МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ РАСТИТЕЛЬНЫХ ПОЛИМЕРОВ»

Теоретическая механика

Часть 1

Статика

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Санкт-Петербург
2013

Теоретическая механика

Часть 1

Статика

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Санкт-Петербург
2013

УДК 531 (075)
ББК 22.3Я7
Т 338

Теоретическая механика. Ч.1. Статика: учебное пособие / сост.: М.В. Максименко, Н.В. Кузнецова, В.Е. Головко, С.Г. Петров, И.В.Клюшкин; СПбГТУРП. – СПб., 2013. – 54 с.

В учебном пособии рассматривается часть курса теоретической механики – статика. Содержание предлагаемого учебного пособие соответствует современному уровню развития науки. В пособии приведены цели и задачи науки теоретической механики, дана сводка основных понятий. Настоящее учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлениям: 220400.62 «Управление в технических системах», 140400 «Электроэнергетика и электротехника», 220700 «Автоматизация технологических процессов и производств».

Рецензенты:
Заслуженный работник высшей школы РФ д-р техн. наук, профессор кафедры системного анализа Санкт-Петербургского государственного технологического института (технического университета) Холоднов В.А.,
канд. техн. наук, доцент кафедры прочности материалов и конструкций Санкт-Петербургского государственного университета путей сообщения Б.М.Аллахвердов.

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом в качестве учебного пособия.

ВВЕДЕНИЕ

Теоретической механикой называется наука, в которой изучаются общие законы механического движения и механического взаимодействия материальных тел.

Простейшая форма движения материи – механическое движение, под которым подразумевают происходящее во времени и пространстве изменение положения одного тела по отношению к другому. С телом, по отношению к которому изучается движение, связывают определенную систему координат.

В природе тела взаимодействуют друг с другом. Взаимодействие тел происходит по-разному, например, оно может заключаться в передаче от одного тела к другому какого-то количества теплоты, электрического заряда и пр. Одним из видов взаимодействия материи является механическое взаимодействие тел.

Механическим взаимодействием называется такое взаимодействие материальных тел, которое изменяет или стремится изменить характер их механического движения.

При этом мы пренебрегаем изменениями в химической структуре тел и их физическим состоянием. Механическое взаимодействие является одной из конкретных форм проявления взаимосвязи как всеобщей формы существования движущейся материи.

Как научная дисциплина теоретическая механика насчитывает в своем историческом развитии свыше двух тысячелетий. Первые теоремы механики были сформулированы в трудах Аристотеля (середина IV в. до н.э.), Архимеда (III в. до н.э.). Однако становление теоретической механики как науки в современном понимании произошло в начале XVII века в трудах Галилея и нашло свое логическое завершение в известном труде Исаака Ньютона «Математические начала натуральной философии» (1678 год). В дальнейшем методы теоретической механики развивались в трудах Эйлера, Даламбера, Лагранжа, Гамильтона и др.

Значительный вклад в развитие механики внесли русские и советские ученые – М.В. Ломоносов, М.В. Остроградский, П.Л. Чебышев, И.В. Мещерский, Н.Е. Жуковский, К.С. Циолковский, А.Н. Крылов, Н.Г. Четаев, Г.К. Суслов, И.Г. Малкин, А.Ю. Ишлинский и др.

Исключительное значение для теоретической механики имеют работы А. М. Ляпунова (1857— 1918). Наиболее выдающаяся его работа — создание теории устойчивости движения — имеет широкое техническое применение и ее развивают многие русские и иностранные ученые.

Курс теоретической механики делится на три раздела: статику, кинематику и динамику.

1. ПРЕДМЕТ И ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ СТАТИКИ

Статикой называется раздел теоретической механики, в котором изучаются способы преобразования систем сил в эквивалентные и рассматриваются задачи на равновесие твердых тел.

Сформулируем основные понятия статики:

1. *Материальная точка* – тело конечных размеров, которыми можно пренебречь при решении данной задачи.
2. *Система материальных точек* (механическая система) – это такая совокупность материальных точек, в которой движение (положение) каждой точки зависит от движения (положения) остальных точек.
3. *Абсолютно твердое тело* – эта такая система материальных точек, в которой расстояние между любыми точками не изменяется в процессе движения.

Очевидно, абсолютно твердое тело не может деформироваться, т.е. изменять свою форму под влиянием приложенных сил. Это понятие является научной абстракцией, принятой для получения законов движения в наиболее общей форме, справедливых как для движения тел, так жидкостей и газов.

4. *Кинематическое состояние* – это состояние движения (в частном случае покоя), в котором находится данное твердое тело.

Введение этого понятия необходимо в статике, так как здесь не вводятся кинематические характеристики: скорость, ускорение, траектория движения и т.д.

5. *Сила* – это мера механического взаимодействия между телами, характеризующая его интенсивность и направление.

Это взаимодействие может иметь место как при непосредственном контакте (близкодействие), так и через посредство создаваемых телами полей (дальнодействие).

Сила – величина векторная. Действие силы на тело определяется тремя элементами: модулем (величиной), направлением и точкой приложения.

Графически сила выражается направленным отрезком, где длина отрезка AB выражает в выбранном масштабе модуль силы, прямая DC, по которой направлена сила, называемая линией действия силы, и точка A указывают точку приложения силы (рис. 1).

Для измерения модуля силы приняты следующие единицы:

- техническая система (МКГСС) - 1кгс;
- международная система (СИ) - 1 Н.

Перевод единиц производится по соотношениям:

1 кгс = 9.81 Н   1 Н = 1.102 кг

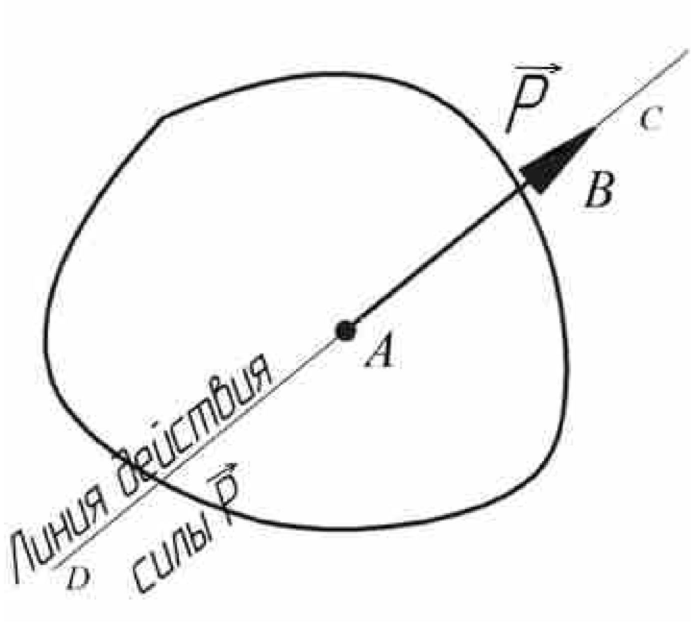


Рис. 1

Сила, приложенная к телу в какой-либо одной его точке, называется *сосредоточенной*.

Силы, действующие на все точки данного объема или поверхности тела, называются *распределенными*. Из них наибольшее значение имеют силы, равномерно распределенные по длине (погонная нагрузка): $\vec{q}$ – интенсивность равномерно распределенной нагрузки, т.е. величина силы, приходящейся на единицу длины нагруженного отрезка. При решении задач такую нагрузку нужно привести к сосредоточенной силе, приложенной в середине отрезка и равной по модулю $Q = q \cdot L$ (рис. 2).

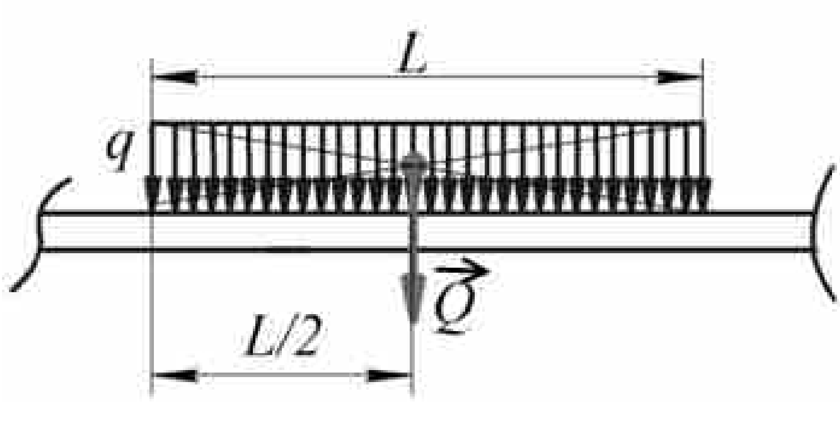


Рис. 2

Совокупность сил, действующих на данное тело, называется *системой сил*.

Системы сил, под действием каждой из которых тело находится в одинаковом кинематическом состоянии, называются *эквивалентными*.

В частности, если добавление или отбрасывание некоторой системы сил не изменяет кинематического состояния механической системы, то говорят, что эта система сил является *уравновешенной* (или *эквивалентной нулю*).
6. Сила, эквивалентная данной системе сил, называется *равнодействующей*.
7. Сила, равная по модулю равнодействующей и направленная по одной с нею прямой в противоположную сторону, называется *уравновешивающей*.

2. АКСИОМЫ СТАТИКИ

Все теоремы и уравнения статики выводятся из нескольких исходных фундаментальных положений, называемых аксиомами статики.

I. Аксиома инерции:

Система сил, приложенная к твердому телу, находящемуся в покое или совершающему равномерное прямолинейное движение, является уравновешенной.

II. Аксиома уравновешивания двух сил:

Две силы, приложенные к абсолютно твердому телу, уравновешиваются тогда и только тогда, когда они равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны:

$$\overrightarrow{P_1} = -\overrightarrow{P_2}.$$

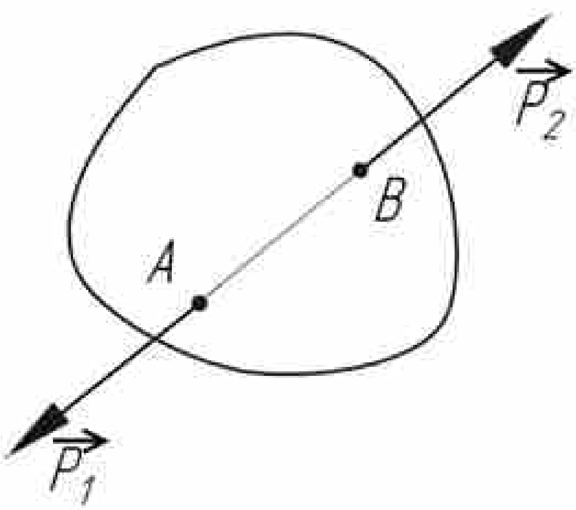


Рис. 3

III. Аксиома присоединения и отбрасывания систем взаимно уравновешивающихся сил:

Кинетическое состояние абсолютно твердого тела не изменится при присоединении или отбрасывании системы взаимно уравновешивающихся сил.

Следствие: Силу можно переносить в любую точку линии ее действия, т.е. сила является скользящим вектором.

Доказательство: пусть на тело действует сила $\vec{P}$, приложенная в точке *A*. Требуется перенести точку приложения этой силы в точку *B*, лежащую на линии действия силы.

Приложим в точке *B* тела уравновешенную систему сил $\overrightarrow{P_1}$, $\overrightarrow{P_2}$ так, чтобы соблюдалось равенство (рис. 4):

$$\overrightarrow{P_1} = \vec{P} = -\overrightarrow{P_2}.$$

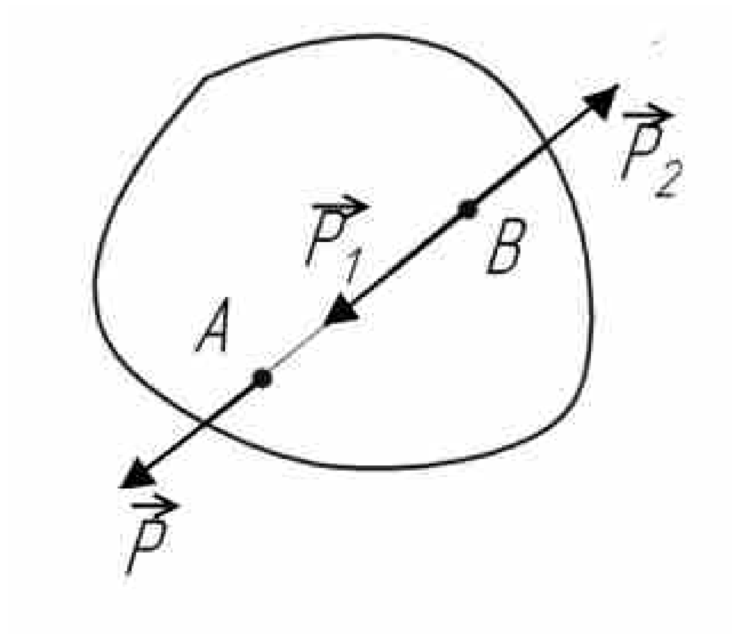


Рис. 4

От этого действие силы $\vec{P}$ на тело не изменится. Отбросим уравновешенную систему сил $\overrightarrow{P_1}$, $\overrightarrow{P_2}$. В результате получим силу $\overrightarrow{P_1}$=$\vec{P}$, но приложенную в точке *B* тела. Поскольку точка *B* была выбрана на линии действия силы произвольно, то следствие доказано.

IV. Аксиома параллелограмма сил:

Равнодействующая двух пересекающихся сил приложена в точке их пересечения и изображается диагональю параллелограмма, построенного на этих силах как на сторонах (рис. 5).

Эта аксиома дает способ определения равнодействующей двух сил, приложенных в одной точке тела. Этот способ называется правилом параллелограмма.

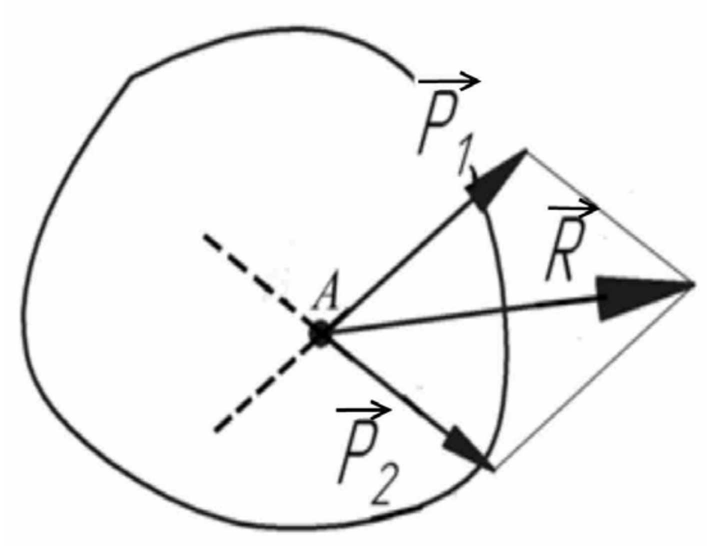


Рис. 5

V. Аксиома равенства действия и противодействия (3-й закон Ньютона):

Всякому действию соответствует равное по модулю и противоположно направленное противодействие (рис. 6).

