Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ РАСТИТЕЛЬНЫХ ПОЛИМЕРОВ

А. А. Тихонов

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА — ЯЗЫК СОВРЕМЕННОЙ МЕХАНИКИ

Учебное пособие

Санкт-Петербург

2008

ББК 22.151я7

Т464

УДК 514.742.2(075)

Тихонов А. А.

Векторная алгебра — язык современной механики: учебное пособие /ГОУВПО СПбГТУРП, СПб., 2008. – 30 с.

Настоящее издание является учебным пособием по векторной алгебре – разделу курса математики, имеющему важное значение для изучения теоретической механики. В пособии сформулированы основные понятия векторной алгебры, рассмотрены линейные и нелинейные операции над векторами, а также операция дифференцирования векторной функции по скалярному аргументу. Разобраны примеры, в основном из области механики. Обращено внимание на отдельные вопросы, обычно вызывающие трудности в процессе изучения теоретической механики. Приведены задачи, рекомендуемые для самостоятельного контроля усвоения материала. В конце пособия приведены ответы, указания и решения задач.

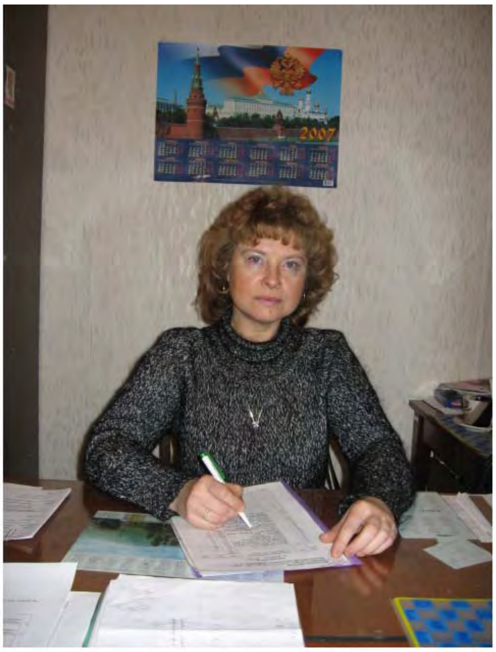
Предназначено для студентов дневной, вечерней и заочной форм обучения в университетах и технических вузах. Может быть также использовано преподавателями в процессе проведения занятий по теоретической механике.

Рецензенты: заведующий кафедрой высшей математики ГОУВПО СПбГТУРП, кандидат физико-математических наук, доцент Иванов Б.Ф.;
доцент кафедры общей математики и информатики ГОУВПО СПбГУ, кандидат физико-математических наук, доцент Сахаров В.Ю.

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом университета в качестве учебного пособия.

Предисловие

Одним из важных итогов работы Центра теоретической и прикладной механики (ЦТПМ) за год, прошедший с момента начала его работы (декабрь 2006), является разработка и внедрение в педагогическую практику разнообразных инновационных методов обучения, направленных на интенсификацию учебного процесса и повышение его качества. Совершенствованию учебно-методической деятельности ЦТПМ во многом способствовало активное творческое участие в работе Центра высококвалифицированных преподавателей из ведущих вузов и научных организаций Санкт-Петербурга, многие из которых разработали собственные конспекты лекций с оригинальными примерами, наборы типовых задач для практических занятий, проверочных заданий и контрольных работ. Учитывая, что процесс интенсивного обучения является индивидуальным и поэтому практически неповторим, ЦТПМ стремится сохранить для будущих студентов лучшие учебно-методические разработки. С этой целью ЦТПМ планирует серию публикаций, полезных как для студентов, так и для преподавателей. Открывает серию учебное пособие, написанное директором ЦТПМ, заведующим кафедрой теоретической механики и ТММ, профессором А.А. Тихоновым. Пособие направлено на формирование у обучающихся правильного представления о векторах в механике и на развитие навыков оперирования с векторами, необходимых для дальнейшего изучения теоретической механики и смежных дисциплин.



Администратор ЦТПМ Л.Ф. Щербакова

18.12.07.

Введение

В 1857 г. в Санкт-Петербургском императорском университете ординарный профессор и заведующий кафедрой прикладной математики Иосиф Иванович Сомов (1815-1876) начал вести курс аналитической механики и гидродинамики. Придерживаясь первоначально руководств Лагранжа и Пуансо, И.И. Сомов постепенно разработал собственный курс механики, в котором нашли широкое отражение такие новые идеи как векторное исчисление и криволинейные координаты. В результате последовательно, тремя частями вышел в свет под названием «Рациональная механика» разработанный им оригинальный курс теоретической механики – первый полный трактат по механике, написанный в векторном изложении. Развитию векторного исчисления и его приложений И.И. Сомов посвятил ряд крупных работ. Благодаря его трудам, векторное исчисление, зародившееся в середине XIX в., быстро проникло в геометрию, механику, физику и оформилось в отдельную математическую дисциплину.

В настоящее время методы И.И. Сомова широко используются в учебниках по теории поля, теоретической механике, дифференциальной геометрии. Методы векторной алгебры имеют большое преимущество перед координатным методом. Это преимущество проявляется не только в краткости и наглядности формул, но и в том, что векторные (тензорные) формулы не связаны с системой координат и поэтому не меняются при переходе одной системы координат к другой, т.е. векторные формулы инвариантны по отношению к преобразованиям координат. Векторная алгебра стала неотъемлемой частью математического аппарата, лежащего в основе современной механики. Поэтому успешное изучение механики и основанных на ней технических наук невозможно без знания векторной алгебры.

Настоящее пособие призвано восполнить недостаток первоначальных знаний в области векторной алгебры и помочь в последующем изучении механики. Вместе с тем, следует учитывать, что само изучение механики позволит будущим инженерам продолжать активно овладевать математическим аппаратом, лежащим в ее основе, приближаться к видению имеющихся соответствий между абстрактными символами и реальными объектами, обеспечивая тем самым успех своего технического образования.

1. Основные понятия и определения

В механике используется множество различных понятий, описывающих количественные характеристики физических процессов. Эти понятия являются тензорами, но тензорами различных рангов. Имея в виду тензоры в трехмерном пространстве, можно сказать, что величины, полностью определяемые заданием одного числа, называются ***скалярами*** или ***тензорами нулевого ранга***. Объекты, полностью определяемые заданием трех чисел (координат), меняющихся при замене системы координат по определенному закону, называются ***векторами*** или ***тензорами первого ранга***. Объекты, полностью определяемые заданием девяти чисел (координат), меняющихся при замене системы координат по определенному закону, называются ***тензорами второго ранга*** и т.д.

Определение. Физические величины, которые полностью характеризуются заданием одного вещественного числа, не зависящего от выбора системы координат, называются **скалярами**.
Термин «скаляр» происходит от латинского «scala», что означает «шкала» и напоминает о том, что для каждого значения скалярной величины найдется определенное место на шкале. Примерами скаляров в механике являются масса, объем, время, температура, энергия, модуль вектора.

Определение. Вектором называется направленный отрезок (или, что то же, упорядоченная пара точек).
Обозначают вектор стрелкой (или чертой) над буквой, например $\vec{a}$, или $\overrightarrow{AB}$, где точка A – начало вектора, а точка B – конец вектора. В книгах часто обозначают векторы жирным шрифтом.

Определение. Длиной вектора, или его **модулем**, называется расстояние между началом и концом вектора. Длина вектора обозначается $|\vec{a}|$ или $|\overrightarrow{AB}|$.

