняются значения вектора b=b4=[570;600;590]; sum{b4(j);j=1,2,3}=1760; a(4)=19.

Ниже представлены исходные данные и соотношения для ограничений.

Формирование матрицы ограничений (пример 4):

$n := 3 \quad m := 3 \quad m := m+1 \quad N := n \cdot m \quad K := n + m \quad a_4 := 19 \quad b4^T = (570\ \ 600\ \ 590)$

$k := 1..K \quad l := 1..N \quad Afp_{k,l} := 0 \quad j := 1..n \quad Afp_{1,j} := 1 \quad Afp_{2,j+n} := 1 \quad Afp_{3,j+2\cdot n} := 1$

$Afp_{4,j+3\cdot n} := 1 \quad Afp_{5,1} := 1 \quad Afp_{5,4} := 1 \quad Afp_{5,7} := 1 \quad Afp_{5,10} := 1 \quad Afp_{6,2} := 1 \quad Afp_{6,5} := 1$

$Afp_{6,8} := 1 \quad Afp_{6,11} := 1 \quad Afp_{7,3} := 1 \quad Afp_{7,6} := 1 \quad Afp_{7,9} := 1 \quad Afp_{7,12} := 1$

Матрица коэффициентов ограничений (пример 4)

Afp =

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
5	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
6	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0
7	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1

Исходные данные для решения задачи в условиях примера 4

$Cfp40 := stack[C0p,(0\ \ 0\ \ 0)] \quad j := 1..n \quad CFp40_j := Cfp40_{1,j} \quad CFp40_{j+n} := Cfp40_{2,j}$

$CFp40_{j+2\cdot n} := Cfp40_{3,j} \quad CFp40_{j+3\cdot n} := Cfp40_{4,j}$

CFp40^T =

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	9	11	13	24	9	11	39	24	9	0	0	0

$a^T = (571\ \ 607\ \ 563\ \ 19) \quad Bfp := stack(a, b4) \quad Bfp^T = (571\ \ 607\ \ 563\ \ 19\ \ 570\ \ 600\ \ 590)$

Решение исходной и двойственной задач записывается в виде, аналогичном решению на с. 53.

Результаты решения в Mathcad для примера 4

$$X4r = \begin{pmatrix} 570 & 0 & 1 \\ 0 & 600 & 7 \\ 0 & 0 & 563 \\ 0 & 0 & 19 \end{pmatrix} \qquad y^T = (13\ \ 11\ \ 9\ \ 0\ \ -4\ \ -2\ \ 0)$$

$$Cfp40 - CfP40 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 17 & 0 & 0 \\ 34 & 17 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$F(x) = 15687$

Результаты решения задачи методом потенциалов в условиях примера 4, соответствующий таблице 31, представим в следующем виде.

Таблица 35. Оптимальный план реализации для примера 4

5701	0
0599	8
00	563
00	19

Значения целевой функции для плана, полученного в Mathcad, и плана, приведенного в таблице 35, совпадают. Однако сами планы отличаются, так как найденное по методу потенциалов оптимальное решение оказалось не единственным. Решение двойственной задачи - потенциалы таблицы 31: u=[0;-2;-4;-13]; v=[9;11;13]; y0=[0;-2;-4;-13;9;11;13] соответствуют решению двойственной задачи в Mathcad: в решении, представленном на рис. 18, v'(3)=0; u'=[13;11;9;0]=u+13; v'=[-4;-2;0]=v-13; при этом сумма потенциалов, определяющая «псевдостоимость», одинакова для обоих решений.

4. РАЗРАБОТКА КОМПЛЕКСНОГО ПЛАНА ВЫПУСКА И РЕАЛИЗАЦИИ ПРОДУКЦИИ

Этот этап является завершающим при выполнении работы.

Исходные данные примера 1 для расчета показателей комплексного плана выпуска и реализации приведены в таблицах 36.1, 36.2, 36.3.

Таблица 36.1 Данные по использованию ресурсов при выпуске продукции

c_j	60	90	85	B_i		
a_{1j}	1,86	3,72	2,79	1860	2000	1800
a_{2j}	4,64	1,99	2,65	1420	1500	1420
a_{3j}	2,30	1,38	1,73	900	950	900

Таблица 36.2 Данные о выпуске и заявках по месяцам и кварталу

Месяц	x_1	x_2	x_3	Всего	Заявки
1	50	335	186	571	565
2	50	374	183	607	575
3	50	295	218	563	585
				1741	1725

Таблица 36.3 Затраты на единицу продукции

Исходная (Сср)	Реализация (c0)	Хранение (r)	Штраф (h)
85,73	9,00	2,00	15,00

Для полученного ранее оптимального плана выпуска продукции на квартал выполняется оценка количества излишков недефицитного ресурса по месяцам и по кварталу в целом. По месяцам и по кварталу в целом рассчитывается планируемый доход (без учета затрат на реализацию). Даются рекомендации по использованию излишков ресурсов. Результаты расчетов представлены в таблице 37.

