ISSN 0023-4206

Том 50, Номер 4 Июль - Август 2012

КОСМИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

http://www.naukaran.ru
http://www.maik.ru

"НАУКА"

КОСМИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ, 2012, том 50, № 4, с. 335–340

УДК 531.36:521.1

ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ ИСЗ НА ЭКВАТОРИАЛЬНОЙ ОРБИТЕ

А. Ю. Александров, А. А. Тихонов

Санкт-Петербургский государственный университет

alex43102006@yandex.ru, aatikhonov@rambler.ru

Поступила в редакцию 17.03.2011 г.

Рассматривается ИСЗ с электродинамической системой стабилизации. На основе метода функций Ляпунова получены достаточные условия асимптотической устойчивости прямого положения равновесия ИСЗ в орбитальной системе координат при наличии возмущающего воздействия гравитационного момента. Эти условия позволяют обеспечить рациональный выбор коэффициентов параметрического управления в зависимости от параметров ИСЗ и его орбиты.

1. ВВЕДЕНИЕ

Электродинамическое взаимодействие искусственного спутника Земли (ИСЗ) с магнитным полем Земли оказывает существенное влияние на динамику вращательного движения спутника относительно его центра масс и может использоваться при построении систем управления ориентацией ИСЗ. Основанные на указанном взаимодействии магнитные системы управления, их преимущества, особенности и недостатки описаны, например, в работах [1] и [2]. Метод стабилизации ИСЗ, основанный на использовании момента лоренцевых сил, предложен в работе [3], где показано, что создание управляющего лоренцева момента, значительно превышающего по величине гравитационный и другие возмущающие моменты, не вызывает технических трудностей.

Электродинамический метод стабилизации ИСЗ, использующий одновременно возможности магнитного и лоренцева моментов, и снимающий некоторые ограничения (как по постановке задачи, так и по методике решения), содержавшиеся в [3], описан в работе [4]. В этой же работе был предложен механизм демпфирования собственных колебаний ИСЗ, не выходящий за рамки тех функциональных возможностей, которые содержатся в самой электродинамической системе управления. Рассмотрен вопрос о стабилизации ИСЗ в прямом положении равновесия в орбитальной системе координат. Математическое обоснование метода опирается на рассмотрение дифференциальных уравнений линейного приближения. С использованием результатов численного анализа корней характеристического полинома доказано существование области значений параметров ИСЗ и его орбиты, обеспечивающих устойчивость прямого положения равновесия при постоянно действующих возмущениях.

Цель данной работы заключается в строгом аналитическом доказательстве асимптотической устойчивости прямого положения равновесия ИСЗ в орбитальной системе координат на базе анализа нелинейных дифференциальных уравнений движения. На основе прямого метода Ляпунова [5] и развития способов построения функций Ляпунова, предложенных в работах [6], [7], получены достаточные условия асимптотической устойчивости прямого положения равновесия ИСЗ в орбитальной системе координат при наличии возмущающего воздействия гравитационного момента. Эти условия позволяют обеспечить рациональный выбор коэффициентов параметрического управления k_Λ и k_M в зависимости от параметров ИСЗ и его орбиты. Кроме того, в данной работе содержится развитие предложенного в [4] параметрического метода стабилизации ИСЗ путем использования переменных коэффициентов усиления k_Λ и k_M.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассматривается ИСЗ, центр масс которого движется по круговой экваториальной орбите радиуса R. Предполагается, что ИСЗ снабжен управляемым электростатическим зарядом $Q\int\limits_V \sigma dV$, распределенным по некоторому объему V с плотностью σ, и управляемым собственным магнитным моментом $\mathbf{I}$. Так же как и в [4], исследуется вращательное движение ИСЗ относительно его центра масс в орбитальной системе координат (в данной статье используются правые декартовы прямоугольные системы координат) $C\xi\eta\zeta$ с началом в центре масс ИСЗ, ось $C\xi(\xi_0)$ которой направлена по касательной к орбите в сторону движения, ось $C\eta(\eta_0)$ – по нормали к плоскости орбиты, ось $C\zeta(\zeta_0)$ – вдоль радиуса-вектора

$\mathbf{R} = \overrightarrow{O_3C} = R\zeta_0$ центра масс ИСЗ относительно центра Земли O_3. Иследование проводится с учетом вращения орбитальной системы координат относительно инерциальной системы с угловой скоростью ω_0. С ИСЗ жестко связана система его главных центральных осей инерции $Cxyz$ (орты $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$). Ориентация осей $Cxyz$ относительно осей $C\xi\eta\zeta$ определяется матрицей $\mathbf{A}$ направляющих косинусов $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ $(i = 1, 2, 3)$ так, что справедливы равенства

$$\xi_0 = \alpha_1\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j} + \alpha_3\mathbf{k}, \quad \eta_0 = \beta_1\mathbf{i} + \beta_2\mathbf{j} + \beta_3\mathbf{k},$$
$$\zeta_0 = \gamma_1\mathbf{i} + \gamma_2\mathbf{j} + \gamma_3\mathbf{k}.$$

