

С. Г. ПЕТРОВ, В. Е. ГОЛОВКО, М. О. ТРУБИЦЫН

ТЕОРИЯ МАШИН И МЕХАНИЗМОВ

Часть 4

Учебное пособие

Санкт-Петербург

2012

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ РАСТИТЕЛЬНЫХ ПОЛИМЕРОВ»

С. Г. ПЕТРОВ, В. Е. ГОЛОВКО, М. О. ТРУБИЦЫН

ТЕОРИЯ МАШИН И МЕХАНИЗМОВ

Часть 4

Учебное пособие

Санкт-Петербург

2012

УДК 531(075)

ББК 34.41я7

Т 338

Петров С.Г., Головки В.Е., Трубицын М.О. Теория машин и механизмов: учебное пособие / СПбГТУРП.-СПб., 2012. Ч. 4.- 62 с.

Учебное пособие предназначено для студентов специальностей 150405 “Машины и оборудование лесного комплекса” и 240801 “Машины и аппараты химических производств”. В данном пособии представлены общие положения теории механизмов и машин, приведены понятия структурного анализа, рассмотрены способы кинематического анализа механизмов.

Рецензенты:

Заведующий кафедрой математического моделирования и оптимизации химико-технологических процессов Санкт-Петербургского государственного технологического института (технического университета), д-р техн. наук, профессор В.А. Холоднов;
доцент кафедры прочности материалов и конструкций Санкт-Петербургского государственного университета путей сообщения, канд. техн. наук
Б.М. Аллахвердов.

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом университета в качестве учебного пособия.

© Санкт-Петербургский
государственный технологический
университет растительных полимеров, 2012
© Петров С.Г., Головки В.Е., Трубицын М.О., 2012

Оглавление

Лекция № 1. Силы, действующие в машинном агрегате.....	4
Лекция № 2. Кинетостатический анализ.....	16
Лекция № 3. Приведение сил и приведение масс в механизме.....	25
Лекция № 4. Исследование установившегося периодического движения для расчета маховых масс.....	36
Лекция № 5. Построение действительной картины изменения угловой скорости.....	47
Библиографический список.....	62

ЛЕКЦИЯ № 1

Силы, действующие в машинном агрегате

Рассмотрим схему машинного агрегата, который состоит из двигателя, передающего механизма и рабочей машины (рис. 1.1).

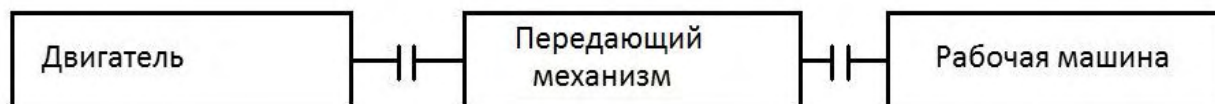


Рис. 1.1

При работе механизма к его звеньям приложены внешние задаваемые силы, а именно: силы движущие, силы полезного сопротивления, силы вредного сопротивления, силы тяжести.

Будем называть движущими силами те, которые стремятся ускорить движение ведущего звена. То есть те силы из числа приложенных к звеньям механизма, элементарная работа которых положительна.

Силами полезного сопротивления будем считать те силы сопротивления, на преодоление которых затрачивается работа, необходимая для выполнения технологического процесса.

Силами вредного сопротивления будем называть те, на преодоление которых затрачивается дополнительная работа, сверх необходимой для преодоления полезного сопротивления.

Например, у двигателя внутреннего сгорания движущей силой является давление расширяющегося газа на поршень. При этом силами полезного сопротивления будут силы сопротивления рабочей машины, которая приводится в движение. А силами вредного сопротивления - трение в подшипниках, сопротивление воздуха и т.д.

Теорема об изменении кинетической энергии применительно к механизму

Изменение кинетической энергии звеньев на некотором их перемещении равно алгебраической сумме работ всех действующих сил на соответствующих перемещениях.

$$E_2 - E_1 = A_{с.д} - A_{с.п} - A_{с.в} \pm A_{с.т},$$

где $A_{с.д}$ - работа движущих сил;

$A_{с.п}$ - работа сил полезного сопротивления;

$A_{с.в.}$ - работа сил вредного сопротивления;

$A_{с.т.}$ - работа сил тяжести.

Основные режимы работы машинного агрегата

Полным временем движения механизма назовем промежуток времени от момента начала движения механизма до момента окончания его движения.

Полное время движения состоит из:

- времени пуска;
- времени установившегося движения;
- времени переходного процесса;
- времени останова.

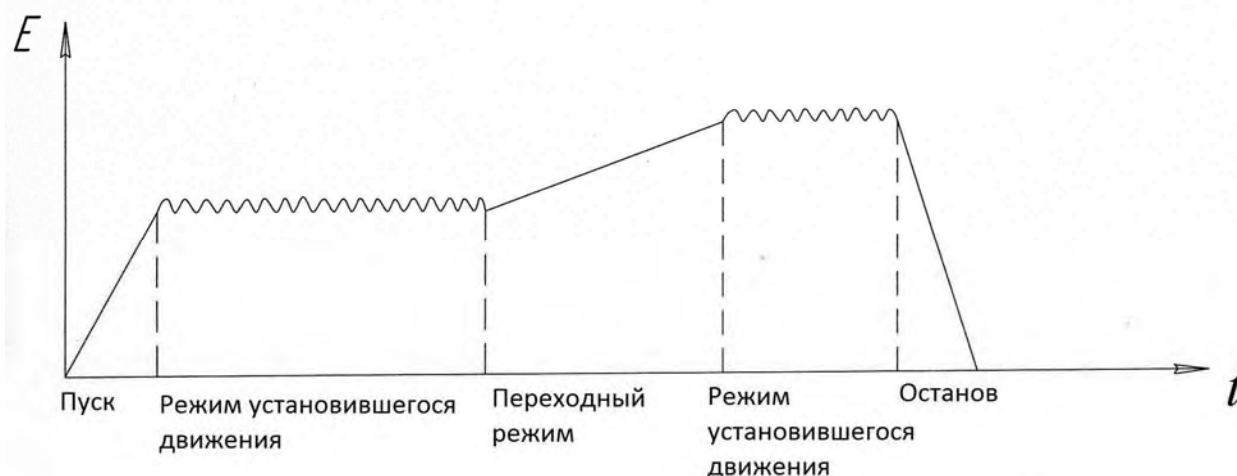


Рис. 1.2

Рассмотрим основные режимы работы агрегата (рис. 1.2).

Пуск

Кинематическая энергия в начале пуска $E_1 = E_n = 0$

Работа полезного сопротивления $A_{с.п.} = 0$.

Тогда кинетическая энергия в конце пуска $E_2 = A_{с.д.} - A_{с.в.} \pm A_{с.т.}$

Откуда работа движущих сил $A_{с.д.} = E_2 + A_{с.в.} \pm A_{с.т.}$

Останов

Кинетическая энергия в конце останова $E_2 = 0$.

Работа сил движущих также $A_{с.д.} = 0$.

И работа сил полезного сопротивления $A_{с.п.} = 0$.

$$-E_1 = -A_{с.в.} \pm A_{с.т.} - A_T;$$

Отсюда можно определить работу тормозного устройства:

$$A_T = E_1 - A_{с.в.} \pm A_{с.т.}$$

Работа тормоза затрачивается на то, чтобы поглотить кинетическую энергию.

Режим установившегося движения.

Установившееся движение бывает двух видов:

- 1) равномерное;
- 2) периодическое.

Рассмотрим установившееся равномерное движение.

Такое движение бывает, например, в турбинах, в электрических машинах.

Оно характеризуется тем, что за любой промежуток времени изменение кинетической энергии механизма равно нулю, т.е.

$$E_2 - E_1 = 0;$$

Работа сил тяжести $A_{с.т.} = 0$;

Тогда работа движущих сил за любой промежуток времени

$$A_{с.д.} = A_{с.п.} + A_{с.в.}$$

Рассмотрим установившееся периодическое движение.

Для этого режима характерно то, что за период работы изменение кинетической энергии равно нулю:

$$E_2 - E_1 = 0.$$

Работа сил тяжести

$$A_{с.т.} = 0;$$

Следовательно, работа движущих сил при периодическом установившемся движении

$$A_{с.д.} = A_{с.в.} + A_{с.п.}$$

Режим периодического установившегося движения характерен тем, что угловая скорость меняется (рис. 1.3):

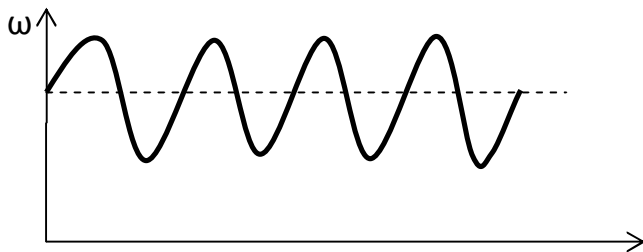


Рис. 1.3

Трение в кинематических парах механизма

1). Трение в поступательной кинематической паре

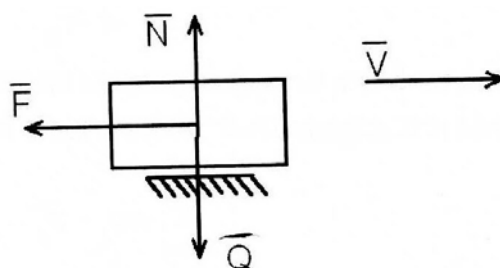


Рис. 1.4

Рассмотрим ползун весом Q , который движется со скоростью V (рис. 1.4).

На ползун действуют со стороны опорной поверхности нормальная опорная реакция N , направленная вертикально вверх, и сила трения между ползуном и поверхностью, направленная в сторону, противоположную движению.

F - сила трения - определяется по формуле:

$$F = N \cdot f,$$

где f - коэффициент трения.

Коэффициент трения зависит от материала обработанных поверхностей, состояния поверхностей, от удельного давления. Обычно коэффициент трения f бывает в пределах от 0,1 до 0,4.

2). Трение покоя

Рассмотрим тело весом Q , к которому приложена горизонтальная сила P , причем тело находится в покое, следовательно, скорость V равна нулю (рис. 1.5).

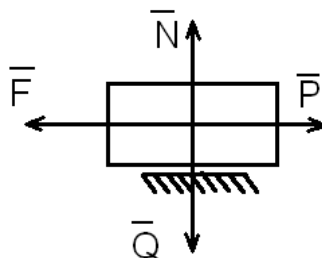


Рис. 1.5

Для того чтобы тело находилось в покое, необходимо, чтобы сила трения покоя F_n была равна силе P или превышала её:

$$F_{\text{тр.п.}} \geq P.$$

Или в векторном выражении:

$$\vec{F}_n = -\vec{P}.$$

Сила трения покоя

$$F_n = N \cdot f_o,$$

где f_o - коэффициент трения покоя.

Коэффициент трения покоя всегда больше коэффициента трения движения, т.е.

$$f_o > f.$$

Рассмотрим то же тело, но только движущееся со скоростью V (рис.1.6)

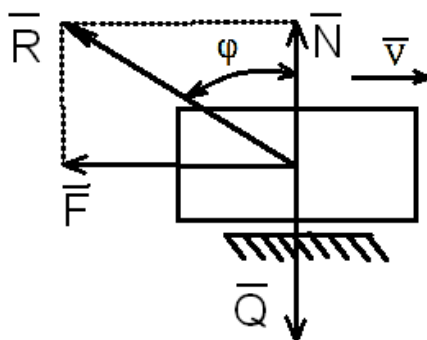


Рис. 1.6

Сложим силы, действующие на тело со стороны поверхности:

$$\vec{R} = \vec{F} + \vec{N},$$

где R - полная реакция;

N - нормальная реакция;

F - сила трения.

Угол между вертикальной осью и полной реакцией R называется углом трения φ .

Сила трения $F = N \cdot f$.

Или, выражая через угол трения φ ,

$$F = N \cdot \operatorname{tg} \varphi, \text{ где } \operatorname{tg} \varphi = f;$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}(f)$$

Обычно угол трения $\varphi = (3 - 36^\circ)$.

Угол трения зависит от тех же факторов, что и сила трения.

Полная реакция всегда отклоняется в сторону, противоположную давлению.

Если вращать полную реакцию вокруг вертикальной оси, то мы получим конус трения (рис.1.7).

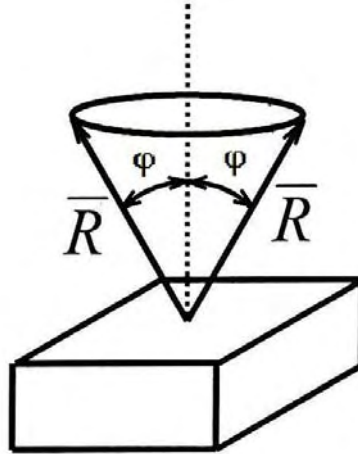


Рис. 1.7

3). Самоторможение в поступательной кинематической паре

Пусть на тело действует сила S , направленная под углом β к поверхности. Разложим эту силу на две составляющие Q и P (рис. 1.8).

Со стороны опорной поверхности на тело будут действовать нормальная опорная реакция N и сила трения F .

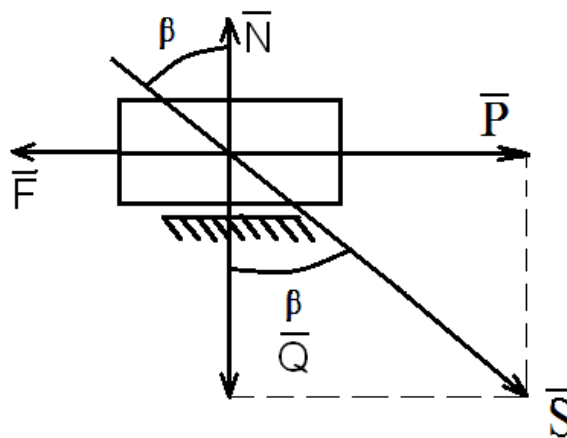


Рис. 1.8

Движение возможно, если

$$P > F;$$

Движение невозможно, если

$$P < F;$$

Выразим силу P через Q

$$P = Q \cdot \operatorname{tg} \beta.$$

Но в то же время сила трения

$$F = N \cdot \operatorname{tg} \varphi,$$

φ - угол трения.

Или

$$F = Q \cdot \operatorname{tg} \varphi, \text{ так как } Q = N.$$

Переходя к углам β и φ , получаем:

движение будет, если $\beta > \varphi$,

и движения не будет, если $\beta < \varphi$.

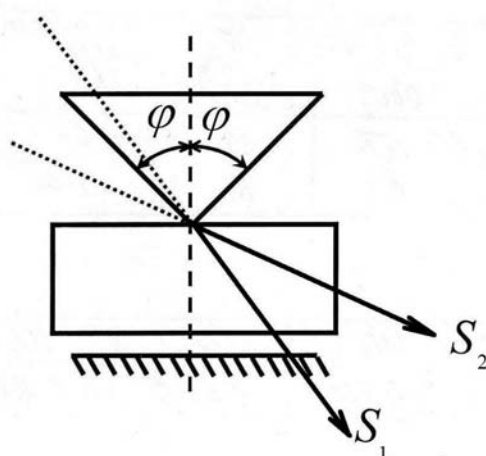


Рис. 1.9

Переходя к такой силе S (рис. 1.9), можно сказать:

если вектор силы \vec{S} находится внутри конуса трения, движения не будет (случай \vec{S}_1);

если вектор силы \vec{S} не проходит через конус трения, то движение будет (случай \vec{S}_2);

если сила, действующая на тело, проходит через конус трения, то возникает явление самоторможения.

4). Трение в случае клинчатого ползуна

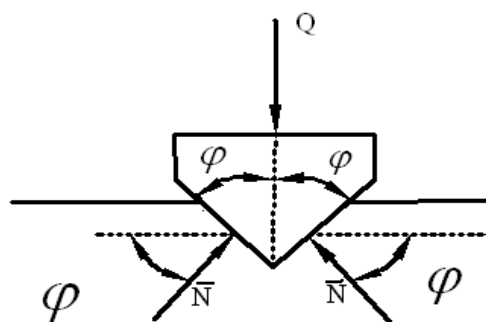


Рис. 1.10

Пусть клинчатый ползун движется от нас (рис. 1.10).

Сила трения будет перпендикулярна чертежу, она направлена к нам.