Таблица 37. Показатели плана выпуска и использования ресурсов за квартал

Ресурс		1-й месяц	2-й месяц	3-й месяц	Квартал
Сырье	запас	1860	2000	1800	5660
	расход	1858,14	1994,85	1798,62	5651,61
	остаток	1,86	5,15	1,38	8,39
Труд	запас	1420	1500	1420	4340
	расход	1391,55	1461,21	1396,75	4249,51
	остаток	28,45	38,79	23,25	90,49
Оборудование	запас	900	950	900	2750
	расход	899	948	899	2746
	остаток	1	2	1	4
Выпуск продукции		571	607	563	1741
Стоимость ед. продукции		85,73	85,73	85,73	85,73
Планируемый доход		48952	52038	48266	149256
Не использовано труда %		2	2,59	1,64	2,09

По этим результатам можно сделать следующие выводы: в течение всего квартала неполностью использовался ресурс 2 – труд; излишки ресурса составили порядка 2 % за квартал; эти излишки можно использовать для других работ, не связанных с производством рассматриваемой продукции.

Для каждого из полученных планов реализации представляют:

- ✓ сводный план выпуска и реализации x(l,k) по месяцам (k=1,2,3) и по кварталу в целом (k=4): 1-я строка - заявка; 2-я - выполнение; 3-я – не реализовано продукции ; 4-я– не выполнено заявок ;
- ✓ затраты непосредственно на реализацию Cr(k)=c0*x(2,k);
- ✓ затраты на хранение запасов Pz(k): Pz(1)=0; Pz(2), Pz(3) рассчитываются по плану реализации с учетом стоимости хранения r; Pz(4) =Pz(2)+Pz(3);
- ✓ штрафы за невыполнение заявок Str(k): для k=1,2,3 Str(k) рассчитываются по плану с учетом штрафа h; Str(4)=sum{Str(k}};
- ✓ суммарные затраты на реализацию с учетом затрат на хранение и штрафов Zp(k)=Cr(k)+Pz(k)+Str(k);
- ✓ стоимость реализованной продукции Dobch(k)=(Ccp+c0)*x(2,k) ;

- ✓ фактический доход, получаемый предприятием при реализации выпущенной продукции Dfakt(k)=Dobch(k)-Zp(k) ;
- ✓ стоимость имеющихся запасов Ctz= (Ccp+c0)*x(3,k);
- ✓ разность между планируемым и фактическим доходами по месяцам и по кварталу в целом: deltaD(k)=Dpl(k)-Dfakt(k);

В качестве показателя эффективности комплексного плана выпуска и реализации по кварталу предлагается использовать величину, показывающую, компенсирует ли стоимость запасов по кварталу в целом сумму затрат на хранение и штрафы и недополученный доход по сравнению с планируемым:

Q=Ctz–{Pz(4)+Str(4)}- deltaD(4).

Очевидно, что лучшим будет план, для которого показатель Q максимален.

Выполним расчеты для трех вариантов плана реализации в условиях примера 1. Для всех вариантов одинаковы следующие показатели: количество реализованной за квартал продукции равно 1725 ед.; стоимость этой продукции с учетом стоимости реализации равна 15525 д.е.; запасы на конец квартала равны 16 ед. , стоимость этих запасов равна 1516 д.е. Исходные данные представлены в документе Mathcad.

Исходные данные для расчетов в варианте 1

$$Xw^T = (571\ \ 607\ \ 563\ \ 1741) \qquad X1r = \begin{pmatrix} 565 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 575 & 22 & 10 \\ 0 & 0 & 563 & 0 \end{pmatrix} \qquad x1 = \begin{pmatrix} 571 & 607 & 563 & 1741 \\ 565 & 575 & 585 & 1725 \\ 6 & 32 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b1^T = (565\ \ 575\ \ 585\ \ 16)$$

В соответствии с принятыми соотношениями и планом реализации для 1-го варианта распределения заявок имеем: все заявки по месяцам выполняются, поэтому штрафы равны нулю. Затраты на хранение запасов учитываются следующим образом:

Pz(2)=r*x1(3,1)=2*6=12;
Pz(3)=r*{x1(3,1)+x1(3,2)}=2*{6+32}=76;
Pz(4)=88.