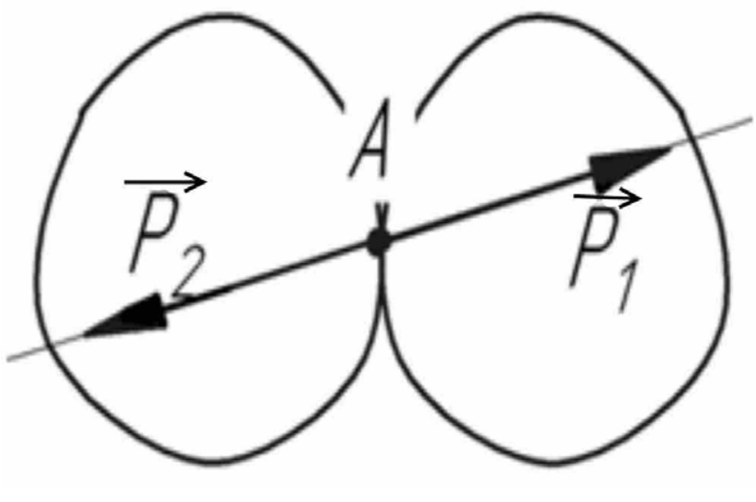


Рис. 6

$$\overrightarrow{P_1} = -\overrightarrow{P_2}.$$

Эта аксиома утверждает, что в природе не существует одностороннего действия силы. Механическое действие и противодействие являются конкретной формой проявления принципа всеобщей связи явлений при механическом взаимодействии тел.

Будучи приложенными к разным телам, силы взаимодействия уравновешенной системы не образуют.

VI. Аксиома затвердевания:

Кинематическое состояние нетвердого тела не изменяется при его мгновенном затвердевании.

Из этой аксиомы следует, что условия равновесия абсолютно твердого тела должны выполняться и для деформируемого тела. Однако для деформируемого тела эти *условия необходимы, но не всегда достаточны*. Так, для равновесия гибкой нити недостаточно того, чтобы приложенные к ее концам силы были равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны, нужно еще, чтобы они растягивали нить, а не сжимали.

3. СВЯЗИ И РЕАКЦИИ СВЯЗЕЙ

Тело называется *свободным*, если оно может перемещаться в пространстве в любом направлении, т.е. его движение не ограничено твердыми телами.

При решении задач, относящихся к равновесию тела, почти всегда рассматриваемое тело является несвободным.

Тело, перемещения которого в пространстве ограничены какими-либо другими телами, называется *несвободным.*

Тела, ограничивающие свободу перемещения в пространстве данного тела, называются *связями*.

Если тело несвободно, то говорят, что на него наложены связи. В механике связи осуществляются при помощи твердых или гибких тел, соединенных с данным телом или касающихся его. Так, для тела, лежащего на столе, связью является стол; для вала, лежащего в подшипниках, связями являются подшипники; для лестницы, приставленной к стене, связями являются стена и пол. Если под действием приложенных к нему сил тело будет давить на связь, то связь, в свою очередь, будет действовать на это тело.

Сила, с которой связь действует на тело, препятствуя его перемещению, называется реакцией связи.

Согласно аксиоме V реакция связи равна по модулю силе давления на связь и направлена в сторону, противоположную этой силе, т.е. в сторону, противоположную той, куда связь не дает перемещаться телу.

Силы, действующие на несвободное тело, делятся на задаваемые (активные) и реакции связей. К задаваемым силам относятся все силы, не являющиеся реакциями связей.

Рассмотрим основные типы связей и их реакции.

I) ***Гладкая опорная поверхность***

Гладкой называется поверхность, трением тела о которую можно пренебречь. Связи без трения называются *идеальными*.

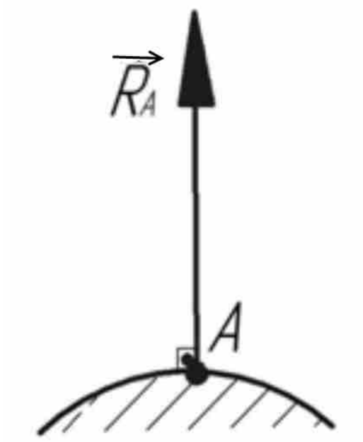


Рис. 7

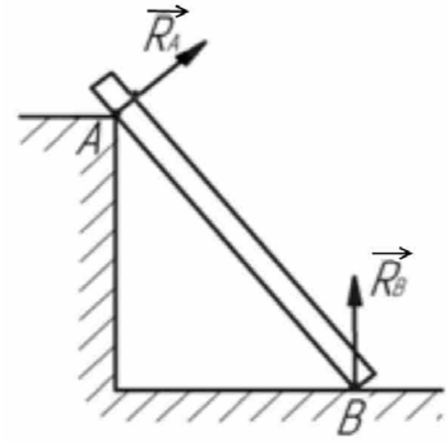


Рис. 8

Реакция направлена по общей нормали к поверхностям соприкасающихся тел в точке их касания и приложена в этой точке (рис. 7).

Если одна из соприкасающихся поверхностей является точкой (угол), то реакция направлена по нормали к другой поверхности (рис. 8).

II) ***Гибкая нить (цепь, канат)***

Реакция (натяжение) нити направлена вдоль нити к точке ее подвеса и приложена в точке прикрепления нити к телу (рис. 9).

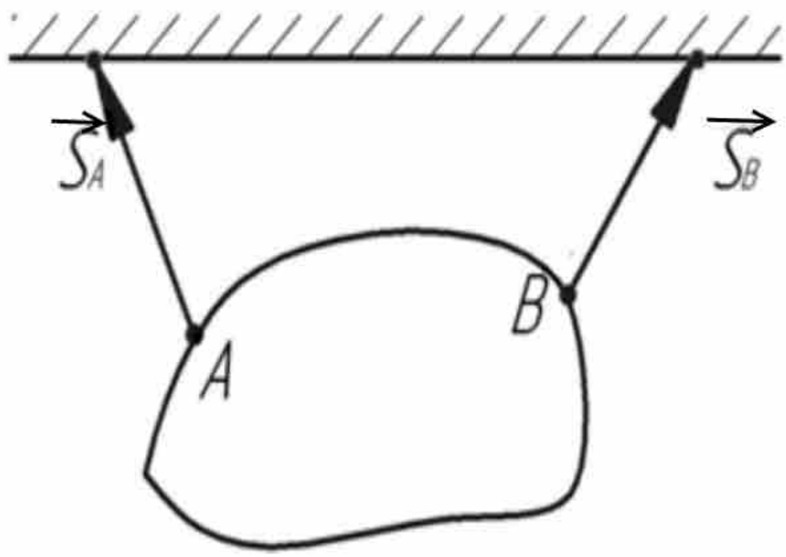


Рис. 9

III) ***Стержень***

Реакции стержня направлены вдоль стержня: при растяжении – внутрь, а при сжатии – наружу (рис. 10).

а) растянутый стержень б) сжатый стержень

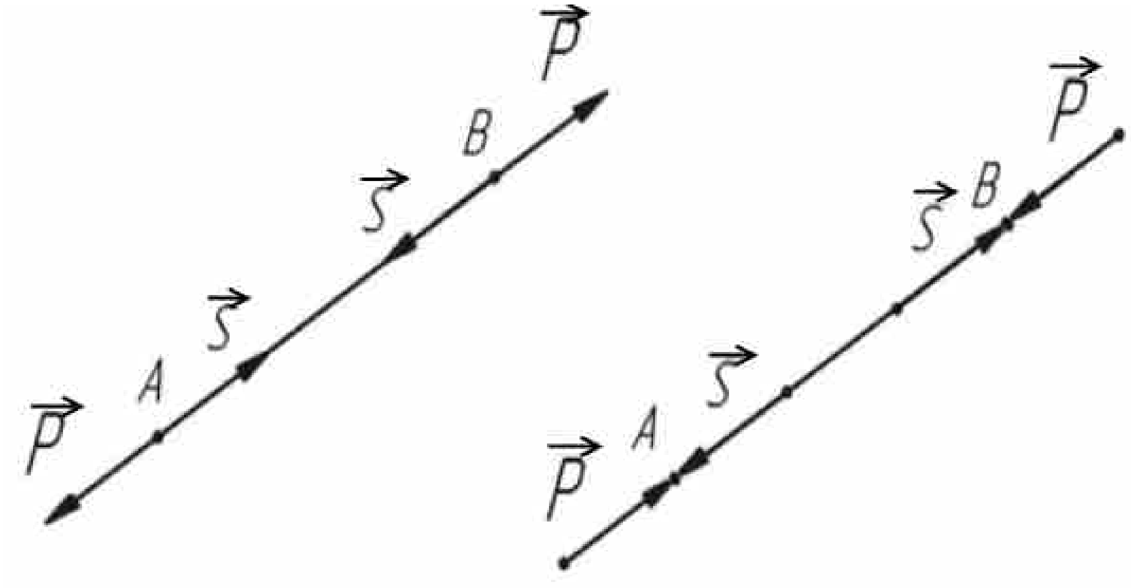


Рис. 10

IV) ***Опоры балок***

а) подвижная шарнирная опора (подвижный цилиндрический шарнир)

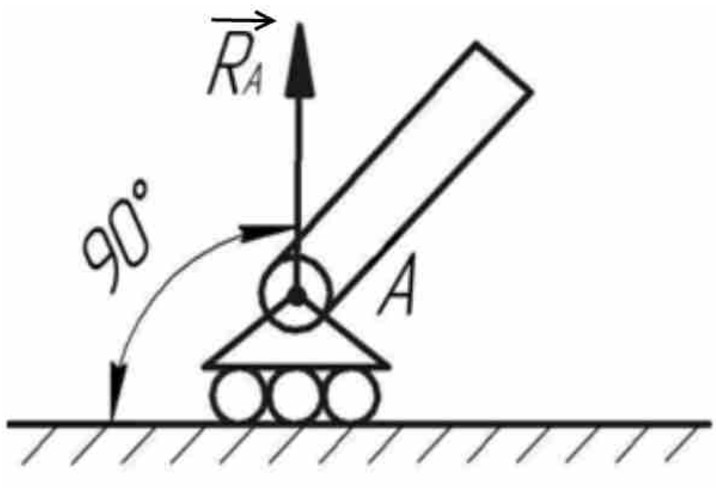


Рис. 11

Реакция $\overrightarrow{R_A}$ направлена по нормали к поверхности, на которую опираются катки опоры, а линия действия проходит через центр шарнира (рис. 11).

б) неподвижная шарнирная опора (неподвижный цилиндрический шарнир)

Реакция $\overrightarrow{R_B}$ проходит через ось шарнира и может занимать любое положение в плоскости, перпендикулярной к этой оси.

При решении задач будем реакцию $\overrightarrow{R_B}$ изображать ее составляющими $\overrightarrow{X_B}$ и $\overrightarrow{Y_B}$ по направлениям осей координат (рис. 12). Определив эти составляющие, можно найти модуль и направление реакции $\overrightarrow{R_B}$:

$$R_B = \sqrt{{X_B}^2 + {Y_B}^2}\,;\quad \cos\propto = \frac{X_B}{Y_B};\quad \cos\beta = \frac{Y_B}{X_B},$$

где $\propto$ и β – углы, которые составляет вектор $\overrightarrow{R_B}$ с осями координат OX и OY соответственно.

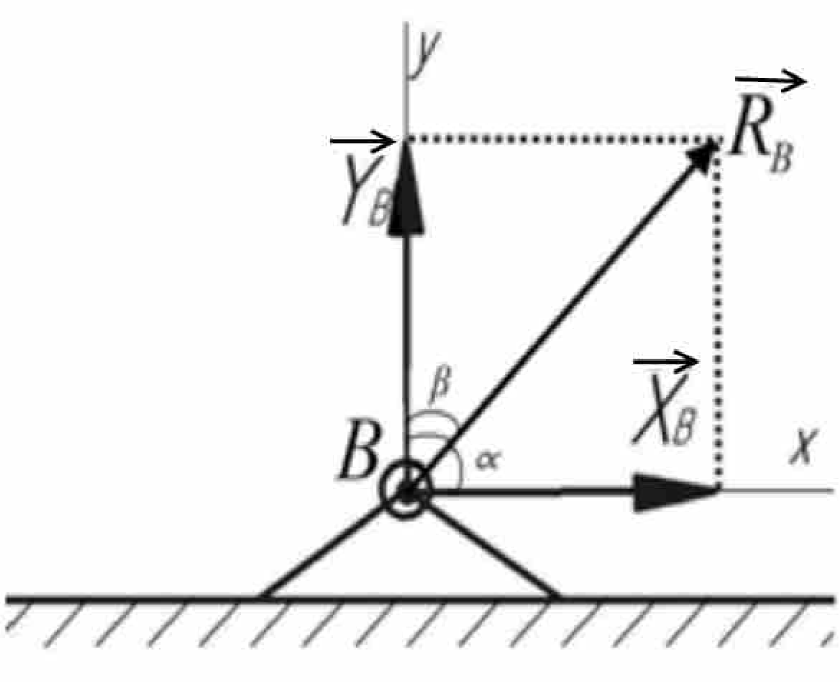


Рис. 12

V) ***Опоры вращающихся твердых тел***

а) на плоскости (рис. 13):

y – ось вращения;

A – цилиндрический подшипник;

$\overrightarrow{R_A}$ – перпендикулярна к оси вращения (параллельна оси *x*);

B – подпятник (пята);

$\overrightarrow{R_B}$ – имеет две составляющие по осям *x* и *y* ($\overrightarrow{X_B}$ и $\overrightarrow{Y_B}$).

$$R_B = \sqrt{{X_B}^2 + {Y_B}^2}\,.$$

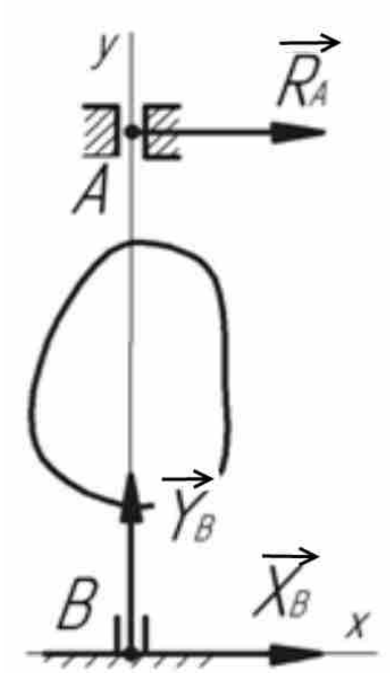
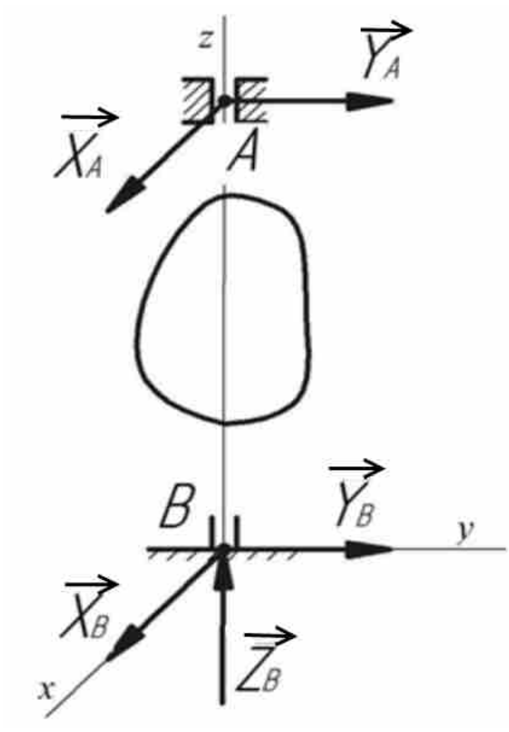


Рис. 13

б) в пространстве:



Реакция подшипника *A* направлена по перпендикуляру к оси вращения *z*, раскладывается на две составляющие по осям *x* и *y* ($\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$):

$$R_A = \sqrt{X_A{}^2 + Y_A{}^2}\ .$$

Реакция подпятника *B* имеет составляющие по всем трем координатным осям (рис. 14):

$$R_B = \sqrt{X_B{}^2 + Y_B{}^2 + Z_B{}^2}\,.$$

Рис. 14

Задачи на равновесие несвободных тел решаются на основании следующей аксиомы: всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если мысленно отбросить связи и заменить их действие на тело реакциями этих связей.