Геометрически вектор может быть изображен отрезком AB (рис. 1), длина которого в выбранном масштабе соответствует модулю вектора, а направление совпадает с направлением вектора.

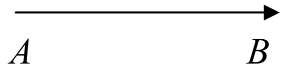


Рис.1

Определение. Нулевым вектором называется вектор, начало и конец которого совпадают. Нулевой вектор обозначается $\vec{0}$.

Определение. Единичным вектором, или **ортом**, называется вектор, длина которого равна единице.

Определение. Линией действия вектора называется прямая, на которой лежит вектор.

Определение. Векторы называются **коллинеарными**, если их линии действия параллельны.

Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору. Векторы считаются равными, если они коллинеарны, имеют одинаковые модули и направления.

Определение. Векторы называются **противоположными**, если они коллинеарны, имеют одинаковые модули и противоположные направления.

Вектор, противоположный вектору $\vec{a}$, обозначается $-\vec{a}$.

Примерами векторных величин в механике являются скорость, ускорение, сила. В зависимости от физических свойств величин, являющихся векторами, векторы подразделяются на

1) свободные, 2) скользящие, 3) приложенные.

Свободный вектор может быть отнесен к любой точке пространства, не изменяя при этом своего физического смысла. Свободный вектор характеризуется модулем и направлением. Пример свободного вектора – скорость поступательного движения твердого тела.

Скользящий вектор может быть отнесен к любой точке, лежащей на линии действия вектора. Скользящий вектор характеризуется модулем, направлением и линией действия. Примеры скользящих векторов – угловая скорость твердого тела, вектор силы, приложенный к абсолютно твердому телу.

Приложенный вектор может быть отнесен только к одной определенной точке пространства. Приложенный вектор характеризуется модулем, направлением, линией действия и точкой приложения. Примеры приложенных векторов – скорость движения точки; вектор силы, приложенный к деформируемому твердому телу.

Арифметические действия над скользящими и приложенными векторами выполняются так же, как и над свободными векторами.

2. Линейные операции над векторами

Линейными операциями над векторами называются операции сложения векторов и умножения вектора на число.

Определение. Суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, который однозначно строится по одному из эквивалентных правил: по правилу треугольника (рис. 2) или по правилу параллелограмма (рис. 3).

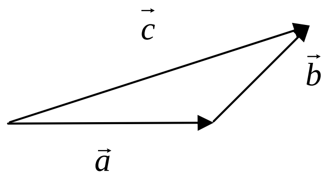


Рис. 2

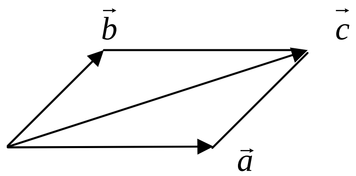


Рис. 3

Определение. Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, обозначаемой $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, называется вектор $\vec{c}$, который в сумме с вектором $\vec{b}$ образует вектор $\vec{a}$. Разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно рассматривать как сумму векторов $\vec{a}$ и $(-\vec{b})$: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ (рис. 4, 5).

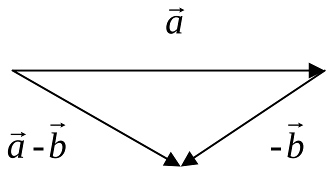


Рис. 4

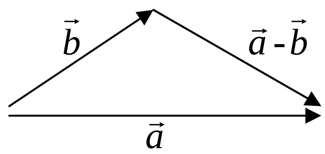


Рис. 5

Операция сложения векторов обладает следующими свойствами:

1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (коммутативность)

2) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (ассоциативность)

3) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$

4) для любого вектора $\vec{a}$ существует противоположный вектор $-\vec{a}$, такой что $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

Определение. Произведением вектора $\vec{a}$ и скаляра α называется вектор $\vec{b} = \alpha \vec{a}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) $|\vec{b}| = |\alpha||\vec{a}|$

2) вектор $\vec{b}$ коллинеарен вектору $\vec{a}$

3) векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены при $\alpha > 0$, противоположно направлены при $\alpha < 0$ (если $\alpha = 0$, то $\vec{b} = 0$).

Пусть даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и скаляры α и β. Операция умножения вектора на скаляр обладает следующими свойствами:

1) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$

2) $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$

3) $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$

4) $(\alpha\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$

Теорема. Если $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ – коллинеарные векторы, причем $\vec{a}_1 \neq 0$, то существует единственное число $\lambda \in \mathbb{R}$, такое что $\vec{a}_2 = \lambda\vec{a}_1$.

В частности, путем введения в рассмотрение орта $\vec{a}_0$ ($|\overrightarrow{a_0}| = 1$), имеющего то же направление, что и вектор $\vec{a}$, всякий вектор $\vec{a}$ однозначно может быть представлен как произведение модуля вектора $\vec{a}$ на его орт $\vec{a}_0$:

$$\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \overrightarrow{a_0}, \qquad \overrightarrow{a_0} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

При таком представлении вектора $\vec{a}$ явно указаны две его характеристики: модуль и направление.

Задания для самостоятельного решения

1) Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Построить векторы

а) $\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$, б) $\frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$, в) $\frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a})$, г) $-\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$.

2) Даны ортогональные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, причем $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 12$.
Найти $|\vec{a} + \vec{b}|$, $|\vec{a} - \vec{b}|$.

3) Дан треугольник *ABC* и векторы $\overrightarrow{AM} = \alpha \cdot \overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AN} = \beta \cdot \overrightarrow{AC}$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. При каком условии на скаляры α и β векторы $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{BC}$ коллинеарны ?

4) Даны неколлинеарные векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Найти множество векторов, лежащих на биссектрисе угла *BAC*.

5) Дано: $|\vec{a}| = 10$, $|\vec{b}| = 15$, $|\vec{a} + \vec{b}| = 20$. Найти $|\vec{a} - \vec{b}|$.

3. Векторные базисы на плоскости и в пространстве

Определение. Линейной комбинацией векторов $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2},\ldots,\overrightarrow{a_n}$ называется выражение $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{a_i}$, где $\alpha_i\in\mathbb{R}$.

Определение. Векторы $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\ldots,\overrightarrow{a_n}$ называются **линейно независимыми**, если равенство

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{a_i}=\vec{0} \tag{1}$$

выполняется только в случае, когда все $\alpha_i=0\quad(i=\overline{1,n})$.

Определение. Векторы $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\ldots,\overrightarrow{a_n}$ называются **линейно зависимыми**, если существуют числа α_i, среди которых хотя бы одно ненулевое, такие что выполняется равенство (1).

Очевидно, что данное определение линейной зависимости векторов $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\ldots,\overrightarrow{a_n}$ эквивалентно следующему: векторы $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},\ldots,\overrightarrow{a_n}$ линейно зависимы, если один из них можно представить в виде линейной комбинации остальных векторов. Действительно, пусть $\alpha_1\neq 0$ и выполняется равенство (1). Тогда из равенства (1) можно выразить $\overrightarrow{a_1}=-\sum\limits_{i=2}^{n}\dfrac{\alpha_i}{\alpha_1}\overrightarrow{a_i}$. Таким образом, вектор $\overrightarrow{a_1}$ оказался выражен через векторы $\overrightarrow{a_2},\ldots,\overrightarrow{a_n}$.

Определение. Векторы называются **компланарными**, если они параллельны одной и той же плоскости (или лежат в этой плоскости).

Из определения линейной зависимости векторов вытекают два следствия:

1) любые два коллинеарных вектора линейно зависимы, и наоборот, два неколлинеарных вектора линейно независимы.

2) любые три компланарных вектора линейно зависимы, и наоборот, три некомпланарных вектора линейно независимы.

