ISSN 0134-4889

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Том 21 № 3 2015

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 21 № 3 2015

УДК 519.6

О НЕКОТОРЫХ ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ РАЗРЕШИМОСТИ И НЕРАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧ МАТРИЧНОЙ КОРРЕКЦИИ НЕСОБСТВЕННЫХ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В. И. Ерохин

Представлены достаточные условия разрешимости и достаточные условия неразрешимости задач матричной коррекции пары взаимно двойственных несобственных задач линейного программирования по минимуму матричной евклидовой нормы для случая, когда на матрицу коррекции не накладывается каких-либо дополнительных ограничений.

Ключевые слова: несобственные задачи линейного программирования, матричная коррекция.

V. I. Erokhin. On some sufficient conditions for the solvability and unsolvability of matrix correction problems for improper linear programming problems.

Sufficient solvability conditions and sufficient unsolvability conditions are given for matrix correction problems related to a pair of mutually dual improper linear programming problems with respect to the minimum of the matrix Euclidean norm in the case when no additional constraints are imposed on the correction matrix.

Keywords: improper linear programming, matrix correction.

Введение

Данная работа направлена на исследование условий разрешимости задач матричной коррекции несобственных задач линейного программирования (ЛП). Представленные результаты являются дополнением и дальнейшим развитием основных результатов работы [17], посвященной матричной коррекции пары взаимно двойственных несобственных задач ЛП, и работы [18], посвященной проблеме разрешимости пары изначально несобственных взаимно двойственных задач ЛП после матричной коррекции системы ограничений прямой задачи.

Систематические исследования несобственных задач линейного и выпуклого программирования впервые были начаты И. И. Ереминым и постоянно оставались в фокусе его внимания. В настоящее время благодаря работам И. И. Еремина, его коллег и учеников, среди которых указанная проблематика оказалась наиболее близка Н. Н. Астафьеву, В. Д. Скарину, Л. Д. Попову и А. А Ватолину, данное научное направление стало "визитной карточкой" отдела математического программирования Института математики и механики УрО РАН. Некоторые избранные результаты и публикации перечислены И. И. Ереминым в обзоре [15]. В контексте данной статьи представляют интерес классификация несобственных задач ЛП, формализация понятия "решение" несобственной задачи ЛП, разнообразные подходы к построению подобного решения (см., например, [10; 12; 13; 16; 19]), и прежде всего матричная коррекция [4; 12, §12–13], а также классическая теория двойственности, ее обобщения на несобственные задачи ЛП и применения к исследованию несовместных систем линейных уравнений и неравенств (см., например, [1; 11–14; 16]).

Необходимо также упомянуть работы А. И. Голикова и Ю. Г. Евтушенко [5–7], в которых пропагандируется (как инструмент построения эффективных алгоритмов решения систем линейных уравнений и неравенств, а также задач линейного и квадратичного программирования) существенно используемый в настоящей статье математический аппарат теорем об альтернативах.

Для определенности будем считать, что прямая задача ЛП записана в канонической форме, а двойственная — в основной.

Пусть $\mathcal{M}^{m\times n}$ — множество вещественных матриц размерности $m \times n$.

$$L(A,b,c)\colon\ Ax=b,\quad x\geqslant 0,\quad c^\top x\to\max$$

– некоторая задача ЛП в канонической форме,

$$L^*(A,b,c)\colon\ u^\top A\geqslant c^\top,\quad b^\top u\to\min$$

– двойственная ей задача ЛП в основной форме, $A\in\mathcal{M}^{m\times n}$, $c,x\in\mathbb{R}^n$, $b,u\in\mathbb{R}^m$. Допустимые множества задач $L(A,b,c)$ и $L^*(A,b,c)$ обозначим символами

$$\mathcal{X}(A,b)\triangleq\{x\mid Ax=b,\ x\geqslant 0\},\quad \mathcal{U}(A,c)\triangleq\{u\mid [c^\top-u^\top A]_+=0\},$$

где $[\,\cdot\,]_+$ — положительная срезка вектора, заключающаяся в применении ко всем его элементам операции положительной срезки скалярной величины $[\xi]_+\triangleq\max\{0,\xi\}$.