Эта аксиома называется *принципом освобождаемости от связей* или аксиомой связей.

Пример: на гладкой горизонтальной плоскости покоится шар (рис. 15). Неподвижная плоскость, ограничивающая движение шара, является для него связью. Если мысленно освободить шар от связи, то для удержания его в покое к нему в точке касания с плоскостью нужно приложить силу $\vec{N} = -\vec{G}$.

Тогда шар, освобождаемый от связи, будет свободным телом, на которое действует активная сила $\vec{G}$ и реакция связи $\vec{N}$.

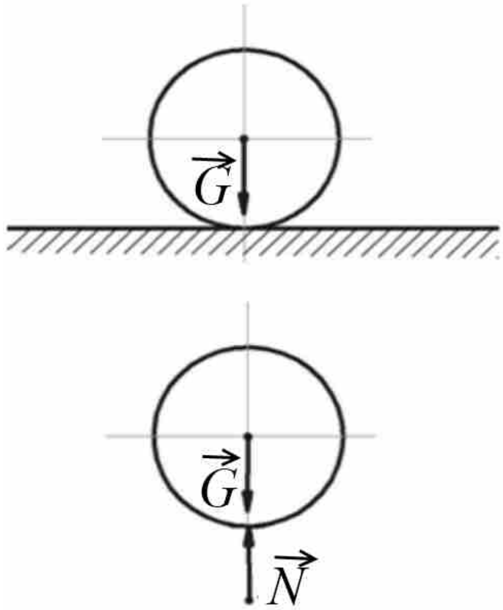


Рис. 15

4. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ РАВНОДЕЙСТВУЮЩЕЙ СИСТЕМЫ СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

Системой сходящихся сил называется такая система сил, линии действия которых пересекаются в одной точке (рис. 16). Если перенести все силы такой системы по линиям их действия в общую точку *O* пересечения этих линий, то, согласно следствию из первых двух аксиом статики, действие системы сил на абсолютно твердое тело не изменится. Следовательно, любую систему сходящихся сил, действующих на абсолютно твердое тело, можно заменить эквивалентной системой сил, приложенных в одной точке.

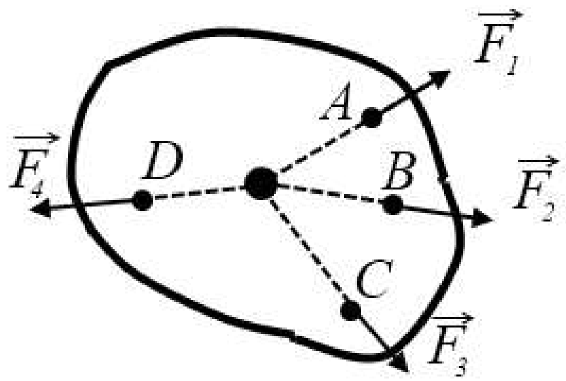


Рис. 16

Равнодействующую системы сходящихся сил можно определить геометрическим способом – последовательным сложением сил системы по правилу силового треугольника. В результате построения получается *силовой многоугольник*, равнодействующая выражается его последней стороной.

$$\vec{R} = \overrightarrow{P_1} + \overrightarrow{P_2} + \cdots + \overrightarrow{P_n} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{P_i}.$$

Следовательно, равнодействующая системы сходящихся сил равна их геометрической сумме, приложена в точке пересечения сил и изображается последней стороной силового многоугольника, построенного на этих силах.

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{P_i}.$$

Геометрическая сумма векторов не зависит от перемены мест слагаемых и, следовательно, при изменении порядка сложения сил модуль и направление равнодействующей не изменятся.

5. УСЛОВИЕ РАВНОВЕСИЯ СХОДЯЩЕЙСЯ СИСТЕМЫ СИЛ

Сходящиеся силы находятся в равновесии, если их *равнодействующая равна нулю*.

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{P_i} = 0.$$

Графически этому соответствует *замкнутый силовой многоугольник*.

В замкнутом силовом многоугольнике все силы направлены в одну сторону по его обводу (рис. 17). В левом многоугольнике все силы направлены в одну сторону по обводу. Силы $\overrightarrow{P_1}, \overrightarrow{P_2}, \overrightarrow{P_3}, \overrightarrow{P_4}$ и $\overrightarrow{P_5}$ находятся в равновесии. А в правом многоугольнике $\overrightarrow{P_5}$ – равнодействующая:

$$\overrightarrow{P_5} = \sum_{i=1}^{4} \overrightarrow{P_i}.$$

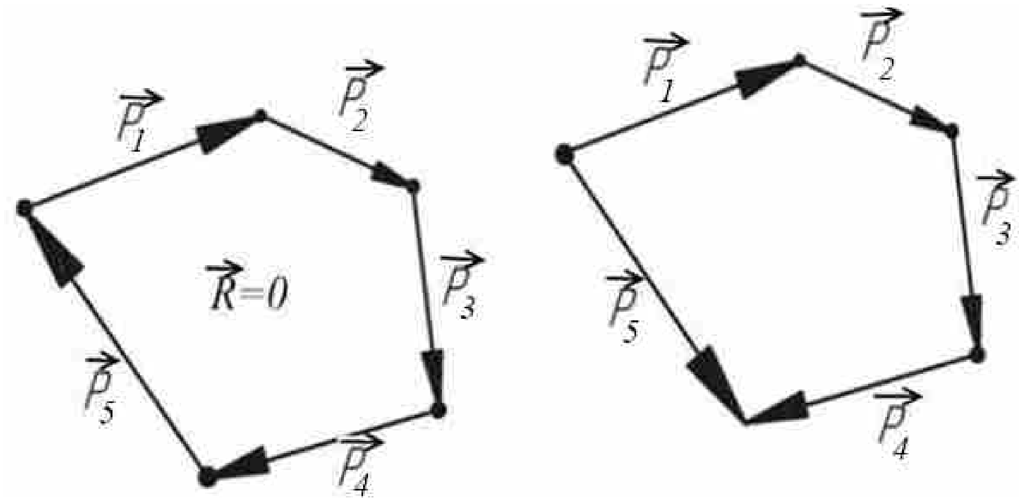


Рис. 17

6. АНАЛИТИЧЕСКИЙ СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ РАВНОДЕЙСТВУЮЩЕЙ

Допустим, что сила и ось лежат в одной плоскости.

Проекцией силы $\overline{P}$ *на ось* x называется скалярное произведение вектора $\overline{P}$ на единичный вектор $\overline{i}$, взятый на этой оси (рис. 18).

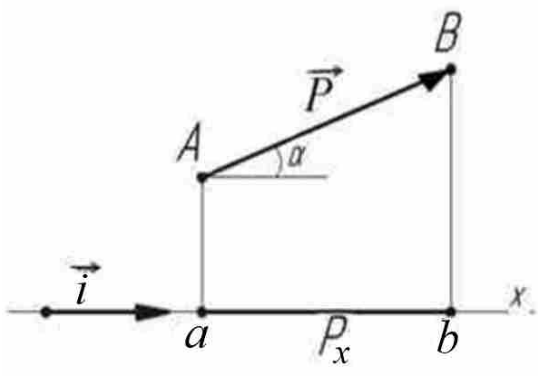


Рис. 18

$$P_x = |\vec{P}| \cdot \cos\left(\widehat{\vec{P},\vec{i}}\right) = P \cdot \cos\alpha.$$

Угол *б* отсчитывается от оси по ходу часовой стрелки или против, чтобы его величина не превышала 180° при любом направлении силы.

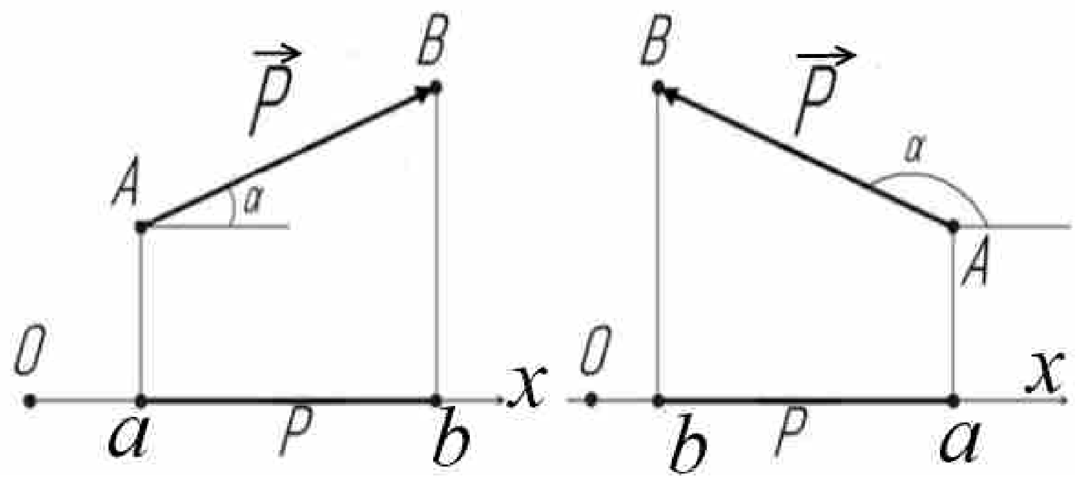


Рис. 19

При вычислении проекции силы на ось возможны следующие случаи:

1) *б* <*90°* - проекция положительная: $P_x = P \cdot \cos\alpha > 0$;

2) *б* >*90°* - проекция отрицательна: $P_x = P \cdot \cos\alpha < 0$;

3) *б* =*90°* - проекция равна нулю: $P_x = P \cdot \cos 90° = 0$.

Таким образом, знак проекции определяется знаком косинуса угла между направлением вектора силы и положительным направлением оси. Этот косинус называется *направляющим косинусом*. (Понятие «направляющий косинус» в науку ввели Эйлер и Гаспар Монж). Проекция силы на ось не имеет собственного направления, а направлена по оси.

Из аналитической геометрии известно, что проекция геометрической суммы векторов на любую ось равна алгебраической сумме проекций этих векторов.

Так как равнодействующая $\vec{R}$ равна геометрической сумме составляющих сил, то ее проекция на любую ось равна алгебраической сумме проекций составляющих сил на эту же ось.

Проецируя равенство

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{P_i}$$

на координатные оси, получим:

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} P_{ix},\ R_y = \sum_{i=1}^{n} P_{iy},\ R_z = \sum_{i=1}^{n} P_{iz}.$$

Модуль равнодействующей определяется выражением:

$$R = \sqrt{{R_x}^2 + {R_y}^2 + {R_z}^2}.$$

Направление равнодействующей определим по направляющим косинусам:

$$\cos\alpha = \frac{R_x}{R};\ \cos\beta = \frac{R_y}{R};\ \cos\gamma = \frac{R_z}{R}.$$

7. УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ СИСТЕМЫ СХОДЯЩИХСЯ СИЛ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

Любая система сходящихся сил эквивалентна равнодействующей, которая равна геометрической сумме сил системы и проходит через точку пересечения их линий действия.

Для равновесия сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы равнодействующая этих сил равнялась нулю, т.е.

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{P_i} = 0.$$

Спроецируем это равенство на оси координат, получим уравнения равновесия системы сходящихся сил в аналитической форме:

$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{P_{ix}} = 0\ ;\ \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{P_{iy}} = 0\ ;\ \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{P_{iz}} = 0.$$

Для равновесия системы сходящихся сил в пространстве необходимо и достаточно, чтобы алгебраические суммы проекций этих сил на три взаимно перпендикулярные координатные оси были равны нулю.

Если все силы системы лежат в одной плоскости, то, расположив координатные оси *Ox* и *Oy* в плоскости действия сил, получим два условия равновесия:

$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{P_{ix}} = 0\,; \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{P_{iy}} = 0.$$

8. ТЕОРЕМА О РАВНОВЕСИИ ТРЕХ НЕПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ

При решении задач статики иногда удобно пользоваться следующей теоремой: если свободное твердое тело находится в равновесии под действием трех непараллельных сил, лежащих в одной плоскости, то линии действия этих сил пересекаются в одной точке.

Пусть к телу в точках A_1, A_2 и A_3 приложены три непараллельные взаимно уравновешивающиеся силы $\vec{P_1}, \vec{P_2}, \vec{P_3}$, лежащие в одной плоскости (рис. 20).

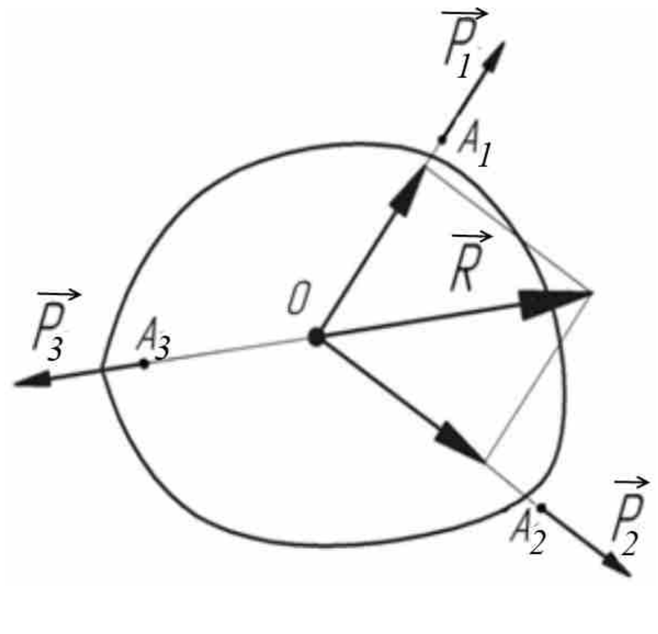


Рис. 20

Так как силы не параллельны и лежат в одной плоскости, то линии действия двух из них, например $\overrightarrow{P_1}$, $\overrightarrow{P_2}$, непременно пересекутся в какой-либо точке *O*. Сложим $\overrightarrow{P_1}, \overrightarrow{P_2}$ по правилу параллелограмма. Тогда на тело будет действовать две силы: $\vec{R}$ и $\overrightarrow{P_3}$. Поскольку тело находится в равновесии, то по аксиоме I силы $\vec{R}$ и $\overrightarrow{P_3}$ должны быть равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны. Следовательно, линия действия силы $\overrightarrow{P_3}$ пройдет через точку *O*, в которой пересекаются линии действия сил $\overrightarrow{P_1}, \overrightarrow{P_2}$, что и требовалось доказать.