Определение. Векторным базисом на плоскости называется совокупность любых двух линейно независимых векторов $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_2}$, принадлежащих этой плоскости.

На основании первого следствия получаем, что совокупность любых двух неколлинеарных векторов, лежащих в плоскости, образует векторный базис в этой плоскости, а произвольный вектор $\vec{a}$, лежащий в этой плоскости, может быть единственным образом представлен в виде линейной комбинации базисных векторов:

$$\vec{a} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} \qquad (2)$$

Равенство (2) называется разложением вектора $\vec{a}$ по базису $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$, а числа x и y называются **координатами вектора** $\vec{a}$ в базисе $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$.

Определение. **Векторным базисом в пространстве** называется совокупность любых трех линейно независимых векторов $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$, заданных в этом пространстве.

На основании второго следствия получаем, что любые три некомпланарных вектора образуют векторный базис в пространстве, а произвольный вектор $\vec{a}$ может быть единственным образом представлен в виде линейной комбинации базисных векторов:

$$\vec{a} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} + z\overrightarrow{e_3} \qquad (3)$$

Равенство (3) называется разложением вектора $\vec{a}$ по базису $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$, а числа x, y, z называются **координатами вектора** $\vec{a}$ в базисе $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$.
Несмотря на то, что в качестве векторного базиса могут выступать любые три некомпланарных вектора, на практике чаще используются ортонормированные базисы.

Определение. Базис $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ называется **ортонормированным**, если векторы $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ единичные и попарно перпендикулярны.

Если заранее выбран векторный базис $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$, по которому производится разложение произвольного вектора $\vec{a}$, то в координатной форме вектор $\vec{a}$ на основании (3) кратко записывают в виде

$\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ или $\vec{a} = (x, y, z)^T$, где T – знак транспонирования.

Из определения координат вектора относительно базиса следует, что равные векторы имеют равные соответствующие координаты.

4. Линейные операции над векторами, заданными координатами

Пусть в базисе $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ заданы два вектора $\vec{a} = x_1\vec{e_1} + y_1\vec{e_2} + z_1\vec{e_3}$ и $\vec{b} = x_2\vec{e_1} + y_2\vec{e_2} + z_2\vec{e_3}$. В координатной форме представим их в виде

$$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)^T, \qquad \vec{b} = (x_2, y_2, z_2)^T. \tag{4}$$

Сумма векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2)\vec{e_1} + (y_1 + y_2)\vec{e_2} + (z_1 + z_2)\vec{e_3}$. Кратко этот результат записывают в виде $\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)^T$. Аналогично **разность** векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ может быть представлена в виде $\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)^T$.

При умножении вектора $\vec{a} = (x, y, z)^T$ на число α его координаты умножаются на это число: $\alpha\vec{a} = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)^T$.

Коллинеарность и компланарность векторов в координатной форме

Условие коллинеарности двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, заданных координатами в виде (4), получим исходя из основного свойства коллинеарных векторов: $\vec{b} = \lambda\vec{a}$. Отсюда $x_2\vec{e_1} + y_2\vec{e_2} + z_2\vec{e_3} = \lambda x_1\vec{e_1} + \lambda y_1\vec{e_2} + \lambda z_1\vec{e_3}$,

$$(x_2 - \lambda x_1)\vec{e_1} + (y_2 - \lambda y_1)\vec{e_2} + (z_2 - \lambda z_1)\vec{e_3} = \vec{0},$$

$$x_2 = \lambda x_1, \quad y_2 = \lambda y_1, \quad z_2 = \lambda z_1.$$

Окончательно (при $x_1 \neq 0,\ y_1 \neq 0,\ z_1 \neq 0$) получаем искомое условие коллинеарности двух векторов:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{z_2}{z_1} = \lambda. \tag{5}$$

Пусть даны три вектора: $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)^T$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)^T$, $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)^T$. Рассмотрим их линейную комбинацию $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$. Линейная независимость векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ по определению означает, что линейная однородная алгебраическая система

$$\begin{cases} x_1\alpha + x_2\beta + x_3\gamma = 0 \\ y_1\alpha + y_2\beta + y_3\gamma = 0 \\ z_1\alpha + z_2\beta + z_3\gamma = 0 \end{cases} \tag{6}$$

имеет только нулевое решение $\alpha = \beta = \gamma = 0$, что в, свою очередь, равносильно условию

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (7)$$

Линейная зависимость векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ по определению означает, что линейная однородная алгебраическая система (6) имеет ненулевое решение, что возможно только в случае

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0. \qquad (8)$$

Следовательно, условие компланарности трех векторов имеет вид равенства (8), а условие некомпланарности – соответственно, вид (7).

Задания для самостоятельного решения

6) В векторном базисе $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ даны три вектора: $\vec{a} = (2;1;0)^T$, $\vec{b} = (1;-3;2)^T$, $\vec{c} = (0;4;-1)^T$. Найти координаты вектора $\vec{d} = 3\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$.

7) На плоскости даны два вектора: $\vec{a} = (1;-2)^T$, $\vec{b} = (-3;2)^T$. Проверить, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют базис на плоскости и разложить вектор $\vec{c} = (10;-8)^T$ по базису $\vec{a}$, $\vec{b}$.

8) Образуют ли векторы $\overrightarrow{e_1} = (\cos\varphi; -\sin\varphi; 0)^T$, $\overrightarrow{e_2} = (\sin\varphi; \cos\varphi; 0)^T$, $\overrightarrow{e_3} = (0;0;1)^T$, где $\varphi \in \mathbb{R}$, базис в пространстве?

9) Дан параллелограмм $ABCD$. Точки M и N находятся соответственно в серединах сторон BC и CD. Разложить вектор $\overrightarrow{AC}$ по базису $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AN}$.

10) Дан куб, в котором $ABCD$ и $EFGH$ – параллельные грани, а точка M – центр грани $EFGH$. Разложить вектор $\overrightarrow{AM}$ по базису $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$.

Координаты точки и вектора на плоскости и в пространстве

Координаты на прямой

Пусть на прямой *l* выбрана фиксированная точка *O*, называемая началом, ненулевой вектор $\vec{e}$, называемый базисным, а также некоторая точка *M* (рис.6).

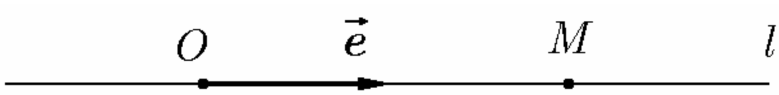


Рис. 6

Коллинеарность векторов $\overrightarrow{OM}$ и $\vec{e}$ означает, что существует единственное число $x \in \mathbb{R}$, такое что

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}. \qquad (9)$$

Число x называется **координатой** точки M на прямой l. В случае, показанном на рис. 6, координата точки M положительна ($x>0$), координаты точек, лежащих левее начала O, — отрицательны. Координата точки O равна нулю. Таким образом, установлено взаимно однозначное соответствие между точками прямой и их координатами на этой прямой.

Определение. Прямая, на которой введены координаты, называется **осью координат**.

Координаты на плоскости

Пусть в плоскости выбрана фиксированная точка O, называемая началом, два ненулевых вектора $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, образующих базис в данной плоскости, а также некоторая точка M. Координаты вектора $\overrightarrow{OM}$ в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ обозначим x и y:

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2. \qquad (10)$$

Тогда упорядоченная пара чисел x и y называется **координатами** точки M на плоскости. Таким образом, установлено взаимно однозначное соответствие между точками на плоскости и ее координатами – упорядоченными парами чисел (x, y).