Задачей D_H матричной коррекции пары взаимно двойственных несобственных задач ЛП $L(A,b,c)$ и $L^*(A,b,c)$ будем называть задачу построения матрицы $H\in\mathcal{M}^{m\times n}$, обладающей минимальной евклидовой нормой и гарантирующей совместность скорректированных задач

$$\begin{cases} L(A+H,b,c)\colon\ (A+H)x=b, & x\geqslant 0,\ c^\top x\to\max,\\ L^*(A+H,b,c)\colon\ u^\top(A+H)\geqslant c^\top, & b^\top u\to\min\,. \end{cases}$$

Одновременно с D_H будем рассматривать задачу коррекции противоречивой системы ограничений задачи $L(A,b,c)$, формализованную как

$$P_H\colon\ \mathcal{X}(A+H,b)\neq\varnothing,\quad \|H\|\to\min,$$

где $\|\cdot\|$ — евклидова матричная (далее в зависимости от контекста матричная или векторная) норма, определяемая для $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}^{m\times n}$ как

$$\|A\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2}.$$

Задачи D_H и P_H являются представителями обширного класса задач матричной коррекции, постановки которых кроме требования коррекции матрицы A могут также содержать:

– дополнительные требования коррекции вектора b или пары векторов b и c;

– запреты на коррекцию заданных строк и столбцов матрицы A или произвольных множеств элементов A, b, c;

– матричные и векторные нормы, отличные от евклидовой, и в частности нормы, модифицированные с помощью индивидуальных весовых коэффициентов, применяемых поэлементно.

Все упомянутые потенциально возможные модификации задач D_H и P_H представляют самостоятельный интерес, могут быть предметом отдельного исследования и остаются за рамками данной статьи.

1. Инструментарий и предшествующие результаты

Следующие классические результаты хорошо известны, но приводятся для удобства читателя, поскольку они существенным образом используются в доказательствах теорем.

Теорема 1 (теорема двойственности [3, теорема 2.2.2]). *Задачи $L(A,b,c)$ и $L^*(A,b,c)$ разрешимы тогда и только тогда, когда одновременно выполняются условия $\mathcal{X}(A,b)\neq\varnothing$ и $\mathcal{U}(A,c)\neq\varnothing$.*

Утверждение (классификация несобственных задач ЛП [12, с. 13]). *Если задачи $L(A,b,c)$ и $L^*(A,b,c)$ неразрешимы, то возможны следующие три случая:*

1. $\mathcal{X}(A,b)=\varnothing$, $\mathcal{U}(A,c)\neq\varnothing$, $L(A,b,c)$ — *несобственная задача ЛП 1-го рода,* $L^*(A,b,c)$ — *несобственная задача ЛП 2-го рода.*

2. $\mathcal{X}(A,b)\neq\varnothing$, $\mathcal{U}(A,c)=\varnothing$, $L(A,b,c)$ — *несобственная задача ЛП 2-го рода,* $L^*(A,b,c)$ — *несобственная задача ЛП 1-го рода.*

3. $\mathcal{X}(A,b)=\varnothing$, $\mathcal{U}(A,c)=\varnothing$, $L(A,b,c)$ *и* $L^*(A,b,c)$ — *несобственные задачи ЛП 3-го рода.*

Лемма 1 (теорема Александрова — Фана [2, с. 75]). *Совместна одна и только одна из двух систем:*

$$u^\top A\geqslant c^\top$$

или

$$Az=0,\quad c^\top z>0,\quad z\geqslant 0. \tag{1.1}$$

Следствие. *Если $\mathcal{U}(A,c)=\varnothing$, то существует вектор z, являющийся решением системы* (1.1).

Теперь кратко изложим ряд более современных результатов, непосредственно связанных с темой данной статьи.

Следующий результат, сформулированный в виде леммы, основывается на [4, теорема 1; 8, лемма 1.1; 9, теоремы 2.1, 2.2; 12, теорема 12.2, замечание 12.1].