Пользуясь этой теоремой, также можно определить направление неизвестных реакций связей.

Так, если груз находится в равновесии под действием активной силы $\vec{G}$, реакции $\overrightarrow{R_B}$ подшипника *B* и реакции $\overrightarrow{R_A}$ подпятника *A*, то линия действия реакции $\overrightarrow{R_A}$ должна проходить через точку *O* пересечения линий действия сил $\vec{G}$ и $\overrightarrow{R_B}$ (рис. 21).

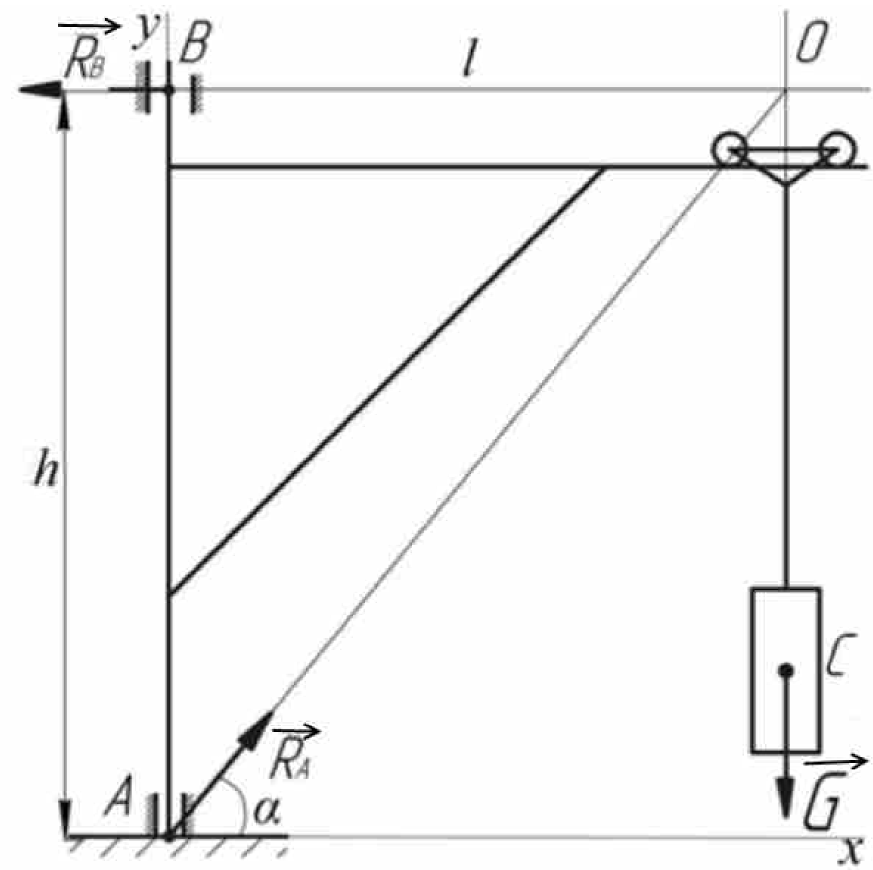


Рис. 21

Определим значения реакций опор. Используем графическое условие равновесия. Построим замкнутый силовой треугольник (рис. 22):

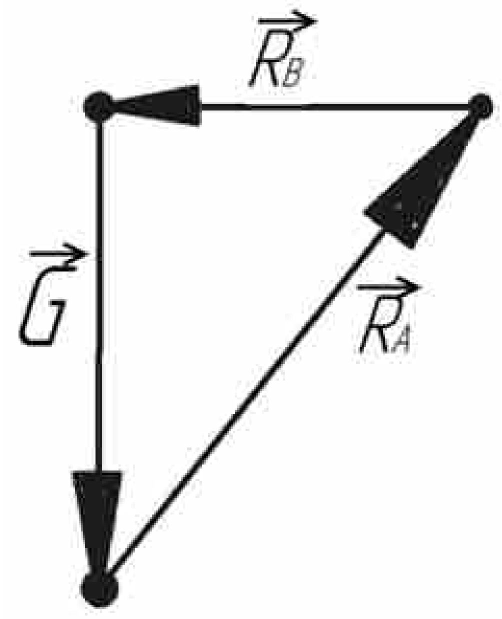


Рис. 22

Из подобия силового треугольника и треугольника *AOB* получим:

$$\frac{R_A}{AO} = \frac{G}{AB} = \frac{R_B}{OB}.$$

Откуда:

$$R_A = G \cdot \frac{AO}{AB} = G\frac{\sqrt{h^2 + l^2}}{h};$$

$$R_B = G \cdot \frac{OB}{AB} = G\frac{l}{h}.$$

Используя уравнения равновесия для определения значений этих же реакций, получим:

$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{P_{ix}} = 0;\ -R_B + R_A \cdot \cos\alpha = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{P_{iy}} = 0;\ R_A \cdot \cos(90° - \alpha) - G = 0.$$

Откуда:

$$R_A = \frac{G}{\sin\alpha} = G\frac{\sqrt{h^2 + l^2}}{h};$$

$$R_B = R_A \cdot \cos\alpha = G \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha = G\frac{l}{h}.$$

Сравнивая результаты графического и аналитического решений, заключаем, что значения реакций совпадают.

9. ПАРА СИЛ, МОМЕНТ ПАРЫ СИЛ НА ПЛОСКОСТИ. ТЕОРЕМЫ О ПАРАХ СИЛ (без доказательства)

Рассмотрим систему двух параллельных, равных по модулю и противоположно направленных сил (рис. 23):

$$|\overline{P_2}| = |\overline{P_1}|;$$

$$\overline{P_2} = -\overline{P_1}.$$

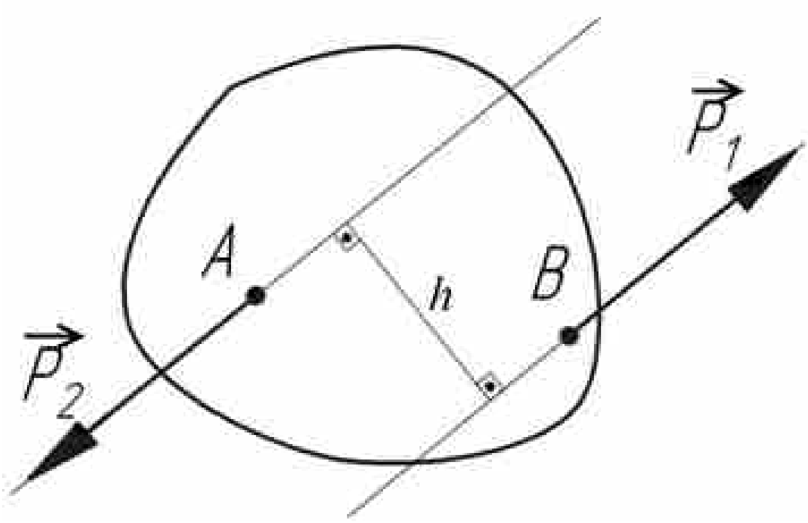


Рис. 23

Очевидно, равнодействующая этих сил равна нулю, однако силы на основании аксиомы II статики не уравновешиваются. Следовательно, такая совокупность сил представляет собой первичный элемент статики, который не сводится к силе.

Парой сил называется совокупность двух параллельных, равных по модулю и противоположно направленных сил. Плоскость, в которой лежат эти силы, называется *плоскостью пары*. *Плечо пары h* – это кратчайшее расстояние между линиями действия сил, образующих пару.

Свойства пары сил:

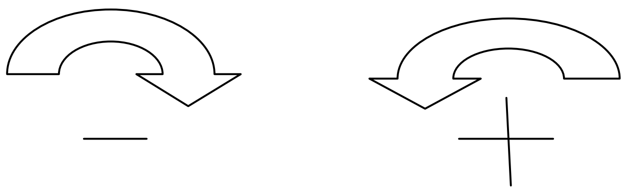
1) Пара сил не имеет равнодействующей.
2) Пару сил нельзя уравновесить одной силой.
3) Под действием пары сил тело совершает вращательное движение.

Основной характеристикой действия пары сил на твердое тело является *момент пары сил*, равный взятому со знаком «плюс» или «минус» произведению модуля любой из сил, образующих пару, на плечо пары.

Момент пары сил является алгебраической величиной:

$$M = \pm P_2 \cdot h = \pm P_1 \cdot h.$$

Знак «+» берется в случае, если пара сил стремится повернуть плоскость действия против часовой стрелки, знак «–» - если по часовой стрелке.



Единицы измерения момента пары сил:

Система СИ: $[M] = [P] \cdot [h] = 1H \cdot 1м = 1Hм$.

Система МКГСС: $[M] = 1кГ \cdot 1м = 1кГм$.

Основные теоремы о парах сил на плоскости:

1. *Теорема о переносе пары в произвольное положение на плоскости.*

Не изменяя кинематического состояния твердого тела, пару сил можно переносить из одного положения в любое другое положение в плоскости ее действия (рис. 24).

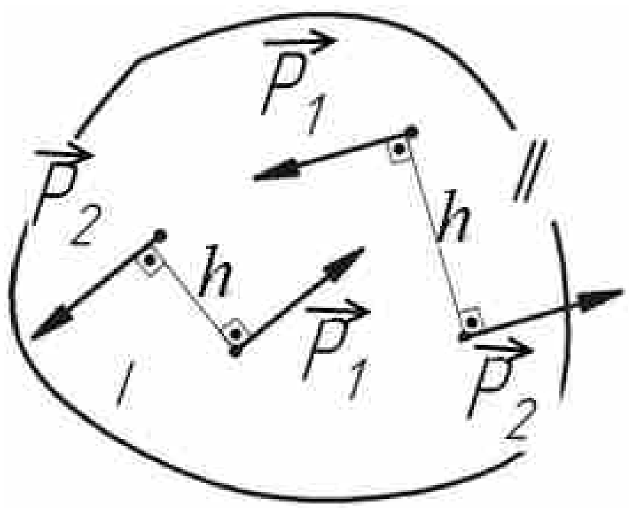


Рис. 24

Теорема справедлива только в механике абсолютно твердого тела. В механике деформируемого твердого тела (сопротивление материалов) напряженно-деформированное состояние тела зависит от конкретного положения пары сил.

2. *Теорема об эквивалентности пар сил.*

Пары сил на плоскости эквивалентны, если их моменты алгебраически равны.

3. *Теорема о сложении пар, лежащих в одной плоскости.*

Совокупность нескольких пар с моментами $M_i (i = 1, 2, ..., n)$ эквивалентна одной паре с моментом, равным сумме моментов данных пар:

$$M = \sum_{i=1}^{n} M_i.$$

Из теорем 1 и 2 следует, что действие пары сил на твердое тело полностью характеризуется ее моментом.

Из теоремы 3 следует условие равновесия пар сил на плоскости:

$$M = \sum_{i=1}^{n} M_i = 0.$$

10. МОМЕНТ СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА НА ПЛОСКОСТИ. ПРИВЕДЕНИЕ ОДНОЙ СИЛЫ К ЦЕНТРУ ПО МЕТОДУ ПУАНСО

Моментом силы $\vec{P}$ *относительно центра О* на плоскости называется алгебраическая величина, равная произведению модуля силы на плечо, взятая со знаком «+» или «–» (рис. 25):

$$\mathrm{M}_0 = \pm \mathrm{P} \cdot h$$

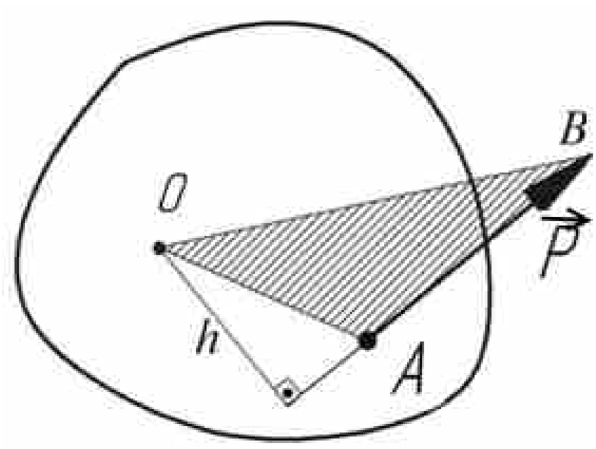


Рис. 25

Единицы измерения момента силы совпадают с единицами измерения момента пары сил.

Момент силы относительно центра равен нулю, когда линия действия силы проходит через центр (h=0).

Момент силы относительно центра по абсолютному значению можно выразить через площадь треугольника *АОВ*:

$$\left|M_O\right| = 2S_{\Delta AOB} .$$

Так как сила является скользящим вектором, ее можно переносить вдоль линии действия, не изменяя кинематического состояния твердого тела. Чтобы, не изменяя кинематического состояния тела, переместить силу в точку, не лежащую на линии действия силы, необходимо присоединить пару сил, момент которой алгебраически равен моменту силы относительно центра приведения.

Докажем это положение, составляющее сущность *метода Пуансо:*

Пусть задана сила $\vec{P}$, приложенная в точке *А*. Перенесем эту силу в точку *О*, не лежащую на линии действия силы $\vec{P}$.