Если определять ориентацию ИСЗ в орбитальной системе координат, принятой за базовую, с помощью параметров Родрига–Гамильтона λ_i, $(i = \overline{0,3})$ [8], то элементы матрицы $\mathbf{A}$ имеют вид

$$\alpha_1 = \lambda_0^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2, \quad \alpha_2 = 2(\lambda_1\lambda_2 - \lambda_0\lambda_3),$$
$$\alpha_3 = 2(\lambda_1\lambda_3 + \lambda_0\lambda_2),$$
$$\beta_1 = 2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_0\lambda_3), \quad \beta_2 = \lambda_0^2 + \lambda_2^2 - \lambda_1^2 - \lambda_3^2,$$
$$\beta_3 = 2(\lambda_2\lambda_3 - \lambda_0\lambda_1),$$
$$\gamma_1 = 2(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2), \quad \gamma_2 = 2(\lambda_2\lambda_3 + \lambda_0\lambda_1),$$
$$\gamma_3 = \lambda_0^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2.$$

Программная ориентация ИСЗ в орбитальной системе координат задается некоторым значением $\mathbf{A}_0$ матрицы направляющих косинусов. В частности, далее будет рассмотрен случай, когда $\mathbf{A}_0$ – единичная матрица, что соответствует прямому положению равновесия ИСЗ в орбитальной системе координат.

В процессе движения ИСЗ относительно геомагнитного поля с магнитной индукцией $\mathbf{B}$ возбуждается лоренцев момент $\mathbf{M}_\Lambda$ и магнитный момент $\mathbf{M}_M$, соответственно имеющие вид

$$\mathbf{M}_\Lambda = \mathbf{P} \times \mathbf{T}, \quad \mathbf{M}_M = \mathbf{I} \times \mathbf{B},$$

где $\mathbf{P} = Q\rho_0$, $\rho_0 = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k} = Q^{-1}\int_V \sigma\rho dV$ – радиус-вектор центра заряда ИСЗ относительно его центра масс, $\mathbf{v}_C$ – скорость центра масс ИСЗ относительно геомагнитного поля, ω_3 – угловая скорость суточного вращения Земли, $\mathrm{T} = \mathbf{A}^\top(\mathbf{v}_C \times \mathbf{B})$, значение $\mathbf{B}$ в этой формуле совпадает со значением $\mathbf{B}$ в центре масс ИСЗ.

В работе [4] показано, что путем программного изменения управляемых электродинамических параметров $\mathbf{P}$ и $\mathbf{I}$ можно обеспечить управление угловым положением ИСЗ. Для решения задачи стабилизации ИСЗ предложены следующие законы изменения параметров $\mathbf{P}$ и $\mathbf{I}$:

$$\mathbf{P} = k_\Lambda\mathbf{T}_0 + h_\Lambda\omega' \times \mathbf{T}, \quad \mathbf{I} = k_M\mathbf{B}_0 + h_M\omega' \times \mathbf{B}.$$

Здесь $\mathbf{T}_0 = \mathbf{A}_0^\top(\mathbf{v}_C \times \mathbf{B})$, $\mathbf{B}_0 = \mathbf{A}_0^\top\mathbf{B}$, ω' – угловая скорость ИСЗ относительно базовой системы координат, k_Λ, k_M, h_Λ, h_m – коэффициенты пропорциональности, в качестве которых могут выступать скалярные функции времени. При этом управляющие моменты $\mathbf{M}_\Lambda$ и $\mathbf{M}_M$ соответственно примут вид

$$\mathbf{M}_\Lambda = k_\Lambda\mathbf{T}_0 \times \mathbf{T} + h_\Lambda(\omega' \times \mathbf{T}) \times \mathbf{T}, \tag{1}$$

$$\mathbf{M}_M = k_M\mathbf{B}_0 \times \mathbf{B} + h_M(\omega' \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}. \tag{2}$$

Анализ вопроса о стабилизации ИСЗ в орбитальной системе координат будем проводить на базе нелинейных дифференциальных уравнений вращательного движения ИСЗ, построенных по схеме Эйлера–Пуассона:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{J}\omega) + \omega \times (\mathbf{J}\omega) = \mathbf{M}_\Gamma + \mathbf{M}_\Lambda + \mathbf{M}_M,$$
$$\frac{d\xi_0}{dt} = \xi_0 \times \omega - \omega_0\zeta_0, \quad \frac{d\eta_0}{dt} = \eta_0 \times \omega,$$
$$\frac{d\zeta_0}{dt} = \zeta_0 \times \omega + \omega_0\xi_0.$$