Лемма 2. *Если решение задачи P_H существует, то оно имеет вид*

$$H^*=(b-Ax^*)\frac{x^{*\top}}{x^{*\top}x^*}, \tag{1.2}$$

где $x^*\in\operatorname*{Argmin}\limits_{x\geqslant 0}\dfrac{\|b-Ax\|}{\|x\|}$. *При этом* $\|H^*\|=\dfrac{\|b-Ax^*\|}{\|x^*\|}$.

Теорема 2 (об условиях разрешимости задачи D_H [17, теорема 3]). *Задача D_H разрешима тогда и только тогда, когда разрешима задача математического программирования*

$$\begin{gathered}f(x,d,u)=\frac{\|b-Ax\|^2}{\|x\|^2}+\frac{\|c+d-A^\top u\|^2}{\|u\|^2}-\frac{(\gamma-u^\top Ax)^2}{\|x\|^2\,\|u\|^2}\to\min,\\ c^\top x=b^\top u=\gamma,\quad d^\top x=0,\quad x\geqslant 0,\quad d\geqslant 0.\end{gathered} \tag{1.3}$$

Если задача (1.3) *имеет непустое множество решений, к которому принадлежат векторы $\hat x$, $\hat d$, $\hat u$, то единственное (при фиксированных $\hat x$, $\hat d$, $\hat u$) решение задачи D_H выражается формулой*

$$\widehat H=(b-A\hat x)\,\frac{\hat x^\top}{\hat x^\top\hat x}+\frac{\hat u}{\hat u^\top\hat u}(\hat c^\top+\hat d^\top-\hat u^\top A)-\hat\alpha\,\frac{\hat u\,\hat x^\top}{\hat x^\top\hat x\,\hat u^\top\hat u}, \tag{1.4}$$

где

$$\hat\alpha=\hat\gamma-\hat u^\top A\hat x,\quad \hat\gamma=c^\top\hat x=b^\top\hat u. \tag{1.5}$$

При этом

$$\|\widehat H\|^2=f(\hat x,\hat d,\hat u), \tag{1.6}$$

$$\hat x\in\operatorname*{Argmax}_{x\in\mathcal{X}(A+\widehat H,b)} c^\top x, \tag{1.7}$$

$$\hat u\in\operatorname*{Argmin}_{u\in\mathcal{U}(A+\widehat H,c)} b^\top u. \tag{1.8}$$

Теорема 3 (о достаточных условиях существования решения задачи D_H [18, теорема 1]). *Если $\mathcal{X}(A,b)=\varnothing$, $\mathcal{U}(A,c)\neq\varnothing$ (т. е. $L(A,b,c)$ — несобственная задача* ЛП *1-го рода), задача P_H разрешима и матрица H^* является ее решением, то задача D_H также разрешима и матрица H^* также является ее решением.*

Теорема 4 [17, теорема 4]. *Если $\mathcal{X}(A,b)\neq\varnothing$, $b\neq 0$, $\mathcal{U}(A,c)=\varnothing$, то для существования решения задачи D_H необходимо, чтобы система $u^\top A=0$, $u^\top b=0$ имела только тривиальное решение.*

Теорема 5 [17, теорема 5]. *Если $\mathcal{X}(A,b)=\varnothing$, $\mathcal{U}(A,c)\neq\varnothing$, $c\neq 0$, то для существования решения задачи D_H необходимо, чтобы система $Ax=0$, $c^\top x=0$ имела только тривиальное решение.*

Теорема 6 [17, теорема 6]. *Если $\mathcal{U}(A,c)=\varnothing$ и существует вектор u, являющийся решением системы $u^\top A\geqslant 0$, $u^\top b>0$, то задача D_H не имеет решения.*

2. Новые результаты

Лемма 3. *Задача P_H не имеет решения, если $L(A,b,c)$ — несобственная задача* ЛП *3-го рода.*

