

ISSN 0005-2310



АТ
АВТОМАТИКА
И ЭЛЕМЕХАНИКА

•Наука•

8
2007

PACS 45.40.-f

© 2007 г. К.А. АНТИПОВ,
А.А. ТИХОНОВ, д-р физ.-мат. наук
(Санкт-Петербургский государственный университет)

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ В ЗАДАЧЕ О СТАБИЛИЗАЦИИ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ ЗЕМЛИ¹

Космический аппарат, электродинамически взаимодействующий с магнитным полем Земли, испытывает параметрические возмущения, причем параметры космического аппарата представляют собой управляемые квазипериодические функции. При некоторых условиях существуют алгоритмы управления электродинамическими параметрами космического аппарата, которые позволяют реализовать системы стабилизации углового положения космического аппарата. Устойчивость стабилизированной ориентации космического аппарата подтверждается как аналитически, так и расчетами на РС.

1. Введение

Силы электродинамического взаимодействия космического аппарата с магнитным полем Земли оказывают существенное влияние на динамику вращательного движения аппарата вокруг его центра масс и могут использоваться при построении систем управления ориентацией космического аппарата.

Магнитные системы управления можно успешно применять на долгофункциональных космических аппаратах ввиду того, что эти системы управления достаточно просты, обладают высокой надежностью и не требуют расхода рабочего тела [1, 2]. Вместе с тем магнитные системы управления обладают функциональной особенностью, ограничивающей их возможности по направлению вектора управляющего момента.

В [3] впервые опубликован метод полупассивной стабилизации космического аппарата, движущегося по кеплеровой круговой орбите в геомагнитном поле, основанный на использовании электродинамического эффекта влияния лоренцевых сил, воздействующих на заряженную часть поверхности космического аппарата. Доказано, что путем управляемого изменения радиуса-вектора $\vec{\rho}_0$ центра заряда космического аппарата относительно центра масс космического аппарата можно создать управляемый момент лоренцевых сил и использовать его в качестве восстанавливающего в окрестности прямого положения равновесия космического аппарата в орбитальной системе координат. Использование этого момента не требует расхода какого-либо рабочего вещества исполнительным механизмом, не требует приведения в движение каких-либо тел, имеющих массу, отличается простотой закона управления, надежностью и экономичностью. Предложен определенный вариант закона управления радиусом-вектором $\vec{\rho}_0$, реализующий данный метод для орбит с небольшими наклонениями i и вырождающийся для средних и больших значений i .

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05-01-01073).

В настоящей работе показано, что указанный метод может быть обобщен на случай произвольного положения космического аппарата в орбитальной системе координат и предложен новый закон управления, пригодный для орбит с любыми наклонениями. Однако использование одного лишь момента лоренцевых сил связано с наличием ограничения по направлению вектора управляющего момента, сходного с упомянутым выше ограничением направления магнитного момента. Показано, что отмеченные недостатки обеих систем управления исчезают при создании единой электродинамической системы управления ориентацией космического аппарата, использующей одновременно оба восстанавливающих момента – магнитных и лоренцевых сил. Предложен также механизм демпфирования собственных колебаний космического аппарата, не выходящий за рамки тех функциональных возможностей, которые содержатся в самой электродинамической системе управления.

2. Главный момент лоренцевых сил

Рассматривается космический аппарат, центр масс которого движется в ньютоновском центральном гравитационном поле Земли по круговой кеплеровой орбите радиуса R . Предполагается, что космический аппарат снабжен электростатическим зарядом Q , распределенным по некоторому объему V с плотностью σ : $Q = \int_V \sigma dV$.

Исследуется вращательное движение космического аппарата относительно его центра масс в орбитальной системе координат² $C\xi\eta\zeta$ (рис. 1) с началом в центре масс космического аппарата, ось $C\xi(\xi_0)$ которой направлена по касательной к орбите в сторону движения, ось $C\eta(\eta_0)$ – по нормали к плоскости орбиты, ось $C\zeta(\zeta_0)$ – вдоль радиуса-вектора $\vec{R} = \vec{O_3C} = R\vec{\zeta}_0$ центра масс космического аппарата относительно центра Земли O_3 . Исследование проводится с учетом вращения орбитальной системы координат относительно инерциальной системы с угловой скоростью ω_0 . В качестве инерциальной системы координат принимается система $O_3X_*Y_*Z_*$, ось $O_3Z_*(\vec{k}_*)$ которой направлена по оси собственного вращения Земли, ось $O_3X_*(\vec{i}_*)$ – в восходящий узел орбиты, а плоскость (X_*Y_*) совпадает с плоскостью экватора.

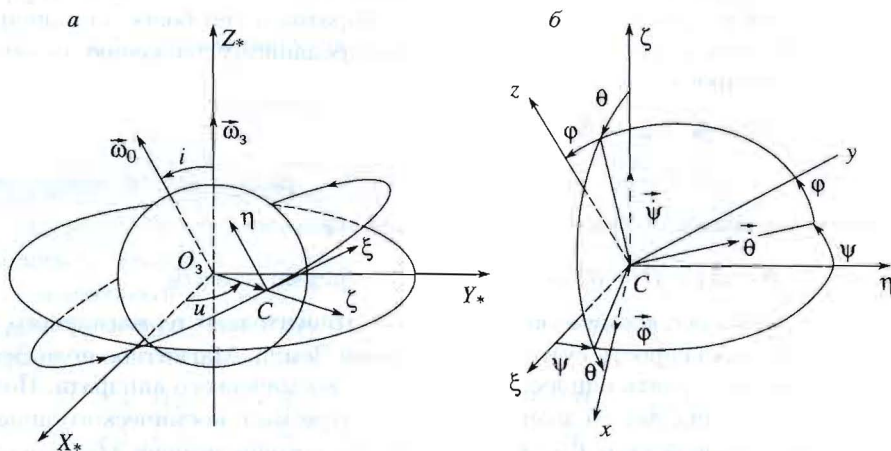


Рис. 1. Системы координат.

² В работе используются правые декартовы прямоугольные системы координат.