Таблица 38. Показатели комплексного плана при 1-м варианте распределения заявок

	1-й месяц	2-й месяц	3-й месяц	Квартал
Заявки на продукцию	585	575	585	1725
Выполнение заявок	565	575	585	1725
Не реализовано продукции	6	32	0	16
Не выполнено заявок	0	0	0	0
Стоимость реализации	5085	5175	5265	15525
Стоимость хранения запасов	12	76	0	88
Штрафы за невыполнение	0	0	0	0
Затраты на реализацию	5085	5187	5341	15613
Общая стоимость продукции	53522	54469	55417	163408
Стоимость запасов	568	3031	0	1516
Фактический доход	48437	49282	50076	147795
Разность доходов (план и факт)	514	2755	-1810	1460
Показатель эффективности	-32			

Исходные данные для расчетов в варианте 2

$$X2r = \begin{pmatrix} 571 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 575 & 12 & 16 \\ 0 & 0 & 563 & 0 \end{pmatrix} \qquad x2 = \begin{pmatrix} 571 & 607 & 563 & 1741 \\ 571 & 579 & 575 & 1725 \\ 0 & 28 & 0 & 16 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Анализируя принятые соотношения и план реализации имеем невыполнение заявок 1-го месяца, поэтому штрафы за невыполнение учитываются в затратах 1-го месяца: Str(1)=h*x2(4,1)=15*4=60; Str(2)=Str(3)=0; Str(4)=60. Затраты на хранение запасов следующим образом: Pz учитываются: Pz(2)=0; Pz(3)=r*x1(3,3)=2*28=56; Pz(4)=56.

Таблица 39. Показатели комплексного плана при 2-м варианте распределения заявок

	1-й месяц	2-й месяц	3-й месяц	квартал
Заявки на продукцию	575	575	575	1725
Выполнение заявок	571	579	575	1725
Не реализовано продукции	0	28	0	16
Не выполнено заявок	4	0	0	0
Стоимость реализации	5139	5211	5175	15525
Стоимость хранения запасов	0	0	56	56
Штрафы за невыполнение	60	0	0	60
Затраты на реализацию	5159	5211	5231	15641
Общая стоимость продукции	54091	54848	54469	163408
Стоимость запасов	0	2652	0	1516
Фактический доход	48892	49637	49238	147767
Разность доходов (план и факт)	60	2400	-973	1488
Показатель эффективности	-88			

Исходные данные для расчетов в варианте 3

$$X3r = \begin{pmatrix} 565 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 595 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 563 & 0 \end{pmatrix} \qquad x3 = \begin{pmatrix} 571 & 607 & 563 & 1741 \\ 565 & 595 & 565 & 1725 \\ 6 & 12 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Затраты на хранение запасов учитываются следующим образом:

Pz(2)=r*x1(3,1)=2*6=12;
Pz(3)= r*{x1(3,1)+x1(3,2)}=2*{6+12}=36;
Pz(4)=48.

Таблица 40. Показатели комплексного плана при 3-м варианте распределения заявок

	1-й месяц	2-й месяц	3-й месяц	квартал
Заявки на продукцию	565	595	565	1725
Выполнение заявок	565	579	565	1725
Не реализовано продукции	6	12	0	16
Не выполнено заявок	0	0	0	0
Стоимость реализации	5085	5355	5085	15525
Стоимость хранения запасов	0	12	36	48
Штрафы за невыполнение	0	0	0	0
Затраты на реализацию	5085	5367	5121	15573
Общая стоимость продукции	53522	56364	53522	163408
Стоимость запасов	568	1137	0	1516
Фактический доход	48437	50997	48401	147835
Разность доходов (план и факт)	514	1041	-135	1420
Показатель эффективности	48			

Сравнение представленных выше комплексных планов реализации при различном распределении суммарного запроса на продукцию по месяцам показывает, что показатель эффективности плана больше в 3-м варианте, когда заявки как бы согласовывались (корректировались) с учетом реальной ситуации по выпуску продукции на предприятии.