Здесь $\mathbf{J} = diag(A, B, C)$ – тензор инерции ИСЗ в системе координат $Cxyz$, $\omega = \omega' + \omega_0$ – абсолютная угловая скорость ИСЗ, $\mathbf{M}_\Gamma$ – главный момент гравитационных сил – основной из возмущающих моментов, действующих на ИСЗ в околоземном пространстве. Полагая далее, что орты ξ, $\boldsymbol{\eta}$, ζ заданы в орбитальной системе координат равенствами $\xi_0 = (1,0,0)^\top$, $\eta_0 = (0,1,0)^\top$, $\zeta_0 = (0,0,1)^\top$, а гравитационный момент имеет вид $\mathbf{M}_\Gamma = 3\omega_0^2(\mathbf{A}^\top\zeta_0) \times (\mathbf{J}\mathbf{A}^\top\zeta_0)$, перепишем дифференциальные уравнения Эйлера–Пуассона в векторной форме, более удобной для проектирования на оси $Cxyz$, жестко связанные с ИСЗ:

$$\begin{gathered}
\frac{d}{dt}[\mathbf{J}(\omega' + \omega_0\mathbf{A}^\top\eta_0)] + [\omega' + \omega_0\mathbf{A}^\top\eta_0] \times \\
\times [\mathbf{J}(\omega' + \omega_0\mathbf{A}^\top\eta_0)] = 3\omega_0^2(\mathbf{A}^\top\zeta_0) \times (\mathbf{J}\mathbf{A}^\top\zeta_0) + \\
+ k_\Lambda[\mathbf{A}_0^\top(\mathbf{v}_C \times \mathbf{B})] \times [\mathbf{A}^\top(\mathbf{v}_C \times \mathbf{B})] + k_M(\mathbf{A}_0^\top\mathbf{B}) \times \\
\times (\mathbf{A}^\top\mathbf{B}) - h_\Lambda[(\mathbf{A}^\top(\mathbf{v}_C \times \mathbf{B}))^2\omega' - \\
- (\mathbf{A}^\top(\mathbf{v}_C \times \mathbf{B})) \times ((\mathbf{A}^\top(\mathbf{v}_C \times \mathbf{B}))\omega')] - \\
- h_M[(\mathbf{A}^\top\mathbf{B})^2\omega' - (\mathbf{A}^\top\mathbf{B})((\mathbf{A}^\top\mathbf{B})\omega')], \\
\frac{d}{dt}(\mathbf{A}^\top\xi_0) + \omega' \times (\mathbf{A}^\top\xi_0) = 0, \\
\frac{d}{dt}(\mathbf{A}^\top\eta_0) + \omega' \times (\mathbf{A}^\top\eta_0) = 0, \\
\frac{d}{dt}(\mathbf{A}^\top\zeta_0) + \omega' \times (\mathbf{A}^\top\zeta_0) = 0.
\end{gathered} \tag{3}$$

Принимая орбитальную систему координат за базовую, естественно считать, что орты $\mathbf{A}^\top\xi_0 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^\top$, $\mathbf{A}^\top\eta_0 = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)^\top$, $\mathbf{A}^\top\zeta_0 =$

$= (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)^\top$ неизменны в базовой системе координат. Обозначим их короче:

$$\mathbf{A}^\top\xi_0 = \mathbf{s}_1, \quad \mathbf{A}^\top\eta_0 = \mathbf{s}_2, \quad \mathbf{A}^\top\zeta_0 = \mathbf{s}_3.$$

Аналогичным образом орты

$$\mathbf{A}_0^\top\xi_0 = (\alpha_{10}, \alpha_{20}, \alpha_{30})^\top, \quad \mathbf{A}_0^\top\boldsymbol{\eta}_0 = (\beta_{10}, \beta_{20}, \beta_{30})^\top,$$
$$\mathbf{A}_0^\top\zeta_0 = (\gamma_{10}, \gamma_{20}, \gamma_{30})^\top$$

связаны с ИСЗ и неизменны в системе координат $Cxyz$. Обозначим их

$$\mathbf{A}_0^\top\xi_0 = \mathbf{r}_1, \quad \mathbf{A}_0^\top\eta_0 = \mathbf{r}_2, \quad \mathbf{A}_0^\top\zeta_0 = \mathbf{r}_3.$$