Используется также жестко связанная с космическим аппаратом система его главных центральных осей инерции $Cxyz$ (орты $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$). Ориентация орбитальной системы координат относительно системы $O_3X_*Y_*Z_*$ определяется на основании равенств

$$\begin{aligned}\vec{i}_0 &= -\sin u \vec{\xi}_0 + \cos u \vec{\zeta}_0, & \vec{j}_0 &= \cos i \cos u \vec{\xi}_0 - \sin i \vec{\eta}_0 + \cos i \sin u \vec{\zeta}_0, \\ \vec{k}_0 &= \sin i \cos u \vec{\xi}_0 + \cos i \vec{\eta}_0 + \sin i \sin u \vec{\zeta}_0,\end{aligned}$$

где $i = \widehat{(\vec{k}_*, \vec{\eta}_0)}$ – наклонение орбиты; $u = \widehat{(\vec{i}_*, \vec{\zeta}_0)}$ – аргумент широты, причем $u = \omega_0 t$, где ω_0 – орбитальная угловая скорость центра масс космического аппарата.

Ориентация осей xyz относительно осей $\xi\eta\zeta$ определяется матрицей \mathbf{A} направляющих косинусов $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ ($i = 1, 2, 3$) так, что имеют место равенства

$$\vec{\xi}_0 = \alpha_1 \vec{i} + \alpha_2 \vec{j} + \alpha_3 \vec{k}, \quad \vec{\eta}_0 = \beta_1 \vec{i} + \beta_2 \vec{j} + \beta_3 \vec{k}, \quad \vec{\zeta}_0 = \gamma_1 \vec{i} + \gamma_2 \vec{j} + \gamma_3 \vec{k},$$

если определять ориентацию космического аппарата в орбитальной системе координат с помощью “самолетных” углов φ, θ, ψ (рис. 1), то элементы матрицы \mathbf{A} примут вид

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \cos \psi \cos \theta, & \alpha_2 &= -\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \sin \theta, \\ \alpha_3 &= \sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi \sin \theta, & \beta_1 &= \sin \psi \cos \theta, \\ \beta_2 &= \cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi \sin \theta, & \beta_3 &= -\sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi \sin \theta, \\ \gamma_1 &= -\sin \theta, & \gamma_2 &= \sin \varphi \cos \theta, & \gamma_3 &= \cos \varphi \cos \theta.\end{aligned}$$

В процессе движения космического аппарата относительно геомагнитного поля взаимодействие заряда экрана с геомагнитным полем приводит к возбуждению сил Лоренца. Главный момент этих сил относительно центра масс космического аппарата определяется по формуле

$$\vec{M}_Л = \int_V \sigma \vec{\rho} \times (\vec{v} \times \vec{B}) dV,$$

где $\vec{\rho}$ – радиус-вектор элемента dV экрана относительно центра масс космического аппарата, а \vec{v} – скорость элемента dV относительно геомагнитного поля. В [4] показано, что для любых реальных космических аппаратов и тем более для аппаратов, функционирующих в режимах, близких к ориентированному движению, момент $\vec{M}_Л$ можно аппроксимировать выражением

$$(1) \quad \vec{M}_Л = \vec{P} \times \mathbf{A}^T (\vec{v}_C \times \vec{B}),$$

где $\vec{P} = Q \vec{\rho}_0$, $\vec{\rho}_0 = x_0 \vec{i} + y_0 \vec{j} + z_0 \vec{k} = Q^{-1} \int_V \sigma \vec{\rho} dV$ – радиус-вектор центра заряда космического аппарата относительно его центра масс,

$$\vec{v}_C = \dot{\vec{R}} - \vec{\omega}_3 \times \vec{R} = R(\omega_0 - \omega_3 \cos i) \vec{\xi}_0 + R\omega_3 \sin i \cos u \vec{\eta}_0$$

– скорость центра масс космического аппарата относительно геомагнитного поля, $\vec{\omega}_3 = \omega_3 \vec{k}_*$ – угловая скорость суточного вращения Земли. Магнитное поле Земли в этом случае можно считать однородным в объеме космического аппарата. Поэтому значение \vec{B} в (1) совпадает со значением \vec{B} в центре масс космического аппарата. Вводя в рассмотрение вектор $\vec{T} = \mathbf{A}^T (\vec{v}_C \times \vec{B})$, представим момент $\vec{M}_Л$ в виде

$$\vec{M}_Л = \vec{P} \times \vec{T}.$$

Такая аппроксимация момента $\vec{M}_Л$ допустима при не слишком малых величинах $|\vec{\rho}_0|$ ввиду пренебрежимо малого в этом случае влияния характера распределения

заряда по объему космического аппарата на его динамику. В условиях квадрупольного приближения геомагнитного поля вектор \vec{B} определяется по формуле, полученной в [4]

$$\begin{pmatrix} B_\xi \\ B_\eta \\ B_\zeta \end{pmatrix} = \left(\frac{R_3}{R}\right)^3 \begin{pmatrix} \sin u & -\cos u & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2\cos u & 2\sin u & 0 \end{pmatrix} \Gamma \mathbf{M}^{(1)} + \left(\frac{R_3}{R}\right)^4 \begin{pmatrix} 2\sin u & -2\cos u & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 3\cos u & 3\sin u & 0 \end{pmatrix} \Gamma \mathbf{M}^{(2)} \Gamma^\top \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix},$$

где $\Gamma = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \cos i \sin \phi & \cos i \cos \phi & \sin i \\ -\sin i \sin \phi & -\sin i \cos \phi & \cos i \end{pmatrix}$, ϕ – часовой угол восходящего узла,

$$\mathbf{M}^{(1)} = \begin{pmatrix} g_1^1 \\ h_1^1 \\ g_1^0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}^{(2)} = \begin{pmatrix} 3g_2^2 - \frac{1}{2}g_2^0 & 3h_2^2 & \frac{3}{2}g_2^1 \\ 3h_2^2 & -3g_2^2 - \frac{1}{2}g_2^0 & \frac{3}{2}h_2^1 \\ \frac{3}{2}g_2^1 & \frac{3}{2}h_2^1 & g_2^0 \end{pmatrix}$$

– мультипольные тензоры 1-го и 2-го рангов, представляющие собой соответственно дипольный и квадрупольный магнитные моменты, выраженные через гауссовы коэффициенты g_n^m , h_n^m [5].

Для нахождения проекций момента \vec{M}_L на оси x, y, z представим (1) в виде

$$\vec{M}_L = Q(x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}) \times \left[\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{C\eta}B_\zeta \\ -v_{C\xi}B_\zeta \\ v_{C\xi}B_\eta - v_{C\eta}B_\xi \end{pmatrix} \right].$$

В [3] показано, что момент \vec{M}_L лоренцевых сил может значительно превышать гравитационный и другие возмущающие моменты и может использоваться как восстанавливающий момент в системе ориентации космического аппарата.