Выполним расчеты для плана реализации в условиях примера 4.

$$X4r = \begin{pmatrix} 570 & 0 & 1 \\ 0 & 600 & 7 \\ 0 & 0 & 563 \\ 0 & 0 & 19 \end{pmatrix} \qquad x4 = \begin{pmatrix} 571 & 607 & 563 & 1741 \\ 570 & 600 & 571 & 1741 \\ 1 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 19 & 19 \end{pmatrix}$$

Имеется невыполнение заявок 3-го месяца, поэтому штрафы за невыполнение учитываются в затратах 3-го месяца:

Str(3)=h*x4(4,3)=15*19=285: Str(1)=Str(2)=0; Str(4)=285.

Затраты на хранение запасов учитываются следующим образом:

Pz(2)=r*x4(1,3)=2*1=2; Pz(3)=r*{x4(1,3)+x4(2,3)}=2*(1+7)=16; Pz(4)=18.

Таблица 41. Показатели комплексного плана в условиях примера 4

	1-й месяц	2-й месяц	3-й месяц	Квартал
Заявки на продукцию	570	600	590	1760
Выполнение заявок	570	600	571	1741
Не реализовано продукции	1	7	0	0
Не выполнено заявок	0	0	19	19
Стоимость реализации	5130	5400	5139	15525
Стоимость хранения запасов	0	2	16	18
Штрафы за невыполнение	0	0	285	285
Затраты на реализацию	5159	5211	5231	15972
Общая стоимость продукции	54091	54848	54469	163408
Стоимость запасов	95	663	0	0
Фактический доход	48892	49637	49238	147767
Разность доходов (план и факт)	86	602	-385	303
Показатель эффективности	-606			

5. ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Вариант 1							
c(j)	50	70	60	1месяц	2 месяц	3 месяц	X10
a(1,j)	2,9	5,8	4,35	3045	3280	2980	75
a(2,,j)	6,2	2,55	3,88	2000	1900	2015	
a(3,,j)	1,96	1,18	1,47	880	900	880	
			Заявки	620	610	600	1830
Вариант 2							
c(j)	40	60	50	1месяц	2 месяц	3 месяц	X20
a(1,j)	1,8	3,6	2,7	1600	1520	1680	50
a(2,,j)	4,4	1,1	2,2	1540	1540	1600	
a(3,,j)	1,9	0,95	0,95	700	700	720	
			Заявки	600	610	620	1830
Вариант 3							
c(j)	75	100	85	1месяц	2 месяц	3 месяц	X30
a(1,j)	2,67	5,34	4,01	2140	2000	2200	80
a(2,,j)	4,4	1,1	2,75	1320	1320	1150	
a(3,,j)	3,1	1,86	2,33	1250	1200	1170	
			Заявки	510	500	490	1500
Вариант 4							
c(j)	55	75	65	1месяц	2 месяц	3 месяц	X10
a(1,j)	1,92	3,84	2,88	1540	1730	1500	60
a(2,,j)	4,24	1,06	2,65	1100	1050	1050	
a(3,,j)	2,36	1,42	1,77	825	850	800	
			Заявки	475	500	510	1485
Вариант 5							
c(j)	65	90	75	1месяц	2 месяц	3 месяц	X20
a(1,j)	2,9	5,8	4,35	2030	1930	2175	75
a(2,,j)	7,2	1,8	2,7	2160	2160	1980	
a(3,,j)	2,4	1,44	1,2	880	880	820	
			Заявки	480	500	520	1500
Вариант 6							
c(j)	45	65	50	1месяц	2 месяц	3 месяц	X30
a(1,j)	2,2	4,4	3,3	2200	2120	2300	50
a(2,,j)	3,5	1	2	1400	1400	1350	
a(3,,j)	1,8	0,9	1,3	870	870	870	
			Заявки	640	650	660	1950
Вариант 7							
c(j)	65	95	80	1месяц	2 месяц	3 месяц	X10
a(1,j)	3,52	6,64	4,98	2975	3100	2880	80
a(2,,j)	4,96	1,24	3,1	1180	1200	1180	
a(3,,j)	1,68	1,01	1,26	600	620	600	
			Заявки	505	515	525	1545
Вариант 8							
c(j)	40	60	50	1месяц	2 месяц	3 месяц	X20
a(1,j)	2,24	4,48	3,36	2250	2400	2150	50
a(2,,j)	3,08	1,32	1,76	1400	1400	1200	

Вариант 9

c(j)	75	95	85	1месяц	2 месяц	3 месяц	X30
a(1,j)	3,12	5,5	4,95	3090	2950	3140	80
a(2,j)	4,85	2,24	3,1	1730	1730	1700	
a(3,,j)	2,68	1,21	1,36	950	920	920	
			Заявки	625	615	605	1845