Тогда дифференциальные уравнения Эйлера примут вид

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}[\mathbf{J}(\omega' + \omega_0\mathbf{s}_2)] + [\omega' + \omega_0\mathbf{s}_2] \times [\mathbf{J}(\omega' + \omega_0\mathbf{s}_2)] = \\ = 3\omega_0^2(\mathbf{s}_3) \times (\mathbf{J}\mathbf{s}_3) + k_\Lambda[\mathbf{A}_0^\top(\mathbf{v}_C \times \mathbf{B})] \times \\ \times [\mathbf{A}^\top(\mathbf{v}_C \times \mathbf{B})] + k_M(\mathbf{A}_0^\top\mathbf{B}) \times (\mathbf{A}^\top\mathbf{B}) - \\ - h_\Lambda[(\mathbf{A}^\top(\mathbf{v}_C \times \mathbf{B}))^2\omega' - (\mathbf{A}^\top(\mathbf{v}_C \times \mathbf{B})) \times \\ \times ((\mathbf{A}^\top(\mathbf{v}_C \times \mathbf{B}))\omega')] - \\ -h_M[(\mathbf{A}^\top\mathbf{B})^2\omega' - (\mathbf{A}^\top\mathbf{B})((\mathbf{A}^\top\mathbf{B})\omega')].\end{gathered}$$

3. ПОЛОЖЕНИЕ РАВНОВЕСИЯ

В случае движения ИСЗ по круговой экваториальной орбите и принятия используемой далее простейшей дипольной модели геомагнитного поля имеют место равенства $\mathbf{v}_C = R(\omega_0 - \omega_3)\xi_0$, $\mathbf{B} = -(R_3/R)^3 g_1^0\eta_0$, где R_3 – радиус Земли, g_1^0 – первый гауссов коэффициент. Поэтому

$$\mathbf{v}_C \times \mathbf{B} = v_{C\xi}B_\eta\zeta_0, \ \mathbf{T} = v_{C\xi}B_\eta\mathbf{s}_3,$$
$$\mathbf{T}_0 = v_{C\xi}B_\eta\mathbf{r}_3, \ \mathbf{B} = B_\eta\mathbf{s}_2, \ \mathbf{B}_0 = B_\eta\mathbf{r}_2.$$

Подставляя эти выражения в (1) и (2), получим

$$\begin{gathered}\mathbf{M}_\Lambda = k_\Lambda\mathbf{T}_0 \times \mathbf{T} - h_\Lambda[T^2\omega' - \mathbf{T}(\mathbf{T}\omega')] = \\ = k_{\Lambda 0}\mathbf{r}_3 \times \mathbf{s}_3 - h_{\Lambda 0}[\omega' - \mathbf{s}_3(\mathbf{s}_3\omega')],\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\mathbf{M}_M = k_M\mathbf{B}_0 \times \mathbf{B} - h_M[B^2\omega' - \mathbf{B}(\mathbf{B}\omega')] = \\ = k_{M0}\mathbf{r}_2 \times \mathbf{s}_2 - h_{M0}[\omega' - \mathbf{s}_2(\mathbf{s}_2\omega')].\end{gathered}$$

В этих формулах коэффициенты k_Λ, k_M, h_Λ, h_M взяты в виде

$$k_\Lambda = \frac{k_{\Lambda 0}}{(v_{C\xi}B_\eta)^2}, \quad h_\Lambda = \frac{h_{\Lambda 0}}{(v_{C\xi}B_\eta)^2},$$
$$k_M = \frac{k_{M0}}{B_\eta^2}, \quad h_M = \frac{h_{M0}}{B_\eta^2},$$

где $k_{\Lambda 0}$, k_{M0}, $h_{\Lambda 0}$, h_{M0} – положительные постоянные, находящиеся в нашем распоряжении.

В результате, динамические уравнения Эйлера примут вид

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}[\mathbf{J}(\omega' + \omega_0\mathbf{s}_2)] + (\omega' + \omega_0\mathbf{s}_2) \times [\mathbf{J}(\omega' + \omega_0\mathbf{s}_2)] = \\ = 3\omega_0^2(\mathbf{s}_3) \times (\mathbf{J}\mathbf{s}_3) + k_{\Lambda 0}(\mathbf{r}_3 \times \mathbf{s}_3) + k_{M0}(\mathbf{r}_2 \times \mathbf{s}_2) - \\ -h_{\Lambda 0}[\omega' - \mathbf{s}_3(\mathbf{s}_3\omega)] - h_{M0}[\omega' - \mathbf{s}_2(\mathbf{s}_2\omega')].\end{gathered} \tag{4}$$

Для замыкания дифференциальной системы следует рассматривать их совместно с кинематическими уравнениями Пуассона (3), которые с учетом введенных обозначений примут вид

$$\begin{gathered}\frac{d\mathbf{s}_1}{dt} + \omega' \times \mathbf{s}_1 = 0, \quad \frac{d\mathbf{s}_2}{dt} + \omega' \times \mathbf{s}_2 = 0, \\ \frac{d\mathbf{s}_3}{dt} + \omega' \times \mathbf{s}_3 = 0.\end{gathered} \tag{5}$$