3. Восстанавливающие компоненты управляющих моментов

Пусть задана программная ориентация космического аппарата в орбитальной системе координат некоторым значением матрицы направляющих косинусов $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 = \text{const}$. В частности, матрица \mathbf{A}_0 может быть единичной. Подставляя $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0$ в выражение (1), найдем такие значения вектора \vec{P} , при которых \vec{M}_L обращается в ноль в программной ориентации космического аппарата, т.е. является восстанавливающим моментом в окрестности ориентации \mathbf{A}_0 . Очевидно, что вектор \vec{P} должен удовлетворять условию $\vec{P} = k_L \vec{T}_0$, где $k_L = k_L(t)$ – произвольная скалярная функция, $\vec{T}_0 = k_L \mathbf{A}_0^\top (\vec{v}_C \times \vec{B})$. При этом компоненты вектора \vec{P} определяются по формулам

$$\begin{aligned} P_x &= k_L(t) [\alpha_{10} v_{C\eta} B_\zeta - \beta_{10} v_{C\xi} B_\zeta + \gamma_{10} (v_{C\xi} B_\eta - v_{C\eta} B_\xi)], \\ P_y &= k_L(t) [\alpha_{20} v_{C\eta} B_\zeta - \beta_{20} v_{C\xi} B_\zeta + \gamma_{20} (v_{C\xi} B_\eta - v_{C\eta} B_\xi)], \\ P_z &= k_L(t) [\alpha_{30} v_{C\eta} B_\zeta - \beta_{30} v_{C\xi} B_\zeta + \gamma_{30} (v_{C\xi} B_\eta - v_{C\eta} B_\xi)]. \end{aligned}$$

Следовательно, если координаты центра заряда космического аппарата будут изменяться по закону (2), то момент \vec{M}_L будет являться восстанавливающим в окрестности заданного положения и может быть использован для поддержания заданной

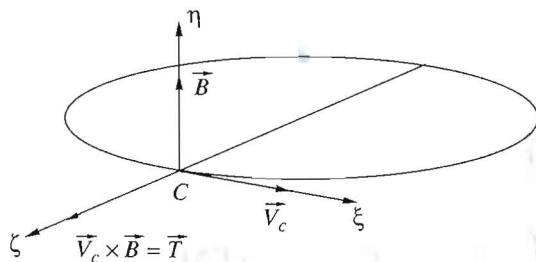


Рис. 2. Векторы \vec{B} и \vec{T} .

ориентации космического аппарата. Равенства (2) можно рассматривать как закон управления положением центра заряда для осуществления заданной ориентации космического аппарата.

В [6] были рассчитаны зависимости максимальных значений $|\vec{\rho}_0|$ (а следовательно, и $|\vec{P}|$) для различных значений параметров орбит и показано, что $|\vec{\rho}_0|$ принимает значения, малые по сравнению с размерами космического аппарата или сравнимые с ними. Поэтому практическая реализация управления ориентацией космического аппарата с использованием момента лоренцевых сил не вызовет принципиальных трудностей. Использование этого момента не требует расхода какого-либо рабочего вещества исполнительным механизмом, не требует приведения в движение каких-либо тел, имеющих массу, отличается простотой закона управления, надежностью и экономичностью.

Особенностью систем, использующих \vec{M}_L для стабилизации космического аппарата, является то, что \vec{M}_L ортогонален вектору $\vec{T} = \vec{v}_C \times \vec{B}$ и поэтому невозможно создать управляющий момент лоренцевых сил, направленный вдоль вектора \vec{T} .

Обратимся к рассмотрению момента магнитных сил \vec{M}_M . Как известно, этот момент

$$(3) \quad \vec{M}_M = \vec{I} \times \vec{B},$$

где \vec{I} – собственный магнитный момент космического аппарата, может быть использован для стабилизации углового положения космического аппарата путем программного изменения величины и направления вектора \vec{I} . Однако из (3) следует, что момент магнитных сил ортогонален вектору \vec{B} и поэтому невозможно создать управляющий магнитный момент, направленный вдоль вектора \vec{B} .

По аналогии с моментом лоренцевых сил восстанавливающий момент магнитных сил можно представить в виде (3), где $\vec{I} = k_M \vec{B}_0$, $\vec{B}_0 = \mathbf{A}_0^T \vec{B}$, k_M – некоторый коэффициент пропорциональности.

Сравнив отмеченные выше функциональные особенности и вытекающие из них недостатки магнитных систем управления и систем, использующих момент \vec{M}_L , легко заметить, что эти недостатки исчезают при создании единой электродинамической системы управления ориентацией космического аппарата, использующей одновременно оба восстанавливающих момента: \vec{M}_L и \vec{M}_M .

Действительно, недостатки, заключающиеся в наличии таких направлений, вдоль которых было возможно неуправляемое вращение космического аппарата (эти направления – соответственно \vec{B} и \vec{T} – показаны на рис. 2), сразу исчезают при объединении \vec{M}_L и \vec{M}_M в одной электродинамической системе управления.

Это объясняется тем, что векторы \vec{B} и \vec{T} всегда ортогональны и, следовательно, теперь нет таких направлений, вдоль которых возможно неуправляемое вращение космического аппарата.

4. Демпфирующие компоненты управляющих моментов

Восстанавливающие моменты $\vec{M}_Д$ и $\vec{M}_М$ являются основой механизма функционирования электродинамической системы управления. Однако стабилизация углового положения космического аппарата невозможна без демпфирующего момента $\vec{M}_Д$, обеспечивающего погашение собственных колебаний космического аппарата в окрестности устойчивого положения равновесия. Поэтому, как отмечается в [7], выбор способа создания демпфирующего момента и разработка конкретного механизма демпфирования является одной из основных задач, которые необходимо решить при практической реализации систем ориентации космического аппарата.