Сила клинчатого ползуна

$$F_{к.п.} = 2F_{гр.},$$

где $F_{гр.}$ – сила трения на грани.

Сила трения грани

$$F_{гр.} = Nf.$$

Спроектируем силы на вертикальную ось:

$$2N \cdot \sin \varphi - Q = 0;$$

Отсюда

$$N = \frac{Q}{2 \sin \varphi}.$$

Тогда сила трения клинчатого ползуна

$$F_{к.п.} = \frac{2 \cdot f \cdot Q}{2 \sin \varphi} = \frac{f}{\sin \varphi} Q;$$

Если обозначить:

$$\frac{f}{\sin \alpha} = f_{к.п.}, \text{ то будем иметь:}$$

$$F_{к.п.} = f_{к.п.} \cdot Q,$$

где $f_{к.п.}$ - коэффициент трения клинчатого ползуна. Он зависит от геометрии, от угла φ ; от чистоты поверхности и т.д.

$$f_{к.п.} \approx f.$$

Если угол $\alpha \rightarrow 90^\circ$, то $f_{к.п.} \rightarrow f$.

$\varphi_{к.п.}$ - угол трения клинчатого ползуна.

$$\varphi_{к.п.} = \arctg f_{к.п.} = \arctg \frac{f}{\sin \alpha}.$$

5). Трение во вращательной кинематической паре

Кинематическая пара состоит из шипа и подшипника. На шип действует радиальная нагрузка Q и момент M , который вращает вал вместе с шипом. Между шипом и подшипником имеется зазор. При вращении вала шип при наличии трения будет как бы “взбегать” на подшипник (рис. 1.11).

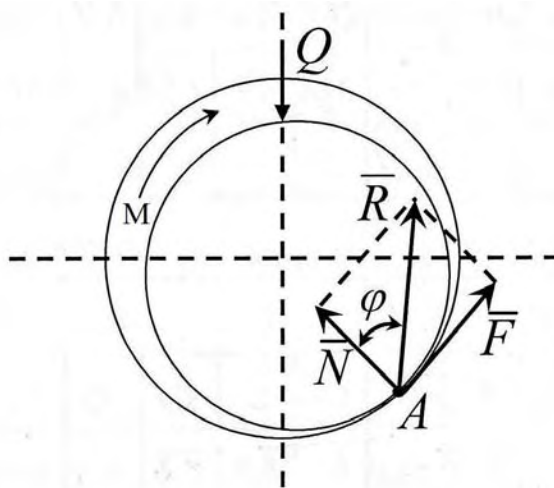


Рис. 1.11

Предположим, что вследствие “взбегания” шипа на подшипник соприкосновение элементов кинематической пары происходит в точке A , где реакция R параллельна силе Q .

На основании ранее установленных положений полная реакция R должна быть отклонена от нормали на угол трения φ , и величина силы трения $F = f \cdot N = f \cdot R \cdot \cos \varphi = f \cdot Q \cdot \cos \varphi$, так как $Q = R$.

Момент, приложенный к шипу, уравновешивается моментом сил трения:

$$M_F = f \cdot N \cdot r = f \cdot \cos \varphi \cdot r \cdot Q = f \cdot r \cdot Q \cdot \cos \varphi,$$

где r – радиус шипа.

$$N = R \cos \varphi = Q \cos \varphi.$$

Обозначим:

$$f \cdot \cos \varphi = f_{ш.};$$

$f_{ш.}$ - коэффициент трения шипа, он определяется экспериментально.

Тогда момент сил трения

$$M_F = f_{ш.} \cdot Q \cdot r.$$

Если касание происходит по окружности, то $f_{ш.} = 1,57 f$

б). *Круг трения и самоторможение во вращательной кинематической паре*

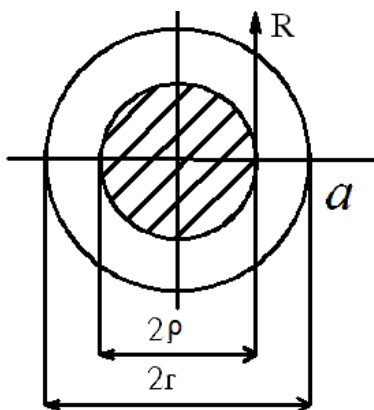


Рис. 1.12

Если из центра цапфы провести окружность радиуса ρ до касания с полной реакцией R , то круг радиуса ρ по аналогии с углом трения и конусом трения называется кругом трения (рис. 1.12).

ρ - радиус круга трения, т.е. расстояние от центра шипа до полной реакции R .

Момент сил трения

$$M_F = f_{ш.} \cdot Q \cdot r.$$

Если обозначить $f_{ш.} \cdot r = \rho$, то момент сил трения

$$M_{тр.} = M_F = \rho \cdot R.$$

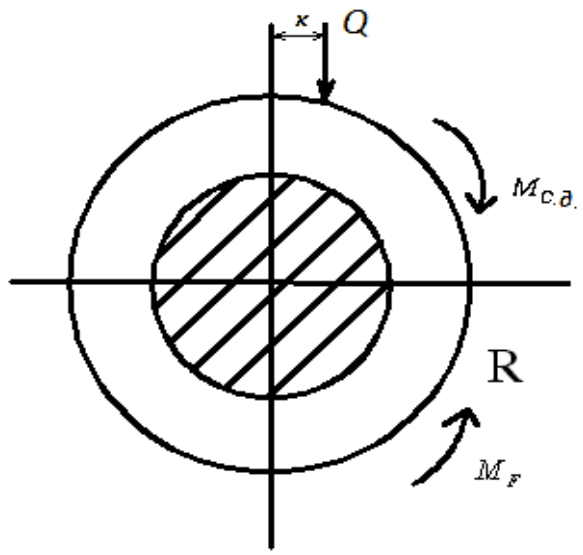


Рис. 1.13

Провернем шип, для чего приложим к нему на каком-то расстоянии “ x ” от вертикальной оси силу Q (рис. 1.13).

Тогда момент движущих сил $M_{с.д.} = Q \cdot x$.

Момент сил трения $M_F = \rho \cdot R = \rho \cdot Q$.

Движение возможно, если $M_{с.д.} \geq M_F$.

Сравнивая правые части выражений моментов, приходим к выводу, что движение возможно, если $x > \rho$; если $x < \rho$, то движения не будет, а будет самоторможение.

7). *Сопротивление при движении тележки*

На рис.1.13 изображена тележка на четырёх колёсах. При движении тележки возникает сила трения качения и скольжения.

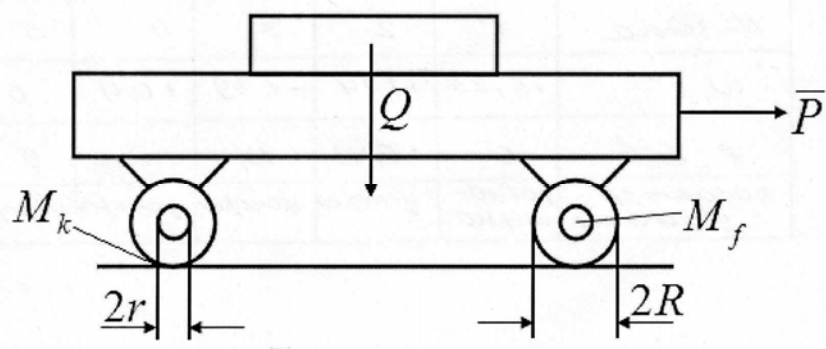


Рис. 1.13

Момент силы трения скольжения возникает в шипе:

$$M_F = \sum M_{Fi} = 4 f_{ш.} \cdot r \cdot \frac{Q}{4} = f_{ш.} \cdot Q \cdot r,$$

где: $\frac{Q}{4}$ - сила, приходящая на один шип.

Момент трения качения возникает при качении колес по плоскости:

$$M_K = 4 \mu \cdot \frac{Q}{4} = \mu \cdot Q,$$

где: μ - коэффициент трения качения, измеряется в сантиметрах.

Для того чтобы тележка двигалась, необходимо, чтобы работа сил движущих была больше или равна работе сил сопротивления.

Работа сил движущих за один оборот колеса:

$$2\pi \cdot R \cdot P = M_F \cdot 2\pi + M_K \cdot 2\pi;$$

отсюда:

$$2\pi \cdot R \cdot P = f_{ш.} \cdot r \cdot Q \cdot 2\pi + \mu \cdot Q \cdot 2\pi.$$

Это получилось после того, как произведена была замена M_F и M_K .

Сокращая выражение на 2π , получаем формулу для P :

$$P = \left(f_{ш.} \cdot \frac{r}{R} + \frac{\mu}{R} \right) \cdot Q;$$

Обозначая выражение:

$$\left(f_{ш.} \cdot \frac{r}{R} + \frac{\mu}{R} \right) = f_{тяж.},$$

где $f_{тяж.}$ - коэффициент тяжести.

Окончательно получаем выражение для силы P :

$$P = f_{тяж.} \cdot Q;$$

Для того чтобы уменьшить силу P , надо уменьшать $f_{тяж.}$. А для этого нужно увеличивать радиус колес, уменьшать радиус шипа – это все видно из формулы.

ЛЕКЦИЯ № 2

Кинестатический анализ

В тех случаях, когда при расчете в число заданных сил не входят силы инерции звеньев, расчет называется статическим. Если в число заданных сил при расчете входят и силы инерции звеньев, то такой расчет называется кинестатическим (рис. 2.1).

Кинестатический анализ основан на двух принципах:

1. Принцип Даламбера;
2. Статическая определимость групп Ассура.

Докажем, что любая группа Ассура есть статически определимая система, т.е. число уравнений равно числу неизвестных усилий.

Пусть в группе Ассура содержится:

n' - звеньев;

P'_5 - число кинематических пар 5-го класса.

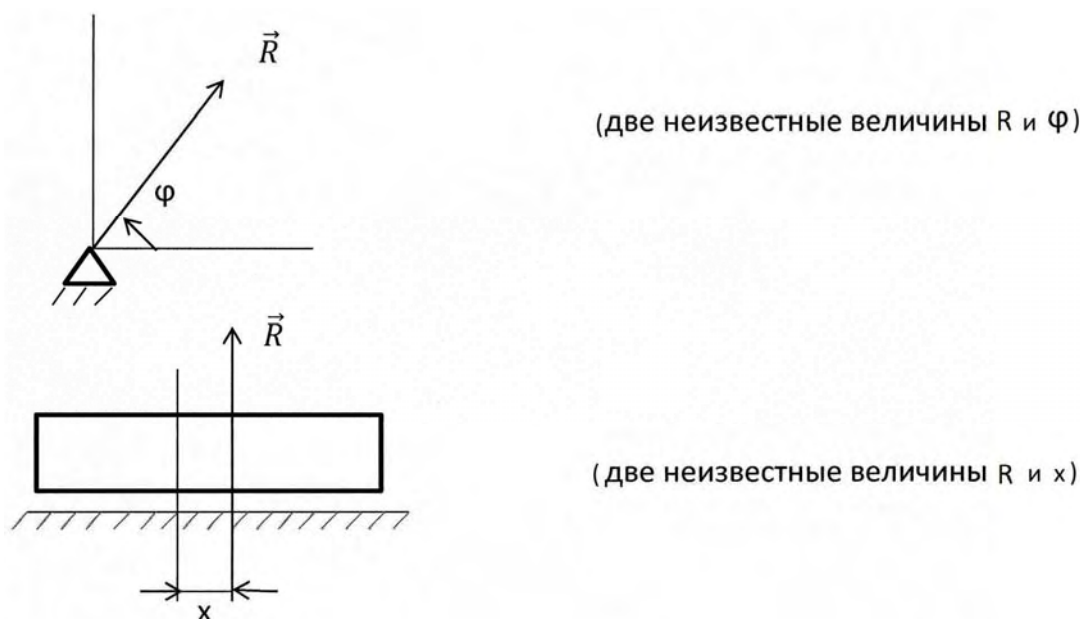


Рис. 2.1

Так как для каждого звена, имеющего плоскопараллельное движение, можно написать три уравнения равновесия, то число уравнений, которое мы сможем составить в n' звеньях, будет равно $3n'$.

Число неизвестных, которое необходимо определить, будет равно $2P'_5$.

Так как любая группа Ассур обладает нулевой степенью подвижности, то можно записать:

$$W = 0; W = 3n' = 2P'_5 = 0.$$

Это следует из формулы Чебишева.

Следовательно, группа Ассур статически определима, если удовлетворяется условие:

$$3n' = 2P'_5.$$

Постановка задачи

S_i - центр масс соответствующего звена;

P'_3 и M'_3 - полезные силы сопротивления, т.е. те силы сопротивления, которые совершают работу, необходимую для выполнения требуемого технологического процесса.

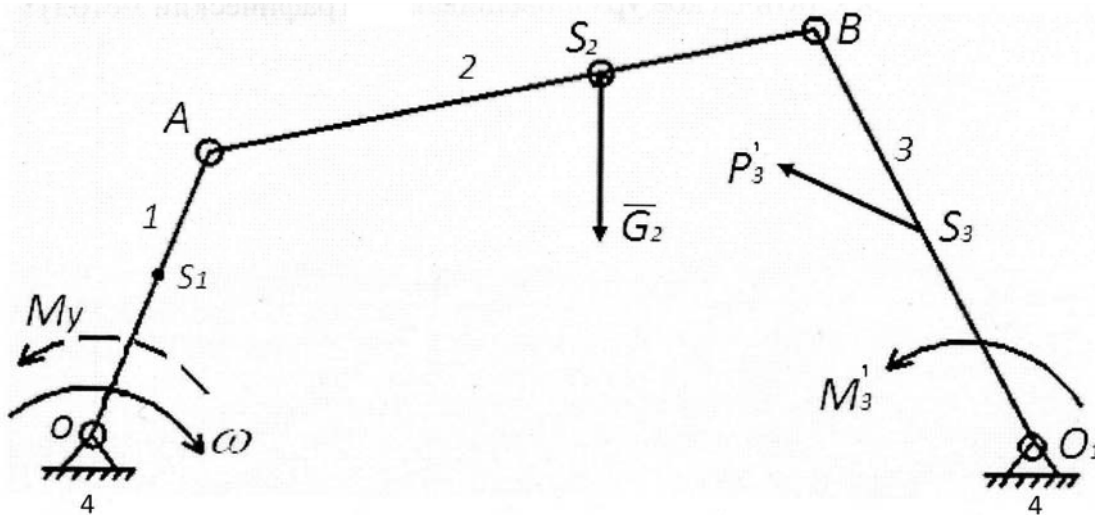


Рис. 2.2

Дано: Кинематическая схема с размерами (рис. 2.2); закон движения ведущего звена; массы всех звеньев; моменты инерции всех звеньев относительно их центра масс (Y_{S_i}); внешние силы: ($G_{T_2}; P'_3; M'_3$).

Требуется определить: $\bar{R}_{41}; \bar{R}_{12}; \bar{R}_{23}; \bar{R}_{43}$;

$\bar{R}_{12} = -\bar{R}_{21}$; M_y - уравнивающий момент;

\bar{R}_{41} - это усилие в кинематической паре (O_1) со стороны стойки (4) на звено (3).

Все эти параметры определяются для заданного положения механизма.

Задача кинематического анализа решается при условии, что трения в кинематических парах нет. Это при первом приближении.

Учет сил трения в кинематических парах осуществляется методом последовательных приближений.

Последовательность кинестатического анализа

1). Построение плана скоростей, ускорений, определение сил инерции, момента сил инерции - M_{u_i} , сложение сил инерции или моментов сил инерции с внешними силами (рис 2.3).

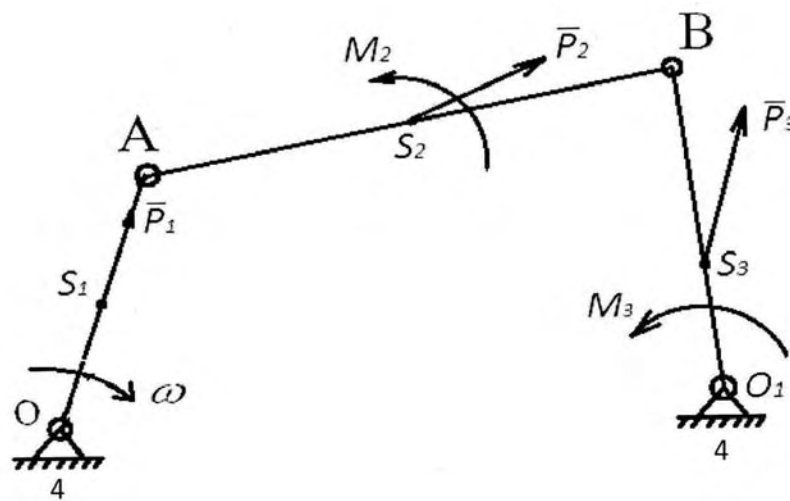


Рис 2.3

$$\bar{P}_1 = \bar{P}_{u_1}$$

Сила инерции первого звена

$$\bar{P}_{u_1} = -m_1 \cdot a_{S_1}.$$

m_1 - масса первого звена

ω_S - ускорение центра масс первого звена.