Доказательство. Предположим противное, а именно пусть $L(A,b,c)$ — несобственная задача ЛП 3-го рода, т.е. $\mathcal{X}(A,b)=\varnothing$, $\mathcal{U}(A,c)=\varnothing$, но задача P_H разрешима и матрица H^* — ее решение. Очевидно, что $H^*\neq 0$ и, следовательно, $\|H^*\|>0$. В силу леммы 2 для H^* справедливо представление (1.2). В то же время в силу условия $\mathcal{U}(A,c)=\varnothing$ и следствия из леммы 1 существует вектор $z\in\mathbb{R}^n$, являющийся решением системы (1.1). Рассмотрим вектор $y\in\mathbb{R}^n$ и матрицу $\widehat{H}$, задаваемые формулами

$$y=x^*+\alpha z, \tag{2.1}$$

где $\alpha>0$ — скалярный параметр,

$$\widehat{H}=(b-Ay)\frac{y^\top}{y^\top y}. \tag{2.2}$$

Заметим, что в силу (2.1) и (2.2)

$$\|\,\widehat{H}\,\|=\frac{\|b-Ax^*\|}{\|x^*+\alpha y\|},\qquad \lim_{\alpha\to+\infty}\|\,\widehat{H}\,\|=0. \tag{2.3}$$

Из (2.3) следует, что, выбрав подходящее значение параметра $\alpha>0$, можно добиться выполнения условия $\|\,\widehat{H}\,\|<\|H^*\|$ для любой матрицы $H^*\neq 0$. В то же время несложно убедиться, что $y\in\mathcal{X}(A+\widehat{H},b)$. Совокупность двух последних условий противоречит утверждению о том, что матрица H^* — решение задачи P_H, следовательно, задача P_H не имеет решения, что и требовалось доказать.

Лемма доказана.

Теорема 7. *Если $\mathcal{X}(A,b)=\varnothing$ и при этом задача P_H имеет решение, то $L(A,b,c)$ является несобственной задачей* ЛП *1-го рода, а задача D_H также имеет решение, которое совпадает с решением задачи P_H.*

Доказательство. Для доказательства достаточно заметить, что первое утверждение является непосредственным следствием теоремы 1 и леммы 3, а второе утверждение — следствием первого утверждения и теоремы 3.

Теорема 8 (о достаточных условиях отсутствия решения задачи D_H). *Если существуют векторы $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ и $\bar{u} \in \mathbb{R}^m$, обладающие свойствами*

$$\|\bar{x}\| = \|\bar{u}\| = 1, \tag{2.4}$$

$$\bar{x} \geqslant 0, \tag{2.5}$$

$$c^\top \bar{x} = b^\top \bar{u} = 0, \tag{2.6}$$

$$\bigl[-\bar{u}^\top A\bigr]_+ \bar{x} = -\bar{u}^\top A\bar{x} = \bar{\alpha}, \tag{2.7}$$

и для любых векторов x, d, u, отвечающих условиям (1.3) *и таких, что $\|x\|$, $\|d\|$, $\|u\| < +\infty$, выполняется условие*

$$\|A\bar{x}\|^2 + \bigl\|\bigl[-\bar{u}^\top A\bigr]_+\bigr\|^2 - \bar{\alpha}^2 < f(x,d,u), \tag{2.8}$$

где $f(x,d,u)$ — функция, заданная формулой (1.3), *то задача D_H не имеет решения.*

Доказательство. Предположим противное, а именно пусть при выполнении сделанных выше предположений решение задачи D_H все же существует. Тогда в силу теоремы 2 существуют матрица $\widehat{H}$, являющаяся решением задачи D_H, и соответствующие векторы $\hat{x}$, $\hat{d}$, $\hat{u}$, связанные совокупностью условий (1.3)–(1.8). Рассмотрим зависящие от скалярных параметров $p, q > 0$ объекты

$$x = \hat{x} + p\bar{x}, \tag{2.9}$$

$$u = \hat{u} + q\bar{u}, \tag{2.10}$$

$$H = (b - Ax)\frac{x^\top}{x^\top x} + \frac{u}{u^\top u}\bigl(c^\top + d^\top - u^\top A\bigr) - \alpha\,\frac{ux^\top}{x^\top x\, u^\top u}, \tag{2.11}$$