Предлагаемая концепция построения электродинамической системы управления на базе совместного использования лоренцевых и магнитных сил с управляемыми электродинамическими параметрами – статическим моментом заряда первого порядка \vec{P} и собственным магнитным моментом \vec{I} – позволяет обеспечить механизм демпфирования собственных колебаний космического аппарата не выходя за рамки тех функциональных возможностей, которые содержатся в самой электродинамической системе управления. Действительно, исходя из требования подобрать такой закон изменения вектора \vec{P} , который обеспечивал бы создание составляющей момента $\vec{M}_Д$, направленной на погашение угловой скорости $\vec{\omega}'$ космического аппарата в базовой системе координат, можно предложить следующие дополнительные условия для подбора искомого закона: пропорциональность величины демпфирующего момента $\vec{M}_Д$ величине угловой скорости $\vec{\omega}'$, направленность момента $\vec{M}_Д$ под тупым углом к вектору $\vec{\omega}'$, наличие максимального значения $|\vec{M}_Д|$ при $(\vec{M}_Д, \vec{\omega}') = \pi$ и минимального значения $|\vec{M}_Д| = 0$ при $(\vec{M}_Д, \vec{\omega}') = \pi/2$. Нетрудно заметить, что выбор управляемого вектора \vec{P} в виде $Q^{-1}h_Д\vec{\omega}' \times \vec{T}$, где $h_Д$ – некоторый коэффициент пропорциональности, обеспечивает выполнение всех перечисленных выше условий, налагаемых на демпфирующий момент. При этом диссипативная составляющая момента $\vec{M}_Д$ имеет вид

$$\vec{M}_{ДД} = h_Д(\vec{\omega}' \times \vec{T}) \times \vec{T}$$

или $\vec{M}_{ДД} = -h_Д(\vec{\omega}'T^2 - \vec{T}(\vec{\omega}' \cdot \vec{B})) = -h_Д\mathbf{T}\vec{\omega}'$, где

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_y^2 + T_z^2 & -T_xT_y & -T_xT_z \\ -T_xT_y & T_x^2 + T_z^2 & -T_yT_z \\ -T_xT_z & -T_yT_z & T_x^2 + T_y^2 \end{pmatrix}.$$

Аналогичным образом решается вопрос об использовании возможностей управляемого изменения вектора \vec{I} для создания диссипативной составляющей момента $\vec{M}_М$:

$$\vec{M}_{МД} = h_М(\vec{\omega}' \times \vec{B}) \times \vec{B},$$

где $h_М$ – некоторая скалярная величина. Отсюда $\vec{M}_{МД} = -h_М\mathbf{B}\vec{\omega}'$, где

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_y^2 + B_z^2 & -B_xB_y & -B_xB_z \\ -B_xB_y & B_x^2 + B_z^2 & -B_yB_z \\ -B_xB_z & -B_yB_z & B_x^2 + B_y^2 \end{pmatrix}.$$

Матрицы \mathbf{T} и \mathbf{B} неотрицательны. Поэтому моменты $\vec{M}_{\text{ЛД}}$ и $\vec{M}_{\text{МД}}$, включенные в состав электродинамической системы управления, будут вызывать диссипацию энергии вращательного движения космического аппарата относительно его центра масс, обеспечивая процесс стабилизации космического аппарата в окрестности устойчивого положения равновесия.

Предложенная концепция построения электродинамической системы управления приводит к выбору управляемого вектора $\vec{P} = Q\vec{\rho}_0$ в виде

$$(4) \quad \vec{P} = k_{\text{Л}}\vec{T}_0 + h_{\text{Л}}\vec{\omega}' \times \vec{T},$$

а управляемого вектора \vec{I} в виде

$$(5) \quad \vec{I} = k_{\text{М}}\vec{B}_0 + h_{\text{М}}\vec{\omega}' \times \vec{B}.$$

При этом управляющие моменты $\vec{M}_{\text{Л}}$ и $\vec{M}_{\text{М}}$ соответственно примут вид

$$(6) \quad \vec{M}_{\text{Л}} = k_{\text{Л}}\vec{T}_0 \times \vec{T} + h_{\text{Л}}(\vec{\omega}' \times \vec{T}) \times \vec{T},$$

$$(7) \quad \vec{M}_{\text{М}} = k_{\text{М}}\vec{B}_0 \times \vec{B} + h_{\text{М}}(\vec{\omega}' \times \vec{B}) \times \vec{B}.$$

5. Математическое обоснование метода управления

Рассмотрим вопрос о стабилизации космического аппарата в прямом положении равновесия в орбитальной системе координат, т.е. в таком его положении, при котором оси x, y, z совпадают с осями ξ, η, ζ и, следовательно, $\alpha_1 = \beta_2 = \gamma_3 = 1$, $\omega_x = \omega_z = 0$, $\omega_y = \omega_0$.

Дифференциальные уравнения вращательного движения космического аппарата под действием управляющих моментов (6), (7) строятся по схеме Эйлера-Пуассона:

$$(8) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{J}\vec{\omega}) + \vec{\omega} \times (\mathbf{J}\vec{\omega}) &= \vec{M}_{\text{Л}} + \vec{M}_{\text{М}}, \\ \frac{d\vec{\xi}_0}{dt} &= \vec{\xi}_0 \times \vec{\omega} - \omega_0\vec{\zeta}_0, \quad \frac{d\vec{\eta}_0}{dt} = \vec{\eta}_0 \times \vec{\omega}, \quad \frac{d\vec{\zeta}_0}{dt} = \vec{\zeta}_0 \times \vec{\omega} + \omega_0\vec{\xi}_0, \end{aligned}$$

где $\mathbf{J} = \text{diag}(A, B, C)$ – тензор инерции космического аппарата в системе координат $Sxyz$, $\vec{\omega}$ – абсолютная угловая скорость космического аппарата.