Определение. Совокупность начала O и векторного базиса $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, состоящего из векторов одинаковой длины, называется **декартовой системой координат на плоскости**.

Линия действия вектора $\vec{e}_1$ обычно называется осью абсцисс и обозначается Ox, линия действия вектора $\vec{e}_2$ – осью ординат, обозначается Oy. Если векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ – ортогональные и единичные, то декартова система координат на плоскости называется **прямоугольной**. В этом случае орты $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ обычно обозначают $\vec{i}$ и $\vec{j}$ соответственно. Длина вектора (10) в прямоугольной системе координат равна $|OM| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Координаты в пространстве

Пусть в пространстве выбрана фиксированная точка O, называемая началом, три ненулевых вектора $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, образующих базис в пространстве, а также некоторая точка M. Координаты вектора $\overrightarrow{OM}$ в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ обозначим x, y, z:

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3. \qquad (11)$$

Тогда упорядоченная тройка чисел *x, y, z* называется **координатами** точки *M* в пространстве. Таким образом, установлено взаимно однозначное соответствие между точками в пространстве и ее координатами – упорядоченными тройками чисел (*x , y, z*).

Определение. Совокупность начала *O* и векторного базиса $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, состоящего из векторов одинаковой длины, называется **декартовой системой координат в пространстве**.

Линии действия векторов $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ обычно называются осями абсцисс (*Ox*), ординат (*Oy*) и аппликат (*Oz*). Координатами вектора $\vec{a}$ в пространстве *Oxyz* называются координаты этого вектора в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ данного пространства. Если векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ – взаимно ортогональные и единичные, то декартова система координат в пространстве называется **прямоугольной**. В этом случае орты $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ образуют ортонормированный базис и обозначаются обычно $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ соответственно. Длина вектора (11) в прямоугольной системе координат равна

$$|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,. \qquad (12)$$

<u>Пример 1.</u> В прямоугольной декартовой системе координат точка *M* переместилась из положения $M_1(x_1, y_1, z_1)$ в положение $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Найти модуль вектора перемещения точки *M*.

<u>Решение.</u> В прямоугольной декартовой системе координат положение $M_1(x_1, y_1, z_1)$ точки *M* можно определить радиус-вектором $\vec{r}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, а положение $M_2(x_2, y_2, z_2)$ – радиус-вектором $\vec{r}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$. Тогда перемещение точки *M* из положения $M_1(x_1, y_1, z_1)$ в положение $M_2(x_2, y_2, z_2)$ представляет собой вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Поскольку $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$, то модуль этого вектора найдем по формуле (12) $|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

<u>Пример 2.</u> К материальному телу приложены силы $\vec{F}_1 = \vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{F}_2 = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{F}_3 = -3\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$. Найти модуль главного вектора указанных сил.

<u>Решение.</u> Главным вектором сил, приложенных к материальному телу, называется сумма этих сил $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$. Поскольку $\vec{F} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, то модуль главного вектора $|\vec{F}| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$.

Пример 3. В плоскости Oxy дана однородная треугольная пластина с вершинами $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$. Найти координаты центра тяжести пластины.

Решение. Центр тяжести однородной треугольной пластины находится в точке пересечения ее медиан. Обозначим эту точку $M(x, y, z)$.

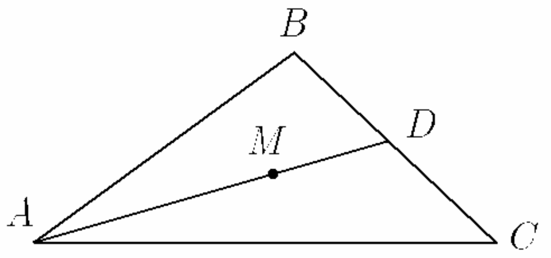


Рис. 7

Пусть AD — медиана (рис. 7) в треугольнике ABC. По свойству медиан $AD = 3MD$. Поэтому $\overrightarrow{MD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$. Поскольку $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}$, то $\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA})$. Отсюда $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OD}$. Учитывая, что $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$, получаем: $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$. Следовательно,

$$x = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3),\ y = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3),\ z = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3).$$

Задания для самостоятельного решения

11) На прямой (AB) даны две точки: $A(1,2,-3), B(5,8,7)$. Найти координаты такой точки M на прямой (AB), что $|AM| = |MB|$.
12) В параллелограмме $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Точка A принята за начало системы координат, а векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ — за базисные. Найти в этой системе координат координаты точки M, делящей отрезок $[OC]$ пополам.
13) Дан ромб $ABCD$, в котором известны вершины $B(1,-3)$ и $D(0,4)$ и угол $\widehat{BAD} = 60^0$. Найти координаты вершин $A(x_A, y_A)$ и $C(x_C, y_C)$.
14) Найти орт вектора $\vec{a} = (3,4,-6)^T$.
15) Найти центр тяжести пластины с вершинами $A(4,8,-1)$, $B(0,1,1)$, $C(2,1,3)$.

5. Нелинейные операции над векторами

В векторной алгебре различают два вида умножения векторов: скалярное и векторное.

Скалярное произведение векторов

Определение. Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется скалярная величина, равная произведению модулей этих векторов, умноженному на косинус угла между ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}). \tag{13}$$

Обозначим через φ угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Непосредственно из определения скалярного произведения вытекают следующие его свойства:

1) если угол φ — острый ($|\varphi| < \pi/2$), то $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$,

2) если угол φ — тупой ($|\varphi| > \pi/2$), то $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$,

3) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$,

4) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$,

5) $m\vec{a} \cdot n\vec{b} = mn\vec{a} \cdot \vec{b} \quad (m, n \in \mathbb{R})$.

Отметим также важные частные случаи, вытекающие из (13):

1) если $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = 0$ и $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Наоборот, если $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, причем $|\vec{a}| \neq 0$, $|\vec{b}| \neq 0$, то $\vec{a} \perp \vec{b}$.

2) если $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, то $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = 1$ и $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|$

3) если $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, то $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = -1$ и $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}||\vec{b}|$

4) если $\vec{a} = \vec{b}$, то $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = 1$ и $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$, откуда $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$.

Следовательно, для ортов $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ прямоугольной системы координат получаем равенства:

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1, \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0. \tag{14}$$

Для произвольных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, разложенных по базису $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$,

$$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}, \quad \vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}, \tag{15}$$

скалярное произведение на основании вышеперечисленных свойств равно

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) \cdot (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) = x_1x_2\vec{i} \cdot \vec{i} + x_1y_2\vec{i} \cdot \vec{j} + \\ &+ x_1z_2\vec{i} \cdot \vec{k} + y_1y_2\vec{j} \cdot \vec{j} + y_1z_2\vec{j} \cdot \vec{k} + z_1x_2\vec{k} \cdot \vec{i} + \\ &+ z_1y_2\vec{k} \cdot \vec{j} + z_1z_2\vec{k} \cdot \vec{k} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.\end{aligned} \tag{16}$$

Поэтому необходимое и достаточное условие ортогональности ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, представленных в виде (15), таково:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0. \qquad (17)$$

Из определения скалярного произведения векторов следует также, что угол φ между двумя ненулевыми векторами может быть найден по формуле $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ или, что то же, $\cos\varphi = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)}}$.

Проекция вектора на координатную ось

Определение. Проекцией вектора $\vec{a}$ на координатную ось l с единичным базисным вектором $\vec{e}$ называется скалярное произведение

$$\vec{a}\cdot\vec{e} = |\vec{a}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{e}}). \qquad (18)$$

Пример 1. Точка приложения постоянной по величине и направлению силы $\vec{F}$ переместилась из положения $M_1(x_1, y_1, z_1)$ в положение $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Найти работу, произведенную силой $\vec{F}$ на перемещении M_1M_2.