В рассматриваемой постановке задачи ИСЗ имеет прямое положение равновесия ($\mathbf{r}_1 = (1,0,0)^\top$, $\mathbf{r}_2 = (0,1,0)^\top$, $\mathbf{r}_3 = (0,0,1)^\top$) в орбитальной системе координат:

$$\omega' = 0, \quad \mathbf{s}_i = \mathbf{r}_i, \quad i = 1,2,3. \tag{6}$$

4. УСЛОВИЯ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Определим условия на параметры $k_{\Lambda 0}$, k_{M0}, $h_{\Lambda 0}$, h_{M0}, при выполнении которых прямое положение равновесия ИСЗ является асимптотически устойчивым. Решение поставленной задачи основано на применении метода функций Ляпунова. Для построения функции Ляпунова будем использовать подходы, предложенные в работах [6], [7]. Представим уравнения (4) в виде

$$\begin{gathered}\mathbf{J}\frac{d\omega'}{dt} + \omega_0(C + A - B)\begin{pmatrix}\omega'_z \\ 0 \\ -\omega'_x\end{pmatrix} + \\ + \omega_0^2\begin{pmatrix}0 & 0 & C-B \\ 0 & 0 & 0 \\ B-A & 0 & 0\end{pmatrix}(\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2) = \\ = 3\omega_0^2\begin{pmatrix}0 & C-B & 0 \\ A-C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}(\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3) - \Psi(\mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3) - \\ - h_{\Lambda 0}[\omega' - \mathbf{s}_3(\mathbf{s}_3\omega')] - h_{M0}[\omega' - \mathbf{s}_2(\mathbf{s}_2\omega')] + \Phi(\omega', \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3),\end{gathered}$$

где

$$\Psi(\mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3) = -k_{\Lambda 0}(\mathbf{r}_3 \times \mathbf{s}_3) - k_{M0}(\mathbf{r}_2 \times \mathbf{s}_2),$$

а для векторной функции $\Phi(\omega, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3)$ справедлива оценка

$$\|\mathbf{\Phi}(\omega', \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3)\| \le a_1\left(\|\omega'\|^2 + \|\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2\|^2 + \|\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3\|^2\right),$$

причем положительная постоянная a_1 зависит от значений параметров A, B, C, ω_0.

Сначала, следуя подходу, предложенному в [6], в качестве функции Ляпунова выбираем функцию

$$V_1 = \frac{1}{2}\omega'^{\top}\mathbf{J}\omega' + \frac{k_{\Lambda 0}}{2}\|\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3\|^2 + \frac{k_{M0}}{2}\|\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2\|^2.$$

Дифференцируя ее в силу системы (4), (5), имеем

$$\begin{gathered}\frac{dV_1}{dt} = -h_{\Lambda 0}(\|\omega'\|^2 - (\mathbf{s}_3\omega')^2) - \\ - h_{M0}(\|\omega'\|^2 - (\mathbf{s}_2\omega')^2) + \omega'^{\top}\mathbf{\Phi} - \\ -\omega_0^2\omega'^{\top}\begin{pmatrix} 0 & 0 & C-B \\ 0 & 0 & 0 \\ B-A & 0 & 0 \end{pmatrix}(\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2) + 3\omega_0^2\omega'^{\top} \times \\ \times \begin{pmatrix} 0 & C-B & 0 \\ A-C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}(\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3).\end{gathered}$$

Далее строим функцию

$$\begin{gathered}V_2 = V_1 - \frac{1}{2}\omega_0^2(\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2)^{\top}\begin{pmatrix} A-B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C-B \end{pmatrix}(\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2) - \\ - \frac{3}{2}\omega_0^2(\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3)^{\top}\begin{pmatrix} C-A & 0 & 0 \\ 0 & C-B & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}(\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3).\end{gathered}$$

Получим

$$\begin{gathered}\frac{dV_2}{dt} = -h_{\Lambda 0}(\|\boldsymbol{\omega}'\|^2 - (\mathbf{s}_3\boldsymbol{\omega})^2) - h_{M0}(\|\boldsymbol{\omega}'\|^2 - \\ - (\mathbf{s}_2\boldsymbol{\omega}')^2) + \boldsymbol{\omega}'^{\top}\Phi + \omega_0^2(\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2)^{\top} \cdot \\ \cdot \begin{pmatrix} A-B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C-B \end{pmatrix}(\omega' \times (\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2)) + \\ + 3\omega_0^2(\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3)^{\top}\begin{pmatrix} C-A & 0 & 0 \\ 0 & C-B & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}(\omega' \times (\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3)).\end{gathered}$$