При рассмотрении малых колебаний космического аппарата в окрестности прямого положения равновесия справедливо предположение о малости углов φ, θ, ψ и их производных по времени. При этом моменты $\vec{M}_{\text{Л}}$, $\vec{M}_{\text{М}}$ могут быть разложены в ряды по степеням этих малых величин. В результате получим их проекции с точностью до членов второго порядка малости в виде

$$M_{\text{Л}x} = -l_{11}(t)(k_{\text{Л}}\varphi + h_{\text{Л}}\dot{\varphi}) - l_{12}(t)(k_{\text{Л}}\theta + h_{\text{Л}}\dot{\theta}) - l_{13}(t)(k_{\text{Л}}\psi + h_{\text{Л}}\dot{\psi}),$$

$$M_{\text{Л}y} = -l_{21}(t)(k_{\text{Л}}\varphi + h_{\text{Л}}\dot{\varphi}) - l_{22}(t)(k_{\text{Л}}\theta + h_{\text{Л}}\dot{\theta}) - l_{23}(t)(k_{\text{Л}}\psi + h_{\text{Л}}\dot{\psi}),$$

$$M_{\text{Л}z} = -l_{31}(t)(k_{\text{Л}}\varphi + h_{\text{Л}}\dot{\varphi}) - l_{32}(t)(k_{\text{Л}}\theta + h_{\text{Л}}\dot{\theta}) - l_{33}(t)(k_{\text{Л}}\psi + h_{\text{Л}}\dot{\psi}),$$

где

$$\begin{aligned}
l_{11}(t) &= v_{C\xi}^2 B_\zeta^2 + (v_{C\eta} B_\xi - v_{C\xi} B_\eta)^2, \quad l_{12}(t) = l_{21}(t) = v_{C\xi} v_{C\eta} B_\zeta^2, \\
l_{13}(t) &= l_{31}(t) = -v_{C\eta} B_\zeta (v_{C\xi} B_\eta - v_{C\eta} B_\xi), \\
l_{22}(t) &= v_{C\eta}^2 B_\zeta^2 + (v_{C\eta} B_\xi - v_{C\xi} B_\eta)^2, \\
l_{23}(t) &= l_{32}(t) = v_{C\xi} B_\zeta (v_{C\xi} B_\eta - v_{C\eta} B_\xi), \quad l_{33}(t) = B_{C\xi}^2 (v_{C\xi}^2 + v_{C\eta}^2), \\
M_{Mx} &= -b_{11}(t)(k_M \varphi + h_M \dot{\varphi}) - b_{12}(t)(k_M \theta + h_M \dot{\theta}) - b_{13}(t)(k_M \psi + h_M \dot{\psi}), \\
M_{My} &= -b_{21}(t)(k_M \varphi + h_M \dot{\varphi}) - b_{22}(t)(k_M \theta + h_M \dot{\theta}) - b_{23}(t)(k_M \psi + h_M \dot{\psi}), \\
M_{Mz} &= -b_{31}(t)(k_M \varphi + h_M \dot{\varphi}) - b_{32}(t)(k_M \theta + h_M \dot{\theta}) - b_{33}(t)(k_M \psi + h_M \dot{\psi}).
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
b_{11}(t) &= B_\eta^2 + B_\zeta^2, \quad b_{12}(t) = b_{21}(t) = -B_\xi B_\eta, \\
l_{13}(t) &= l_{31}(t) = -B_\xi B_\zeta, \quad b_{22}(t) = B_\xi^2 + B_\zeta^2, \\
b_{23}(t) &= b_{32}(t) = -B_\eta B_\zeta, \quad b_{33}(t) = B_\xi^2 + B_\eta^2.
\end{aligned}$$

Динамические уравнения Эйлера (8) в матричной форме примут вид

$$(9) \quad \mathbf{J} \begin{pmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{pmatrix} + \mathbf{H} \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} + \mathbf{M} \begin{pmatrix} \varphi \\ \theta \\ \psi \end{pmatrix} + \mathbf{X} = 0,$$

где

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_{\text{Л}} l_{11} + h_{\text{М}} b_{11} & h_{\text{Л}} l_{12} + h_{\text{М}} b_{12} & \omega_0(A - B + C) + h_{\text{Л}} l_{13} + h_{\text{М}} b_{13} \\ h_{\text{Л}} l_{12} + h_{\text{М}} b_{12} & h_{\text{Л}} l_{22} + h_{\text{М}} b_{22} & h_{\text{Л}} l_{23} + h_{\text{М}} b_{23} \\ -\omega_0(A - B + C) + h_{\text{Л}} l_{13} + h_{\text{М}} b_{13} & h_{\text{Л}} l_{23} + h_{\text{М}} b_{23} & h_{\text{Л}} l_{33} + h_{\text{М}} b_{33} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \omega_0^2(B - C) + k_{\text{Л}} l_{11} + k_{\text{М}} b_{11} & k_{\text{Л}} l_{12} + k_{\text{М}} b_{12} & k_{\text{Л}} l_{13} + k_{\text{М}} b_{13} \\ k_{\text{Л}} l_{12} + k_{\text{М}} b_{12} & k_{\text{Л}} l_{22} + k_{\text{М}} b_{22} & k_{\text{Л}} l_{23} + k_{\text{М}} b_{23} \\ k_{\text{Л}} l_{13} + k_{\text{М}} b_{13} & k_{\text{Л}} l_{23} + k_{\text{М}} b_{23} & \omega_0^2(B - A) + k_{\text{Л}} l_{33} + k_{\text{М}} b_{33} \end{pmatrix},$$

\mathbf{X} – вектор с компонентами $X_j(t, \varphi, \theta, \psi)$ ($j = \overline{1, 3}$), нелинейным образом зависящими от φ, θ, ψ . Этот вектор содержит также проекции возмущающих моментов, действующих на космический аппарат, например момент гравитационных сил.

Представим матрицу \mathbf{M} в виде $\mathbf{M} = \mathbf{M}_{\text{ср}} + \widetilde{\mathbf{M}}(t)$. Здесь матрица $\mathbf{M}_{\text{ср}}$ – результат покомпонентного усреднения матрицы \mathbf{M} по времени, т.е.