Приложим в точке *О* две взаимно уравновешивающиеся силы (рис. 26):

$$\left|\overrightarrow{P_1}\right| = \left|\overrightarrow{P_2}\right| = \left|\vec{\mathrm{P}}\right|,$$
$$\overrightarrow{P_2} = -\overrightarrow{P_1}.$$

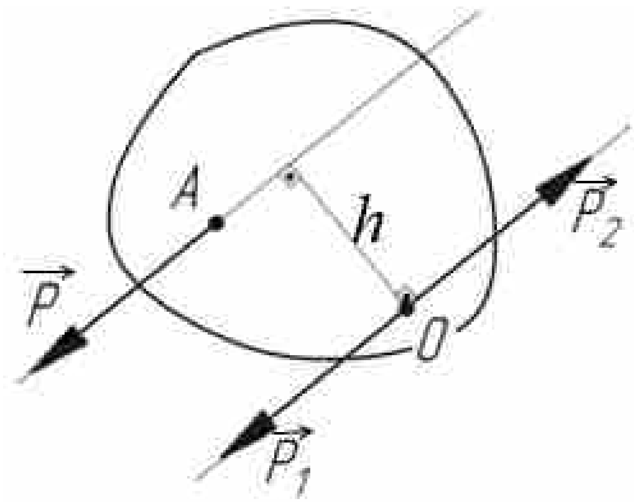


Рис. 26

Очевидно, силы $(\vec{P}; \overrightarrow{P_2})$ составляют пару сил, называемую присоединенной парой. Момент присоединенной пары (рис. 27):

$$\mathrm{M} = \mathrm{P} \cdot h = \mathrm{M}_{\mathbf{0}}.$$

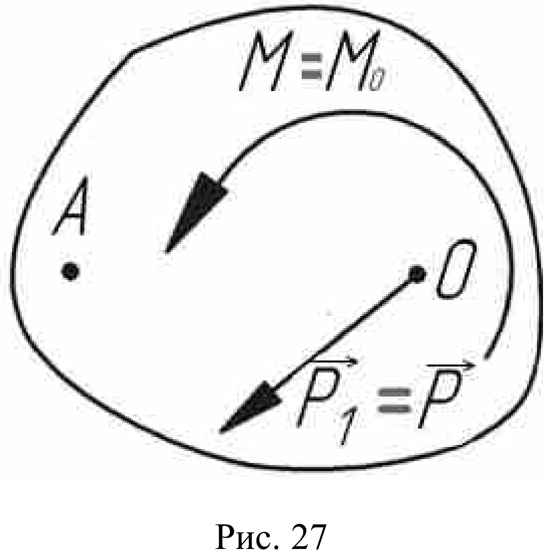


Рис. 27

11. ПРИВЕДЕНИЕ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ СИЛ К ДАННОМУ ЦЕНТРУ. ГЛАВНЫЙ ВЕКТОР И ГЛАВНЫЙ МОМЕНТ

Пользуясь методом Пуансо, можно привести к центру несколько сил. В результате приведения каждой силы к центру *O* получим:

1. Силу, геометрически равную приводимой силе:

$$\overrightarrow{P_{i1}} = \overrightarrow{P_i}.$$

2. Пару сил, момент которой равен моменту приводимой силы относительно центра приведения:

$$M_i = \pm P_i \cdot h_i = M_{i0}.$$

Сложим в центре *O* силы геометрически:

$$\overrightarrow{R^*} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{P_i}.$$

Главный вектор произвольной плоской системы сил $\overrightarrow{R^*}$ определяется геометрической суммой всех сил, входящих в систему.

Сложим алгебраически моменты присоединенных пар:

$$M_0 = \sum_{i=1}^{n} M_{i0}.$$

Главный момент произвольной плоской системы сил определяется алгебраической суммой моментов сил, входящих в систему, относительно центра приведения.

Итак, произвольную плоскую систему сил можно привести к совокупности силы, называемой главным вектором, и пары сил, момент которой называется главным моментом системы (рис. 28):

$$\overrightarrow{R^*} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{P_i},$$

$$\mathrm{M}_0 = \sum_{i=1}^{n} M_{i0}.$$

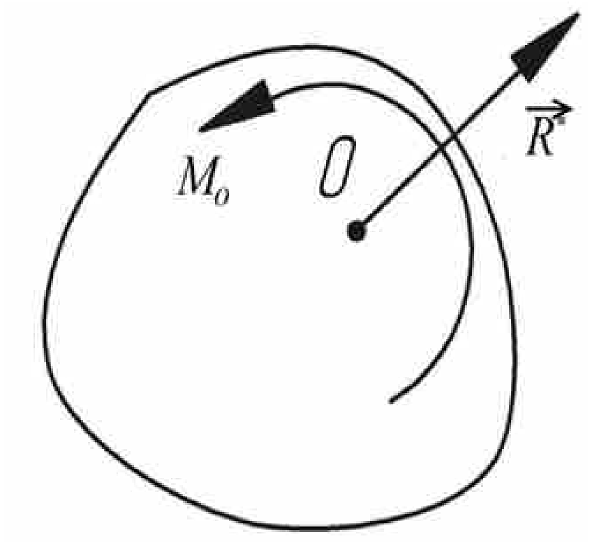


Рис. 28

Главный вектор системы сил не зависит от центра приведения, а главный момент зависит.

12. СЛУЧАИ ПРИВЕДЕНИЯ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ СИЛ К ПРОСТЕЙШЕМУ ВИДУ. ТЕОРЕМА ВАРИНЬОНА

При приведении произвольной плоской системы сил к центру имеем совокупность силы и пары сил:

$$\overrightarrow{R^*} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{P_i}; \;\; \mathrm{M}_0 = \sum_{i=1}^{n} M_{i0}.$$

При этом возможны следующие частные случаи:

$\overrightarrow{R^*} = 0$ $M_0 = 0$	Главный вектор и главный момент равны нулю. Система сил находится в равновесии.
$\overrightarrow{R^*} = 0$ $M_0 \neq 0$	Случай пары сил с моментом, алгебраически равным главному моменту. *Примечание:* в этом случае главный момент системы сил не зависит от выбора центра приведения.
$\overrightarrow{R^*} \neq 0$ $M_0 = 0$	Случай равнодействующей, проходящей через центр приведения и совпадающей с главным вектором.
$\overrightarrow{R^*} \neq 0$ $M_0 \neq 0$	Случай равнодействующей, не проходящей через центр приведения и отличающейся от главного вектора линией действия.

Главный момент M_0, полученный в результате приведения системы к центру *O* представим как момент пары $(\vec{R}, \overrightarrow{R_1})$, силы которой по модулю равны главному вектору (рис. 29):

$$\left|\overrightarrow{R^*}\right| = \left|\vec{R}\right| = \left|\overrightarrow{R_1}\right|.$$

Плечо пары:

$$h = OK = \frac{M_0}{R^*}.$$

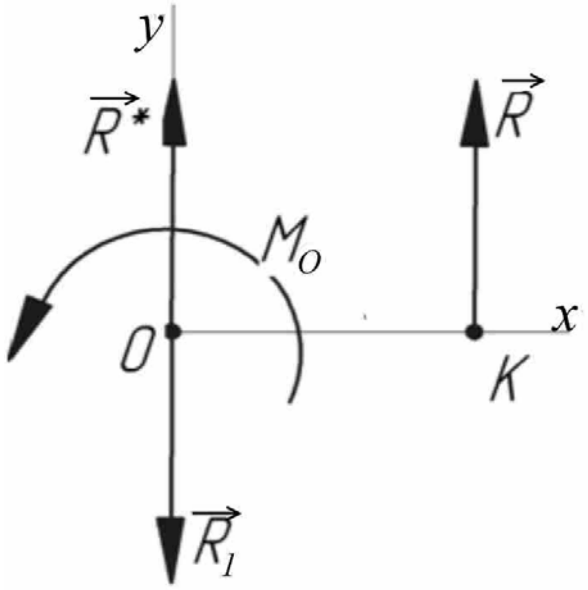


Рис. 29

На рис. 29 видно, что силы $\overrightarrow{R^*}$ и $\overrightarrow{R_1}$, приложенные к точке *O*, взаимно уравновешиваются и их можно исключить из рассмотрения.

В итоге приведения получается одна сила $\vec{R}$, равная по модулю главному вектору и приложенная в точке *K*. Эта сила $\vec{R}$ – равнодействующая.

Докажем *теорему Вариньона* о моменте равнодействующей:

Если плоская система сил приводится к равнодействующей, то момент равнодействующей относительно центра на плоскости равен алгебраической сумме моментов составляющих сил относительно этого центра.

Определим момент силы $\vec{R}$ относительно центра *O:*

$$M(\vec{R})_0 = R \cdot h = R \cdot \frac{M_0}{R^*} = M_0 =, M(\vec{R})_0 = \sum_{i=1}^{n} M_{i0}.$$

13. УСЛОВИЯ И УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ СИЛ

При исследовании различных случаев приведения плоской системы к данному центру был рассмотрен случай, когда главный вектор и главный момент системы сил равны нулю. Очевидно, в этом случае силы находятся в равновесии. Следовательно, условиями равновесия произвольной плоской системы сил являются:

$$\overrightarrow{R^*} = 0 \; ; \; M_0 = 0 \, .$$

Из этих двух условий следуют *три уравнения равновесия*:

$$\sum_{i=1}^{n} P_{ix} = 0; \sum_{i=1}^{n} P_{iy} = 0; \sum_{i=1}^{n} M_{iO} = 0.$$

Наряду с этой основной формой имеются две другие формы уравнений равновесия на плоскости:

$$\sum_{i=1}^{n} P_{iu} = 0; \sum_{i=1}^{n} M_{iA} = 0; \sum_{i=1}^{n} M_{iB} = 0.$$

При этом ось *u* не перпендикулярна прямой *AB*.

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iA} = 0; \sum_{i=1}^{n} M_{iB} = 0; \sum_{i=1}^{n} M_{iC} = 0.$$

При этом точки *A*,*B* и *C* не должны лежать на одной прямой.

14. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ СИЛЫ НА ПЛОСКОСТИ

Рассмотрим систему параллельных сил, расположенных в одной плоскости.

Возьмем произвольный центр *O* и проведем через него две взаимно перпендикулярные оси *Ox* и *Oy*, одна из которых параллельна силам (рис. 30).

Приведем эти силы к центру *O*. Получим главный вектор и главный момент, причем главный вектор параллелен силам, т.е. направлен по оси *Oy*.

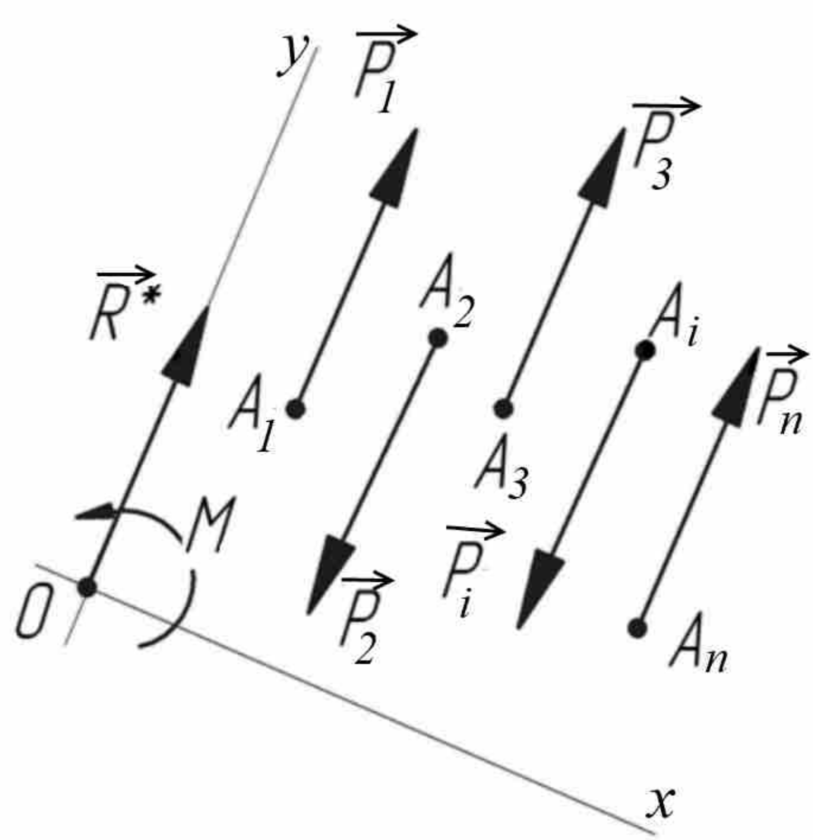


Рис. 30

Модуль главного вектора

$$\left|\overrightarrow{R^*}\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{P_i}\right|.$$

Главный момент

$$\mathrm{M}_0 = \sum_{i=1}^{n} M_{iO}.$$

Возможны различные случаи приведения так же, как и для произвольной плоской системы сил.

Поскольку проекции всех сил на ось *Ox* будут равны нулю, из условий равновесия следует:

$$\overrightarrow{R^*} = 0;$$

$$\mathrm{M}_0 = 0;$$

остаются только два уравнения равновесия:

$$\sum_{i=1}^{n} P_{iy} = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_{i0} = 0.$$

15. СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ И СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ ЗАДАЧИ

При исследовании равновесия произвольной системы сил на плоскости могут встретиться два принципиально различных случая.

1. Количество неизвестных в задаче не превосходит числа уравнений статики для данной системы сил.

2. Количество *неизвестных больше числа уравнений* статики.

В первом случае задачи исследования равновесия являются *статически определимыми*. Во втором случае – *статически неопределимыми.*

Степенью статической неопределимости s называется разность числа неизвестных *n* и числа уравнений статики *k*.

Приведем примеры статически определимых и статически неопределимых задач (рис. 31).

Задача статически определимая: $n = 3, k = 3, s = n - k = 3 - 3 = 0.$

Задача один раз статически неопределимая: $n = 4, k = 3, s = n - k = 4 - 3 = 1.$

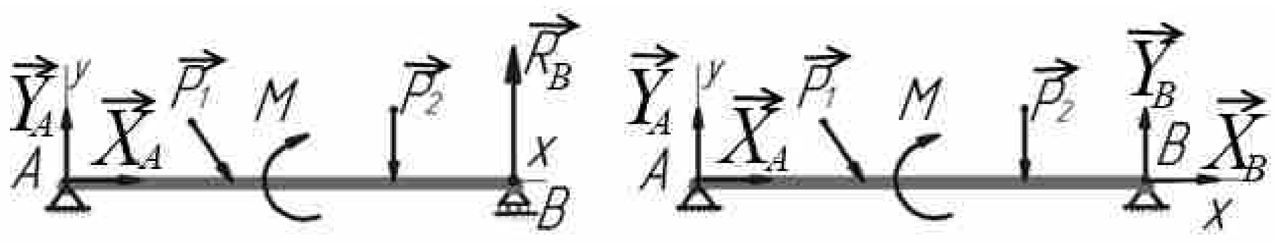


Рис. 31

Рассмотрим способ закрепления балки, называемый *жесткой заделкой* (рис. 32).

Рис. 32

Такая опора оказывает сопротивление не только вертикальному и горизонтальному перемещениям, чему соответствуют реакции $\vec{X_A}$ и $\vec{Y_A}$, но и повороту балки в опорном состоянии, чему соответствует реактивная пара (момент в жесткой заделке) с моментом M_A (рис. 33).