Сила инерции и момент сил инерции второго звена:

$$\bar{P}_2 = \bar{G} + \bar{P}_{u_2}; \quad \bar{P}_{u_2} = -m_2 \cdot \bar{a}_{S_2};$$

$$M_2 = M_{u_2}; \quad M_{u_2} = -\varepsilon_2 \cdot Y_{S_2}.$$

Сила инерции и момент сил инерции третьего звена

$$\bar{P}_3 = P'_3 + \bar{P}_{u_3}; \quad \bar{P}_{u_3} = -m_3 \cdot a_{S_3};$$

$$M_3 = M'_3 + M_{u_3}; \quad M_{u_3} = -\varepsilon_3 \cdot Y_{S_3}.$$

2). Кинестатика всех групп Ассур, начиная с последней (рис. 2.4).

а). Рассматриваем последнюю группу Ассура; составляем уравнение равновесия сил, действующих на всю группу.

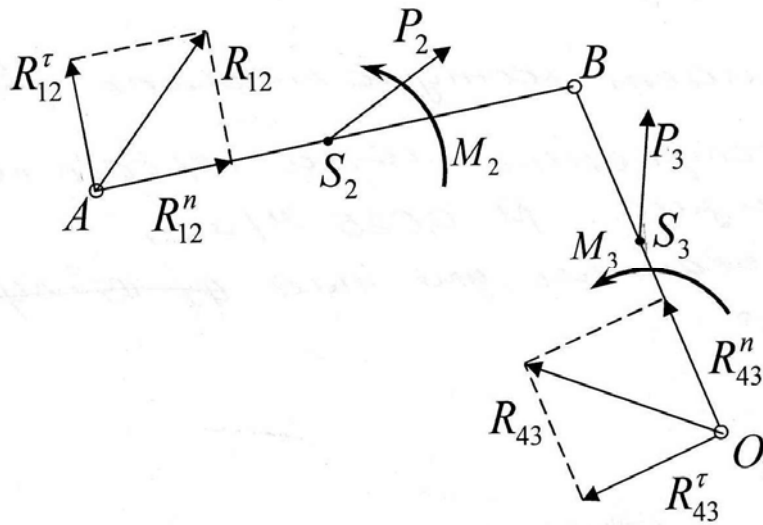


Рис. 2.4

$$\bar{R}_{12} + \bar{P}_2 + \bar{P}_3 + \bar{R}_{43} = 0;$$

Разложим неизвестные на нормальные и тангенциальные составляющие.

$$\bar{R}_{12} = \bar{R}_{12}^n + \bar{R}_{12}^\tau;$$

$$\bar{R}_{43} = \bar{R}_{43}^n + \bar{R}_{43}^\tau;$$

Тогда уравнение равновесия сил:

$$\bar{R}_{12}^n + \bar{R}_{12}^\tau + \bar{R}_{43}^n + \bar{R}_{43}^\tau + P_2 + P_3 = 0.$$

б). Определение тангенциальных составляющих из уравнения моментов (R_{12}^τ и R_{43}^τ).

Для этого мысленно проводится сечение через точку B и составляется сумма моментов относительно этой точки всех сил, действующих только на первое звено.

Сумма моментов относительно точки B от всех сил, действующих на второе звено.

$$\Sigma M_B = 0;$$

$$-R_{12}^\tau \cdot l_{A_1B} - P_2 h_2 + M_2 = 0;$$

Отсюда:

$$\bar{R}_{12}^{\tau} = \frac{M_2 - P_2 h_2}{\ell_{AB}};$$

Уравнение суммы моментов относительно от всех сил, действующих на третье звено.

$$\sum M_B = 0; -\bar{R}_{43}^{\tau} \cdot \ell_{O_1 B} - P_3 h_3 + M_3 = 0;$$

$$\bar{R}_{43}^{\tau} = \frac{M_3 - P_3 h_3}{\ell_{O_1 B_1}},$$

где h_2 и h_3 - плечи сил P_2 и P_3 .

в) Определение нормальных составляющих из плана сил (\bar{R}_{12}^n и \bar{R}_{43}^n).

Все силы, приложенные к группе Ассур по направлению нам известны, по величине нам неизвестны только две силы – это \bar{R}_{12}^n и \bar{R}_{43}^n .

Следовательно, можно построить многоугольник сил (рис.2.5).

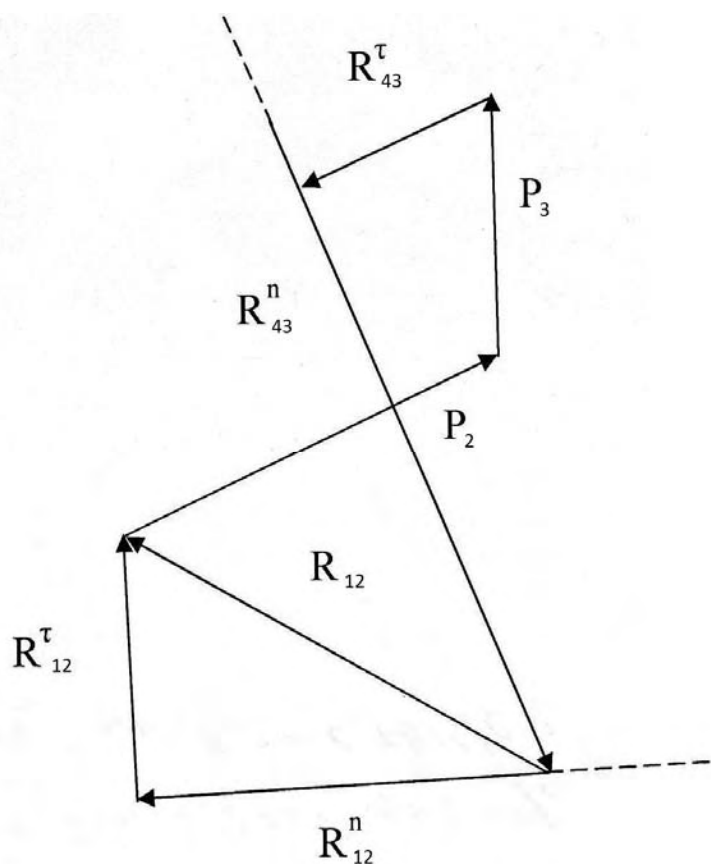


Рис. 2.5

Так как все силы откладываются в масштабе, то, снимая размер и умножая на масштаб, мы получаем численное значение силы.

$$\bar{R}_{12} = \bar{R}_{12}^n + \bar{R}_{12}^r;$$

$$\bar{R}_{43} = \bar{R}_{43}^n + \bar{R}_{43}^r.$$

г) Определение усилий в шарнире B : $\bar{R}_{23} = -\bar{R}_{32}$ (рис. 2.6)

Рассматриваем отдельно звено 2.

Равновесие сил на звене 2:

$$\bar{R}_{12} + P_2 + \bar{R}_{32} = 0;$$

Две силы известны по величине и направлению, найти нужно одну силу. Строим треугольник сил и находим усилие в шарнире B , т.е. R_{32} :

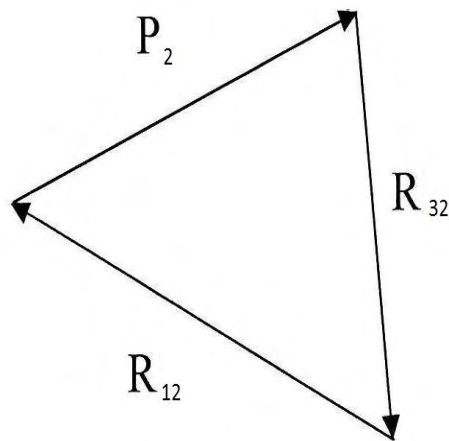


Рис. 2.6

3). Кинетостатика ведущего звена (рис. 2.7).

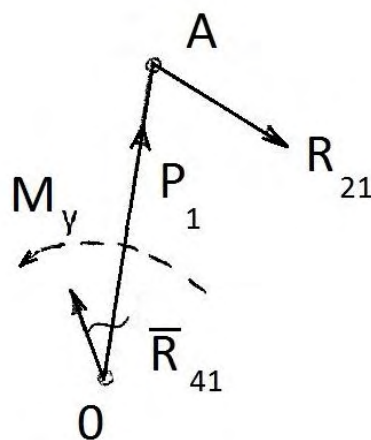


Рис. 2.7

Для ведущего звена нам известно:

$$\bar{P}_1; \bar{R}_{21} = -\bar{R}_{12};$$

Требуется определить:

$$\bar{R}_{41}; M_y$$

а) Уравнение равновесия сил, действующих на звено 1.

$$\bar{R}_{41} + \bar{P}_1 + \bar{R}_{21} = 0.$$

Из этого уравнения находим \bar{R}_{41} .

б) Определение уравновешивающего момента:

$$\sum M_o = 0; M_y = R_{21} \cdot h_1 = 0;$$

$$M_y = R_{21} \cdot h_1,$$

где h_1 - плечо от т. O до силы R_{21} .

Уравновешивающий момент имеет физический смысл при следующих условиях:

1. Если заданные силы на механизме – силы сопротивления, то уравновешивающий момент представляет собой приведенный к ведущему звену момент сил сопротивления с обратным знаком.

2. Если внешние силы – движущие силы, то уравновешивающий момент есть приведенный момент движущих сил с обратным знаком.

$$M_y = \square M_{д.с.},$$

$M_{д.с.}$ - момент движущих сил.

4. Особенность кинематического анализа группы Ассур с поступательно – кинематической парой (рис. 2.8).

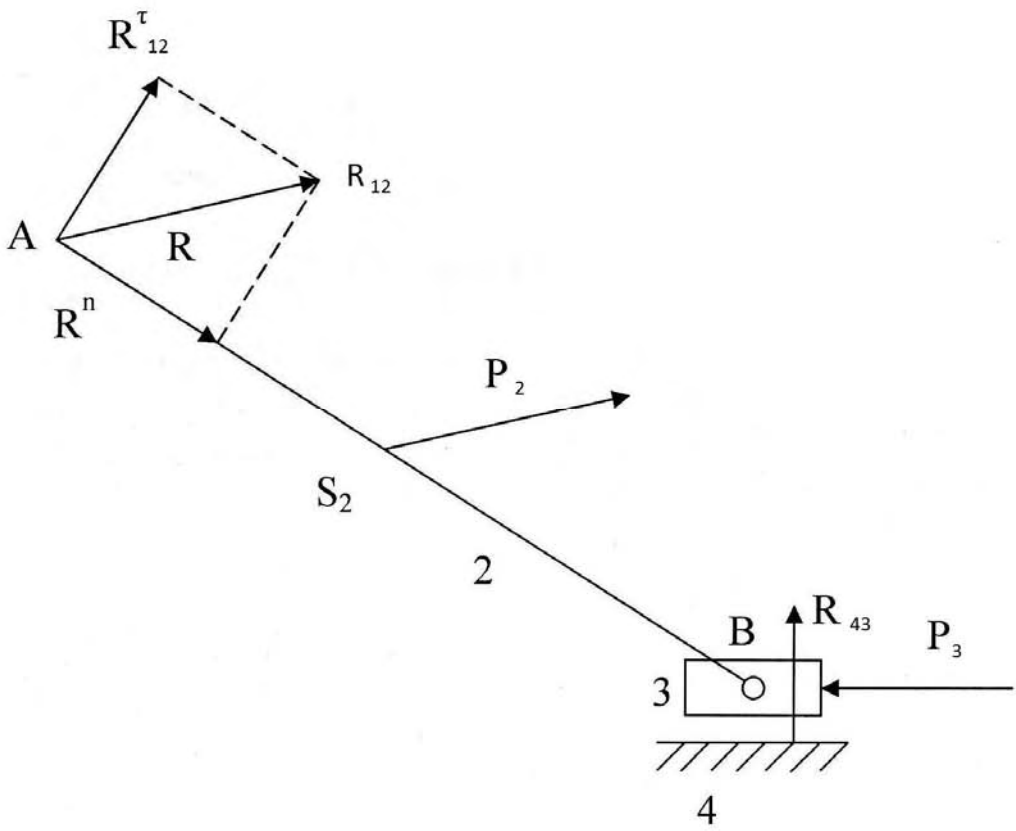


Рис. 2.8

Сила P_3 проходит через точку B .

а). Уравнение равновесия сил, действующих на группу Ассура

$$\bar{R}_{12}^n + \bar{R}_{12}^\tau + \bar{P}_2 + \bar{P}_{43} + \bar{P}_3 = 0$$

б). Определение тангенциальной составляющей \bar{R}_{12}^τ .

Для этого составляем уравнение моментов относительно точки B для второго звена, а затем определяем R_{12}^τ .

в). Строим план сил и определяем нормальные составляющие R_{12}^n и R_{43} .

г). Определение усилий в шарнире B .

Для этого рассматриваем отдельно звено 2 и определяем R_{32} .

$$\bar{R}_{32} = -\bar{R}_{23};$$

$$\bar{R}_{12} + \bar{R}_{32} + \bar{P}_2 = 0.$$

д). Определение точки приложения силы \bar{R}_{43} .

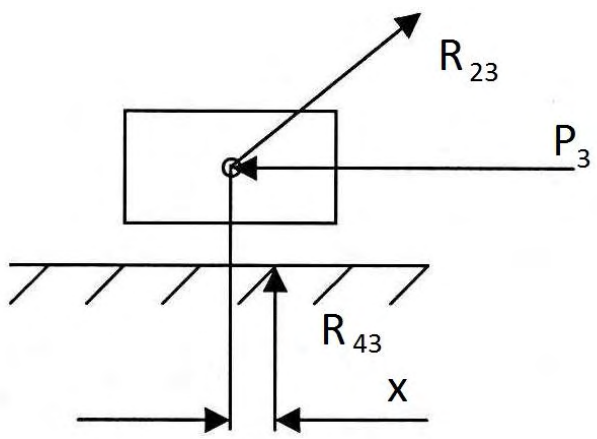


Рис. 2.9

Рассматриваем отдельно 3-е звено и составляем уравнение моментов относительно точки B (рис. 2.9):

$$\sum M_B = 0;$$

$$M_B(\bar{R}_{23}) + M_B(P_3) + M_B(P_{43}) = 0;$$

$M_B(\bar{R}_{23})$ и $M_B(\bar{P}_3)$ равны нулю, так как линия действия этих сил проходит через точку B .

Следовательно,

$$M_B(\bar{R}_{43}) = 0.$$

Но так как $R_{43} \neq 0$, следовательно, плечо $x=0$, т.е. сила R_{43} также проходит через точку B .

ЛЕКЦИЯ № 3

Приведение сил и приведение масс в механизме

Постановка задачи

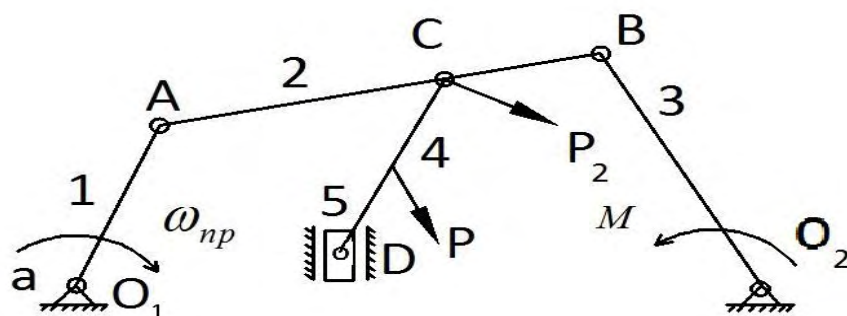


Рис. 3.1

При исследовании движения механизма, находящегося под действием заданных сил (рис. 3.1), удобно все силы, действующие на звенья, заменять силами, приложенными к одному из звеньев механизма.