$$\mathbf{M}_{\text{ср}} = \begin{pmatrix} \omega_0^2(B - C) + k_{\text{Л}} l_{11\text{ср}} + k_{\text{М}} b_{11\text{ср}} & k_{\text{Л}} l_{12\text{ср}} + k_{\text{М}} b_{12\text{ср}} & k_{\text{Л}} l_{13\text{ср}} + k_{\text{М}} b_{13\text{ср}} \\ k_{\text{Л}} l_{12\text{ср}} + k_{\text{М}} b_{12\text{ср}} & k_{\text{Л}} l_{22\text{ср}} + k_{\text{М}} b_{22\text{ср}} & k_{\text{Л}} l_{23\text{ср}} + k_{\text{М}} b_{23\text{ср}} \\ k_{\text{Л}} l_{13\text{ср}} + k_{\text{М}} b_{13\text{ср}} & k_{\text{Л}} l_{23\text{ср}} + k_{\text{М}} b_{23\text{ср}} & \omega_0^2(B - A) + k_{\text{Л}} l_{33\text{ср}} + k_{\text{М}} b_{33\text{ср}} \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned}
l_{11\text{ср}} &= \langle v_{C\eta}^2 B_\zeta^2 \rangle_t - 2v_{C\xi} \langle v_{C\eta} B_\xi B_\eta \rangle_t + v_{C\xi}^2 (\langle B_\eta^2 \rangle_t + \langle B_\zeta^2 \rangle_t), \\
l_{12\text{ср}} &= l_{21\text{ср}} = v_{C\xi} \langle v_{C\eta} B_\zeta^2 \rangle_t, \quad l_{13\text{ср}} = l_{31\text{ср}} = \langle v_{C\eta}^2 B_\xi B_\zeta \rangle_t - v_{C\xi} \langle v_{C\eta} B_\eta B_\zeta \rangle_t, \\
l_{22\text{ср}} &= \langle v_{C\eta}^2 B_\zeta^2 \rangle_t - 2v_{C\xi} \langle v_{C\eta} B_\xi B_\eta \rangle_t + v_{C\xi}^2 \langle B_\eta^2 \rangle_t + \langle v_{C\eta}^2 B_\zeta^2 \rangle_t, \\
l_{23\text{ср}} &= l_{32\text{ср}} = v_{C\xi} (v_{C\xi} \langle B_\eta B_\zeta \rangle_t - \langle v_{C\eta} B_\xi B_\zeta \rangle_t), \\
l_{33\text{ср}} &= (v_{C\xi}^2 \langle B_\zeta^2 \rangle_t + \langle v_{C\eta}^2 B_\zeta^2 \rangle_t), \\
b_{11\text{ср}} &= \langle B_\eta^2 \rangle_t + \langle B_\zeta^2 \rangle_t, \quad b_{12\text{ср}} = b_{21\text{ср}} = -\langle B_\xi B_\eta \rangle_t, \quad b_{13\text{ср}} = b_{31\text{ср}} = -\langle B_\xi B_\zeta \rangle_t, \\
l_{22\text{ср}} &= \langle B_\xi^2 \rangle_t + \langle B_\zeta^2 \rangle_t, \quad l_{23\text{ср}} = l_{32\text{ср}} = -\langle B_\eta B_\zeta \rangle_t, \quad l_{33\text{ср}} = \langle B_\xi^2 \rangle_t + \langle B_\eta^2 \rangle_t.
\end{aligned}$$

Вычислим необходимые средние:

$$\begin{aligned}
\langle B_{\xi}^2 \rangle_t &= 1/4 [2 (g_1^0)^2 \sin^2 i + (1 + \cos^2 i)((g_1^1)^2 + (h_1^1)^2)] R_3^6 R^{-6} + \\
&+ 1/16 [50 (g_2^0)^2 \sin^4 i + 36 (\sin^4 i + 8 \cos^2 i)((h_2^2)^2 + (g_2^2)^2) + \\
&+ 9 (-9 \sin^4 i + 20 \sin^2 i)((h_2^1)^2 + (g_2^1)^2)] R_3^8 R^{-8}, \\
\langle B_{\eta}^2 \rangle_t &= 1/2 [((g_1^1)^2 + (h_1^1)^2) \sin^2 i + 2(g_1^0)^2 \cos^2 i] R_3^6 R^{-6} + \\
&+ 9/8 [8(1 - \cos^4 i)((g_2^2)^2 + (h_2^2)^2) + (g_2^0)^2 \sin^2(2i) + \\
&+ 2(1 - 3 \cos^2 i + 4 \cos^4 i)((h_2^1)^2 + (g_2^1)^2)] R_3^8 R^{-8}, \\
\langle B_{\zeta}^2 \rangle_t &= ((1 + \cos^2 i)((g_1^1)^2 + (h_1^1)^2) - g_1^0 h_1^1 \sin(2i) + (g_1^0)^2 \sin^2 i) R_3^6 R^{-6} + \\
&+ (81/16(3 \cos^4 i + 2 \cos^2 i + 3)((g_2^2)^2 + (h_2^2)^2) + \\
&+ 9/32(11 + 27 \cos^4 i - 30 \cos^2 i)(g_2^0)^2 + \\
&+ 81/16(1 - 3 \cos^4 i + 2 \cos^2 i)((h_2^1)^2 + (g_2^1)^2)) R_3^8 R^{-8}, \\
\langle B_{\xi} B_{\eta} \rangle_t &= 3/2 (g_2^1 h_1^1 - h_2^1 g_1^1) \cos(2i) R_3^7 R^{-7}, \\
\langle B_{\eta} B_{\zeta} \rangle_t &= (-3/4 g_1^0 g_2^0 (1 - 3 \cos^2 i) \cos i + \\
&+ 3/4 (3 - 7 \cos^2 i)(h_1^1 h_2^1 + g_1^1 g_2^1) \cos i + 3/2 g_1^0 h_2^1 \cos(2i) \sin i) R_3^7 R^{-7}, \\
\langle B_{\xi} B_{\zeta} \rangle_t &= -1/2 g_1^1 g_1^0 \sin i R_3^6 R^{-6}, \\
\langle v_{C\eta} B_{\xi} B_{\eta} \rangle_t &= \omega_3 \sin^2 i \cos i \{ -1/4 [2 (g_1^0)^2 - (g_1^1)^2 - (h_1^1)^2] R_3^6 R^{-5} + \\
&+ [-9/4 (3 + \cos^2 i)(g_2^2)^2 + (h_2^2)^2] + 15/8 \sin^2 i (g_2^0)^2 + \\
&+ 9/8 (1 + 3 \cos^2 i)((h_2^1)^2 + (g_2^1)^2)] R_3^8 R^{-7} \}, \\
\langle v_{C\eta} B_{\eta} B_{\zeta} \rangle_t &= 0, \\
\langle v_{C\eta} B_{\xi} B_{\zeta} \rangle_t &= 3/16 \omega_3 \sin^2 i [(1 + 3 \cos^2 i) g_1^0 g_2^0 + g_1^0 h_2^1 3 \sin(2i) - \\
&- (7 + 9 \cos^2 i)(h_1^1 h_2^1 + g_1^1 g_2^1)] R_3^8 R^{-7}, \\
\langle v_{C\eta} B_{\zeta}^2 \rangle_t &= -9/4 \omega_3 g_1^0 g_2^1 \sin^3 i R_3^7 R^{-6}, \\
\langle v_{C\eta}^2 B_{\xi}^2 \rangle_t &= 1/16 \omega_3^2 [6 (g_1^0)^2 \sin^4 i + \\
&+ (1 - 3 \cos^4 i + 2 \cos^2 i)((g_1^1)^2 + (h_1^1)^2)] R_3^6 R^{-4} + \\
&+ \omega_3^2 (9/8 (-\cos^6 i - 5 \cos^4 i + 5 \cos^2 i + 1)((g_2^2)^2 + (h_2^2)^2) + \\
&+ 9/32 (9 \cos^6 i - \cos^4 i - 25 \cos^2 i + 17)((h_2^1)^2 + (g_2^1)^2) + \\
&+ 25/16 (-\cos^6 i + 3 \cos^4 i - 3 \cos^2 i + 1)(g_2^0)^2) R_3^8 R^{-6}, \\
\langle v_{C\eta}^2 B_{\zeta}^2 \rangle_t &= 1/4 \omega_3^2 [(g_1^0)^2 \sin^4 i - 2 h_1^1 g_1^0 \sin^3 i \cos i + \\
&+ (3 - \cos^4 i - 2 \cos^2 i)((g_1^1)^2 + (h_1^1)^2)] R_3^6 R^{-4} + \\
&+ 9/64 [18 (-\cos^6 i - \cos^4 i - 3 \cos^2 i + 5)((g_2^2)^2 + (h_2^2)^2) + \\
&+ 18 (\cos^6 i - \cos^4 i - \cos^2 i + 1)((h_2^1)^2 + (g_2^1)^2) + \\
&+ (-9 \cos^6 i + 15 \cos^4 i - 11 \cos^2 i + 5)(g_2^0)^2] \omega_3^2 R_3^8 R^{-6}, \\
\langle v_{C\eta}^2 B_{\xi} B_{\zeta} \rangle_t &= -1/8 \omega_3^2 g_1^1 g_1^0 \sin^3 i R_3^6 R^{-4},
\end{aligned}$$