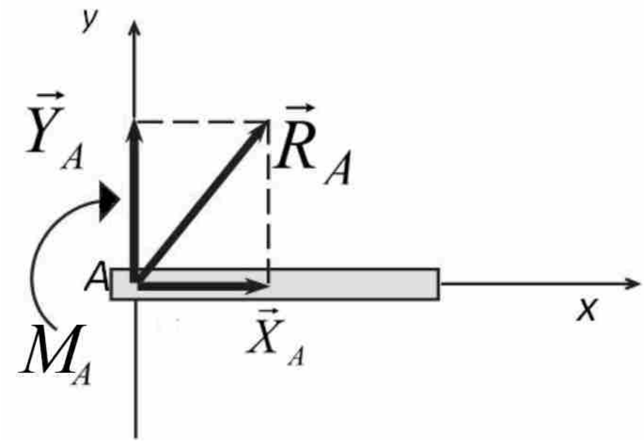


Рис. 33

В случае закрепления концов балки, как показано на рис. 34, задача будет дважды статически неопределимой:

$n = 5, k = 3, s = n - k = 5 - 3 = 2.$

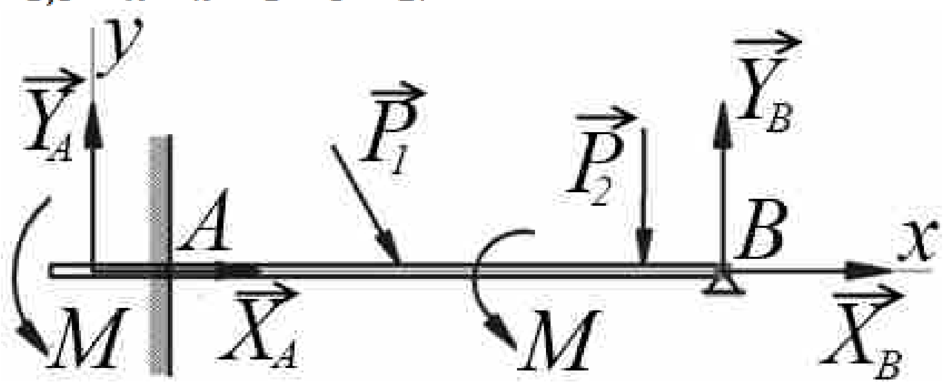


Рис. 34

16. РАВНОВЕСИЕ СИЛ, ПРИЛОЖЕННЫХ К СИСТЕМЕ ТЕЛ

Рассмотрим систему двух балок, соединенных шарниром в точке *B*. Закрепления: в точке *A* – жесткая заделка, в точке *C* – подвижный цилиндрический шарнир (рис. 35).

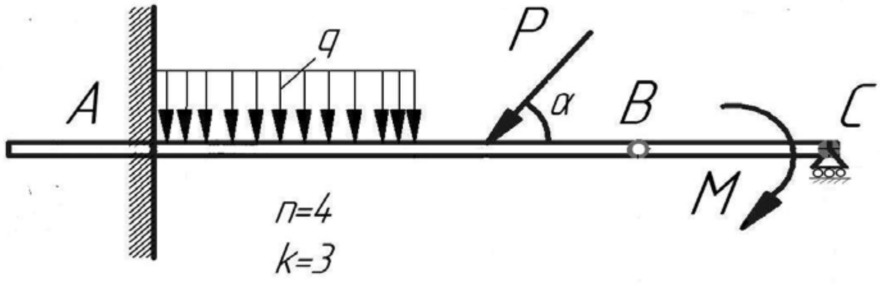


Рис. 35

Если рассматривать данную механическую систему в целом, то она содержит четыре неизвестных реакции ($n=4$) – три реакции в жесткой заделке и одну реакцию в подвижном цилиндрическом шарнире, а для плоской системы мы можем составить только три уравнения равновесия ($k=3$). Таким образом, получим один раз статически неопределимую задачу (n-$k=4$-$3=1$).

Разделим систему на две части по шарниру *B* (рис. 36). Через шарнир не передается изгибающий момент с одной балки на другую, а передается только сила неизвестного направления. Отбросим связи и заменим их реакциями.

По принципу действия и противодействия

$$\overrightarrow{X_B} = -\overrightarrow{X'_B};\ \overrightarrow{Y_B} = -\overrightarrow{Y'_B}.$$

После этих операций получили две отдельные балки *AB* и *BC*, находящиеся в состоянии равновесия. Система уравнений равновесия двух тел замыкается – *шесть* уравнений равновесия (по три уравнения на каждую из частей), в которые будут входить *шесть* неизвестных ($\overrightarrow{X_A}; \overrightarrow{Y_A}; M_A; \overrightarrow{X_B}; \overrightarrow{Y_B}; \overrightarrow{R_C}$).

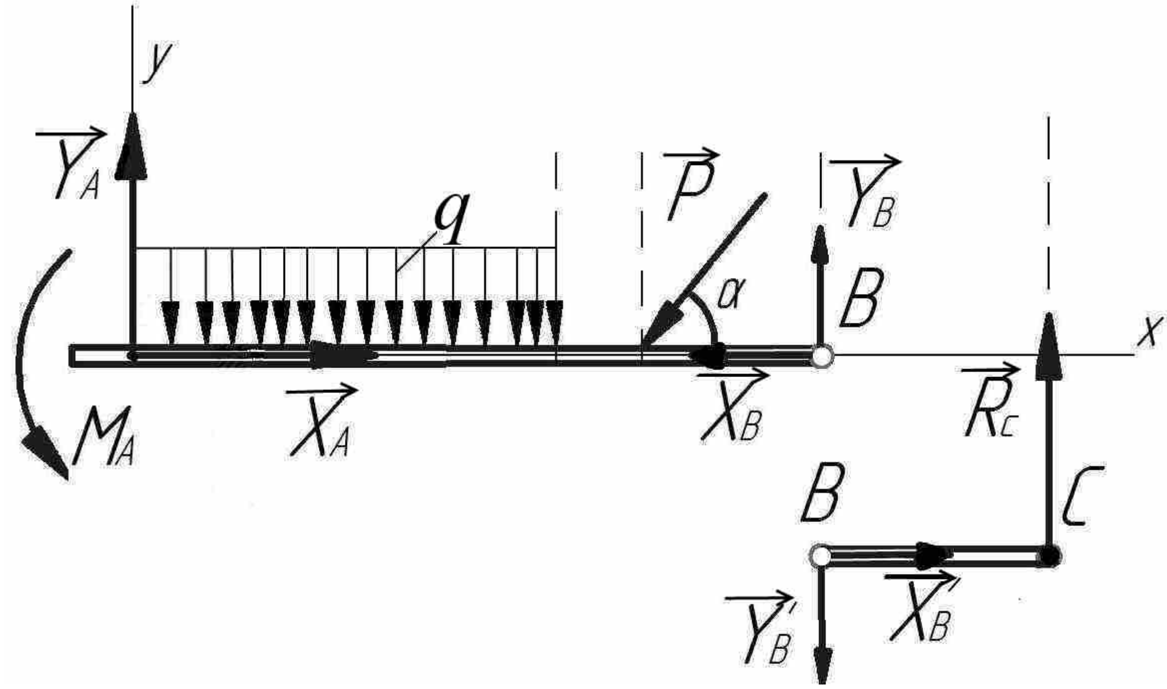


Рис. 36

17. МОМЕНТ ПАРЫ СИЛ В ПРОСТРАНСТВЕ. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ И СЛОЖЕНИЕ ПАР СИЛ В ПРОСТРАНСТВЕ. УСЛОВИЕ РАВНОВЕСИЯ

Момент пары сил в пространстве является вектором.

$(\vec{P}, \vec{P_1})$ – пара сил, Q – плоскость действия пары $(\vec{P}, \vec{P_1})$, h – плечо пары.

Величина момента пары:

$$M_0 = |\overrightarrow{M_0}| = P \cdot h = P_1 \cdot h.$$

Момент пары сил изображается в пространстве вектором, который направлен перпендикулярно к плоскости пары в сторону, чтобы, смотря навстречу вектору $\overrightarrow{M_0}$, видеть, что пара поворачивает плоскость ее действия против часовой стрелки (рис. 37).

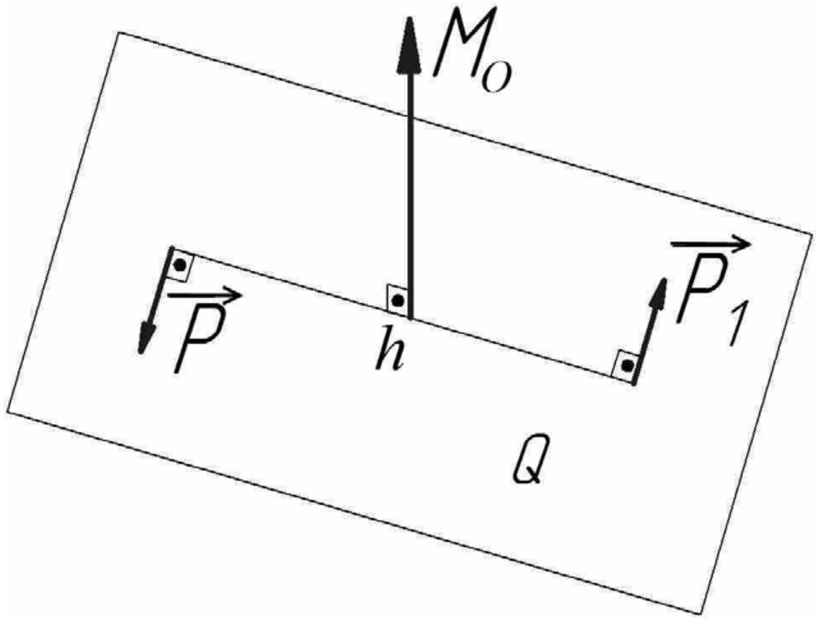


Рис. 37

Известны следующие теоремы о парах сил в пространстве:

1. Пару сил можно переносить в произвольное положение в плоскости ее действия.

Следствие: момент пары сил – свободный вектор, его можно переносить параллельно ему самому в произвольную точку данного тела, не изменяя его кинематического состояния.

2. Пары сил *эквивалентны* в пространстве, если их моменты геометрически равны. То есть, если $\overrightarrow{M_1} = \overrightarrow{M_2}$, то моменты $\overrightarrow{M_1}$ и $\overrightarrow{M_2}$ – эквивалентны.

3. Система пар сил находится в равновесии, если момент результирующей пары равен нулю.

Условие равновесия пар сил в пространстве в векторном виде записывается следующим образом:

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{M_i} = 0.$$

4. Совокупность нескольких пар сил в пространстве эквивалентна паре сил, момент которой равен векторной сумме моментов этих пар (рис. 38):

$$\vec{M} = \overrightarrow{M_1} + \overrightarrow{M_2} + \overrightarrow{M_3} \dots \overrightarrow{M_n},$$

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M_i}.$$

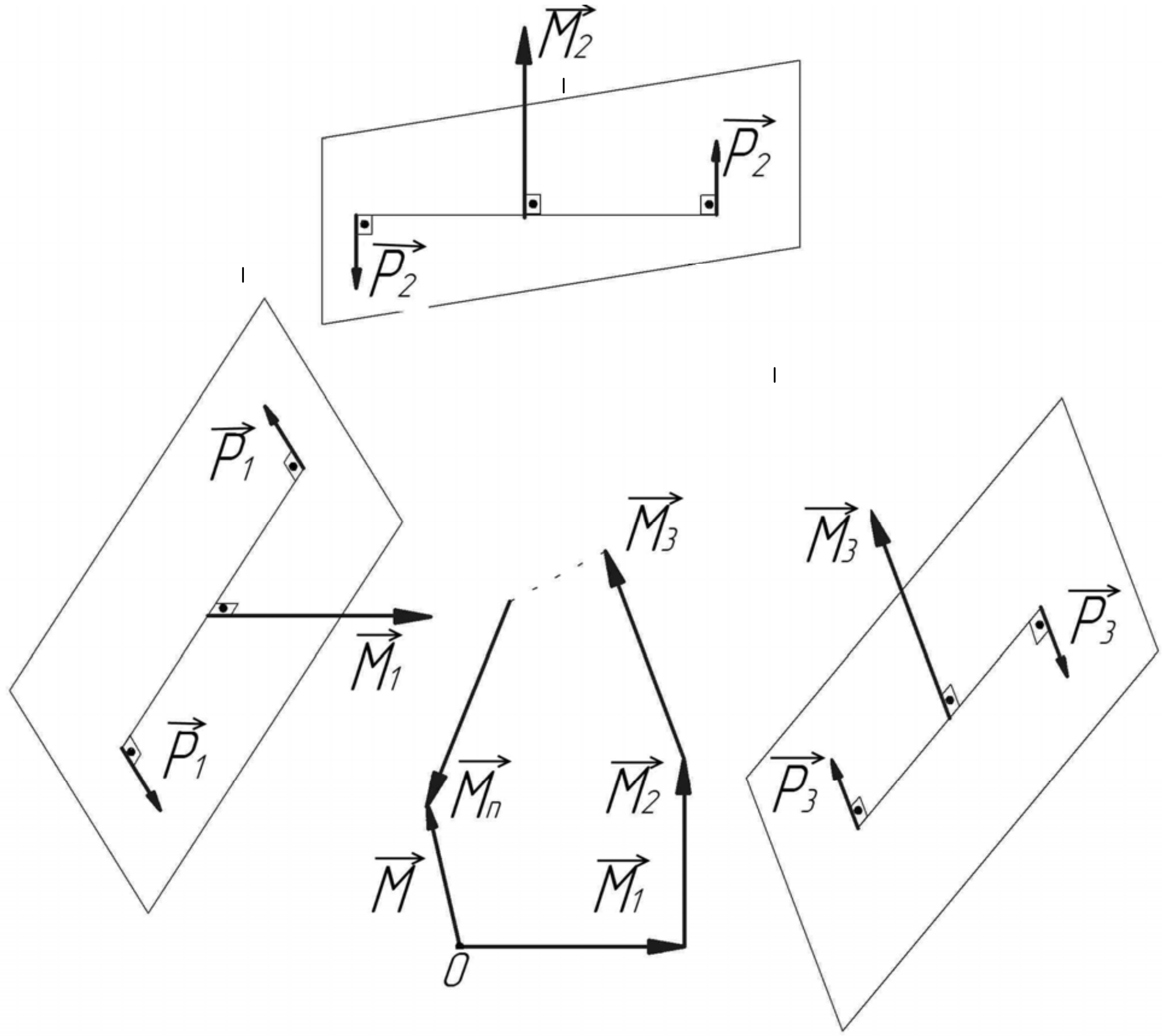


Рис. 38

18. МОМЕНТ СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА В ПРОСТРАНСТВЕ. МОМЕНТ СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ

Рассмотрим момент силы $\vec{P}$ относительно произвольного центра *O*. Проведем плоскость через центр *O* и линию действия силы $\vec{P}$. Опустим перпендикуляр *OC* из центра *O* на линию действия $\vec{P}$ (рис. 39). Модуль момента по-прежнему определяется произведением модуля силы на плечо *h*=*OC*: $|\overrightarrow{M_0}| = P \cdot h$.