Наконец, используя подход, разработанный в [9], [6], [7], добавляем к функции V_2 "перекрестное слагаемое". Пусть

$$V_3 = V_2 + \kappa\omega'^{\top}\mathbf{J}\Psi, \quad \kappa = \mathrm{const} > 0.$$

Производная функции V_3 в силу исследуемой системы представима в виде

$$\begin{gathered}\frac{dV_3}{dt} = -h_{\Lambda 0}(\|\boldsymbol{\omega}'\|^2 - (\mathbf{s}_3\boldsymbol{\omega}')^2) - h_{M0}(\|\boldsymbol{\omega}'\|^2 - \\ - (\mathbf{s}_2\boldsymbol{\omega}')^2) + \boldsymbol{\omega}'^{\top}\mathbf{\Phi} - \kappa\|\mathbf{\Psi}\|^2 + \\ + \kappa\mathbf{\Psi}^{\top}\left\{\mathbf{\Phi} - \omega_0(C + A - B)\begin{pmatrix} \omega'_z \\ 0 \\ -\omega'_x \end{pmatrix} - \right. \\ - \omega_0^2\begin{pmatrix} 0 & 0 & C-B \\ 0 & 0 & 0 \\ B-A & 0 & 0 \end{pmatrix}(\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2) + 3\omega_0^2\begin{pmatrix} 0 & C-B & 0 \\ A-C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \\ \left. \cdot (\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3) - h_{\Lambda 0}[\boldsymbol{\omega}' - \mathbf{s}_3(\mathbf{s}_3\boldsymbol{\omega}')] - h_{M0}[\boldsymbol{\omega}' - \mathbf{s}_2(\mathbf{s}_2\boldsymbol{\omega}')]\right\} - \\ - \kappa\boldsymbol{\omega}'^{\top}\mathbf{J}[k_{M0}(\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{s}_2) \times \mathbf{r}_2 + k_{\Lambda 0}(\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{s}_3) \times \mathbf{r}_3] + \\ + 3\omega_0^2(\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3)^{\top}\begin{pmatrix} C-A & 0 & 0 \\ 0 & C-B & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}(\boldsymbol{\omega}' \times (\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3)) + \\ + \omega_0^2(\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2)^{\top}\begin{pmatrix} A-B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C-B \end{pmatrix}(\boldsymbol{\omega}' \times (\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2)).\end{gathered}$$

Заметим, что справедливы соотношения

$$\begin{gathered}\mathbf{s}_2(\mathbf{s}_2\boldsymbol{\omega}') = (\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2)(\mathbf{r}_2\boldsymbol{\omega}') + \mathbf{s}_2((\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2)\boldsymbol{\omega}') + (0, \omega'_y, 0)^{\top}, \\ \mathbf{s}_3(\mathbf{s}_3\boldsymbol{\omega}') = (\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3)(\mathbf{r}_3\boldsymbol{\omega}') + \mathbf{s}_3((\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3)\boldsymbol{\omega}') + (0, 0, \omega'_z)^{\top}, \\ (\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{s}_2) \times \mathbf{r}_2 = (\boldsymbol{\omega}' \times (\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2)) \times \mathbf{r}_2 - (\omega'_x, 0, \omega'_z)^{\top}, \\ (\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{s}_3) \times \mathbf{r}_3 = (\boldsymbol{\omega}' \times (\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3)) \times \mathbf{r}_3 - (\omega'_x, \omega'_y, 0)^{\top}.\end{gathered}$$

Следовательно, имеет место оценка

$$\frac{dV_3}{dt} \le -h_{\Lambda 0}\left(\omega_x'^2 + \omega_y'^2\right) - h_{M0}\left(\omega_x'^2 + \omega_z'^2\right) +$$
$$+ \kappa k_{M0}(A\omega_x'^2 + C\omega_z'^2) + \kappa k_{\Lambda 0}(A\omega_x'^2 + B\omega_y'^2) -$$
$$- \kappa\|\Psi\|^2 + \kappa\omega_0^2\|\Psi\|\left\|\begin{pmatrix} 0 & 0 & C-B \\ 0 & 0 & 0 \\ B-A & 0 & 0 \end{pmatrix}(\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2) -\right.$$
$$\left. - 3\begin{pmatrix} 0 & C-B & 0 \\ A-C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}(\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3)\right\| +$$
$$+ \kappa\|\Psi\|\left\|\omega_0(C + A - B)\begin{pmatrix} \omega_z' \\ 0 \\ -\omega_x' \end{pmatrix} + h_{\Lambda 0}\begin{pmatrix} \omega_x' \\ \omega_y' \\ 0 \end{pmatrix} + h_{M0}\begin{pmatrix} \omega_x' \\ 0 \\ \omega_z' \end{pmatrix}\right\| +$$
$$+ a_2(\|\omega'\|^3 + \|\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2\|^3 + \|\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3\|^3),$$

где положительная постоянная a_2 зависит от значений параметров A, B, C, ω_0, κ, $k_{\Lambda 0}$, k_{M0}, $h_{\Lambda 0}$, h_{M0}.