Вариант 10

c(j)	60	90	85	1месяц	2 месяц	3 месяц	X10
a(1,j)	1,96	3,92	2,94	1960	1900	2050	50
a(2,,j)	3,71	1,59	2,12	1100	1100	1150	
a(3,,j)	1,84	1,1	1,38	700	700	740	
			Заявки	550	560	570	1680

Вариант 11

c(j)	45	60	50	1месяц	2 месяц	3 месяц	X20
a(1,j)	2,3	4,6	3,45	1610	1480	1750	70
a(2,,j)	3,8	0,95	1,43	1060	960	1060	
a(3,,j)	1,7	1,02	0,85	600	550	600	
			Заявки	490	500	510	1500

Вариант 12

c(j)	40	60	50	1месяц	2 месяц	3 месяц	X30
a(1,j)	2,48	4,96	3,72	2600	2700	2480	80
a(2,,j)	4,83	2,07	3,76	2000	1750	2000	
a(3,,j)	2,24	1,12	1,68	1000	900	1000	
			Заявки	630	625	620	1875

Вариант 13

c(j)	50	70	60	1месяц	2 месяц	3 месяц	X10
a(1,j)	3,32	4,64	3,48	2440	2600	2350	75
a(2,,j)	4,96	1,24	3,1	1580	1530	1280	
a(3,,j)	1,96	1,18	1,47	880	900	780	
			Заявки	610	615	620	1845

Вариант 14

c(j)	60	90	75	1месяц	2 месяц	3 месяц	X20
a(1,j)	1,92	3,84	2,88	1700	1580	1750	100
a(2,,j)	4,64	1,16	1,74	1260	1260	1320	
a(3,,j)	1,84	1,1	0,92	660	650	700	
			Заявки	570	580	590	1740

Вариант 15

c(j)	40	60	50	1месяц	2 месяц	3 месяц	X30
a(1,j)	1,76	3,52	2,64	1760	1720	1820	100
a(2,,j)	4,2	1,2	3,4	1300	1250	1250	
a(3,,j)	1,7	0,85	1,28	680	650	660	
			Заявки	580	590	600	1770

Вариант 16

c(j)	50	70	60	1месяц	2 месяц	3 месяц	X10
a(1,j)	2,4	4,8	3,60	1920	2160	1850	60
a(2,,j)	5,3	1,33	3,31	1350	1250	1100	

Вариант 17

c(j)	65	90	75	1месяц	2 месяц	3 месяц	X20
a(1,j)	2,32	4,84	3,48	1620	1600	1750	75
a(2,,j)	5,76	1,44	2,16	1720	1720	1600	
a(3,,j)	1,92	1,15	0,96	700	700	700	
			Заявки	500	510	520	1530

Вариант 18

c(j)	45	65	50	1месяц	2 месяц	3 месяц	X30
a(1,j)	2,1	4,2	3,15	1890	1820	1820	100
a(2,,j)	3,36	0,96	1,92	1000	950	1100	
a(3,,j)	2,5	1,5	1,88	1000	950	1060	
			Заявки	545	550	540	1635

Вариант 19

c(j)	65	95	80	1месяц	2 месяц	3 месяц	X10
a(1,j)	3,42	6,64	4,98	3000	3100	2850	80
a(2,,j)	6,2	1,55	3,88	1680	1620	1600	
a(3,,j)	1,68	1,01	1,26	700	700	650	
			Заявки	540	530	520	1590

Вариант 20

c(j)	55	65	60	1месяц	2 месяц	3 месяц	X20
a(1,j)	1,98	3,96	2,97	1900	1780	1950	50
a(2,,j)	4,84	1,21	2,42	1770	1700	1820	
a(3,,j)	2,09	1,05	1,05	800	800	840	
			Заявки	665	645	625	1935

Вариант 21

c(j)	50	70	60	1месяц	2 месяц	3 месяц	X30
a(1,j)	3,42	6,84	5,13	2740	2700	2800	60
a(2,,j)	6,3	1,58	3,94	1890	1870	1850	
a(3,,j)	3,68	1,84	2,76	1400	1380	1400	
			Заявки	515	520	525	1560

Вариант 22

c(j)	60	90	85	1месяц	2 месяц	3 месяц	X10
a(1,j)	1,86	3,72	2,79	1860	2000	1800	50
a(2,,j)	4,64	1,99	2,65	1420	1520	1420	
a(3,,j)	2,3	1,38	1,73	900	950	900	
			Заявки	565	575	590	1730