Решение. Как известно, работа постоянной по величине и по направлению силы $\vec{F}$ определяется по формуле

$$A(\vec{F}) = \vec{F}\cdot\overrightarrow{M_1M_2}.$$

Пусть F_x, F_y, F_z — координаты вектора $\vec{F}$. Тогда $A(\vec{F}) = F_x(x_2 - x_1) + F_y(y_2 - y_1) + F_z(z_2 - z_1)$.

Пример 2. Вычислить работу силы тяжести $\vec{F} = (0, 0, -10)^T$, совершенную на перемещении точки ее приложения из начала координат в положение $M(1, 2, 3)$.

Решение. На основании общего результата, полученного в предыдущем примере, получаем $A(\vec{F}) = 0\cdot 1 + 0\cdot 2 - 10\cdot 3 = -30$.

Пример 3. Найти мощность главного вектора системы сил $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3\}$, приложенных к материальной точке, движущейся со скоростью $\vec{v}$, если известно, что в прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ с ортами $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ указанные векторы имеют следующие значения: $\vec{F}_1 = (1, -1, 2)^T$, $\vec{F}_2 = (-1, 2, 3)^T$, $\vec{F}_3 = (3, 0, -1)^T$, $\vec{v} = (7, 6, 5)^T$.

Решение. Как известно, мощность силы $\vec{F}$, приложенной к материальной точке, движущейся со скоростью $\vec{v}$, называется скалярное произведение $\vec{F}\cdot\vec{v}$. В данном случае главный вектор $\vec{F}$ системы сил $\{\vec{F}_1,\vec{F}_2,\vec{F}_3\}$ равен $\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3=(3,1,4)^T$. Поэтому $\vec{F}\cdot\vec{v}=3\cdot 7+1\cdot 6+4\cdot 5$ $=47$.

Замечание. В выражениях, содержащих скалярные произведения векторов, знак скалярного умножения часто опускается.

Задания для самостоятельного решения

16) Дана система сил $\{\vec{F}_1,\vec{F}_2,\vec{F}_3\}$, $\vec{F}_1=(2,-1,3)^T$, $\vec{F}_2=(-1,1,2)^T$, $\vec{F}_3=(0,0,1)^T$. Найти проекции главного вектора $\vec{F}$ данной системы сил на координатные оси x,y,z с ортами $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$.
17) Раскрыть скобки в выражении $(\vec{a}+\vec{b})^2+(\vec{a}-\vec{b})^2$ и выяснить геометрический смысл полученного равенства.
18) Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}=(18,0,2)^T$ и $\vec{b}=(0,1,9)^T$.
19) Найти угол φ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, определенными в предыдущем задании.
20) Даны три точки: $A(1,-3,4)$, $B(2,-1,3)$, $C(6,8,1)$. Найти $(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{BC}$.

Векторное произведение векторов

Определение. Векторным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) $\vec{c}\perp\vec{a}$, $\vec{c}\perp\vec{b}$,

2) векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ образуют правую тройку векторов (рис. 8),

3) $|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$ (19)

В выражениях, содержащих векторные произведения векторов, знак векторного произведения никогда не опускается.

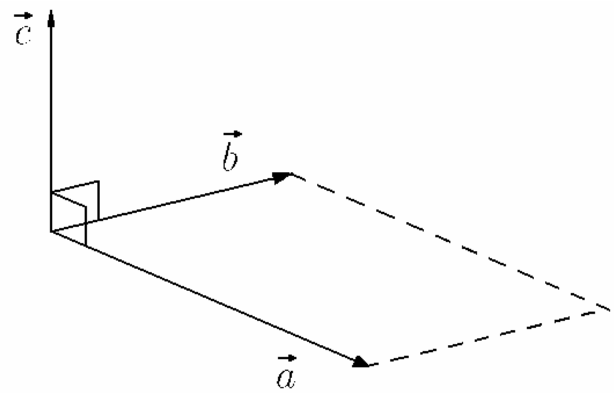


Рис. 8

Если в векторном произведении хотя бы один из сомножителей равен нулевому вектору, то векторное произведение по определению есть $\vec{0}$. Обозначим через φ угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Непосредственно из определения векторного произведения вытекают следующие его свойства:

1) вектор $\vec{c}$ перпендикулярен к плоскости, содержащей векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2) модуль векторного произведения двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ численно равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах, приведенных к одному началу (рис. 1) (проверьте!).

3) $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$,

4) $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$,

5) $m\vec{a}\times n\vec{b}=mn(\vec{a}\times\vec{b}) \quad (m,n\in\mathbb{R})$.

Отметим также важные частные случаи, вытекающие из определения векторного произведения векторов:

1) если $\vec{a}\parallel\vec{b}$, то $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$. Наоборот, если $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$, причем $|\vec{a}|\neq 0$ и $|\vec{b}|\neq 0$, то $\vec{a}\parallel\vec{b}$.

2) $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$ для любого вектора $\vec{a}$.

3) если $\vec{a}\perp\vec{b}$, то $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|$.

Следовательно, для ортов $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ прямоугольной системы координат получаем равенства:

$$\begin{aligned}&\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=\vec{0},\\&\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\ \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j},\\&\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k},\ \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i},\ \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}.\end{aligned} \tag{20}$$

Для произвольных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (15), разложенных по базису $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, векторное произведение на основании (20) равно

$$\begin{aligned}\vec{a}\times\vec{b}&=(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})\times(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k})=x_1x_2\vec{i}\times\vec{i}+x_1y_2\vec{i}\times\vec{j}+x_1z_2\vec{i}\times\vec{k}+\\&+y_1y_2\vec{j}\times\vec{j}+y_1z_2\vec{j}\times\vec{k}+z_1x_2\vec{k}\times\vec{i}+z_1y_2\vec{k}\times\vec{j}+z_1z_2\vec{k}\times\vec{k}=\\&=x_1y_2\vec{k}-x_1z_2\vec{j}-y_1x_2\vec{k}+y_1z_2\vec{i}+z_1x_2\vec{j}-z_1y_2\vec{i}=\\&=(y_1z_2-z_1y_2)\vec{i}+(z_1x_2-x_1z_2)\vec{j}+(x_1y_2-y_1x_2)\vec{k}.\end{aligned}$$

Этот же результат более коротко можно записать в виде

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix} \tag{21}$$

<u>Пример 1.</u> Найти векторное произведение векторов, заданных своими координатами в базисе $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$: $\vec{a}=(3,0,2)^T$ и $\vec{b}=(0,1,4)^T$.

Решение. $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 4\end{vmatrix}=-2\vec{i}-12\vec{j}+3\vec{k}.$

Пример 2. В координатном пространстве $Oxyz$ с ортами $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ даны три точки: $A(1,-3,4)$, $B(2,-1,3)$, $C(6,0,1)$. Найти площадь треугольника ABC: S_{ABC}.

Решение. Площадь треугольника ABC равна половине площади параллелограмма со сторонами $[AB]$ и $[AC]$. Площадь этого параллелограмма найдем как модуль векторного произведения $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$.

Получим $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\left\|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & -1\\ 5 & 3 & -3\end{matrix}\right\|=\dfrac{1}{2}|-3\vec{i}-2\vec{j}-7\vec{k}|=\dfrac{1}{2}\sqrt{9+4+49}=\dfrac{\sqrt{62}}{2}.$

Момент вектора относительно точки

Векторное произведение векторов происходит из задач механики, где важную роль играет понятие момента вектора (приложенного или скользящего) относительно точки.