Для функции V_3 имеют место неравенства

$$\frac{1}{2}\omega'^{\top}\mathbf{J}\omega' + \frac{k_{\Lambda 0}}{2}\|\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3\|^2 + \frac{k_{M0}}{2}\|\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2\|^2 -$$
$$- \frac{\omega_0^2}{2}[(A - B)\beta_1^2 + (C - B)\beta_3^2 + 3(C - A)\gamma_1^2 +$$
$$+ 3(C - B)\gamma_2^2] - \kappa\|\mathbf{J}\|\|\omega'\|(k_{M0}\|\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2\| +$$
$$+ k_{\Lambda 0}\|\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3\|) \le V_3 \le \frac{1}{2}\omega'^{\top}\mathbf{J}\omega' + \frac{k_{\Lambda 0}}{2}\|\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3\|^2 +$$
$$+ \frac{k_{M0}}{2}\|\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2\|^2 - \frac{\omega_0^2}{2}[(A - B)\beta_1^2 + (C - B)\beta_3^2 +$$
$$+ 3(C - A)\gamma_1^2 + 3(C - B)\gamma_2^2] +$$
$$+ \kappa\|\mathbf{J}\|\|\omega'\|(k_{M0}\|\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2\| + k_{\Lambda 0}\|\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3\|).$$

Значит, если выполнены соотношения

$$k_{\Lambda 0} > 3\omega_0^2(C - A), \quad k_{\Lambda 0} > 3\omega_0^2(C - B),$$
$$k_{M0} > \omega_0^2(A - B), \quad k_{M0} > \omega_0^2(C - B), \tag{7}$$

то существуют положительные числа b_1 и b_2, такие что при достаточно малых значениях κ справедливы оценки

$$b_1\left(\|\omega'\|^2 + \|\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2\|^2 + \|\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3\|^2\right) \le$$
$$\le V_3 \le b_2\left(\|\omega'\|^2 + \|\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2\|^2 + \|\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3\|^2\right).$$

Для получения оценки производной функции V_3 в силу системы (4), (5) используем параметры Родрига–Гамильтона λ_i, $(i = \overline{0,3})$. Имеем

$$\|\Psi\|^2 = (k_{\Lambda 0}\gamma_2 - k_{M0}\beta_3)^2 + k_{\Lambda 0}^2\gamma_1^2 + k_{M0}\beta_1^2 =$$
$$= 4[k_{\Lambda 0}(\lambda_2\lambda_3 + \lambda_0\lambda_1) - k_{M0}(\lambda_2\lambda_3 - \lambda_0\lambda_1)]^2 +$$
$$+ 4k_{\Lambda 0}^2(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2)^2 + 4k_{M0}^2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_0\lambda_3)^2 =$$
$$= 4k_{\Lambda 0}^2\left(\lambda_1^2\lambda_3^2 + \lambda_0^2\lambda_2^2\right) + 4k_{M0}^2\left(\lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_0^2\lambda_3^2\right) +$$
$$+ 4\lambda_0^2\lambda_1^2(k_{\Lambda 0} + k_{M0})^2 + 4\lambda_2^2\lambda_3^2(k_{\Lambda 0} - k_{M0})^2,$$

$$\|\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2\|^2 = 4\left(\lambda_1^2 + \lambda_3^2\right), \quad \|\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3\|^2 = 4\left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2\right),$$
$$\left\|\begin{pmatrix} 0 & 0 & C-B \\ 0 & 0 & 0 \\ B-A & 0 & 0 \end{pmatrix}(\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2) -\right.$$
$$\left. - 3\begin{pmatrix} 0 & C-B & 0 \\ A-C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}(\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3)\right\|^2 =$$
$$= \left\|\begin{pmatrix} (C - B)(\beta_3 - 3\gamma_2) \\ 3(C - A)\gamma_1 \\ (B - A)\beta_1 \end{pmatrix}\right\|^2 =$$
$$= 4(C - B)^2(2\lambda_2\lambda_3 - 4\lambda_0\lambda_1)^2 + 36(C - A)^2 \times$$
$$\times (\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2)^2 + 4(B - A)^2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_0\lambda_3)^2.$$

Таким образом, если

$$k_{\Lambda 0} > 3\omega_0^2|C - A|, \quad k_{M0} > \omega_0^2|B - A|,$$
$$k_{\Lambda 0} + k_{M0} > 4\omega_0^2|C - B|, \tag{8}$$

то можно выбрать положительные числа κ_0, Δ, и b_3 так, чтобы при $0 < \kappa < \kappa_0$, $\|\omega'\|^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 < \Delta^2$ имела место оценка

$$\frac{dV_3}{dt} \le -b_3\left(\|\omega'\|^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2\right).$$

Получаем, что справедлива следующая теорема.