Звено механизма, к которому приложены приведенные силы, носит название звена приведения, а точка приложения приведенных сил – точки приведения.

Звено приведения – это звено, к которому приводятся все силы и массы, а остальные звенья отбрасываются.

Обычно как звено приведения выбирают то, по обобщенной координате которого проводится исследование механизма.

Приведенной называют силу, условно приложенную к одной из точек механизма, элементарная работа которой на возможном перемещении точки приведения равна сумме элементарных работ приводимых сил на перемещениях точек приложения этих сил.

$$P_{\text{пр.}} \cdot d S_{\text{пр.}} \cos \alpha_{\text{п.р.}} = \sum P_i \cdot d S_i \cdot \cos \alpha_i$$

Приведение сил

Все силы и массы приводятся к первому звену, а другие звенья отбрасываются. Массы заменяют приведенным моментом инерции, силы заменяют произведённой силой $P_{\text{пр.}}$, или приведенным моментом сил (сопротивления или движущих).

Приведение сил основано на принципе возможных перемещений, т.е. работа приведенной силы равна алгебраической сумме работ всех заменяемых элементарных сил на их элементарном перемещении (рис. 3.2).

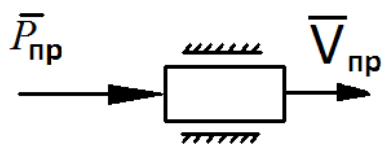


Рис. 3.2

Вместо уравнения работ напомним уравнение мощности.

$$N_{\text{пр.}} = \sum N_i, \quad (3.1)$$

где $N_{\text{пр.}}$ - мощность, развиваемая приведенной силой.

N_i - мощности, развиваемые силами, приложенными к звену i и подлежащими приведению.

Мощность $N_{\text{пр.}}$ может быть представлена в виде:

$$N_{\text{пр.}} = V_{\text{пр.}} \cdot P_{\text{пр.}},$$

где $V_{\text{пр.}}$ - скорость точки приведения.

Но в то же время мощность $N_{\text{пр.}}$

$$N_{\text{пр.}} = M_{\text{пр.}} \cdot \omega_{\text{пр.}},$$

где $\omega_{\text{пр.}}$ - угловая скорость звена приведения (рис. 3.3).

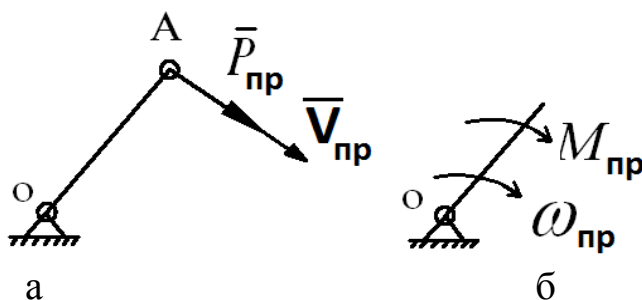


Рис. 3.3

В общем виде можно записать:

$$\sum N_i = \sum P_i \cdot V_i \cdot \cos \alpha_i + \sum M_j \cdot \omega_j;$$

Отсюда, так как $N_{\text{пр.}} = M_{\text{пр.}} \cdot \omega_{\text{пр.}}$, получаем:

$$M_{\text{пр.}} = \frac{1}{\omega_{\text{пр.}}} \cdot (\sum P_i \cdot V_i \cdot \cos \alpha_i + \sum M_j \cdot \omega_j); \quad (3.2)$$

а также:

$$P_{пр.} = \frac{1}{V_{пр.}} \cdot (\sum P_i \cdot V_i \cdot \cos \alpha_i + \sum M_j \cdot \omega_j); \quad (3.3)$$

Выводы:

1). Приведенные сила и момент зависят от приводимых сил и приводимых моментов.

Приведенная сила и приведенный момент зависят от положения механизма (рис. 3.4):

$$M_{пр.} = f(\varphi); P_{пр.} = f(S);$$

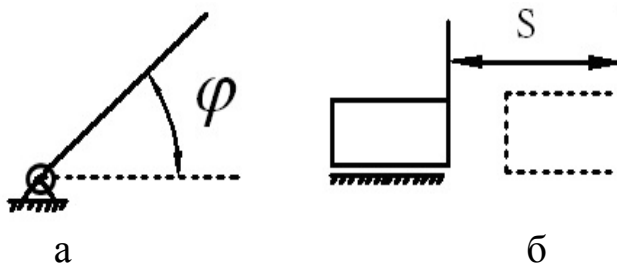


Рис. 3.4

но они не зависят от величины скоростей.

2). Указанным путем можно найти приведенную силу от сил трения, от сил движущих независимо, точно так же можно найти и приведенный момент.

Пример аналитического определения приведенной силы или приведенного момента

Приведенная мощность

$$N_{пр.} = N_i; \text{ или} \\ N_{пр.} = M_{пр.} \cdot \omega; \quad (3.4)$$

НО

$$N_i = P \cdot V_B. \quad (3.5)$$

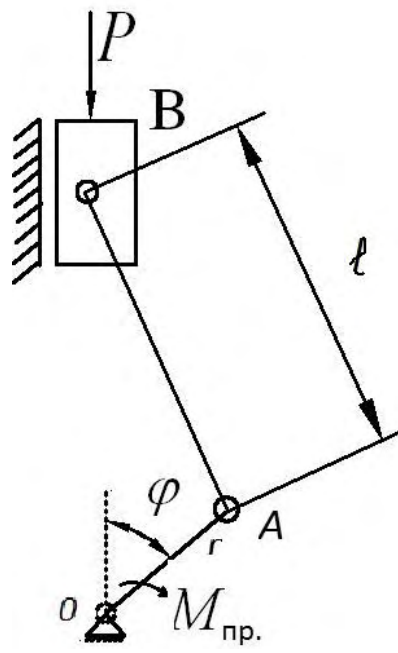


Рис. 3.5

Скорость точки B (рис. 3.5), как известно из курса аналитического метода кинематического анализа, определяется, по формуле:

$$V_B = -r\omega \cdot \left(\sin \varphi + \frac{\lambda}{2} \sin 2\varphi \right), \text{ где: } \lambda = \frac{r}{l}.$$

Приравняв уравнения 3.4 и 3.5, получаем:

$$M_{\text{пр.}} \cdot \omega = -P r \omega \cdot \left(\sin \varphi + \frac{\lambda}{2} \sin 2\varphi \right);$$

Произведя необходимые сокращения, окончательно получаем приведенный момент:

$$M_{\text{пр.}} = -P r \cdot \left(\sin \varphi + \frac{\lambda}{2} \sin 2\varphi \right).$$

Метод Жуковского для определения приведенных сил

Пусть к системе приложены силы $F_1, F_2 \dots F_n$.

Обозначим проекции возможных перемещений на направление действия силы через ∂S_i .

Тогда, согласно принципу возможных перемещений,

$$F_{\text{пр.}} \cdot \partial S_{\text{пр.}} = \sum F_i \partial S_i,$$

где ∂S_i - проекция элементарного перемещения на направление действия силы.

Но в то же время:

$$\begin{aligned} \partial S_i &= V_i \cdot \cos \alpha_i \cdot \partial t = h_i \cdot \partial t; \\ V_i \cdot \cos \alpha_i &= h_i, \end{aligned}$$

где h_i - плечо в плане скоростей.

$$\begin{aligned} \partial S_{\text{пр.}} &= V_{\text{пр.}} \cdot \cos \alpha_{\text{пр.}} \cdot \partial t = h_{\text{пр.}} \cdot \partial t; \\ V_{\text{пр.}} \cdot \cos \alpha_{\text{пр.}} &= h_{\text{пр.}}. \end{aligned}$$

Приравнивая эти выражения, получаем:

$$P_{\text{пр.}} \cdot h_{\text{пр.}} \cdot \partial t = \sum P_i \cdot h_i \cdot \partial t,$$

откуда

$$P_{\text{пр.}} = \frac{1}{h_{\text{пр.}}} \cdot (\sum P_i \cdot h_i) - \text{формула Жуковского}$$

Рассмотрим следующее звено (рис. 3.6); считаем, что скорости точек A и B нам известны, на звено действует сила P_i .

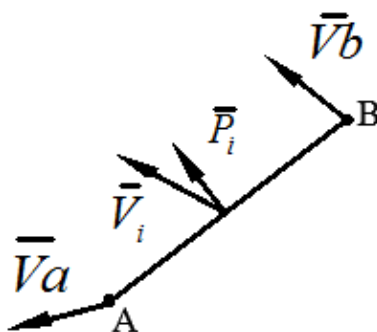


Рис. 3.6

Для определения V_i – скорости точки приложения силы P_i - нужно построить план скоростей.

Скорость V_i можно также определить с помощью мгновенного центра скоростей. Но мы построим план скоростей (рис. 3.7).

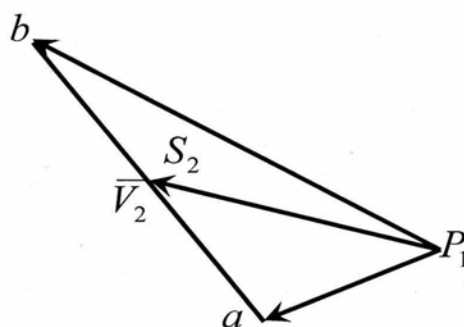


Рис. 3.7

Повернем план скоростей на 90° по часовой стрелке, получим:

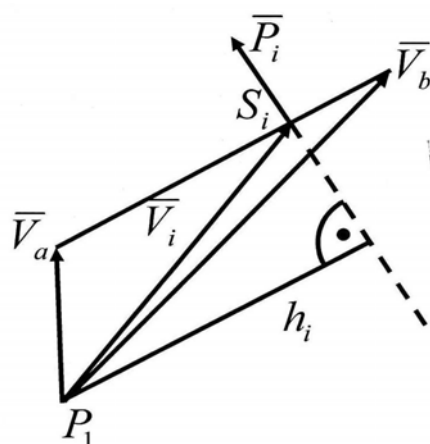


Рис. 3.8

Переносим силу P_i со звена в точку S_2 повернутого плана скоростей, продолжаем линию действия силы P_i , из центра плана скоростей опускаем перпендикуляр на линию действия. Этот перпендикуляр и будет плечом силы P_i .

Пример:

Дана схема механизма (рис. 3.9). Требуется определить приведенную силу по методу Жуковского.

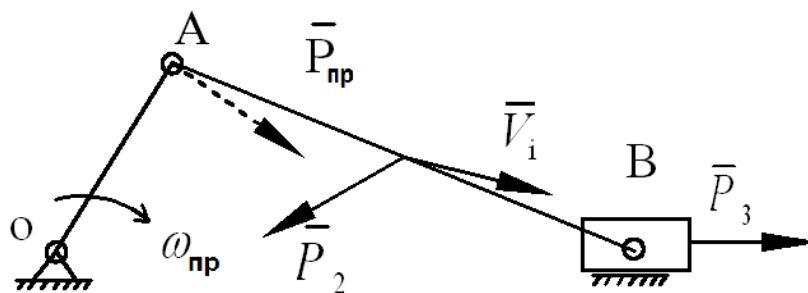


Рис. 3.9

Строим план скоростей (рис. 3.10).

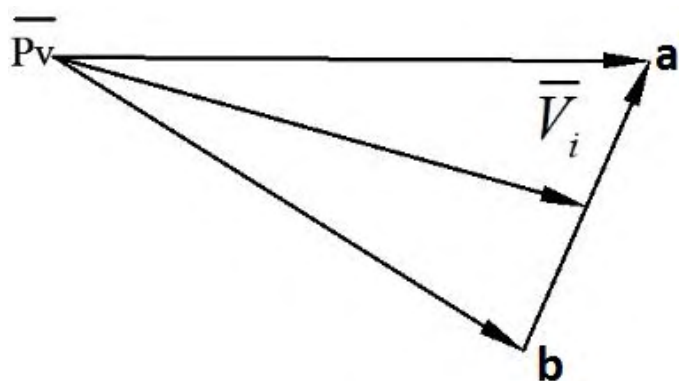


Рис. 3.10

Поворачиваем план скоростей и переносим заданные силы со схемы в соответствующие точки повернутого плана, определяем плечи соответствующих сил (рис. 3.11).

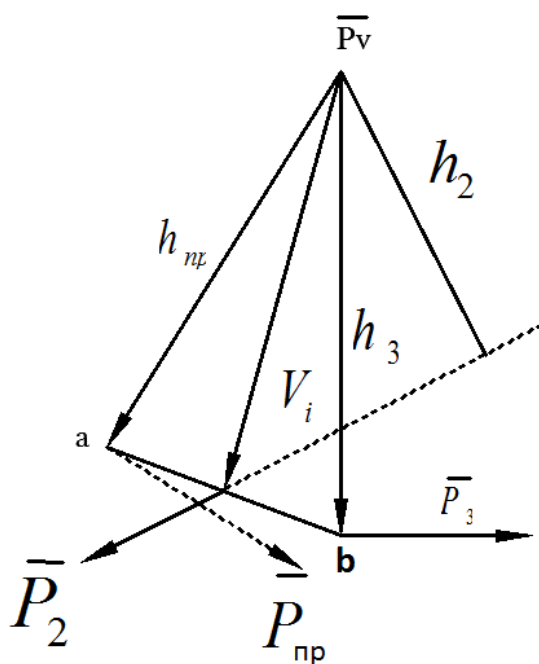


Рис. 3.11

Приведенная сила по формуле Жуковского

$$P_{пр.} = P_3 \cdot \frac{h_3}{h_{пр.}} - P_2 \cdot \frac{h_2}{h_{пр.}}$$

Приведение масс и моментов инерции

Приведение масс основано на равенстве энергии, а именно на равенстве кинетической энергии звена приведения и сумме кинетических энергий приводимых масс.

Кинетическая энергия звена приведения должна быть равна сумме кинетических энергий всех приводимых масс.

$$E_{\text{пр.}} = \sum E_i,$$

где E - кинетическая энергия.

Если масса приводится к вращательному звену, то кинетическая энергия

$$E_{\text{пр.}} = \frac{1}{2} Y_{\text{пр.}} \cdot \omega_{\text{пр.}}^2 \quad (\text{рис. 3.12}),$$

где $Y_{\text{пр.}}$ - приведенный момент инерции;



Рис. 3.12

если масса приводится к поступательному звену, то $E_{\text{пр.}} = \frac{1}{2} m_{\text{пр.}} \cdot V_{\text{пр.}}^2$ (рис. 3.13).

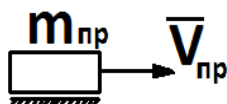


Рис. 3.13

Так как в механизме могут содержаться любые звенья, то сумма кинетической энергии проводимых масс запишется в виде:

$$\sum E_i = \sum \frac{1}{2} Y_i \cdot \omega_i^2 + \sum m_j \cdot V_j^2 + \sum \left(\frac{1}{2} m_k V_k^2 + \frac{1}{2} Y_k \cdot \omega_k^2 \right).$$

Из этой формулы определяем приведенный момент инерции:

$$Y_{\text{пр.}} = \frac{1}{\omega_{\text{пр.}}^2} \left[\sum Y_i \omega_i^2 + \sum m_j V_j^2 + \sum \left(Y_k \omega_k^2 + m_k V_k^2 \right) \right];$$

приведенную массу:

$$m_{\text{пр.}} = \frac{1}{V_{\text{пр.}}^2} \left[\sum Y_i \omega_i^2 + \sum m_j V_j^2 + \sum \left(m_k V_k^2 + Y_k \omega_k^2 \right) \right].$$

Вывод. Приведенный момент инерции $Y_{пр.}$ (или приведенная масса $m_{пр.}$) зависит от моментов инерции звеньев, положения механизма; т.е. приведенный момент инерции $Y_{пр.} = f(\varphi)$, $m_{пр.} = f(S)$.

Рис. 3.14

Приведенный момент инерции (рис. 3.14) – это момент инерции такой фиктивной массы на звене приведения, кинетическая энергия которой равна сумме кинетических энергий заменяемых масс.