Определение. Моментом вектора $\vec{a}$ **относительно точки** O называется векторное произведение $\vec{r}\times\vec{a}$, где $\vec{r}=\overrightarrow{OA}$ — радиус-вектор точки A приложения вектора $\vec{a}$ относительно точки O. Обозначим указанный момент символом $\vec{M}_0(\vec{a})$. Согласно определению

$$\vec{M}_0(\vec{a})=\vec{r}\times\vec{a}. \qquad (22)$$

Момент вектора относительно оси

Как всякий вектор, момент вектора $\vec{a}$ относительно точки может быть спроектирован на любую наперед заданную координатную ось. Пусть l — координатная ось, проходящая через точку O.

Определение. Моментом вектора $\vec{a}$ **относительно оси** l называется проекция на эту ось момента вектора $\vec{a}$ относительно любой точки данной оси.

Обозначим указанный момент символом $M_l(\vec{a})$. Поскольку точка O принадлежит оси l, то получаем $M_l(\vec{a})=Пр_l\,\vec{M}_0(\vec{a})=\vec{M}_0(\vec{a})\cdot\vec{l}_0$, где $\vec{l}_0$ — орт оси l.

Пример. Твердое тело поворачивается вокруг неподвижной точки O под действием силы $\vec{F} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$, приложенной в точке $A(1,4,2)$. Найти момент этой силы относительно точки $O(0,0,0)$ и относительно оси Oy.

Решение. $$\vec{M}_0(\vec{F}) = \overline{OA} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = -22\vec{i} + 11\vec{j} - 10\vec{k},$$

$$M_y(\vec{F}) = \vec{M}_0(\vec{F}) \cdot \vec{j} = 11.$$

Двойное векторное произведение векторов

В механике часто встречается **двойное векторное произведение** векторов — вектор, вычисляемый по формуле вида $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$. Согласно формуле (21) получаем:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ (\vec{b} \times \vec{c})_x & (\vec{b} \times \vec{c})_y & (\vec{b} \times \vec{c})_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_y c_z - b_z c_y & b_z c_x - b_x c_z & b_x c_y - b_y c_x \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} b_x(a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z) - c_x(a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z) \\ b_y(a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z) - c_y(a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z) \\ b_z(a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z) - c_z(a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z) \end{pmatrix} = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

Таким образом,

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}). \qquad (23)$$

Задания для самостоятельного решения

21) Сила $\vec{F} = (4,0,-3)^T$ приложена в точке $A(1,-1,1)$. Найти момент этой силы относительно точки $B(0,-1,2)$.
22) В точке $B(1,-3,2)$ приложена система сил: $\vec{F}_1 = (1,0,0)^T$, $\vec{F}_2 = (0,1,0)^T$, $\vec{F}_3 = (0,0,2)^T$. Найти главный момент этой системы сил относительно точки $A(1,-1,1)$, его модуль и направляющие косинусы.
23) Упростить выражение $(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})$ и выяснить геометрический смысл полученного результата.

24) Даны векторы $\vec{a} = (-1,2,1)^T$ и $\vec{b} = (3,-2,-1)^T$. Вычислить $(\vec{a} + 2\vec{b}) \times (3\vec{a} - \vec{b})$.

25) Даны векторы $\vec{a} = (1,1,0)^T$, $\vec{b} = (0,1,2)^T$, $\vec{c} = (2,0,1)^T$. Вычислить $(3\vec{a} + \vec{b}) \times ((\vec{a} - \vec{c}) \times (2\vec{b} + \vec{c}))$.

Смешанное произведение векторов

В некоторых разделах механики встречается смешанное произведение векторов.

Определение. Смешанным произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется скаляр, определяемый по формуле $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$.

Важным свойством смешанного произведения является возможность циклической перестановки сомножителей:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}). \tag{24}$$

В силу свойства (24) смешанное произведение векторов иногда записывают просто в виде $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$. Нетрудно проверить, что для векторов $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)^T, \vec{b} = (x_2, y_2, z_2)^T, \vec{c} = (x_3, y_3, z_3)^T$, заданных в ортогональном базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, смешанное произведение вычисляется по формуле

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}, \tag{25}$$

а модуль этого смешанного произведения равен объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Следует также заметить, что сравнение формул (8) и (25) позволяет установить необходимое и достаточное условие компланарности трех векторов в виде равенства нулю смешанного произведения этих векторов:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0.$$

6. Дифференцирование вектора по скалярному аргументу

Как отмечалось ранее, векторная алгебра — язык современной механики, а ее аппарат — дифференциальные уравнения. Поэтому далее рассмотрим вопрос о дифференцировании векторной функции скалярного аргумента.

Пусть вектор $\vec{a}(t)$ — непрерывная функция скалярного аргумента t. В процессе изменения переменной t вектор $\vec{a}(t)$ изменяется в общем случае как по величине, так и по направлению. Если при этом откладывать вектор $\vec{a}(t)$ от одного и того же полюса O, то конец вектора $\vec{a}(t)$ будет описывать кривую, называемую **годографом** вектора $\vec{a}(t)$ (рис. 9).

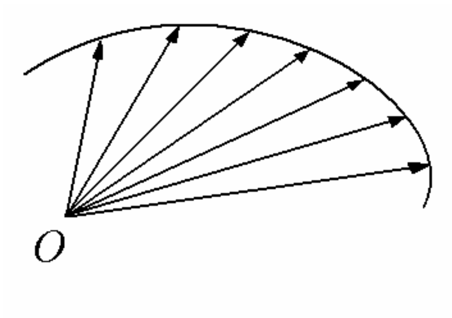


Рис. 9

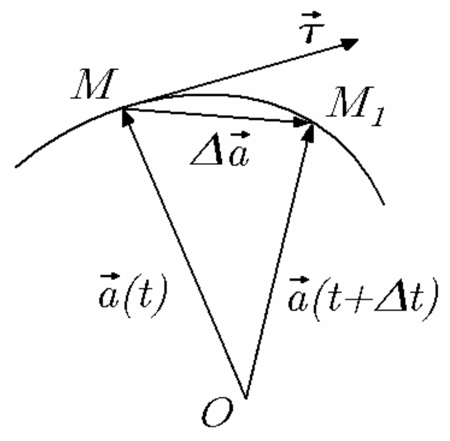


Рис. 10

Переходя к рассмотрению производной $\dfrac{d\vec{a}}{dt}$, дадим аргументу t приращение Δt и найдем предел $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\vec{a}}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\vec{a}(t+\Delta t)-\vec{a}(t)}{\Delta t}$, который (если существует) является производной от вектора $\vec{a}(t)$ по скалярному аргументу t. Вычисляемый предел является вектором. Найдем направление этого вектора и его модуль. Из рис. 10 ясно, что направление вектора $\dfrac{d\vec{a}}{dt}$ совпадает с предельным (при $\Delta t\to 0$) направлением вектора $\Delta\vec{a}$. Но при $\Delta t\to 0$ точка M_1 стремится к M. Поэтому направление вектора $\Delta\vec{a}$ стремится к направлению касательной (ее орт обозначен через $\vec{\tau}$) к годографу, проведенной через точку M. Таким образом установлено, что вектор $\dfrac{d\vec{a}}{dt}$ направлен по касательной к годографу вектора $\vec{a}(t)$. Пусть вектор $\vec{a}(t)$ задан своим разложением по базису $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ неподвижной системы координат $Oxyz$:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\ .$$

Тогда
$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{da_x}{dt}\vec{i} + \frac{da_y}{dt}\vec{j} + \frac{da_z}{dt}\vec{k}\ .$$

Если система координат $Oxyz$ — прямоугольная, то

$$\left|\frac{d\vec{a}}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{da_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{da_y}{dt}\right)^2 + \left(\frac{da_z}{dt}\right)^2}$$

Таким образом, производная $\frac{d\vec{a}}{dt}$ найдена как по направлению, так и по величине.