Вариант 23

c(j)	45	65	55	1месяц	2 месяц	3 месяц	X20
a(1,j)	3,36	6,72	5,04	2800	2500	2850	80
a(2,,j)	4,62	2,98	2,64	1700	1550	1720	
a(3,,j)	2,88	1,73	1,44	1000	940	1020	
			Заявки	540	550	560	1650

Вариант 24

c(j)	45	60	50	1месяц	2 месяц	3 месяц	X30
a(1,j)	2,04	4,08	3,06	1430	1490	1400	80
a(2,,j)	4,4	1,1	2,65	1460	1400	1400	

Вариант 25

c(j)	50	70	60	1месяц	2 месяц	3 месяц	X10
a(1,j)	2,9	5,8	4,35	3050	3200	2900	75
a(2,,j)	6,2	1,55	3,88	1980	1880	1700	
a(3,,j)	1,96	1,18	1,47	880	880	800	
			Заявки	640	620	600	1860

Вариант 26

c(j)	45	60	50	1месяц	2 месяц	3 месяц	X20
a(1,j)	2,19	4,37	3,28	1530	1350	1750	70
a(2,,j)	3,42	0,86	1,28	1050	820	880	
a(3,,j)	1,7	1,02	0,85	600	500	560	
			Заявки	490	495	500	1485

Вариант 27

c(j)	50	70	60	1месяц	2 месяц	3 месяц	X30
a(1,j)	1,9	3,8	2,85	1520	1450	1400	60
a(2,,j)	3,36	0,84	2,1	1000	920	1100	
a(3,,j)	1,96	0,98	1,47	750	710	800	
			Заявки	480	500	520	1500

Вариант 28

c(j)	50	70	60	1месяц	2 месяц	3 месяц	X10
a(1,j)	2,28	4,56	3,42	1825	2000	1750	60
a(2,,j)	7,42	1,86	4,64	1900	1600	1950	
a(3,,j)	3,54	2,12	2,66	1240	1200	1240	
			Заявки	500	480	460	1440

Вариант 29

c(j)	60	90	75	1месяц	2 месяц	3 месяц	X20
a(1,j)	2,4	4,8	3,60	2500	2350	2650	100
a(2,,j)	5,8	1,45	2,18	1980	1740	1925	
a(3,,j)	2,3	1,38	1,15	1000	900	1000	
			Заявки	710	695	680	2085

Вариант 30

c(j)	45	65	50	1месяц	2 месяц	3 месяц	X30
a(1,j)	3,76	7,52	5,64	3380	3300	3420	50
a(2,,j)	5,78	1,65	3,3	1550	1550	1500	
a(3,,j)	2,9	1,45	2,18	1000	1000	980	
			Заявки	540	520	500	1560

Вариант 31

c(j)	65	95	80	1месяц	2 месяц	3 месяц	X10
a(1,j)	4,98	9,96	7,47	4480	4800	4300	80
a(2,,j)	9,3	1,92	4,81	2350	2200	2200	
a(3,,j)	2,52	1,51	1,89	1000	1000	950	
			Заявки	560	540	520	1620

Вариант 32

c(j)	40	60	50	1месяц	2 месяц	3 месяц	X20
a(1,j)	2,97	5,94	4,46	2300	2400	2150	50
a(2,,j)	7,26	1,82	3,63	2250	2300	2250	

Вариант 33

c(j)	65	90	75	1месяц	2 месяц	3 месяц	X30
a(1,j)	2,7	5,4	4,05	1890	2100	1800	50
a(2,,j)	3,68	0,92	2,38	1040	1025	1000	
a(3,,j)	2,24	1,12	1,68	780	800	750	
			Заявки	460	470	480	1410

Вариант 34

c(j)	75	95	85	1месяц	2 месяц	3 месяц	X10
a(1,j)	2,88	5,76	4,32	3200	3400	3100	100
a(2,,j)	4,24	1,06	1,65	1200	1200	1150	
a(3,,j)	1,77	1,10	1,32	900	900	850	
			Заявки	670	680	690	2040

Вариант 35

c(j)	40	80	50	1месяц	2 месяц	3 месяц	X20
a(1,j)	4,03	8,06	6,05	3400	3550	3250	80
a(2,,j)	6,93	2,97	3,96	2500	2580	2480	
a(3,,j)	4,32	2,59	2,16	1510	1550	1510	
			Заявки	580	570	560	1710