Пример приведения масс

Дано: m_3 ; Y_1 ; $Y_2 \approx 0$.
 определить: $Y_{пр.} = ?$
 (рис. 3.15)

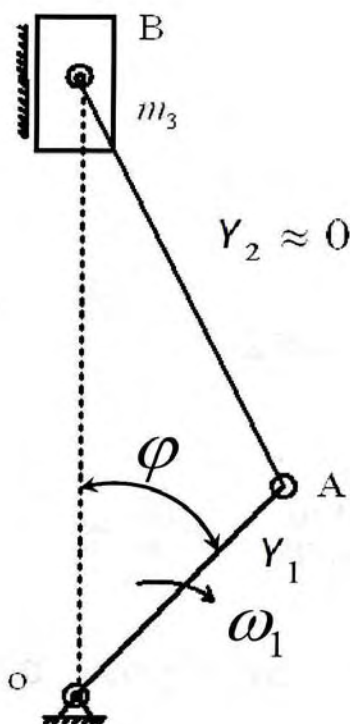


Рис. 3.15

Кинетическая энергия звена приведения должна быть равна сумме кинетических энергий:

$$\frac{1}{2} Y_{\text{пр.}} \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} Y_1 \cdot \omega^2 + \frac{1}{2} m_3 \cdot V_B^2;$$

но скорость точки определяется по формуле:

$$V_B = -r \cdot \omega \cdot \left(\sin \varphi + \frac{\lambda}{2} \sin 2\varphi \right).$$

Подставляем V_B в приведённое выше уравнение, сокращая на необходимые величины, получаем

$$Y_{\text{пр.}} = Y_1 + m_3 \cdot r^2 \left(\sin \varphi + \frac{\lambda}{2} \sin 2\varphi \right)^2.$$

Построим график зависимости $Y_{\text{пр.}}$ от угла φ (рис. 3.16).

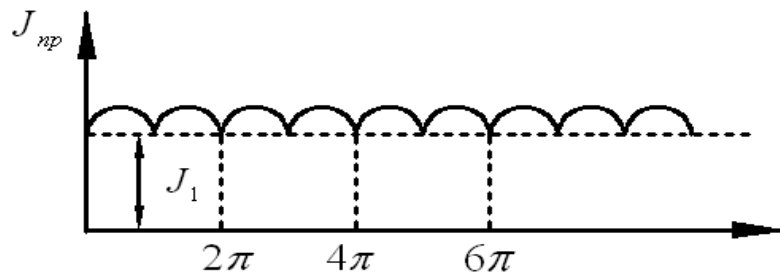


Рис. 3.16

Этот график легко проанализировать по приведённому выше уравнению.

Пример графического определения приведенного момента инерции
(графоаналитический расчет)

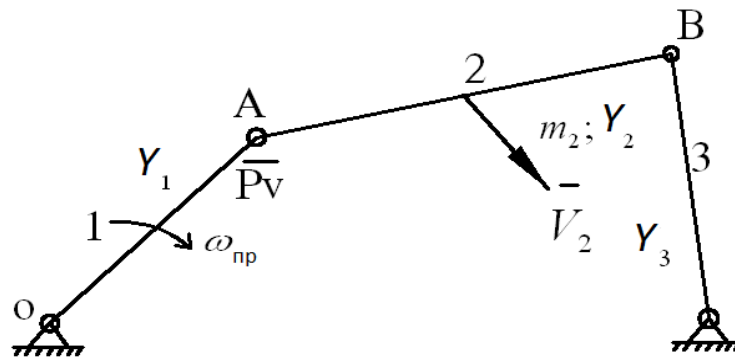


Рис. 3.17

Дано:

Схема механизма (рис. 3.17), m_i ; Y_i ,

Кинетическая энергия звена приведения

$$\frac{Y_{\text{пр.}} \cdot \omega_1^2}{2} = \frac{1}{2} Y_1 \cdot \omega_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot V_2^2 + \frac{1}{2} Y_2 \cdot \omega_2^2 + \frac{1}{2} Y_3 \cdot \omega_3^2 + \frac{1}{2} m_3 \cdot V_3^2 ;$$

Все уравнение разделим на ω_1^2 , получим:

$$Y_{\text{пр.}} = Y_1 + m_2 \frac{V_2^2}{\omega_1^2} + Y_2 \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} + Y_3 \frac{\omega_3^2}{\omega_1^2} + m_3 \frac{V_3^2}{\omega_1^2} ;$$

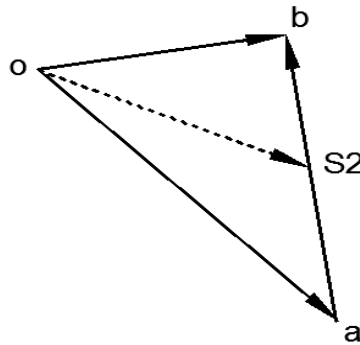


Рис. 3.18

Для того чтобы определить угловые скорости, построим план скоростей (рис. 3.18).

Из плана скоростей определяем ω :

$$\omega_2 = \frac{ab \cdot k_V}{l_{AB}} ;$$
$$\omega_1 = \frac{Oa \cdot k_V}{l_{OA}} ,$$

где k_V - масштаб скорости.

А затем определим $Y_{\text{пр.}}$ – приведенный момент инерции.

Лекция № 4

Исследование установившегося периодического движения для расчета маховых масс

Понятие о неравномерности хода машин

Напишем изменение кинетической энергии для какого-либо механизма:

$$E_2 - E_1 = A_{с.д.} - A_{с.в.} - A_{с.п.} \pm A_{с.т.},$$

где: $A_{с.д.}$ – работа сил движущих;

$A_{с.в.}$ – работа сил сопротивления вредных;

$A_{с.п.}$ – работа сил сопротивления полезных;

$A_{с.т.}$ – работа сил тяжести.

Изменение кинетической энергии механизма за интервал времени равно алгебраической сумме работ всех действующих сил на соответствующем перемещении.

Сумма работ сил сопротивления полезных и сил сопротивления вредных равна работе сил сопротивления:

$$A_{с.п.} + A_{с.в.} = A_{с.с.}$$

Тогда можно записать:

$$E_2 - E_1 = A_{с.д.} - A_{с.с.} \pm A_{с.т.}$$

Любой механизм имеет установившийся режим движения. Установившееся движение может быть:

- 1) равномерным;
- 2) периодическим.

Режим равномерного установившегося движения обычно бывает у машин роторного типа.

Режим периодического установившегося движения бывает у машин, имеющих ползуны или шатуны.

При равномерном, установившемся движении за любой промежуток времени

$$E_2 - E_1 = 0, \text{ при этом } A_{с.т.} = 0;$$

следовательно:

$$A_{с.д.} = A_{с.п.} + A_{с.в.}$$

При периодическом установившемся движении только за определенный промежуток времени T : $E_2 - E_1 = 0$,

а внутри самого промежутка $E_2 - E_1 \neq 0$;

В конце периода при периодическом установившемся движении

$$A_{c,d.} = A_{c.п.} + A_{c.в.}$$

Графически изменение кинетической энергии механизма при установившемся движении изображено на рис. 4.1.

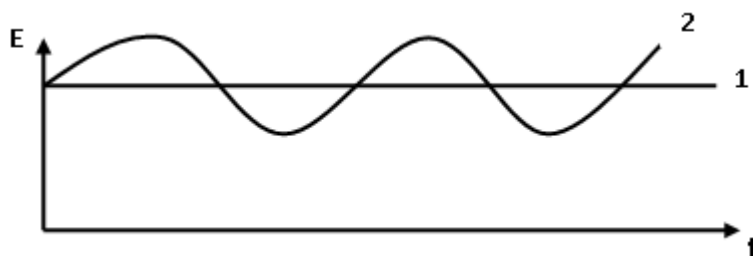


Рис. 4.1

1 — режим установившегося равномерного движения;

2 — режим установившегося периодического движения.

Изобразим изменение угловой скорости вала при установившемся периодическом движении (рис. 4.2).

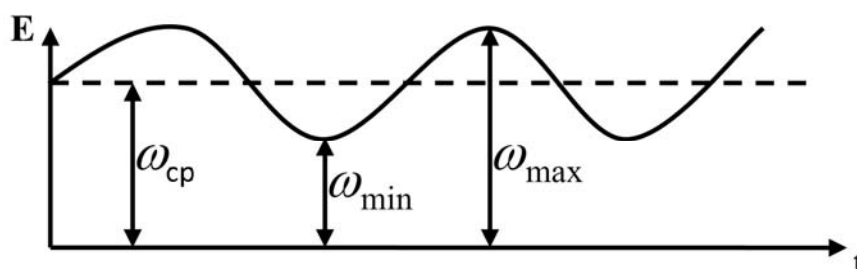


Рис. 4.2

ω_{\min} — минимальная угловая скорость вала;

ω_{\max} — максимальная угловая скорость;

$\omega_{\text{ср}}$ — средняя угловая скорость вала.

Из графика видно, что вал вращается с разной угловой скоростью, т.е. он вращается неравномерно.

Количественной оценкой колебания угловой скорости вала является коэффициент неравномерности вращения вала, обозначаемый через δ .

$$\delta = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_{\text{ср}}}$$

$$\omega_{\text{ср}} = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\delta}$$

Рассмотрим причины изменения угловой скорости в течение периода.

Дифференциальное уравнение движения звена приведения:

$$Y_{\text{пр}} \cdot \frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{dY_{\text{пр}}}{d\varphi} = \Delta M;$$

Посмотрим, почему $\frac{d\omega}{dt} \neq 0$;

Во-первых: $\Delta M = M_{\text{с.д.}} - M_{\text{с.с.}}$

Во-вторых: $Y_{\text{пр.}} = f(\varphi)$.

Пределы изменения коэффициента неравномерности

Произведение коэффициента неравномерности на среднюю угловую скорость равно разности между максимальной и минимальной угловой скоростью:

$$\delta \omega_{\text{ср.}} = \omega_{\max} - \omega_{\min};$$

Но в то же время:

$$2\omega_{\text{ср.}} = \omega_{\max} + \omega_{\min}.$$

Складывая и вычитая почленно эти выражения, получаем:

$$\begin{cases} \delta \omega_{\text{ср}} = \omega_{\max} - \omega_{\min} \\ 2\omega_{\text{ср}} = \omega_{\max} + \omega_{\min} \end{cases};$$

Складываем:

$$\omega_{\text{ср.}}(\delta + 2) = 2\omega_{\max};$$

$$\omega_{\max} = \omega_{\text{ср.}} \left(1 + \frac{\delta}{2}\right);$$

Вычитаем:

$$\omega_{\text{ср.}}(\delta - 2) = 2\omega_{\min};$$

$$\omega_{\min} = \omega_{\text{ср.}} \left(1 - \frac{\delta}{2}\right).$$

Из этих двух формул определяем коэффициент неравномерности: δ_{\min} и δ_{\max} .

При

$\delta_{\min} = 0$, $\omega_{\max} = \omega_{\min} = \omega_{\text{ср}}$ (рис. 4.3).

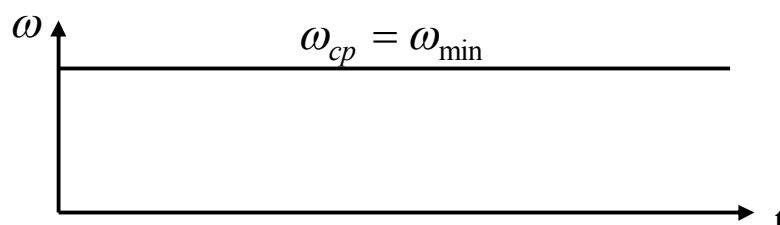


Рис. 4.3

$\delta_{\max} = 2$ (рис. 4.4).

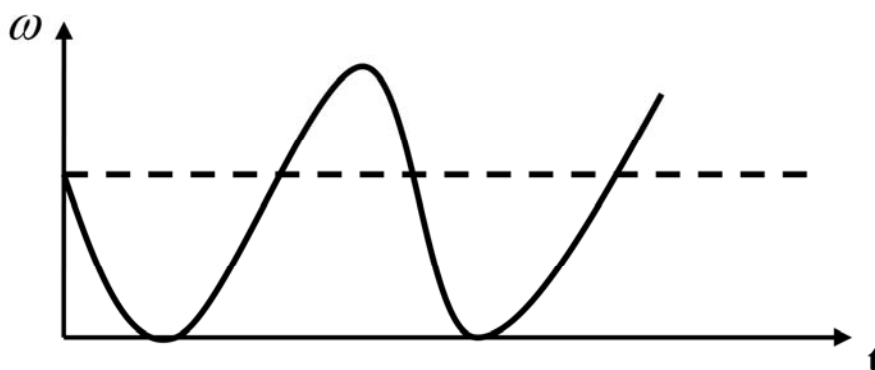


Рис. 4.4

$$\omega_{\min} = 0; 0 = \omega_{\text{ср}} \cdot \left(1 - \frac{\delta}{2}\right);$$

$$1 - \frac{\delta}{2} = 0, \text{ отсюда } \delta = 2;$$

Значит, пределы измерения коэффициента неравномерности теоретически:

$$0 \leq \delta \leq 2.$$

Практически:

$$\frac{1}{15} \div \frac{1}{20} = \delta \text{ – плохая машина;}$$

$$0,01 \div 0,02 = \delta \text{ – средняя машина;}$$

0,001 = δ – хорошая машина.

Понятие о маховике

Чтобы уменьшить коэффициент неравномерности δ , на звено привода ставят маховик. Маховиком называется масса, жестко связанная со звеном привода и предназначенная для обеспечения заданного достаточно малого коэффициента неравномерности.

Маховик является аккумулятором кинетической энергии. Масса маховика ограничивает колебания угловой скорости вала.

Последовательность расчета маховика

Построение кривых изменения приведенных моментов сил движущих и сил сопротивления

Рассмотрим схему механизма:

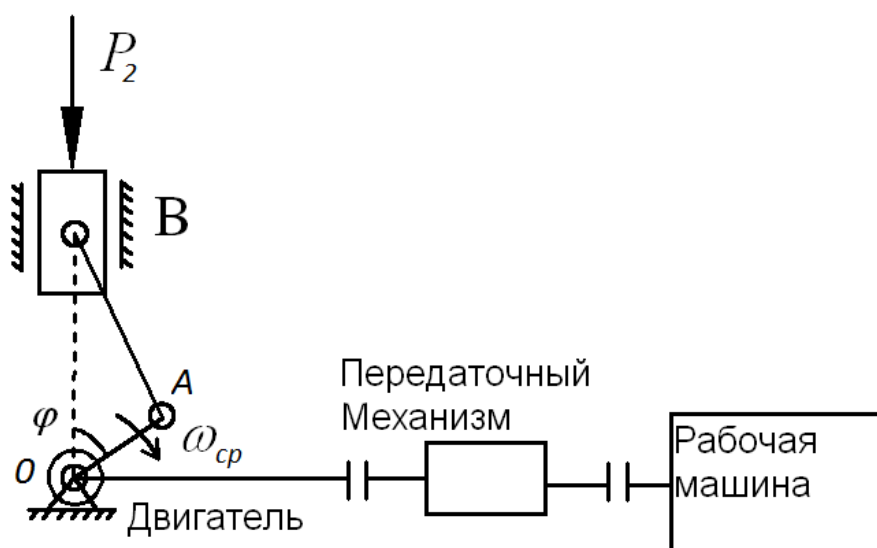


Рис. 4.5

Известны: $M_{пр.с.д.}$; $M_{пр.с.с.}$; $Y_{пр.}$; $\omega_{ср.}$; δ .

$$\delta = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_{ср}};$$

Требуется определить Y_M – момент инерции маховика, учитывая δ .

Этот механизм работает в режиме периодического установившегося движения, так как есть плоско - параллельное движение.

При построении кривых приведенных моментов сил движущих и сил сопротивления, т.е. $M_{пр.с.д.}$ и $M_{пр.с.с.}$ исходим из развернутой индикаторной диаграммы.

Будем считать, что двигатель двухтактный.