где

$$\alpha = \gamma - u^\top Ax, \quad \gamma = c^\top\hat{x} = b^\top\hat{u}, \tag{2.12}$$

а вектор d является решением задачи квадратичного программирования

$$\|c^\top + d^\top - u^\top A\|^2 \to \min_{d \geqslant 0,\, d^\top x = 0}. \tag{2.13}$$

Несложно показать, что при произвольных конечных значениях параметров $p, q > 0$ матрица, задаваемая формулой (2.11), принадлежит допустимому множеству задачи D_H, т. е. выполняются условия $\mathcal{X}(A+H, b) \neq \varnothing$ и $\mathcal{U}(A+H, c) \neq \varnothing$. Действительно, в силу (2.4)–(2.7) и (2.9)–(2.13)

$$(A+H)x = b + \frac{u}{u^\top u}\bigl(c^\top x + d^\top x - u^\top Ax - \alpha\bigr),$$

но

$$c^\top x = c^\top \hat{x} = \gamma, \quad d^\top x = 0, \quad c^\top x + d^\top x - u^\top Ax - \alpha \equiv 0,$$

поэтому

$$(A+H)x \equiv b \Leftrightarrow \mathcal{X}(A+H, b) \neq \varnothing.$$

В то же время

$$u^\top(A+H) = c^\top + d^\top + \bigl(u^\top b - u^\top Ax - \alpha\bigr)\frac{x^\top}{x^\top x}.$$

Но

$$u^\top b - u^\top Ax - \alpha \equiv 0, \quad d \geqslant 0,$$

поэтому

$$u^\top(A+H) \geqslant c^\top \Leftrightarrow \mathcal{U}(A+H, c) \neq \varnothing.$$

Рассмотрим предельный переход

$$\widehat{H} = \lim_{p,q \to +\infty} H.$$

Используя соотношения (2.4)–(2.7) и (2.9)–(2.13), можно показать, что

$$\widehat{H} = -A\bar{x}\,\bar{x}^\top + \bar{u}\,[-\bar{u}^\top A]_+ - \bar{\alpha}\,\bar{u}\,\bar{x}^\top$$

и при этом

$$\| \,\widehat{H}\, \|^2 = \|A\bar{x}\|^2 + \|[-\bar{u}^\top A]_+\|^2 - \bar{\alpha}^2.$$

Но в силу условия (2.8) $\| \,\widehat{H}\, \|^2 < f(\hat{x}, \hat{d}, \hat{u}) = \|\widehat{H}\|^2$. Это означает, что существуют конечные значения параметров $p, q > 0$, при которых выполняется условие $\|H\|^2 < \|\widehat{H}\|^2$, что противоречит предположению об оптимальности матрицы $\widehat{H}$ в задаче D_H.

Теорема доказана.

3. Заключение

Полученные в работе результаты позволяют сделать следующие выводы.

Во-первых, удалось лучше понять конструктивную роль и более четко определить место задач матричной коррекции несовместной системы ограничений прямой задачи в общей проблематике задач матричной коррекции пары взаимно двойственных несобственных задач ЛП.

Установлено два важных факта.

1) Задача минимальной по евклидовой норме матричной коррекции несовместной системы ограничений прямой несобственной задачи ЛП 3-го рода неразрешима.

2) Существование решения задачи минимальной по евклидовой норме матричной коррекции несовместной системы ограничений прямой несобственной задачи ЛП означает, что указанная коррекция делает задачу ЛП собственной.

Во-вторых, удалось дополнить ряд результатов работы [17] новыми, менее очевидными достаточными условиями неразрешимости задачи матричной коррекции пары взаимно двойственных несобственных задач ЛП.