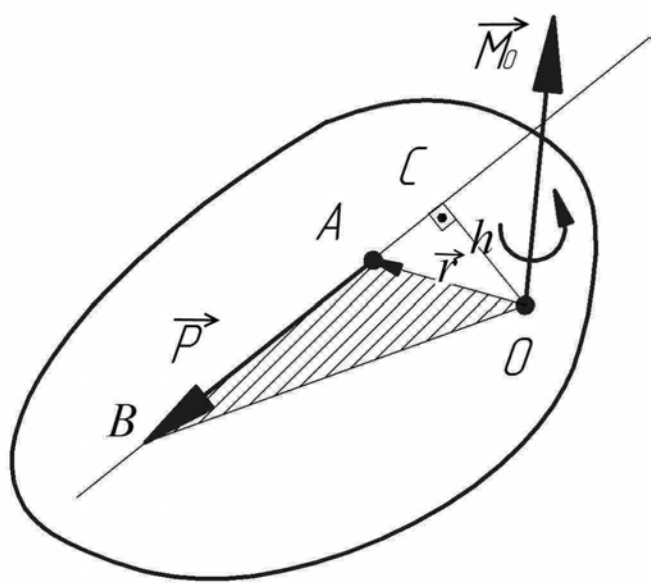


Рис. 39

Однако если плоскость произвольно ориентирована в пространстве, правила знаков момента плоской статики применить нельзя, так как направление вращения силой $\vec{P}$ плоскости зависит от ориентации наблюдателя относительно плоскости.

Ориентация плоскости задается направлением внешней нормали. Следовательно, *в пространстве момент силы относительно центра представляется не скаляром, а вектором*, направленным перпендикулярно к плоскости, проходящей через центр и линию действия силы. Момент направлен так, чтобы, смотря навстречу ему, видеть вращение плоскости против часовой стрелки.

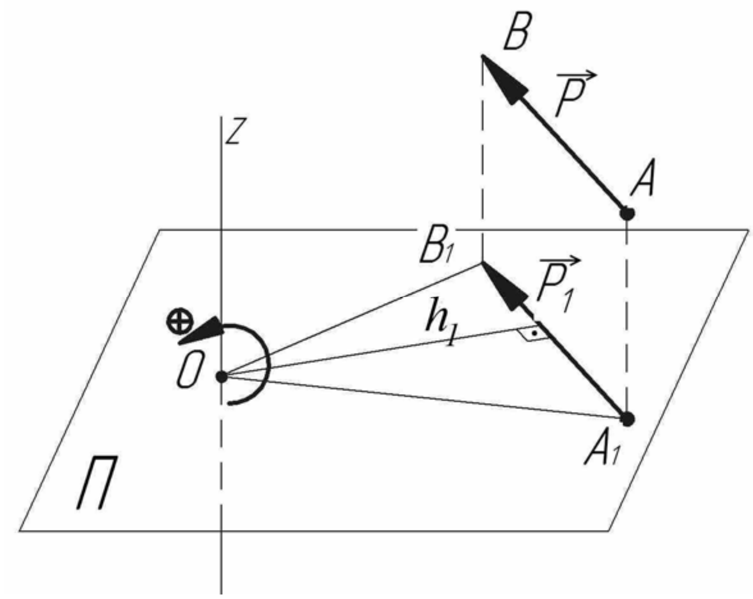
Модуль момента можно выразить через площадь ΔAOB:

$$\left|\overrightarrow{M_0}\right| = 2S_{\Delta OAB}.$$

Если провести из точки O в точку приложения силы A радиус вектор $\vec{r}$, то *момент силы относительно центра* O будет равен векторному произведению радиус-вектора точки приложения силы $\vec{r}$ и вектора силы $\vec{P}$:

$$\overrightarrow{M_0} = \vec{r} \times \vec{P}.$$

В пространстве вводится новое понятие момента силы относительно оси. Для того чтобы определить момент силы $\vec{P}$ относительно оси Z в пространстве, необходимо спроецировать вектор силы $\vec{P}$ на плоскость, перпендикулярную к данной оси, и определить момент этой проекции P_1 относительно точки пересечения оси с плоскостью (рис. 40).



$$M_z = \pm P_1 \cdot h_1$$

Рис. 40

Моментом силы относительно оси называется скалярная величина, взятая со знаком «+» или «–», равная произведению проекции силы на плоскость, перпендикулярную к оси, и плеча этой проекции относительно точки пересечения оси и плоскости. Правило знаков такое же, как и для моментов на плоскости. Смотреть на плоскость необходимо с положительного направления оси.

Величину момента силы относительно оси можно выразить удвоенной площадью ΔOA_1B_1:

$$M_z = 2S_{\Delta OA_1B_1}.$$

Момент силы относительно оси равен нулю в двух случаях (рис. 41):
1) Когда линия действия силы параллельна оси (тогда проекция силы на плоскость, перпендикулярную к оси, является точкой, т.е. $\overrightarrow{P_1} = 0$).
2) Когда линия действия силы пересекает ось ($h_1 = 0$).

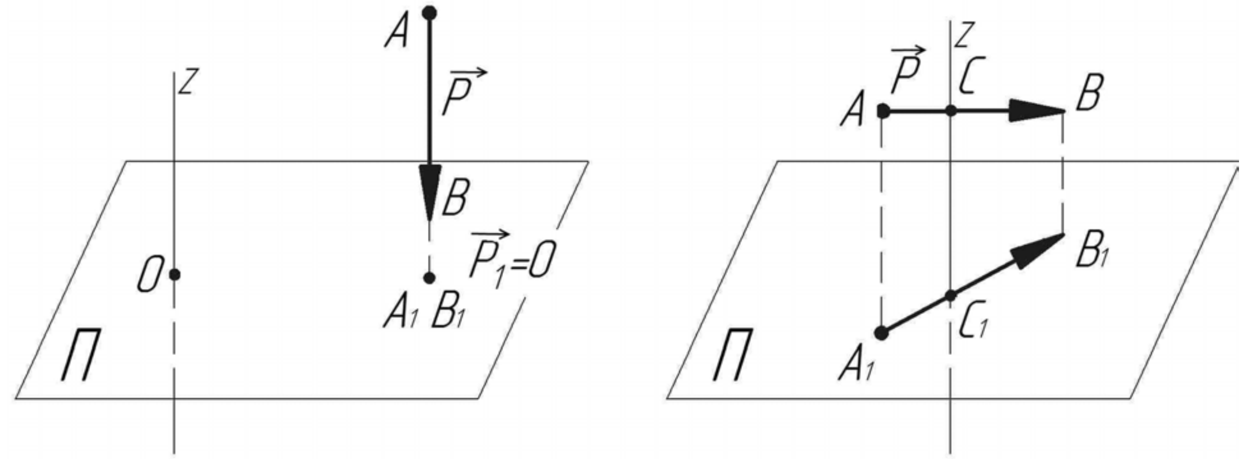


Рис. 41

Установим зависимость между моментами силы относительно центра и оси, проходящей через центр (рис. 42).

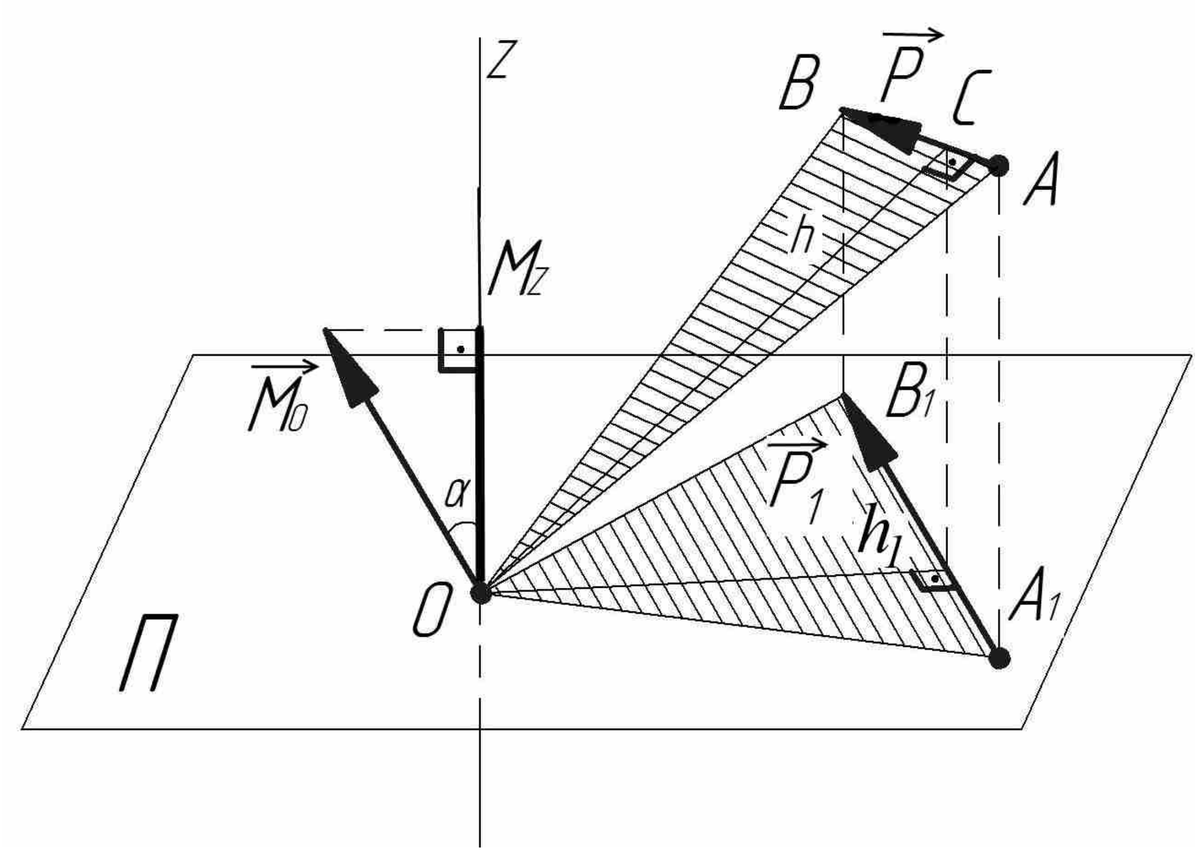


Рис. 42

Вычислим величины моментов M_0 и M_z:

$$M_0 = P \cdot h = 2\, O_{\Delta OAB},$$

$$|M_z| = P_1 \cdot h_1 = 2S_{\Delta OA_1B_1}.$$

Треугольник ΔOA_1B_1 является ортогональной проекцией треугольника ΔOAB на плоскость *П*.

По теореме о проекциях плоской фигуры:

$$S_{\Delta OA_1B_1} = S_{\Delta OAB} \cdot cos\alpha,$$

где α – угол между плоскостью треугольника ΔOAB и плоскостью его проекции *П*.

Таким образом

$$|M_z| = M_0 \cdot cos\alpha = M_{0z},$$

т.е. момент силы относительно оси, проходящей через центр, равен проекции момента силы относительно центра на эту ось.

19. ПРИВЕДЕНИЕ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ СИЛ К ДАННОМУ ЦЕНТРУ. ГЛАВНЫЙ ВЕКТОР И ГЛАВНЫЙ МОМЕНТ

Пусть в точке *А* приложен вектор силы $\vec{P}$. Возьмем в качестве центра приведения точку *О*, не лежащую на линию действия вектора силы $\vec{P}$.

Проведем через эту точку прямую, параллельную линии действия силы $\vec{P}$, и отложим две силы ($\overrightarrow{P_1}=-\overrightarrow{P_2}$), причем модули этих сил равны между собой (рис. 43):

$$\left|\overrightarrow{P_1}\right| = \left|\overrightarrow{P_2}\right| = |\ P|.$$

Силы $\vec{P}$ и $\overrightarrow{P_2}$ составят присоединенную пару сил ($\vec{P},\overrightarrow{P_2}$) с плечом h.

Модуль момента пары

$$M = P \cdot h.$$

Вектор момента перпендикулярен к плоскости, проходящей через центр и линию действия силы.

Заметим, что вектор момента пары сил $(\vec{P}, \vec{P_2})$ совпадает по модулю и направлению с вектором момента силы $\vec{P}$ относительно центра O, т.е.

$$\vec{M} = \overrightarrow{M_0}.$$

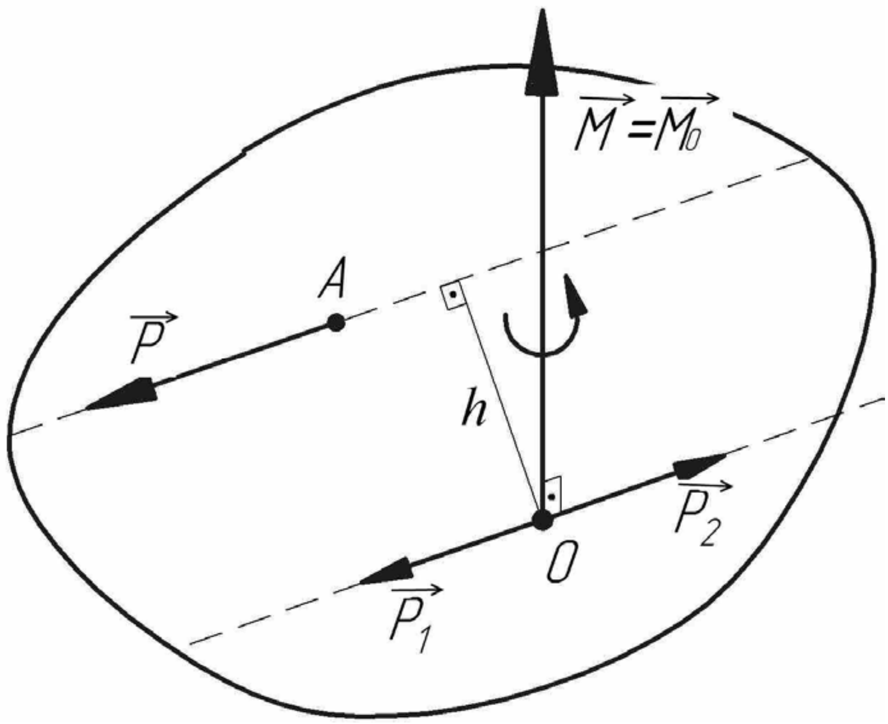


Рис. 43

Таким образом, для того чтобы привести одну силу к данному центру в пространстве, необходимо присоединить к ней пару сил с моментом, геометрически равным моменту силы относительно центра приведения.

При приведении системы n сил к центру получаем в этом центре n сил, геометрически равных силам, образующим систему, и n векторов моментов присоединенных пар.

Главный вектор $\overrightarrow{R^*}$ системы сил определяется геометрической суммой сил, образующих систему:

$$\overrightarrow{R^*} = \sum_{i=1}^{n} \vec{P_i}.$$

Главный момент $\overrightarrow{\mathbf{M}_0}$ произвольной пространственной системы сил определятся геометрической суммой моментов сил, образующих систему, относительно центра приведения:

$$\overrightarrow{\mathrm{M}_0} = \sum_{i=1}^{n} M_{i0}.$$

Итак, в результате приведения произвольной пространственной системы сил к центру, получаем в центре приведения совокупность:

1) силы $\overrightarrow{R^*}$, называемой главным вектором;

2) пары сил с моментом $\overrightarrow{\mathrm{M}_0}$, называемой главным моментом системы сил.