Построим диаграмму давления газа (рис. 4.6):

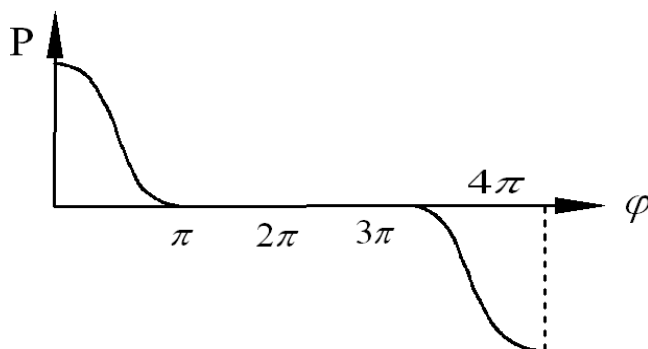


Рис. 4.6

Мощность приведенная от сил движущих $N_{пр.} = M_{пр.} \cdot \omega$,

или $M_{пр.с.д.} \cdot \omega = P_g \cdot V_B$,

где

P_g – давление газа;

V_B – скорость поршня;

$$V_B = -r \cdot \omega \cdot \left(\sin \varphi + \frac{\lambda}{2} \sin 2\varphi \right);$$

$$M_{пр.с.д.} \cdot \omega = P_g \cdot r \cdot \omega \cdot \left(\sin \varphi + \frac{\lambda}{2} \sin 2\varphi \right);$$

Окончательно получаем:

$$M_{пр.с.д.} = P_g \cdot r \cdot \left(\sin \varphi + \frac{\lambda}{2} \sin 2\varphi \right).$$

Изобразим графически приведенный момент сил движущих $M_{пр.с.д.}$ и момент приведенный сил сопротивления $M_{пр.с.с.}$ (рис. 4.7).

Считаем, что $M_{пр.с.с.} = \text{const}$.

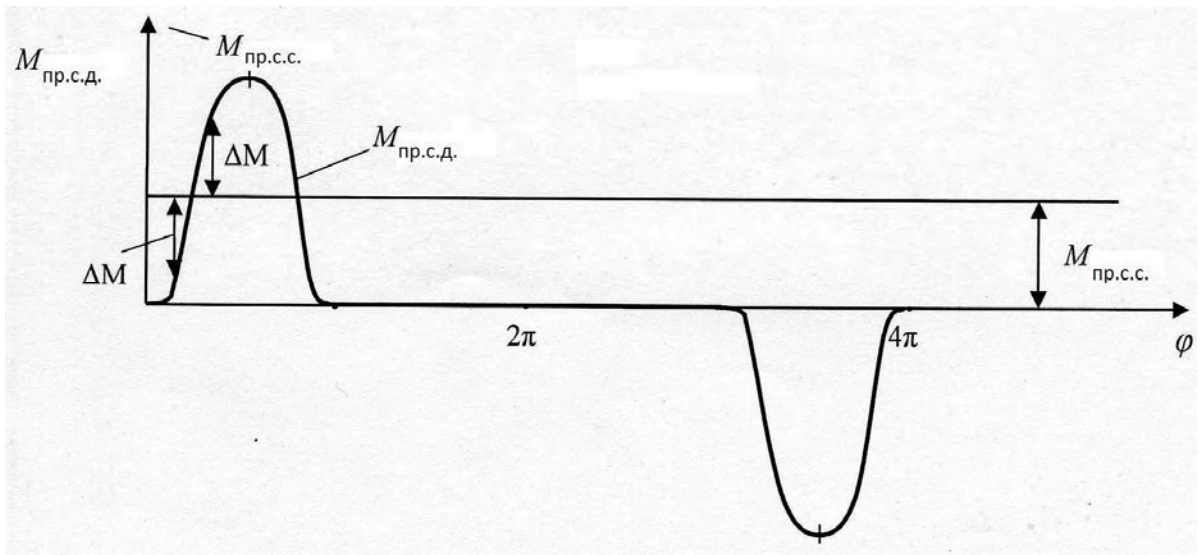


Рис. 4.7

Дифференциальное уравнение звена приведения имеет вид:

$$Y_{\text{пр}} \cdot \frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{dY_{\text{пр}}}{d\varphi} = \Delta M;$$

$$\Delta M = M_{\text{пр.с.д.}} - M_{\text{пр.с.с.}}$$

Пусть приведенный момент инерции $Y_{\text{пр}}$ будет постоянным, тогда (рис. 4.8):

$$Y_{\text{пр}} \cdot \frac{d\omega}{dt} = \Delta M.$$

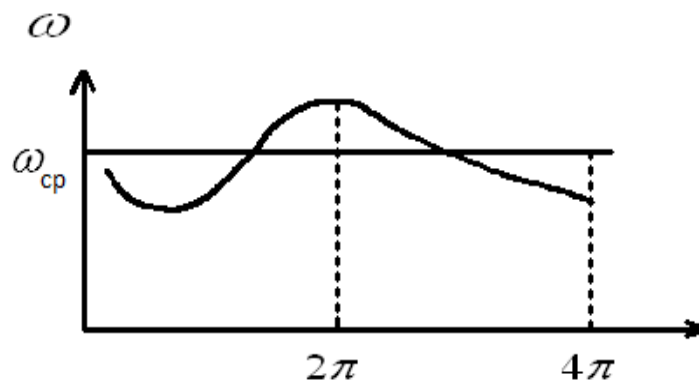


Рис. 4.8

Основные причины изменения угловой скорости в процессе периодического установившегося режима:

1. Несовпадение кривых $M_{\text{пр.с.д.}}$ и $M_{\text{пр.с.с.}}$
2. Переменность $Y_{\text{пр.}}$ – приведенного момента инерции.

Построение кривых изменения работы сил движущих и сил сопротивления

Работа сил движущих $A_{с.д.} = \int_0^{\varphi} M_{пр.с.д.} \cdot d\varphi$.

Работа сил сопротивления $A_{с.с.} = \int_0^{\varphi} M_{пр.с.с.} \cdot d\varphi$

Графически интегрируем и получаем (рис. 4.9):

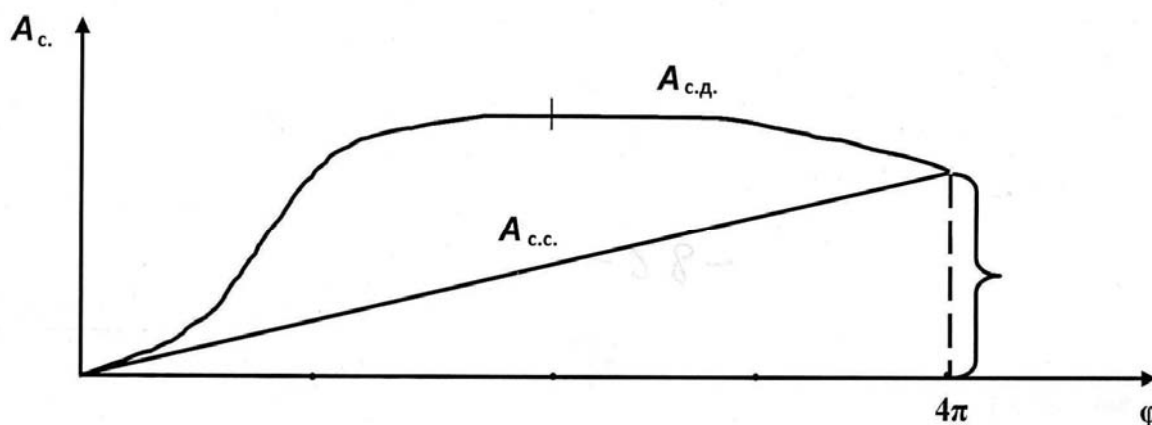


Рис. 4.9

За период $A_{с.д.} = A_{с.с.}$ — это условие установившегося периодического движения.

Обратным дифференцированием определяем величину ординаты на графике $M_{пр.с.с.}$.

Изменение энергии равно:

$$\Delta E = A_{с.д.} - A_{с.с.}$$

График изменения ΔE (рис. 4.10).

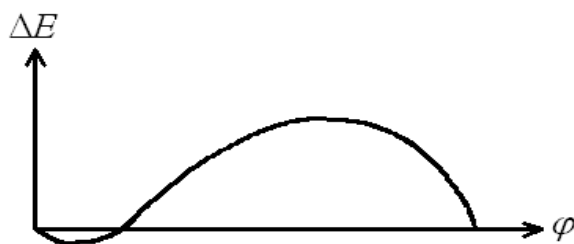


Рис. 4.10

Определение кинетической энергии изменения маховика (Метод Мерцалова-Рэриха)

Кинетическая энергия механизма без маховика:

$$E_{\text{мех}} = \frac{1}{2} Y_{\text{пр.}} \cdot \omega^2.$$

Кинетическая энергия маховика:

$$E_{\text{мах}} = \frac{1}{2} Y_M \cdot \omega^2.$$

Y_M – момент инерции маховика. Его требуется определить.

Суммарная кинетическая энергия:

$$E_{\Sigma} = E_{\text{мех}} + E_{\text{мах}}.$$

Изменение суммарной кинетической энергии:

$$\Delta E_{\Sigma} = \Delta E_{\text{мех}} - \Delta E_{\text{мах}}.$$

Изменение кинетической энергии маховика:

$$\Delta E_{\text{мах}} = \Delta E_{\Sigma} - \Delta E_{\text{мех}}.$$

Изменение суммарной кинетической энергии известно:

$$\Delta E_{\Sigma} = A_{\text{с.д.}} - A_{\text{с.с.}}$$

Изменение кинетической энергии механизма

$$\Delta E_{\text{мех}} = \frac{1}{2} Y_{\text{пр}}(\varphi) \cdot \omega^2 - \frac{1}{2} Y_{\text{пр}}(0) \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} [Y_{\text{пр}}(\varphi) - Y_{\text{пр}}(0)] \cdot \omega^2$$

Считаем, что $\omega \approx \text{const} = \omega_{\text{ср.}}$.

График приведённого момента инерции (рис. 4.11):



Рис. 4.11

График изменения кинетической энергии механизма (рис. 4.12):

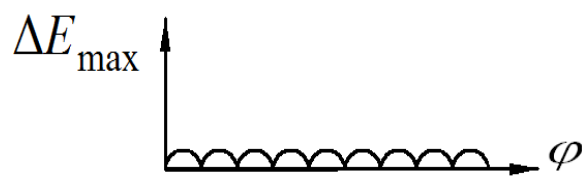


Рис. 4.12

График изменения суммарной кинетической энергии (рис. 4.13):

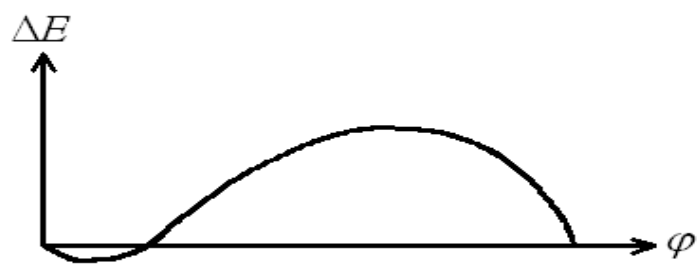


Рис. 4.13

График изменения кинетической энергии маховика (рис. 4.14).

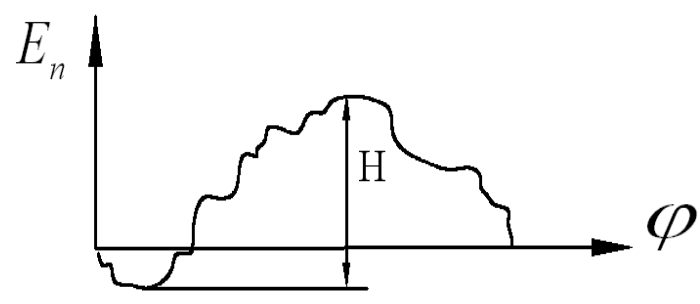


Рис. 4.14

Определение момента инерции маховика

Обозначим:

$$(\Delta E_{\max})_{\max} - (\Delta E_{\max})_{\min} = H \cdot k_E$$

k_E – масштаб.

$$H \cdot k_E = \frac{1}{2} \cdot Y_{\max} \cdot \omega_{\max}^2 - \frac{1}{2} \cdot Y_{\max} \cdot \omega_{\min}^2 = \frac{1}{2} \cdot Y_{\max} \cdot [\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2] = \frac{1}{2} \cdot Y_{\max} \cdot \left(\frac{\omega_{\max} + \omega_{\min}}{2} \cdot \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_{\text{cp}}} \right) \cdot \omega_{\text{cp}} \cdot 2 = Y_{\max} \cdot \delta \cdot \omega_{\text{cp}}^2.$$

$$H \cdot k_E = Y_M \cdot \delta \cdot \omega_{\text{cp}}^2.$$

Отсюда:

$$Y_M = \frac{H \cdot k_E}{4 \cdot \omega_{\text{cp}}^2};$$

Но в то же время момент инерции маховика:

$$Y_M = \frac{G \cdot D^2}{4 \cdot q},$$

G – вес маховика;

D – диаметр маховика.

Лекция № 5

Построение действительной картины изменения угловой скорости $\omega = f(\varphi)$

Кинетическая энергия маховика (рис. 5.1):

$$E_M = \frac{1}{2} Y_M \cdot \omega^2;$$

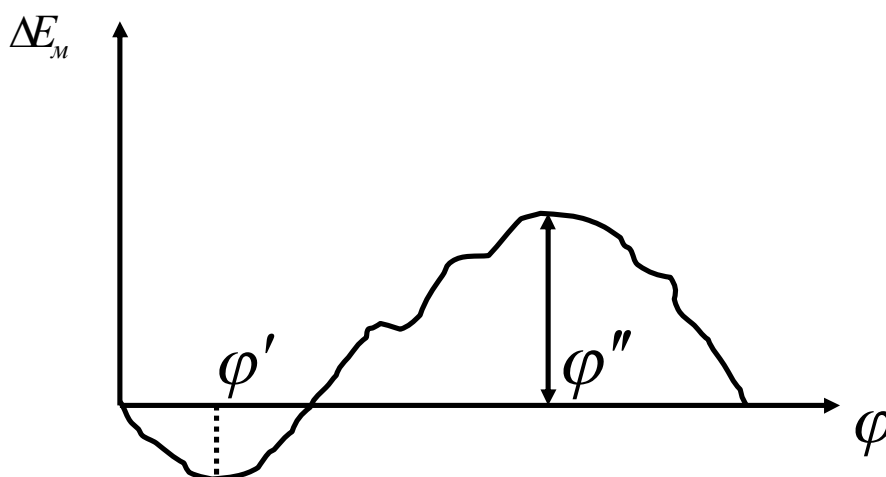


Рис. 5.1

При $\varphi' \rightarrow \omega = \omega_{\min}$.

При $\varphi'' \rightarrow \omega = \omega_{\max}$.

Обычно $\omega_{\text{ср}}$ и δ известны, тогда:

$$\omega_{\min} = \omega_{\text{ср}} \left(1 - \frac{\delta}{2}\right);$$

$$\omega_{\max} = \omega_{\text{ср}} \left(1 + \frac{\delta}{2}\right);$$

Изменение кинетической энергии машины с маховиком от положения φ' до положения φ_i (рис. 5.2):

$$\frac{1}{2} [Y_{\text{пр}}(\varphi_i) + Y_M] \omega_i^2 - \frac{1}{2} [Y_{\text{пр}}(\varphi') + Y_M] \omega_{\min}^2 = \Delta E_{\Sigma}(\varphi_i) - \Delta E_{\Sigma}(\varphi');$$

φ_i – текущее значение или заданное

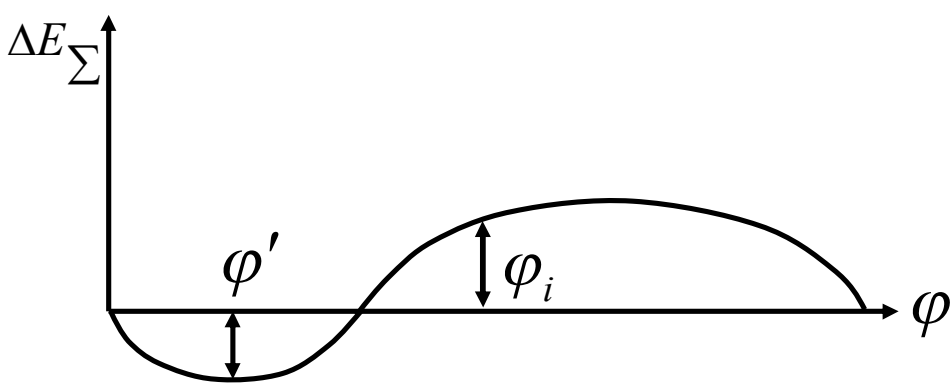


Рис. 5.2

Из последней формулы определим угловую скорость в “i” положении:

$$\omega_i = \sqrt{\frac{2[\Delta E_{\Sigma}(\varphi_i) - \Delta E_{\Sigma}(\varphi') + [Y_{пр}(\varphi') + Y_M]]}{Y_{пр}(\varphi_i) + Y_M}}$$

Так можно для каждого положения определить угловую скорость. А затем построить график (рис. 5.3).