где $\vec{\omega}_3 = \omega_3 \vec{k}_*$ - угловая скорость суточного вращения Земли, R_3 - радиус Земли.

Рассмотрим сначала систему линейного приближения уравнений (9):

$$(10) \quad \mathbf{J} \begin{pmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{pmatrix} + \mathbf{H} \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} + \mathbf{M} \begin{pmatrix} \varphi \\ \theta \\ \psi \end{pmatrix} = 0.$$

Заменяем в ней матрицу \mathbf{M} ее средним значением:

$$\mathbf{J} \begin{pmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{pmatrix} + \mathbf{H} \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} + \mathbf{M}_{cp} \begin{pmatrix} \varphi \\ \theta \\ \psi \end{pmatrix} = 0.$$

С помощью замены

$$x_1 = \dot{\varphi}, \quad x_2 = \dot{\theta}, \quad x_3 = \dot{\psi}, \quad x_4 = \varphi, \quad x_5 = \theta, \quad x_6 = \psi$$

систему (10) можно привести к безразмерному виду

$$(11) \quad \dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{N} + \widetilde{\mathbf{M}}(t))\mathbf{x},$$

где

$$\mathbf{N} = - \begin{pmatrix} H_{11}/(A\omega_0) & H_{12}/(A\omega_0) & H_{13}/(A\omega_0) & M_{11}/(A\omega_0) & M_{12}/(A\omega_0) & M_{13}/(A\omega_0) \\ H_{21}/(B\omega_0) & H_{22}/(B\omega_0) & H_{23}/(B\omega_0) & M_{21}/(B\omega_0) & M_{22}/(B\omega_0) & M_{23}/(B\omega_0) \\ H_{31}/(C\omega_0) & H_{32}/(C\omega_0) & H_{33}/(C\omega_0) & M_{31}/(C\omega_0) & M_{32}/(C\omega_0) & M_{33}/(C\omega_0) \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Система $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{N}\mathbf{x}$ имеет ограниченные решения на полуоси $[0, +\infty)$ тогда и только тогда, когда действительные части корней характеристического уравнения $\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{N}) = 0$ неположительны. Проведенный с помощью ЭВМ численный анализ показал, что существует область параметров ИСЗ и его орбиты, при которых выполнено это условие и, следовательно, в этой области действительные части собственных значений матрицы \mathbf{N} удовлетворяют неравенствам $\alpha_j < -\tau$, $j = \overline{1, 6}$, $\tau = \text{const} > 0$.

Согласно [8] введем в рассмотрение функцию

$$\chi(t) = \exp\left(-\frac{\tau}{2}t\right) \sum_{k=0}^5 \left(\frac{\left(2 \max_{i,j} |N_{i,j}|\right)^k}{k!} \right) t^k.$$

Если $\|\widetilde{\mathbf{M}}(t)\| = \max_j \sum_{i=1}^n |\widetilde{m}_{ij}| < \frac{\tau}{2} \max_{t \geq 0} \chi(t)$, то нулевое решение системы (11) (или (10)) асимптотически устойчиво [8]. Следовательно, нулевое решение исходной нелинейной системы (9) будет устойчивым при постоянно действующих возмущениях [9].

6. Заключение

Выполнен ряд численных экспериментов по анализу эффективности предложенной электродинамической системы управления ориентацией космического аппарата и оценке возмущающего влияния момента гравитационных сил на процесс стабилизации.

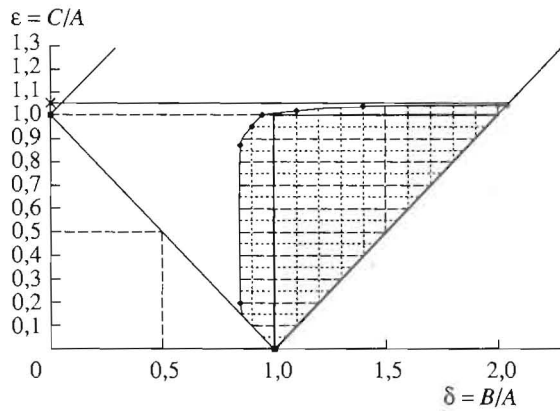


Рис. 3. Область устойчивости, полученная расчетным путем.