Вариант 36

c(j)	75	100	85	1месяц	2 месяц	3 месяц	X30
a(1,j)	1,84	3,68	2,76	1470	1500	1430	50
a(2,,j)	4,86	1,22	3,05	1360	1300	1300	
a(3,,j)	1,8	0,9	1,35	630	610	610	
			Заявки	520	500	480	1500

Вариант 37

c(j)	65	85	75	1месяц	2 месяц	3 месяц	X10
a(1,j)	4,75	5,30	4,25	3500	3400	3580	80
a(2,,j)	3,72	1,93	2,92	1850	1800	1800	
a(3,,j)	1,85	1,11	1,49	1000	1000	1000	
			Заявки	700	720	740	2160

Вариант 38

c(j)	45	60	50	1месяц	2 месяц	3 месяц	X20
a(1,j)	3,28	6,56	4,92	2300	2200	2550	70
a(2,,j)	6,84	1,71	2,57	1820	1720	1750	
a(3,,j)	3,06	1,84	1,53	1000	950	1000	
			Заявки	480	500	520	1500

Вариант 39

c(j)	65	90	75	1месяц	2 месяц	3 месяц	X30
a(1,j)	3,32	6,64	4,98	2320	2350	2380	50
a(2,,j)	5,76	1,44	3,16	1320	1300	1270	
a(3,,j)	1,92	1,15	1,44	630	630	670	
			Заявки	430	440	450	1320

Вариант 40

c(j)	65	85	70	1месяц	2 месяц	3 месяц	X10
a(1,j)	2,45	4,9	3,68	2400	2200	2550	75
a(2,,j)	5,57	2,39	2,38	1600	1500	1700	

Вариант 41							
c(j)	60	90	75	1месяц	2 месяц	3 месяц	X20
a(1,j)	2,28	4,56	3,42	1600	1500	1750	100
a(2,,j)	6,96	1,74	2,61	1800	1800	1850	
a(3,,j)	2,76	1,66	1,38	900	900	1000	
			Заявки	470	480	490	1440

Вариант 42							
c(j)	65	95	80	1месяц	2 месяц	3 месяц	X30
a(1,j)	2,84	5,68	4,26	2550	2450	2600	75
a(2,,j)	3,92	0,98	2,45	1370	1300	1370	
a(3,,j)	2,24	1,12	1,68	1000	920	1000	
			Заявки	570	575	580	1725

Вариант 43							
c(j)	60	75	55	1месяц	2 месяц	3 месяц	X10
a(1,j)	7,42	5,57	3,71	3400	3200	3550	70
a(2,,j)	3,97	1,99	2,48	1600	1500	1700	
a(3,,j)	1,96	1,18	1,47	900	850	970	
			Заявки	650	660	670	1980

Вариант 44							
c(j)	45	65	50	1месяц	2 месяц	3 месяц	X20
a(1,j)	4,84	9,67	7,26	4080	4150	3950	75
a(2,,j)	5,54	4,38	3,17	2040	2040	1950	
a(3,,j)	4,32	2,59	2,16	1450	1420	1350	
			Заявки	560	565	570	1695

Вариант 45							
c(j)	75	100	85	1месяц	2 месяц	3 месяц	X30
a(1,j)	1,78	3,56	2,67	1420	1370	1500	80
a(2,,j)	3,52	0,88	2,2	1050	1050	1000	
a(3,,j)	2,48	1,49	1,86	1000	980	1000	
			Заявки	510	500	520	1530

Вариант 46							
c(j)	55	70	60	1месяц	2 месяц	3 месяц	X10
a(1,j)	4,8	3,6	2,40	1780	1820	1650	75
a(2,,j)	4,3	3,31	1,33	1480	1480	1300	
a(3,,j)	2,36	1,42	1,77	900	950	920	
			Заявки	525	535	545	1605

Вариант 47							
c(j)	50	70	55	1месяц	2 месяц	3 месяц	X20
a(1,j)	3,28	6,72	5,04	2700	2600	2860	100
a(2,,j)	1,62	3,98	2,64	1450	1450	1550	
a(3,,j)	3,6	2,16	1,80	1250	1250	1275	
			Заявки	545	555	565	1665

Вариант 48							
c(j)	40	60	50	1месяц	2 месяц	3 месяц	X30
a(1,j)	3,1	6,2	5,2	3200	3250	3150	80
a(2,,j)	3,22	1,38	1,84	1300	1300	1240	

Вариант 49							
c(j)	55	75	65	1месяц	2 месяц	3 месяц	X10
a(1,j)	5,8	2,9	4,35	1850	1800	1950	75
a(2,,j)	3,88	6,2	1,55	1400	1380	1500	
a(3,,j)	1,47	1,18	1,96	820	750	800	
			Заявки	430	440	450	1320