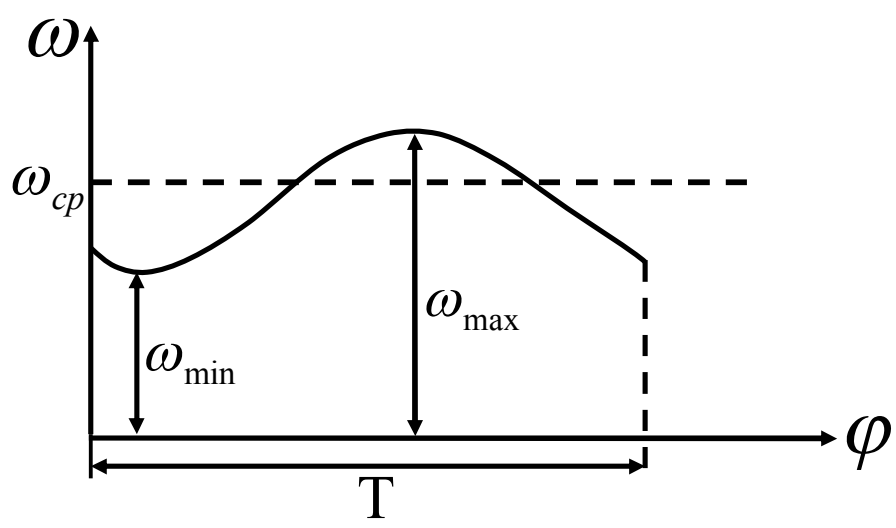


Рис. 5.3

Момент инерции маховика вычисляется по формуле:

$$Y_M = \frac{H \cdot K_e}{4 \cdot \omega_{\text{ср}}^2},$$

Если расчетный момент инерции маховика Y_M равен 0, то это значит, что коэффициент неравномерности машины без маховика равен коэффициенту неравномерности, который мы рассчитываем.

Если $Y_M \neq 0$, то это значит, что $\delta < \delta$ заданного. В этих двух случаях маховики не нужны.

Уравновешивание механизмов

Понятие об уравновешивании механизмов

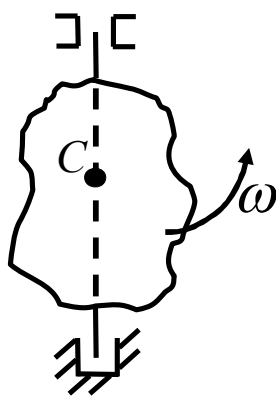


Рис. 5.4

Звенья механизмов перемещаются с переменными по величине и направлению ускорениями. Вследствие этого возникают переменные по величине и направлению дополнительные динамические давления в кинематических парах.

Таким образом, движущие массы имеют неуравновешенные силы инерции. Для того, чтобы их уничтожить, нужно определить противовесы.

Рассмотрим такое вращающееся тело C – центр масс, от линии на оси вращения
Из курса теоретической механики известно, что

если

$$\begin{cases} \bar{P}_и = 0 \\ \bar{M}_и = 0 \end{cases},$$

то это будет динамическое условие уравновешивания.

$\bar{P}_и$ – главный вектор сил инерции;

$\bar{M}_и$ – главный момент сил инерции.

Теперь рассмотрим ротор, приведённый на рис. 5.5:

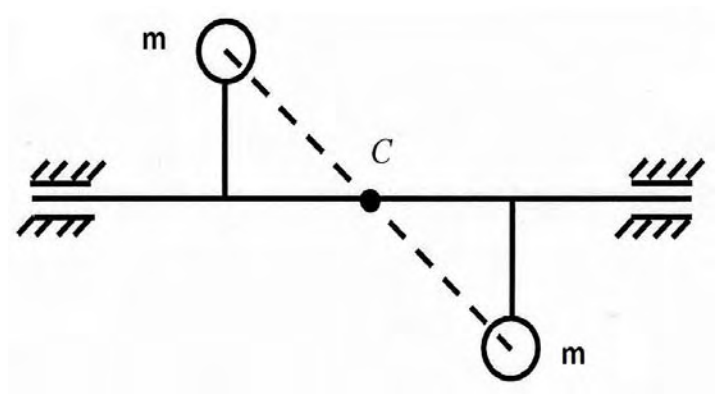


Рис. 5.5

Если такой ротор раскрутить, то будет происходить биение в подшипниках, так как динамически он не уравновешен.

**Метод разноса масс
(Метод замещающих масс)**

Этот метод состоит в том, что масса разносится в две плоскости или точки.
Рассмотрим стержень, масса которого сосредоточена в центре стержня (рис. 5.6).

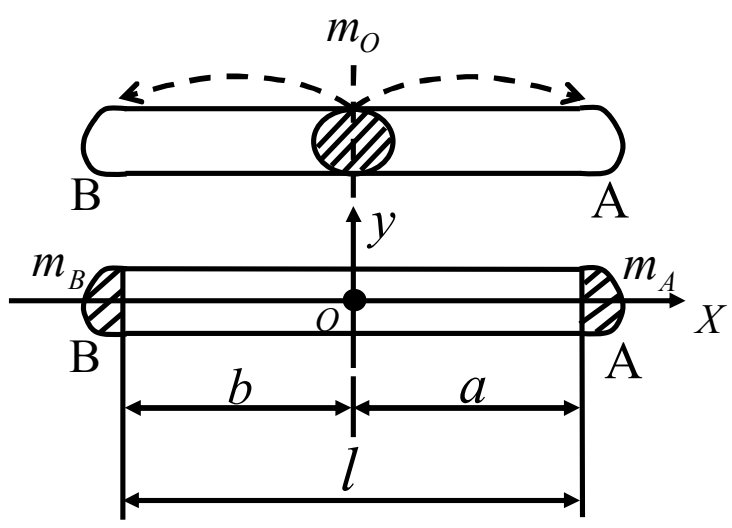


Рис. 5.6

Теперь разнесем массу в две точки: $(\cdot) A$ и $(\cdot) B$.
Обозначим массу в точке A через m_A , а в точке B - через m_B .
Расстояние между точками - через l ; а от центра вращения O – через b и a .

Начнем вращать стержень вокруг оси x , а затем вокруг оси y . Определим зависимость между разнесенной массой и первоначальной массой. Статический момент инерции стержня относительно оси x :

$$m_o y_o = \sum m_i y_i;$$

Статический момент инерции стержня относительно оси y :

$$m_o x_o = \sum m_i x_i;$$

m_o – первоначальная масса.

В нашем случае: $y_o = 0$; $y_i = 0$;

Тогда

$$0 = m_A \cdot 0 + m_B \cdot 0;$$

$$0 = m_A \cdot a - m_B \cdot b;$$

Но так как

$$m_o = m_A + m_B,$$

то

$$m_B = m_o + m_A.$$

Подставляя полученное выражение во второе уравнение, получаем:

$$m_A \cdot a - (m_o - m_A) \cdot b = 0;$$

$$m_A \cdot (a + b) = m_o \cdot b;$$

Отсюда:

$$m_A = m_o \cdot \frac{b}{\ell}; \ell = a + b;$$

Точно так же определяем и m_B :

$$m_B = m_o \cdot \frac{a}{\ell}.$$

Разнос масс можно сделать и экспериментально. Для этого нужно взвесить требуемую деталь, как показано на рис. 5.7. Сначала взвешивается один конец детали, а затем другой.

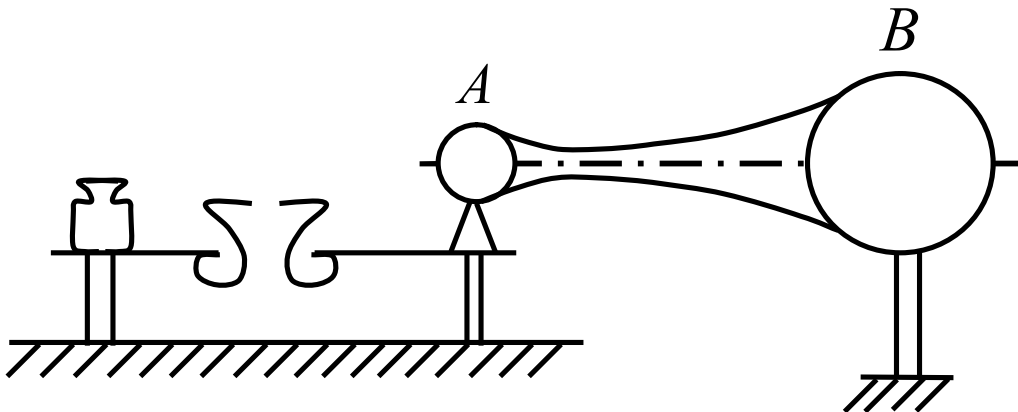


Рис. 5.7

Уравновешивание плоского ротора

Плоский ротор - это такой ротор, который находится только в одной плоскости.

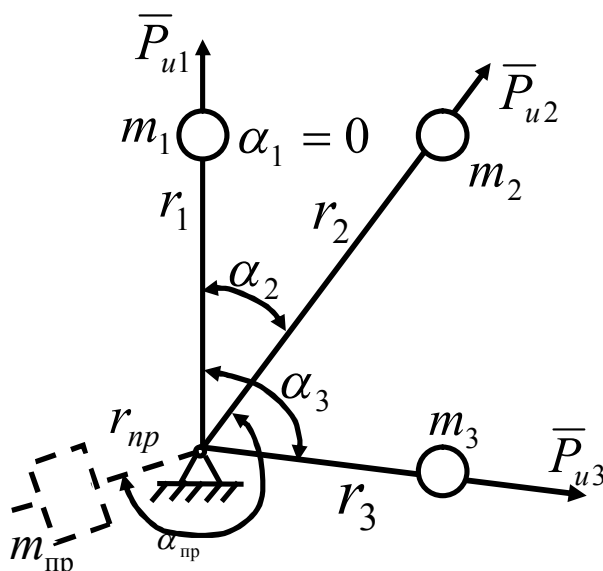


Рис. 5.8

Дано: все силы инерции; т.е. $\bar{P}_{ui} = \bar{m}_i \cdot \bar{r}_i \cdot \bar{\omega}^2$.

Требуется определить: параметры противовеса

$m_{пр}$ – масса противовеса;

$r_{пр}$ – расстояние до противовеса;

$\alpha_{пр}$ – угол противовеса.

Векторная сумма всех сил инерции должна быть равна 0.

$$\sum \bar{m}_i \cdot \bar{r}_i \cdot \bar{\omega}^2 + \bar{m}_{пр} \cdot \bar{r}_{пр} \cdot \bar{\omega}^2 = 0;$$

Отсюда:

$$\sum \bar{m}_i \cdot \bar{r}_i + \bar{m}_{пр} \cdot \bar{r}_{пр} = 0.$$

Это условие уравновешивания.

Для плоского ротора один противовес обеспечивает полное динамическое уравновешивание.

Для определения $\bar{m}_{пр} \cdot \bar{r}_{пр}$ строим векторную диаграмму.

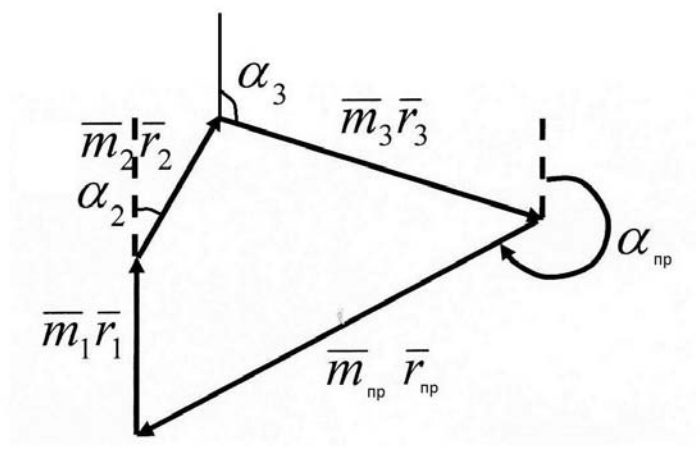


Рис. 5.9

Если $|\bar{m}_{пр} \cdot \bar{r}_{пр}| = 0$ и если $\bar{r}_{пр}$ нам задан, то масса противовеса

$$m_{пр} = \frac{C}{r_{пр}}$$

Угол $\alpha_{пр}$ определяется из векторной диаграммы.

Уравновешивание пространственного ротора с точечными массами

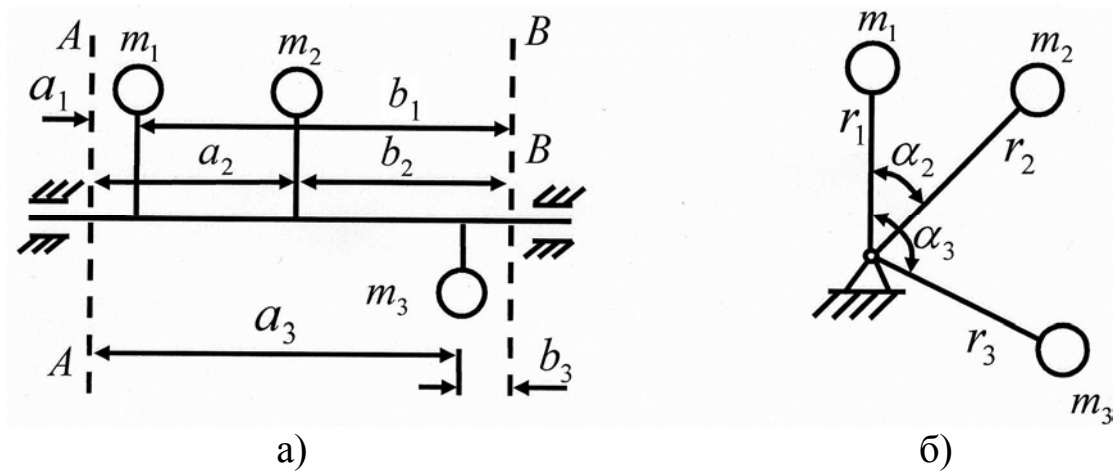


Рис. 5.10

Требуется произвести уравновешивание пространственного ротора.

A и B – плоскости, в которых устанавливаются противовесы. Требуется найти параметры противовесов.

Для этого произведем разнос масс в плоскостях A и B , при этом получим плоские роторы.

$$a_i + b_i = \ell;$$

По методу разноса масс определяем - какая часть от каждой точечной массы a окажется в плоскости A и b в плоскости B .

Для I-й точечной массы:

$$m_{1_A} = m_1 \frac{b_1}{\ell};$$

$$m_{1_B} = m_1 \frac{a_1}{\ell};$$

для II-й точечной массы:

$$m_{2_A} = m_2 \frac{b_2}{\ell};$$

$$m_{2_B} = m_2 - \frac{a_2}{\ell};$$

для III-й точечной массы:

$$m_{3_A} = m_3 - \frac{b_3}{\ell};$$

$$m_{3_B} = m_3 - \frac{a_3}{\ell}.$$

Рассмотрим плоскость A .

Условие уравнивания в плоскости A .

$$\sum \bar{m}_i \cdot \frac{b_i}{\ell} \cdot \bar{r}_i + \bar{m}_{\text{пр}} \cdot \bar{r}_{\text{пр}} = 0;$$

r_i – расстояние от центра вращения до центра соответствующей массы.

Для определения параметров противовеса в плоскости построим векторную диаграмму:

Радиусом противовеса $r_{\text{пр}}$ задается:

$$|\bar{m}_{\text{пр}} \cdot \bar{r}_{\text{пр}}| = C_1;$$

Тогда масса противовеса $m_{\text{пр}} = \frac{C}{r_{\text{пр}}}$:

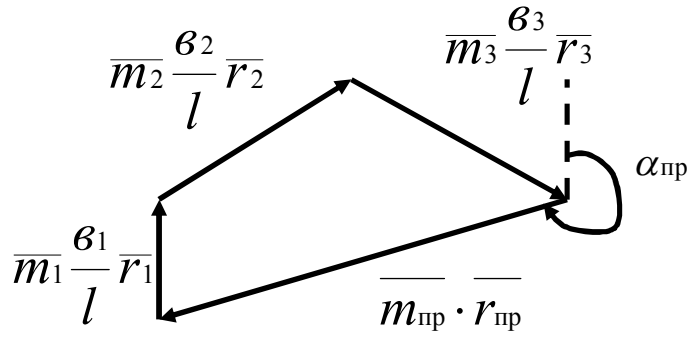


Рис. 5.11

Угол $\alpha_{\text{пр}}$ определяем из векторной диаграммы.