Несложно доказать, что при дифференцировании нелинейных векторных выражений справедливы следующие формулы, аналогичные известным скалярным формулам:

$$\frac{d}{dt}(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\frac{d\vec{b}}{dt} \qquad (26)$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{a}\times\vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt}\times\vec{b} + \vec{a}\times\frac{d\vec{b}}{dt} \qquad (27)$$

Отметим два частных случая, встречающихся при дифференцировании векторов.

1) Если вектор $\vec{a}$ изменяется только по модулю, сохраняя свое направление, то его годограф — прямая линия, и вектор $\frac{d\vec{a}}{dt}$ направлен вдоль этой прямой.
2) Если вектор $\vec{a}$ изменяется только по направлению, сохраняя свою величину, то его годограф — кривая на сфере радиуса $|\vec{a}|$, и вектор $\frac{d\vec{a}}{dt}$ направлен по касательной к этой сфере, т.е. перпендикулярно к вектору $\vec{a}$.

Основываясь на этих двух частных случаях, получим еще одну общую форму представления производной от вектора по скалярному аргументу. Пусть $\vec{a}_0$ — единичный вектор, направленный вдоль $\vec{a}$. Представим вектор $\vec{a}$ в виде

$$\vec{a} = |\vec{a}|\,\vec{a}_0. \qquad (28)$$

Дифференцируя очевидное равенство $\vec{a}_0 \cdot \vec{a}_0 = 1$, на основании (26) получаем $2\frac{d\vec{a}_0}{dt} \cdot \vec{a}_0 = 0$, что означает $\frac{d\vec{a}_0}{dt} \perp \vec{a}_0$. Дифференцируя (28), имеем равенство

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{d\,|\vec{a}\,|}{dt}\vec{a}_0 + |\,\vec{a}\,|\frac{d\vec{a}_0}{dt}, \qquad (29)$$

которое означает, что производная от вектора по скалярному аргументу t представляет собой сумму двух взаимно перпендикулярных векторов, первый из которых имеет направление вектора $\vec{a}$ и характеризует изменение вектора $\vec{a}$ по модулю, а второй — перпендикулярен к $\vec{a}$ и характеризует изменение его по направлению. Представим $\frac{d\vec{a}_0}{dt}$ в несколько ином виде. Из рис. 11 следует, что в равнобедренном треугольнике $|\,\vec{a}_0\,| = |\,\vec{a}_0 + \Delta\vec{a}_0\,| = 1$. Кроме того, $|\,\Delta\vec{a}_0\,| = 2\sin\frac{\Delta\varphi}{2}\,|\,\vec{a}_0\,| =$

$$= \frac{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}}\Delta\varphi\ .$$

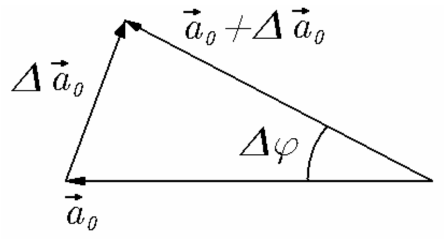


Рис. 11

Отсюда, деля обе части равенства на Δt и переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, находим: $\frac{|\,d\vec{a}_0\,|}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}$ или $|\,d\vec{a}_0\,| = |\,d\varphi\,|$. Обозначив орт, направленный вдоль $d\vec{a}_0$ и перпендикулярный к вектору $\vec{a}_0$, через $\vec{\tau}$, из (29) имеем:

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{d\,|\vec{a}\,|}{dt}\vec{a}_0 + |\,\vec{a}\,|\frac{d\varphi}{dt}\vec{\tau}\ . \qquad (30)$$

Иллюстрацией формулы (30) является рис. 12.

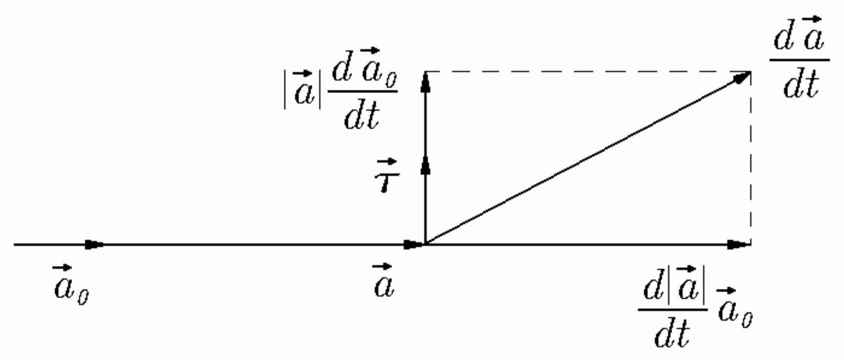
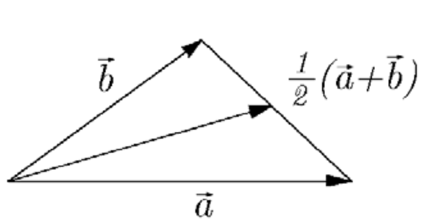


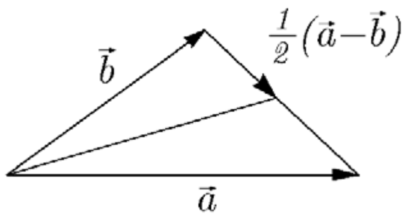
Рис. 12

Ответы, указания и решения

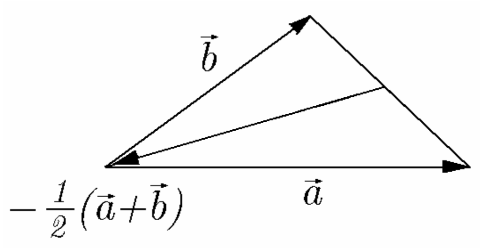
1) а)



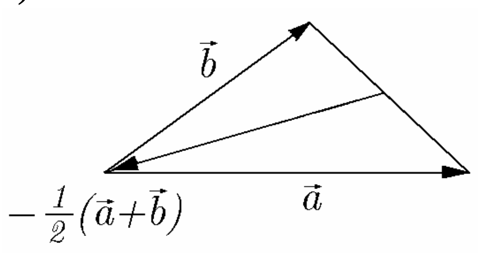
б)



в)



г)



2) $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}-\vec{b}| = 13$

3) $\alpha = \beta$

4) Пусть $\vec{e_1} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$, $\vec{e_2} = \dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$. Рассмотрим ромб, построенный на единичных векторах $\vec{e_1}$ и $\vec{e_2}$. Диагональ этого ромба, выходящая из вершины *A*, является биссектрисой угла *BAC*. Поэтому искомое множество векторов, лежащих на биссектрисе угла *BAC*, определяется по формуле $\lambda(\vec{e_1}+\vec{e_2})$, где $\lambda \in \mathbb{R}$.

5) Нетрудно заметить, что $|\vec{a}+\vec{b}|^2 + |\vec{a}-\vec{b}|^2 = 2(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2)$. Отсюда находим, что $|\vec{a}-\vec{b}| = 5\sqrt{10}$.