Вариант 50							
c(j)	60	85	70	1месяц	2 месяц	3 месяц	X20
a(1,j)	2,62	5,25	3,94	1400	1350	1475	75
a(2,,j)	5,47	1,37	2,06	1550	1550	1500	
a(3,,j)	2,45	1,47	1,22	810	810	780	
			Заявки	390	400	410	1200

Вариант 51							
c(j)	45	65	50	1месяц	2 месяц	3 месяц	X30
a(1,j)	2,64	5,28	3,96	2370	2270	2500	50
a(2,,j)	4,2	1,2	2,4	1260	1260	1160	
a(3,,j)	2,48	1,08	1,62	860	840	820	
			Заявки	540	550	560	1650

Вариант 52							
c(j)	60	85	75	1месяц	2 месяц	3 месяц	X10
a(1,j)	4,35	8,7	6,53	4575	4620	4500	100
a(2,,j)	9,3	2,33	5,82	2800	2750	2800	
a(3,,j)	2,94	1,77	2,21	1310	1300	1300	
			Заявки	605	620	610	1835

Вариант 53							
c(j)	50	85	70	1месяц	2 месяц	3 месяц	X20
a(1,j)	2,66	5,31	3,98	1500	1450	1975	75
a(2,,j)	3,97	1,99	2,48	1250	1300	1500	
a(3,,j)	1,34	0,81	1,01	470	510	580	
			Заявки	420	440	460	1320

Вариант 54							
c(j)	45	65	50	1месяц	2 месяц	3 месяц	X30
a(1,j)	2,29	4,58	3,43	2800	2850	2750	100
a(2,,j)	5,46	1,56	3,12	1800	1800	1650	
a(3,,j)	2,21	1,11	1,66	1000	1000	940	
			Заявки	700	690	680	2070

Вариант 55							
c(j)	55	70	60	1месяц	2 месяц	3 месяц	X10
a(1,j)	4,45	3,34	2,23	1320	1420	1280	50
a(2,,j)	2,38	1,19	1,49	740	760	720	
a(3,,j)	1,18	1,05	1,12	540	540	520	
			Заявки	485	490	475	1450

Вариант 56							
c(j)	65	80	75	1месяц	2 месяц	3 месяц	X20
a(1,j)	2,05	4,1	3,08	1400	1350	1475	80
a(2,,j)	4,26	3,57	2,35	1530	1550	1500	

Библиографический список

Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике: учебник. - М.: Дело и сервис, 2004. - 210 с.

Салманов О.Н. Математическая экономика с применением Mathcad и Excel. - СПб.: БХВ — СПб., 2003. - 464 с.

Орлова И.В. Экономико-математическое моделирование: практическое пособие по решению задач. - М.: Вузовский учебник, 2005. - 144 с.

Содержание

1. Общие положения 3
1.1. Цель работы 3
1.2. Содержание работы, требования к оформлению пояснительной записки 3
2. Разработка оптимального плана выпуска продукции на квартал 6
2.1. Решение задачи разработки оптимального плана выпуска продукции симплекс методом........ -
2.2. Двойственная задача линейного программирования 14
2.3. Определение параметров оптимальных планов 22
2.4. Формирование оптимального плана выпуска продукции на квартал 36
3. Разработка оптимального плана реализации продукции .... -
3.1. Математическая формулировка задачи .... -
3.2. Решение задачи разработки плана реализации с использованием функций Excel 48
3.3. Решение задачи разработки плана реализации в Mathcad 51
4. Разработка комплексного плана выпуска и реализации продукции 56
5. Варианты индивидуальных заданий 63

Учебное издание

Марианна Вячеславовна Подобед
Ольга Валентиновна Подобед

УЧЕБНОЕ ПРИМЕНЕНИЕ MATHCAD И EXCEL В ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ (ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ)

Учебное пособие

Редактор и техн. редактор Л.Я.Титова Тем. план 2008г., поз. 67

Подп. к печати 29.12.2008 . Формат 60x84/16. Бумага тип.№ 1.
Печать офсетная. 4,5 уч.-изд. л.; 4,5 усл. печ. л.
Тираж 100 экз. Изд.№ 67. Цена «С». Заказ 2200.

Ризограф ГОУВПО Санкт-Петербургского государственного технологического университета растительных полимеров, 198095, СПб., ул. Ивана Черных, 4.