Неразрешимость (при определенных условиях) задач P_H, D_H (и им подобных) является стимулом к исследованию задач матричной коррекции в других постановках, гарантирующих разрешимость задач коррекции при выполнении сравнительно слабых допущений. Так, перспективной представляется, например, пока еще неисследованная задача (и подобные ей задачи)

$$R_H\colon \|x\|^2 + \|u\|^2 \to \min_{\mathcal{X}(A+H,b)\neq\varnothing,\ \mathcal{U}(A+H,c)\neq\varnothing,\ \|H\|\leq\mu,\ \mu>0},$$

постановку которой можно считать дальнейшим развитием (обобщением) одного из подходов А.Н. Тихонова к построению устойчивых (регуляризованных) решений приближенных систем линейных алгебраических уравнений [20].

Автор выражает признательность организаторам XV Всероссийской конференции “Математическое программирование и приложения” за возможность представления предварительных результатов данной работы, а также участникам секции “Теория и методы математического программирования” за полезное обсуждение, вопросы и пожелания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Астафьев Н.Н.** Двойственные системы однородных линейных уравнений // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 2. С. 48–53.

2. **Ашманов С.А., Тимохов А.В.** Теория оптимизации в задачах и упражнениях. М.: Наука, 1991. 448 с.

3. **Васильев Ф.П., Иваницкий А.Ю.** Линейное программирование. М.: Факториал Пресс, 2008. 328 с.

4. **Ватолин А.А.** Аппроксимация несобственных задач линейного программирования по критерию евклидовой нормы // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1984. Т. 24, № 12. С. 1907–1908.
5. **Голиков А.И., Евтушенко Ю.Г.** Применение теорем об альтернативах к нахождению нормальных решений линейных систем // Изв. вузов. Математика. 2001. № 12(475). С. 21–31.
6. **Голиков А.И., Евтушенко Ю.Г.** Теоремы об альтернативах и их применение в численных методах // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2003. Т. 43, № 3. С. 354–375.
7. **Голиков А.И., Евтушенко Ю.Г.** Регуляризация и нормальные решения систем линейных уравнений и неравенств // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 2. С. 113–121.
8. **Горелик В.А., Кондратьева В.А.** Параметрическое программирование и несобственные задачи линейной оптимизации // Моделирование, оптимизация и декомпозиция сложных динамических процессов. М.: ВЦ РАН, 1999. С. 57–82.
9. **Горелик В.А., Ерохин В.И., Муравьева О.В.** Некоторые задачи аппроксимации матриц коэффициентов несовместных систем линейных уравнений и несобственных задач линейного программирования // Моделирование, оптимизация и декомпозиция сложных динамических процессов. М.: ВЦ РАН, 2001. С. 57–88.
10. **Еремин И.И., Мазуров В.Д.** Нестационарные процессы математического программирования. М.: Наука, 1979. 288 с.
11. **Еремин И.И.** Двойственность для несобственных задач линейного программирования // Мат. заметки. 1982. Т. 32, № 2. С. 229–238.
12. **Еремин И.И., Мазуров В.Д., Астафьев Н.Н.** Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1983. 336 с.
13. **Еремин И.И.** Противоречивые модели оптимального планирования. М.: Наука, 1988. 160 с.
14. **Еремин И.И.** Линейная оптимизация и системы линейных неравенств. М.: Академия, 2007. 256 с.
15. **Еремин И.И.** Авторские результаты по проблематике математического программирования в ретроспективе // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 2. С. 58–66.
16. **Еремин И.И., Попов Л.Д.** Внутренние штрафные функции и двойственность в линейном программировании // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 3. С. 83–89.
17. **Ерохин В.И.** Матричная коррекция двойственной пары несобственных задач линейного программирования // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2007. Т. 47, № 4. С. 587–601.
18. **Ерохин В.И., Красников А.С., Хвостов М.Н.** О достаточных условиях разрешимости задач линейного программирования при матричной коррекции их ограничений // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 2. С. 144–156.
19. **Скарин В.Д.** О применении метода невязки для коррекции противоречивых задач выпуклого программирования // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 2. С. 268–276.
20. **Тихонов А.Н.** О приближенных системах линейных алгебраических уравнений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1980. Т. 20, № 6. С. 1373–1383.

Поступила 06.05.2015

Ерохин Владимир Иванович
д-р физ.-мат. наук, профессор
СПбГТУРП
e-mail: erohin_v_i@mail.ru