6) $\vec{d} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 14 \\ -4 \end{pmatrix}$

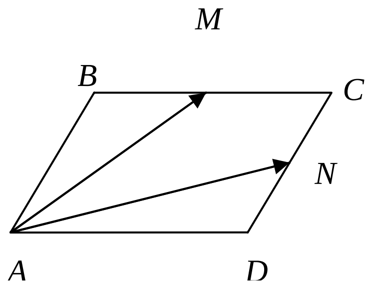
7) Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны $(-\frac{1}{3} \neq -1)$ и поэтому они образуют базис на плоскости. Представим вектор $\vec{c}$ в виде линейной комбинации базисных векторов $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ и найдем неизвестные постоянные коэффициенты α

и β, решив систему линейных алгебраических уравнений $\begin{cases} \alpha - 3\beta = 10 \\ -\alpha + \beta = -4 \end{cases}$.

Отсюда $\alpha = 1$, $\beta = -3$. Следовательно, $\vec{c} = \vec{a} - 3\vec{b}$.

8) Вычислим определитель, составленный из координат векторов $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$: $\begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$. Так как он отличен от нуля, то векторы $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$ некомпланарны и линейно независимы. Следовательно, они образуют векторный базис в пространстве.

9)



Из равенств

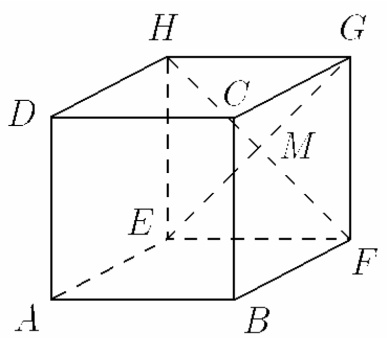
$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AM} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{AN} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AN} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD})$$

путем их сложения получаем:

$2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$ Отсюда имеем искомое разложение $\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AN}.$

10)



Из рисунка следует, что $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}.$

11) Координаты точки M совпадают с координатами вектора $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

12) Так как $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AO} = \frac{3}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$, то *M(3/4, 3/4)*.

13) Длина стороны ромба равна $\sqrt{50}$. Из системы уравнений

$$\begin{cases} (x_A - 1)^2 + (y_A + 3)^2 = 50 \\ x_A^2 + (y_A - 4)^2 = 50 \\ (x_C - 1)^2 + (y_C + 3)^2 = 50 \\ x_C^2 + (y_C - 4)^2 = 50 \end{cases} \quad \text{находим}$$

$$x_A = \frac{1 + 7\sqrt{3}}{2},\ y_A = \frac{1 + \sqrt{3}}{2},\ x_C = \frac{1 - 7\sqrt{3}}{2},\ y_C = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}.$$

14) Так как искомый орт $\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, то находим вначале $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-6)^2} = \sqrt{61}$. В результате получаем

$$\vec{a}_0 = \frac{3}{\sqrt{61}}\vec{i} + \frac{4}{\sqrt{61}}\vec{j} - \frac{6}{\sqrt{61}}\vec{k} = \left(\frac{3}{\sqrt{61}}, \frac{4}{\sqrt{61}}, \frac{-6}{\sqrt{61}}\right)^T.$$

15) $\left(2, \frac{10}{3}, 1\right)$.

16) Главный вектор $\vec{F} = \sum_{i=1}^{3} \vec{F}_i = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k} - \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k} + \vec{k} = \vec{i} + 6\vec{k}$.

Поэтому $F_x = \vec{F} \cdot \vec{i} = 1,\ F_y = \vec{F} \cdot \vec{j} = 0,\ F_y = \vec{F} \cdot \vec{k} = 6$.

17) $(\vec{a} + \vec{b})^2 + (\vec{a} - \vec{b})^2 = 2(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2)$. Сумма квадратов длин диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов длин его сторон.

18) 18

19) $\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{18}{\sqrt{328}\sqrt{82}} = \frac{9}{82}$

20) $\overrightarrow{AB}=(1,2,-1)^T$, $\overrightarrow{AC}=(5,11,-3)^T$, $\overrightarrow{BC}=(4,9,-2)^T$;

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1\cdot 5+2\cdot 11+(-1)\cdot(-3)=30;$

В результате получаем вектор $(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{BC}=(120,270,-60)^T$.

21) $\overrightarrow{M_B}(\vec{F})=\overrightarrow{BA}\times\vec{F}=\vec{M}_0(\vec{F})=\overrightarrow{OA}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & -1\\ 4 & 0 & -3\end{vmatrix}=-\vec{j}$.

22) Поскольку сумма моментов сил, входящих в систему, равна моменту суммы этих сил, то, посчитав вначале $\vec{F}=\sum_{i=1}^{3}\vec{F}_i=(1,1,2)^T$, найдем искомый главный момент $\overrightarrow{M}_A(\vec{F})=\overrightarrow{AB}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}=$

$=-5\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$. Отсюда модуль этого момента равен $|\overrightarrow{M}_A(\vec{F})|=\sqrt{(-5)^2+1^2+2^2}=\sqrt{30}$; Направляющие косинусы (обозначим их α, β, γ) найденного момента равны

$$\cos\alpha=-\frac{5}{\sqrt{30}},\quad \cos\beta=\frac{1}{\sqrt{30}},\quad \cos\gamma=\frac{2}{\sqrt{30}}.$$

23) $(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})=-\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{a}=2\vec{b}\times\vec{a}$.

Следовательно, $|(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})|=2|\vec{b}\times\vec{a}|$, что с геометрической точки зрения означает: площадь параллелограмма, построенного на диагоналях параллелограмма со сторонами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, равна удвоенной площади параллелограмма со сторонами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

24) $(\vec{a}+2\vec{b})\times(3\vec{a}-\vec{b})=-\vec{a}\times\vec{b}+6\vec{b}\times\vec{a}=7\vec{b}\times\vec{a}=$

$$7\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -2 & -1\\ -1 & 2 & 1\end{vmatrix}=7(-2\vec{j}+8\vec{k})=(0,-14,56)^T$$

25) $3\vec{a}+\vec{b}=(3,4,2)^T$, $2\vec{b}+\vec{c}=(2,2,5)^T$, $\vec{a}-\vec{c}=(-1,1,-1)^T$,

$(3\vec{a}+\vec{b})(2\vec{b}+\vec{c})=6+8+10=24$, $(3\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{c})=-3+4-2=-1$,

$(3\vec{a}+2\vec{b})\times((\vec{a}-\vec{c})\times(2\vec{b}+\vec{c}))=24(\vec{a}-\vec{c})+2\vec{b}+\vec{c}=24\vec{a}+2\vec{b}-23\vec{c}=$

$=-22\vec{i}+26\vec{j}-19\vec{k}$

Библиографический список

Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. В 2 т. - М.: Наука, 1972.

Жилин П.А. Векторы и тензоры второго ранга в трехмерном пространстве. СПб.: Изд-во «Нестор», 2001.

СОДЕРЖАНИЕ

Редактор и корректор Т.А. Смирнова
Технический редактор Л.Я. Титова Темплан 2008, поз. 12

Подп. к печати 28.01.2008. Формат 60×84/16. Бумага тип. №1. Печать офсетная.
2,0 уч.-изд. л. Печ. л. 2,0. Тираж 100 экз. Изд. № 12
Цена «С». Заказ 1630.

Ризограф ГОУВПО Санкт-Петербургского государственного технологического университета растительных полимеров, 198095, СПб, ул. Ивана Черных, д. 4.