20. УСЛОВИЯ И УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ СИЛ

В общем случае система сил приводится к совокупности силы и пары сил:

$$\overrightarrow{R^*} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{P_i}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{M}_0} = \sum_{i=1}^{n} M_{i0}.$$

При этом могут встретиться следующие частные случаи:

Случай 1:

$$\overrightarrow{R^*} = 0,$$

$$\overrightarrow{\mathrm{M}_0} = 0.$$

Система сил в этом случае находится в равновесии (*условие равновесия*). Эти два условия равносильны шести уравнениям равновесия:

$$\sum_{i=1}^{n} P_{ix} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} P_{iy} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} P_{iz} = 0,$$
$$\sum_{i=1}^{n} M_{ix} = 0,$$
$$\sum_{i=1}^{n} M_{iy} = 0,$$
$$\sum_{i=1}^{n} M_{iz} = 0.$$

Случай 2:

$$\overrightarrow{R^*} = 0,$$
$$\overrightarrow{\mathrm{M}_0} \neq 0.$$

Система сил приводится к паре сил с моментом, равным главному моменту системы (условие приведения системы сил к паре).

Случай 3:

$$\overrightarrow{R^*} \neq 0,$$
$$\overrightarrow{\mathrm{M}_0} = 0.$$

Система приводится к равнодействующей, линия действия которой проходит через центр приведения *O*.

Случай 4:

$$\overrightarrow{R^*} \neq 0,$$
$$\overrightarrow{\mathrm{M}_0} \neq 0,$$
$$\overrightarrow{R^*} \perp \overrightarrow{\mathrm{M}_0}.$$

Система сил приводится к равнодействующей, линия действия которой находится на расстоянии d от центра приведения *O*:

$$d = \frac{M_0}{R^*}.$$

Случай 5:

$$\overrightarrow{R^*} \neq 0,$$
$$\overrightarrow{M_0} \neq 0,$$
$$\overrightarrow{R^*} \not\perp \overrightarrow{M_0}.$$

Система сил приводится к силовому винту (динаме). *Силовым винтом* (динамой) называется совокупность силы и пары сил, расположенной перпендикулярно действию силы (рис. 44).

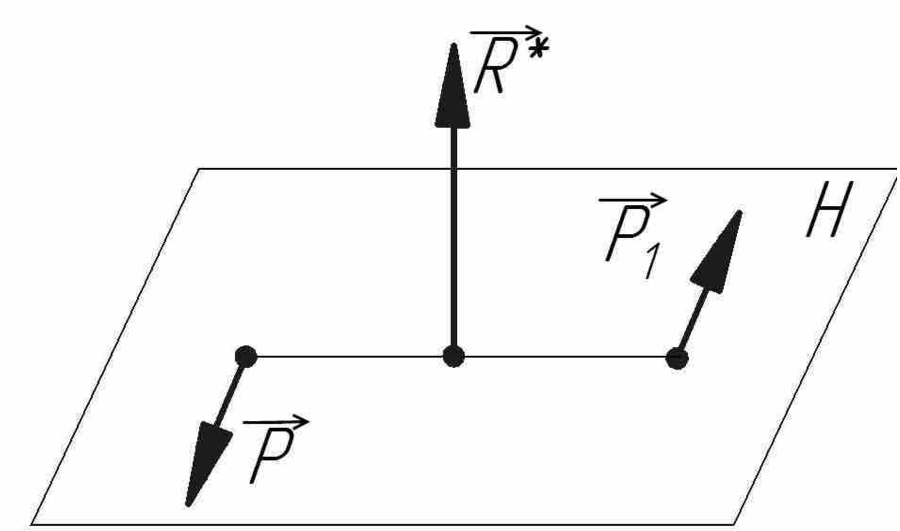


Рис. 44

21*. ЦЕНТР ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ. ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Центром параллельных сил называется точка приложения равнодействующей параллельных сил, которая не изменяет своего положения при повороте всех сил системы в одну и ту же сторону на один и тот же угол.

По теореме Вариньона о моменте равнодействующей, известно, что момент равнодействующей относительно любой оси равен алгебраической сумме моментов составляющих сил относительно этой оси.

$$M(\vec{R})_x = \sum_{i=1}^{n} M_{ix}.$$

С помощью этой теоремы для системы сил, параллельных оси Oz, найдем координаты точки приложения равнодействующей C (рис. 45):

$$RX_c = \sum_{i=1}^{n} P_i X_i,$$

$$RY_c = \sum_{i=1}^{n} P_i Y_i$$

$$RZ_c = \sum_{i=1}^{n} P_i Z_i$$

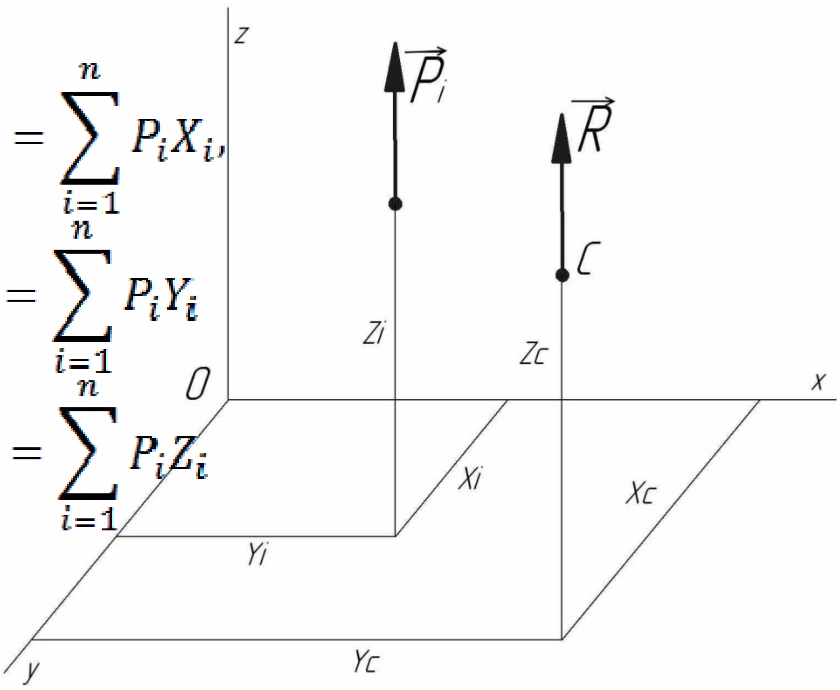


Рис. 45

Таким образом, координаты центра параллельных сил определяются по формулам:

$$X_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_i X_i}{R}, Y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_i Y_i}{R}, Z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_i Z_i}{R}.$$

Рассмотрим в качестве системы параллельных сил весб частиц твердого тела (рис. 46).

Примечание: на самом деле силы веса будут системой сходящихся сил, линии действия которых пересекаются в центре Земли. Пренебрегаем размерами тела по сравнению с размерами Земли.

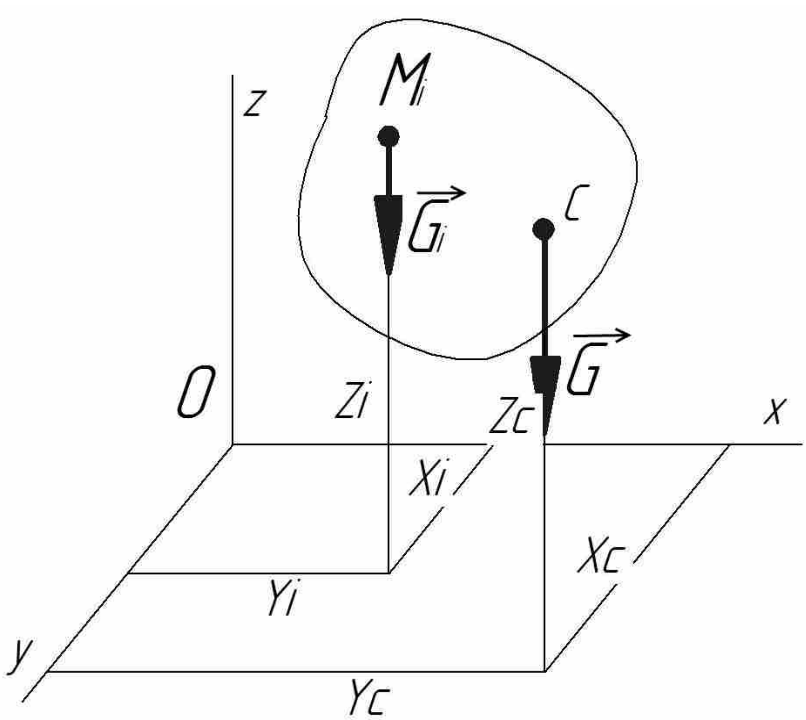


Рис. 46

Тогда центр тяжести *C* твердого тела веса *G* совпадает с центром параллельных сил – сил тяжести частиц тела и находится по формулам

$$X_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} G_i X_i}{G},$$

$$Y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} G_i Y_i}{G},$$

$$Z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} G_i Z_i}{G}.$$

Формулами координат центра тяжести тела можно пользоваться и в тех случаях, когда тело разбивается не на бесконечно малые частицы, а на части конечных размеров.

Тогда: G_i – вес части конечных размеров, X_{Ci}, Y_{Ci}, Z_{Ci} – координаты центров тяжести этих частей.

22*. СЦЕПЛЕНИЕ. СИЛА ТРЕНИЯ СКОЛЬЖЕНИЯ. ЗАКОНЫ КУЛОНА

Трением называется сопротивление перемещению (возможному или действительному) соприкасающихся тел, которое возникает в месте их соприкосновения. Например, трение подошв обуви человека о землю, на чем основана возможность передвижения. Многие обычные способы передвижения, а также огромное количество других явлений протекали бы совершенно по-другому при отсутствии трения.

Явление трения обусловлено множеством факторов различного характера: механического, внутримолекулярного, термического, электрического и т.д.

Возникновение силы трения обусловлено прежде всего шероховатостью поверхностей, которая создает сопротивление перемещению, и наличием сцепления у прижатых друг к другу тел. Изучение всех особенностей явления трения, представляющее собою довольно сложную физико-механическую проблему, выходит за рамки курса теоретической механики.

В инженерных расчетах обычно исходят из ряда установленных эмпирическим путем общих закономерностей, называемых законами трения скольжения при покое (законами Кулона). Эти законы справедливы, когда поверхности тел не вдавливаются друг в друга, а их шероховатость не слишком велика. Законы Кулона для трения скольжения можно сформулировать следующим образом:

1. Величина силы трения может изменяться от нуля до некоторого предельного значения в зависимости от направления и величины активных сил. Максимальное значение силы трения достигается в момент выхода тела из состояния равновесия.

$$0 \le \bar{F}_{\text{тр}} \le \bar{F}_{max}$$

(Условие, при котором отсутствует скольжение тела.)

2. Предельная величина силы трения не зависит от силы нормального давления и площади соприкосновения.

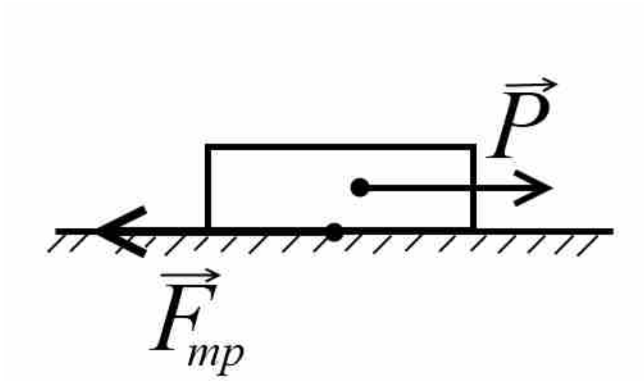
3. Наибольшая величина силы трения скольжения пропорциональна силе нормального давления на поверхность:

$$\bar{F}_{тр/max} = fN,$$

где N – нормальная реакция опорной поверхности, f – коэффициент трения скольжения, является безразмерным.
(Условие начала скольжения тела.)

4. Коэффициент трения скольжения, определяемый путем эксперимента, зависит от шероховатости и других факторов физического состояния материала соприкасающихся поверхностей (например, влажность, температура).

При решении задач статики с учетом силы трения скольжения, как правило, рассматривают равновесие системы в момент достижения максимального (предельного) значения силы трения. Сила трения будет направлена в сторону, противоположную той, куда действующие силы стремятся сдвинуть тело. В таком случае из уравнений равновесия находят наибольшее и наименьшее значения искомых величин.



23*. ОПРОКИДЫВАНИЕ

При исследовании состояния равновесия твердого тела (механической системы) встречаются задачи, в которых следует определить предельную величину силы или размеров, обеспечивающих сохранение этого состояния. В подобных задачах обычно при значении силы, превосходящей максимальное допустимое значение, происходит опрокидывание тела вокруг одной из точек опоры.

Задачи на опрокидывание решаются в предположении, что твердое тело начинает отрываться от одной из опор. Поэтому реакции этой опоры не следует учитывать. Тогда при равновесии твердого тела реакция оставшейся опоры должна уравновешиваться с равнодействующей всех активных сил. Это значит, что линия действия равнодействующей всех активных сил проходит через оставшуюся опору и, следовательно, момент равнодействующей относительно точки опоры равен нулю. Таким образом, по теореме Вариньона, сумма моментов всех активных сил $\overline{P}_i$ относительно точки опоры O равна нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} M_O\left(\overline{P}_i\right) = 0.$$

Из этого уравнения определяются предельные значения сил или размеров твердого тела, при которых еще не наступает опрокидывание.

При решении задач на опрокидывание твердых тел можно следовать алгоритму:

1) изобразить на схеме активные силы, действующие на тело (систему тел);

2) определить опору, относительно которой может произойти опрокидывание твердого тела;

3) составить уравнение моментов активных сил относительно этой точки опоры;

4) решив уравнение, определить искомую величину (предельную силу или предельный размер).

Библиографический список

1. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. - СПб.: Политехника, 2009.Ч.1,2.
2. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. - СПб.: Лань, 2009.
3. Маркеев А.П. Теоретическая механика: учебник для университетов. – Москва: ЧеРо, 1999.
4. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. - М.: Высшая школа, 2011.
5. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики.- М.: Наука, 2009.
6. Яблонский А.А. Курс теоретической механики. - СПб.: Лань, 2010.Ч1,2.

Содержание

Учебное издание

Маргарита Владимировна Максименко
Наталия Владимировна Кузнецова
Виктор Евгеньевич Головко
Сергей Гаррикович Петров
Иван Владимирович Клюшкин

Теоретическая механика

Часть 1

Статика

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Редактор и корректор В.А.Басова
Техн. редактор Л.Я.Титова Темплан 2013, поз.42

Подп. к печати 18.04.2013. Формат 60х84/16. Бумага тип. №1.
Печать офсетная. Уч.-изд.л. 3,5. Усл.печ.л. 3,5.
Тираж 100 экз. Изд. №42. Цена " С". Заказ

Ризограф Санкт-Петербургского государственного технологического университета растительных полимеров, 198095, ул. Ивана Черных, 4.