Теперь рассмотрим плоскость B .

Последовательность расчета точно такая же, как и в плоскости A .

Условие уравнивания в плоскости B :

для определения параметров противовеса строим векторную диаграмму. Радиус $r_{\text{пр}}$ задан.

$$|\bar{m}_{\text{пр}} \cdot \bar{r}_{\text{пр}}| = C_2.$$

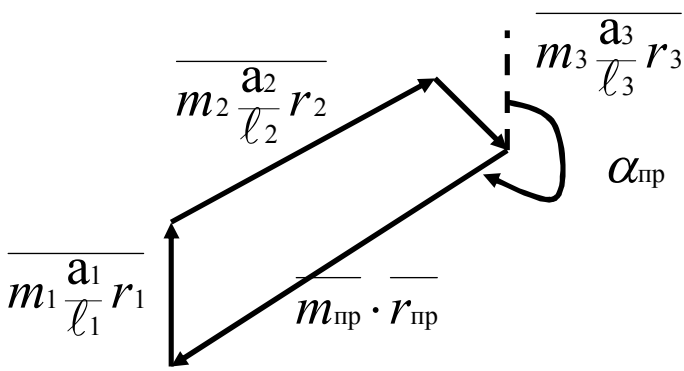


Рис. 5.12

Масса противовеса:

$$m_{\text{пр}} = \frac{C_2}{r_{\text{пр}}},$$

$\alpha_{\text{пр}}$ – угол определяем из векторной диаграммы.

Пространственный ротор уравнивается двумя противовесами в разных плоскостях.

Уравновешивание механизмов

Уравновешенность силы инерции отдельных звеньев механизма, совершающих поступательное или плоско-параллельное движение, распределением масс невозможно, так как центры тяжести этих звеньев всегда имеют ускорение. Чтобы ликвидировать или уменьшить динамическое давление на опоры, проводят полное или частичное уравновешивание механизма.

Полное уравновешивание плоского механизма осуществляется с помощью противовесов, которые подбираются и устанавливаются таким образом, чтобы сумма сил инерции всех звеньев и противовесов, а также сумма моментов этих сил относительно любой точки равнялись нулю.

На практике часто производят частичное уравновешивание, при котором сумма сил инерции равна нулю, а сумма моментов этих сил не равна нулю. Такое частичное уравновешивание поддерживается статическим. Для его выполнения достаточно, чтобы ускорение центра тяжести механизма равнялось нулю. Это возможно, если точка движется равномерно и прямолинейно и если точка неподвижна. Так как в любом механизме никакая точка не может длительно двигаться относительно стойки прямолинейно и равномерно, то центр тяжести механизма должен совпадать со стойкой, то есть быть неподвижным.

Одним из способов частичного уравновешивания является подбор механизмов с симметрично расположенными звеньями с равными массами, вследствие чего получается самоуравновешивание механизма в целом (рис. 5.13 а, б).

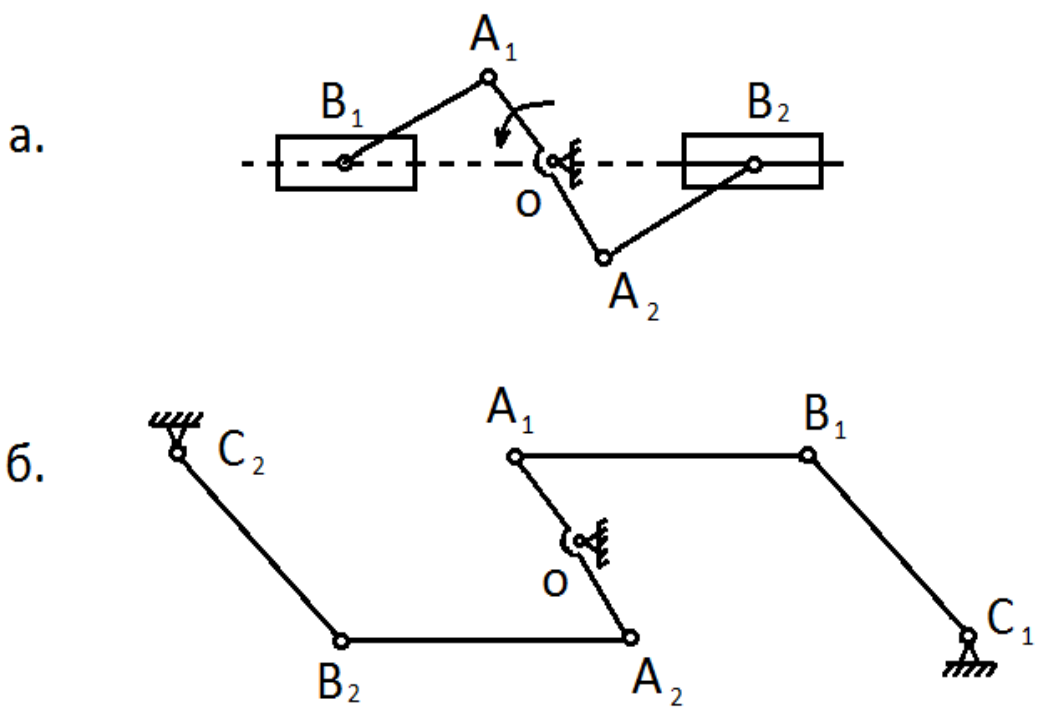


Рис. 5.13

В тех случаях, когда схема уравнивается с помощью симметричного расположения звеньев является громоздкой, применяется метод установки противовесов.

Рассмотрим механизм с поступательно движущимися звеньями (рис. 3.14). Массы его звеньев соответственно равны m_1, m_2, m_3 .

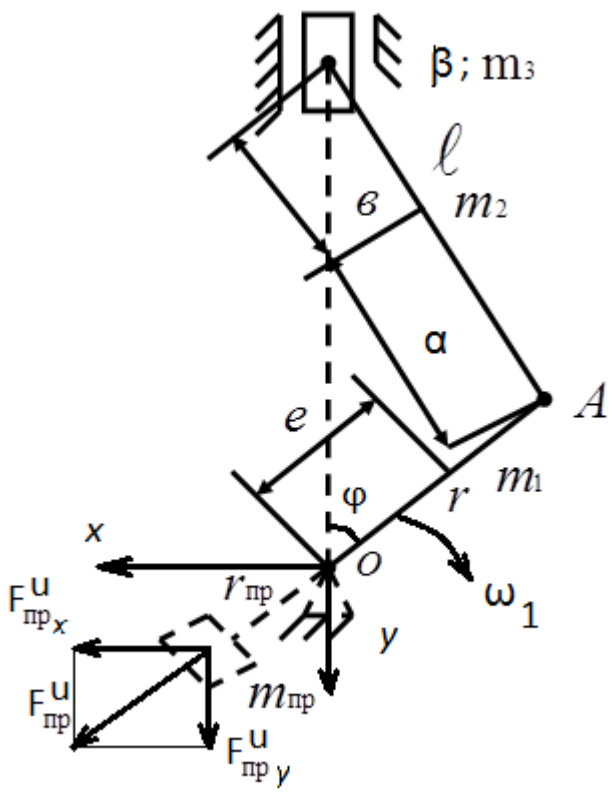


Рис. 5.14

Производим разнос масс.

Определяем, какие разнесенные массы окажутся в точках A и B.

$$m_{1A} = m_1 \cdot \frac{e}{r};$$

$$m_{2A} = m_2 \cdot \frac{b}{l};$$

$$m_{2B} = m_2 \cdot \frac{a}{l};$$

Общая масса в точке A:

$$m_A = m_{1A} + m_{2A};$$

Общая масса в точке B:

$$m_B = m_3 + m_{2B};$$

Произведем частичное уравновешивание точки A.

Условие уравновешивания для точки A:

$$m_A \cdot r = m_{пр} \cdot r_{гр}.$$

Задаемся радиусом противовеса и определяем массу противовеса.
 $r_{\text{пр}}$ – задаемся.

$$m_{\text{пр}} = \frac{m_A \cdot r}{r_{\text{пр}}};$$

Частичное уравнивание возвратно движущейся массы m_B .

Сила инерции точки B

$$P_{иB} = m_B \cdot W_B,$$

где W_B – ускорение точки B .

$$W_B = r \cdot \omega^2 \cdot [\cos \varphi + \lambda \cdot \cos 2\varphi], \quad \lambda = r/\ell;$$

$$\begin{aligned} \text{тогда сила инерции } P_{иB} &= m_B \cdot r \cdot \omega^2 \cdot [\cos \varphi + \lambda \cdot \cos 2\varphi] = \\ &= m_B \cdot r \cdot \omega^2 \cdot \cos \varphi + \lambda \cdot m_B \cdot r \cdot \omega^2 \cdot \cos 2\varphi. \end{aligned}$$

Сила инерции в точке B складывается из двух составляющих:

$$P_{иB} = P_{иI} + P_{иII}.$$

$$P_{иI} = m_B \cdot r \cdot \omega^2 \cdot \cos \varphi \text{ – первая гармоника.}$$

$$P_{иII} = \lambda \cdot m_B \cdot r \cdot \omega^2 \cdot \cos 2\varphi \text{ – вторая гармоника.}$$

Для уравнивания сил инерции первого порядка (первая гармоника) установим на продолжении кривошипа OA противовес массой $m_{\text{пр}}$. В противовесе будет развиваться сила инерции $F_{\text{пр}}^u = m_{\text{пр}} \cdot r_{\text{пр}} \cdot \omega_1^2$. Неуравнивание силы инерции поступательно движущихся масс направлено по оси механизма (в этом случае – вертикально).

Разложим силу инерции противовеса на две составляющие:

$$\vec{F}_{\text{пр}}^u = \vec{F}_{\text{пр}x}^u + \vec{F}_{\text{пр}y}^u,$$

$$F_{\text{пр}y}^u = m_{\text{пр}} \cdot r_{\text{пр}} \cdot \omega_1^2 \cdot \cos \varphi,$$

$$F_{\text{пр}x}^u = m_{\text{пр}} \cdot r_{\text{пр}} \cdot \omega_1^2 \cdot \sin \varphi.$$

Сила инерции первого порядка уравнивается вертикальной составляющей силы инерции противовеса.

$$m_{\text{пр}} \cdot r_{\text{пр}} \cdot \omega_1^2 \cos \varphi = m_B \cdot r \cdot \omega_1^2 \cos \varphi \text{ или } m_{\text{пр}} = \frac{m_B \cdot r}{r_{\text{пр}}}$$

Однако остаётся горизонтальная составляющая силы инерции противовеса.

Для полного уравнивания сил инерции первого порядка нужен ещё один противовес, посаженный на вал, вращающийся в противо-

ложную сторону первого противовеса. Масса этих двух противовесов должна быть вдвое меньше.

Сила инерции второго порядка (вторая гармоника) может быть уравновешена так же, как и сила инерции первого порядка. При этом валы, на которых крепятся противовесы, должны вращаться вдвое быстрее кривошипа.

Необходимо отметить, что уравновешивание при помощи противовесов не уравновешивает моменты сил инерции.

Описанное уравновешивание сил инерции механизмов ввиду его громоздкости не всегда возможно применить по конструктивным соображениям. На практике применяется частичное уравновешивание сил инерции, при котором уравновешиваются не все силы инерции.

Контрольные вопросы по курсу теории механизмов и машин

1. Предмет ТММ. Основные понятия и определения.
2. Кинематические пары и кинематические цепи. Классификация кинематических пар.
3. Определение подвижности механизма.
4. Методы преобразования механизмов. Структурная теория Ассура.
5. Кинематический анализ механизмов методом диаграмм.
6. Кинематический анализ механизмов методом планов скоростей и ускорений (механизмы без кулис).
7. Кинематический анализ механизмов методом планов скоростей и ускорений (кулисный механизм).
8. Кинематический анализ механизмов аналитическим методом (пример шарнирного четырёхзвенника).
9. Кулачковые механизмы. Типы, классификация, основные параметры.
10. Геометрический синтез кулачкового механизма с роликовым толкателем.
11. Геометрический синтез кулачкового механизма с коромысловым толкателем.
12. Определение минимального радиуса кулачка (коромысловый кулачковый механизм).
13. Определение минимального радиуса кулачка (поступательное движение кулачка).
14. Законы движения толкателя. Угол передачи движения, угол давления.
15. Зубчатые механизмы, типы зубчатых механизмов.

16. Основная теорема зацепления.
17. Эвольвента и её свойства. Уравнение эвольвенты. Применение эвольвенты в качестве профиля зуба.
18. Основные геометрические соотношения нормального зубчатого зацепления.
19. Основные параметры эвольвентного зацепления (дуга зацепления, теоретическая и практическая линии зацепления, рабочие участки профилей зубьев, коэффициент перекрытия).
20. Методы нарезания зубчатых колёс.
21. Понятие о явлении подрезания профилей зубьев (определение минимального числа зубьев, при котором отсутствует подрез).
22. Определение сдвига рейки из условия отсутствия подреза, понятие о коррекции зубчатых колёс.
23. Основные виды зубчатых зацеплений (нулевое, равносмещённое, неравносмещённое).
24. Передаточное отношение зубчатых механизмов.
25. Планетарные зубчатые механизмы, основные понятия, передаточное отношение.
26. Синтез планетарных зубчатых механизмов, постановка задачи, условия синтеза.
27. Приведение сил и масс в механизмах.
28. Приведённая масса и приведённый момент инерции механизма.
29. Неравномерность движения механизмов и машин, коэффициент неравномерности хода машин, понятие о маховике.
30. Кинестатический анализ механизмов. Определение реакций в кинематических парах.
31. Понятие об уравнивании механизмов.
32. Уравнивание вращающихся звеньев.
33. Передаточное отношение многоступенчатых зубчатых механизмов, случай паразитных зубчатых колёс.
34. Уравнение движения машинного агрегата.
35. Виброзащита машин. Динамическое гашение колебаний.

Библиографический список

1. Попов С.А., Тимофеев Т.А., Курсовое проектирование по теории механизмов и машин. – М.: Высшая школа, 2004.
2. Фролов К.В., Попов С.А., Мусатов А.К. и др. Теория механизмов и механика машин, - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004.
3. Петров С.Г., Азарова Э.В., Головки В.Е., Кокушин Н.Н. и др. Теория механизмов и машин: учебно-лабораторный практикум. – СПб.: СПбГТУРП, 2006.
4. Петров С.Г., Головки В.Е., Кузнецова Н.В., Лазарев Ю.Н.. Структура механизмов: учебно-методическое пособие. – СПб.: СПбГТУРП, 2006.
5. Петров С.Г., Головки В.Е., Лазарев Ю.Н., Кузнецова Н.В и др. Теория механизмов и машин. Синтез зубчатых механизмов (примеры решения задач и контрольные работы): учебно-методическое пособие для самостоятельной работы студентов. – СПб.: СПбГТУРП, 2007.
6. Головки В.Е., Саблина М.В., Ю.Н. Лазарев, Петров С.Г., Кузнецова Н.В. Кинестатика: учебное пособие, - СПб: СПбГТУРП, 2009.
7. Лазарев Ю.Н., Петров С.Г., Головки В.Е. и др. Синтез плоских кулачковых механизмов: учебно-методическое пособие. – СПб.: СПбГТУРП, 2009.

Учебное издание

Сергей Гаррикович Петров
Виктор Евгеньевич Головки
Максим Олегович Трубицын

Теория машин и МЕХАНИЗМОВ

Часть 4

Учебное пособие

Редактор и корректор В.А. Басова

Техн. редактор Л.Я. Титова

Темплан 2012 г., поз. 55/

Подп. к печати

Формат 60x84/16

Бумага тип. №1. Печать офсетная. Объём 4,0 печ. л.; 4.5 уч.-изд. л.

Изд. №55. Тираж 100 экз. Цена «С». Заказ

Ризограф Санкт-Петербургского государственного технологического
университета растительных полимеров, 198095. Санкт-Петербург, ул. Ивана
Черных. 4