Теорема. При выполнении неравенств (7), (8) положение равновесия (6) системы (4), (5) асимптотически устойчиво.

Если ввести в рассмотрение безразмерные инерционные параметры $\delta = B/A$ и $\varepsilon = C/A$, то неравенства (7), (8) можно переписать в следующей эквивалентной форме:

$$k_{\Lambda 0} > 3A\omega_0^2 \cdot \max\{\varepsilon - \delta, |\varepsilon - 1|/3\},$$
$$k_{M0} > A\omega_0^2 \cdot \max\{\varepsilon - \delta, |\delta - 1|\}, \tag{9}$$
$$k_{\Lambda 0} + k_{M0} > 4A\omega_0^2|\varepsilon - \delta|.$$

Отсюда, в частности, следует, что при любых δ и ε, удовлетворяющих условиям $\delta < 2$ и $\varepsilon < 2$ (т.е. в достаточно сильном удалении от точки $\delta = \varepsilon = 1$, соответствующей отсутствию гравитационного момента), для выполнения неравенств (9) достаточно взять $k_{\Lambda 0}$ и k_{M0} такими, чтобы $k_{\Lambda 0} > 3A\omega_0^2$, $k_{M0} > A\omega_0^2$. В то же самое время гравитационный момент имеет величину порядка $3A\omega_0^2$. Следовательно, достаточно выбрать коэффициенты $k_{\Lambda 0}$ и k_{M0} так, чтобы величина управляющего лоренцева момента была всего лишь больше величины порядка модуля возмущающего гравитационного момента. Это условие, как показано в [3], легко выполняется. Поэтому техническая реализация выполнения условий (9) не вызывает трудностей.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для решения задач, связанных с управлением угловой ориентацией ИСЗ, в работе [3] была предложена, а в работе [4] развита концепция электродинамической системы стабилизации. Однако вопрос об аналитическом представлении в явном виде достаточных условий асимптотической устойчивости стабилизируемого положения равновесия ИСЗ в орбитальной системе координат оставался открытым. В настоящей работе дан положительный ответ на этот вопрос на базе исследования нелинейных дифференциальных уравнений движения ИСЗ. Доказана теорема об асимптотической устойчивости прямого положения равновесия ИСЗ в орбитальной системе координат. Анализ доказательства данной теоремы позволяет сделать следующие выводы:

1. Для обеспечения асимптотической устойчивости положения равновесия на параметры $h_{\Lambda 0}$ и h_{M0} не требуется накладывать никаких условий, кроме их положительности.

2. Параметры $h_{\Lambda 0}$ и h_{M0} могут являться непрерывными ограниченными функциями времени, для которых при всех $t \geq 0$ справедливы неравенства $h_{\Lambda 0}(t) \geq \bar{h}$, $h_{M0}(t) \geq \bar{h}$, где $\bar{h}$ — положительная постоянная.

3. Построенная функция Ляпунова может быть использована для оценки области асимптотической устойчивости положения равновесия (6).

4. С помощью построенной функции Ляпунова можно получить условия, при выполнении которых возмущения не нарушают асимптотической устойчивости положения равновесия.

Предложенная в работе методика построения функции Ляпунова может быть использована для распространения полученных результатов на более общие случаи, приводящие к более сложным дифференциальным уравнениям с почти периодическим коэффициентами (неэкваториальные и некеплеровы орбиты, недипольные модели магнитного поля Земли и др.).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Коваленко А.П.* Магнитные системы управления космическими летательными аппаратами. М., Машиностроение, 1975.
2. *Алпатов А.П., Драновский В.И., Салтыков Ю.Д., Хорошилов В.С.* Динамика космических аппаратов с магнитными системами управления. М.: Машиностроение, 1978.
3. *Тихонов А.А.* Метод полупассивной стабилизации космического аппарата в геомагнитном поле // Космич. исслед. 2003. Т. 41. № 1. С. 69–79. (Cosmic Research. P. 63).
4. *Антипов К.А., Тихонов А.А.* Параметрическое управление в задаче о стабилизации космического аппарата в магнитном поле Земли // Автоматика и телемеханика. 2007. № 8. С. 44–56.
5. *Барбашин Е.А.* Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967.
6. *Зубов В.И.* Динамика управляемых систем. М.: Высш. школа, 1982.
7. *Смирнов Е.Я.* Некоторые задачи математической теории управления. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1981.
8. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973.
9. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. М.: Наука, 1965.