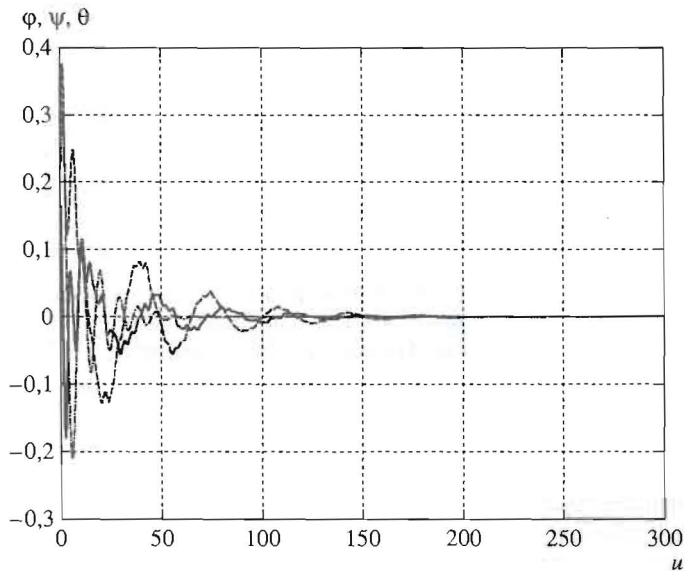


Рис. 4. Процесс стабилизации космического аппарата.

На рис. 3 приведена область значений инерционных параметров космического аппарата $\delta = B/A$ и $\epsilon = C/A$, соответствующая устойчивости прямого положения равновесия космического аппарата для выбранных фиксированных параметров: $R = 7 \cdot 10^6$ м, $i = 1,5$ рад, $A = 10^3$ кг \cdot м², $Q = 10^{-3}$ Кл. Эта область показывает, при каких значениях параметров δ и ϵ гравитационный момент не препятствует процессу стабилизации космического аппарата в прямом положении равновесия. Как видно из рис. 3, она является достаточно широкой, что свидетельствует о работоспособности предложенного метода при таких значениях δ и ϵ , которые лежат за пределами треугольника Белецкого ($\delta > 1, \epsilon < 1$) [10]. Это означает, что данный метод применим для таких космических аппаратов, которые не могут быть стабилизированы с помощью момента гравитационных сил.

На рис. 4 приведены результаты расчетов затухания колебаний космического аппарата в окрестности стабилизируемого прямого положения равновесия под дей-

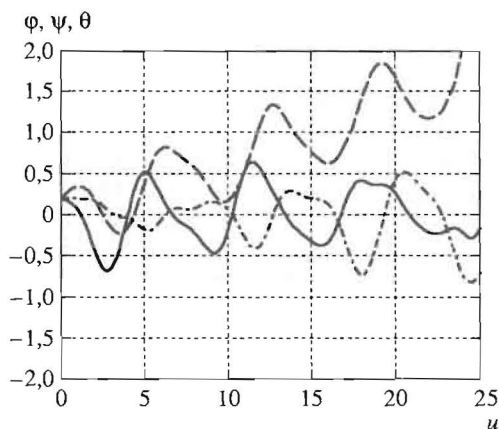


Рис. 5. Колебания космического аппарата при отсутствии полупассивного управления.

ствием управляющих моментов (6) и (7), в которых управляющие векторы меняются по законам (4) и (5) при следующих значениях параметров космического аппарата и его орбиты: $R = 7 \cdot 10^6$ м, $i = 1,5$ рад, $A = 10^3$ кг · м², $Q = 10^{-3}$ Кл, $\delta = 0,95$, $\varepsilon = 0,9$. В качестве начальных значений выбраны $\varphi(0) = 0,2$ рад, $\psi(0) = 0,2$ рад, $\theta(0) = 0,2$ рад, $\omega_x(0) = 0,1$ рад/с, $\omega_y(0) = 1,1$ рад/с, $\omega_z(0) = 0,1$ рад/с.

Сплошной линией показана зависимость $\varphi = \varphi(u)$, пунктирной – $\psi = \psi(u)$, точечной – $\theta = \theta(u)$. Из графика видно, что процесс затухания колебаний космического аппарата происходит достаточно быстро.

На рис. 5 представлены колебания космического аппарата при отсутствии управления при тех же начальных условиях. В этом случае для координат центра заряда были взяты следующие значения: $x_0 = y_0 = 0$, $z_0 = 1$ м. Из рис. 5 видно, что под действием возмущающего влияния момента гравитационных сил происходит быстрое опрокидывание космического аппарата при тех же значениях инерционных параметров, при которых имел место режим затухающих колебаний в случае управляемого движения (см. рис. 3).

Сравнение графиков на рис. 4 и 5 показывает, что введение в систему космического аппарата единой электродинамической системы управления ориентацией, использующей одновременно оба восстанавливающих момента – магнитных и лоренцевых сил – позволяет за короткое время достичь режима стабилизированного движения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коваленко А.П. Магнитные системы управления космическими летательными аппаратами. М.: Машиностроение, 1975.
2. Алпатов А.П., Драновский В.И., Салтыков Ю.Д., Хорошилов В.С. Динамика космических аппаратов с магнитными системами управления. М.: Машиностроение, 1978.
3. Тихонов А.А. Метод полупассивной стабилизации космического аппарата в геомагнитном поле // Космич. исследования. 2003. Т. 41. № 1. С. 69–79.
4. Петров К.Г., Тихонов А.А. Момент сил Лоренца, действующих на заряженный спутник в магнитном поле Земли. Ч.2 // Вест. СПб ун-та. Сер. 1. 1999. Вып. 3 (№ 15). С. 81–91.

5. *Mandea M., MacMillan S., Bondar T., Gorovkov V. et al.* International geomagnetic reference field – 2000 // *Phys. Earth Planetary Interiors*. 2000. V. 120. P. 39–42.
6. *Антипов К.А., Петров К.Г., Тихонов А.А.* Электродинамический метод трехосной стабилизации динамически симметричного космического аппарата // *Вест. СПб ун-та. Сер. 1*. 2006. Вып. 1 (№ 1). С. 75–86.
7. *Сарычев В.А.* Вопросы ориентации искусственных спутников // *Исследование космического пространства Т. 11 (Итоги науки и техники ВИНТИ АН СССР)*. М., 1978.
8. *Мартынюк А.А., Лакшмикантам В., Лиля С.* Устойчивость движения: метод интегральных неравенств. Киев: Наук. думка, 1989.
9. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966.
10. *Белецкий В.В.* Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Изд-во МГУ, 1975.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Л.Б. Рапопортом.

Поступила в редакцию 15.02.2007