Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования

«Санкт-Петербургский государственный технологический университет растительных полимеров»

Математика
Ряды

Методические указания для студентов заочного отделения

Санкт-Петербург
2009

УДК 51(07.07)

Математика. Ряды : методические указания для студентов заочного отделения /сост. Куляхтина О.Е., Белая Н.Л., Юдовин М.Э., Лавров К.Ю., Косовская Н.Ю.; ГОУВПО СПбГТУРП. – СПб., 2009.- 22с.

В методических указаниях излагаются основные положения теории рядов и ее приложения. Рассмотрены типовые задачи для выполнения контрольной работы № 9. Рекомендуются для студентов заочного отделения технического и технологического профилей.

Рецензент: зав. каф. математики СПбГМТУ, кандидат физ.- мат. наук профессор Григорьев-Голубев В.В.

Методические указания подготовлены и рекомендованы к печати кафедрой высшей математики ГОУВПО Санкт-Петербургского государственного технологического университета растительных полимеров (протокол №2 от 22 октября 2009 г.).

Утверждены к изданию методической комиссией факультета промышленной энергетики ГОУВПО СПбГТУРП (протокол №3 от 12 ноября 2009 г.).

Введение

Настоящее пособие предназначено для студентов-заочников инженерно-технических специальностей, а также студентов дневного отделения как дополнительный материал по практическим занятиям в разделе "Ряды". Особое внимание в данной брошюре уделено разбору примеров, теоретический материал имеет лишь справочный характер.

Для успешного решения задач контрольной работы №9 следует основательно изучить терминологию, важные теоретические положения раздела "Ряды", которые приведены в данном пособии.

Перед началом выполнения контрольной работы рекомендуем изучить теорию по данному разделу в учебниках [1],[2]. Не следует приступать к выполнению контрольного задания, не решив достаточного количества задач, соответствующих этому заданию, которые можно найти в задачниках [3],[4].

Процесс промывки осадка

Ряды находят огромное применение в технических и технологических расчетах. С помощью рядов выражаются результаты анализа некоторых процессов. В качестве наглядного примера рассмотрим последовательную промывку осадка с использованием каждый раз чистой воды.

Пусть начальная пульпа содержит m кг воды с y_0 кг растворенной соли на один кг воды. При каждой промывке пульпа интенсивно перемешивается со свежей водой, добавляемой в количестве p кг. После перемешивания раствор отстаивается и сливается, а в пульпе остается m воды. Если y_n - концентрация раствора после n -ой промывки, то $my_0 = my_1 + py_1$, откуда концентрация раствора после первой промывки:

$$y_1 = \left(\frac{m}{m+p}\right) y_0 \quad .$$

Концентрация раствора после n-ой промывки :

$$y_n = \left(\frac{m}{m+p}\right)^n y_0 \quad .$$

Общее количество соли, извлекаемой промывной водой, можно выразить:

$$py_1+py_2+py_3+\ldots+py_n=\left[\left(\frac{m}{m+p}\right)^1+\left(\frac{m}{m+p}\right)^2+\ldots+\left(\frac{m}{m+p}\right)^n\right]py_0$$

Это количество соли после n промывок представляет собой многочлен n-ой степени относительно $\dfrac{m}{m+p}$.

С увеличением числа промывок, т.е. при n, стремящемся к ∞, количество соли, остающейся в пульпе, будет стремиться к нулю, а количество извлеченной соли будет стремиться к my_0, и получится равенство:

$$my_0=py_0\left[\left(\frac{m}{m+p}\right)^1+\left(\frac{m}{m+p}\right)^2+\left(\frac{m}{m+p}\right)^3+\ldots\right]=py_0\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{m}{m+p}\right)^n$$

Выражение, стоящее в правой части этого равенства, и является бесконечным рядом [5].

I. Числовые ряды

(задачи 421-430)

1. ***Бесконечным рядом*** или, короче, ***рядом*** называется выражение вида

$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots$. Числа $a_1, a_2, \ldots$ называются членами ряда.

Ряд задан, если задано правило, позволяющее для любого натурального n найти соответствующий член ряда a_n. Ряд часто записывают в форме

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n .$$

Пусть дан ряд $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots$. Величина

$S_n = a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$ называется n*-й* ***частичной суммой*** этого ряда. Предел же этой величины, когда $n \to \infty$, называется ***суммой*** ряда.

Итак, сумма ряда есть предел последовательности его частичных сумм:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n \quad , \qquad S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad .$$

Если ряд имеет ***конечную*** сумму, то говорят, что он *сходится*. В противном случае, т.е. когда сумма бесконечна или её вовсе нет, ряд называется ***расходящимся***.

Вопрос о сходимости ряда лишь в редких случаях решается путём непосредственного нахождения суммы ряда, т.к. это обычно затруднительно; в основном же сходимость рядов устанавливается с помощью следующих свойств и признаков, сформулированных для положительных рядов.

Положительным называется ряд $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots$, в котором все члены положительны.

Необходимое условие сходимости ряда $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots$ состоит в том, что

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \, .$$

Нужно отметить, что это условие не является достаточным, т.е. нарушение этого условия гарантирует расходимость ряда, но его выполнение не гарантирует сходимости.

2. Признаки сходимости положительных рядов.

Первый признак сравнения.

Пусть даны два положительных ряда : $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, причём при всех n выполняется условие $a_n \le b_n$. Тогда если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Если же ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходится.

Второй признак сравнения.

Пусть даны два положительных ряда : $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Если существует конечный и отличный от нуля предел отношения одинаковых по номеру членов рядов:

$$I = \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} \quad (0 < I < +\infty) \quad ,$$

то эти ряды одновременно сходятся или расходятся.

Признак Даламбера.

Пусть положительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ таков, что существует предел

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \quad .$$

Если $l < 1$, то ряд сходится, а если $l > 1$, то расходится.(При $l = 1$ ряд может оказаться как сходящимся, так и расходящимся, поэтому сходимость ряда следует установить с помощью других признаков).

Интегральный признак сходимости.

Пусть ряд $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ и некоторая функция $f(x)$, задана при $x \ge 1$, связаны так, что при всех натуральных n $f(n) = a_n$, и кроме того, $f(x)$ - непрерывная и убывающая. Тогда ряд и несобственный интеграл $\int f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

3. Ряд называется ***знакочередующимся***, если любые два его соседних члена имеют разные знаки.

Условием сходимости знакочередующегося ряда

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$$

является следующее утверждение:

Теорема Лейбница:

Если ряд $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$ удовлетворяет следующим условиям: $a_1 > a_2 > a_3 \dots$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд сходится.

Для знакопеременных рядов вводится понятие абсолютной сходимости ряда. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно, если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} | a_n |$.
Если же ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а $\sum\limits_{n=1}^{\infty} | a_n |$ расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется условно или не абсолютно сходящимся рядом.

4. Примеры решения задач.

Задача 1. Исследовать сходимость числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a\cdot q^n \quad (|q|\neq 1)$.

Решение. Данный ряд является суммой элементов геометрической прогрессии. По известной формуле $S_n = a\cdot\dfrac{1-q^n}{1-q}$.

Если $|q|<1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, и поэтому $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a}{1-q}$, следовательно, ряд сходится.

Если же $|q|>1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$, и $S_n \to \infty$, следовательно ряд расходится.

Задача 2. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^k} \quad (k\geq 1)$.

Решение.

Отдельно рассмотрим два случая:

1. $k=1$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots$$ (гармонический ряд).

Применим интегральный признак сходимости:

$f(x)=\frac{1}{x}$ $\left(f(n)=\frac{1}{n}\right)$, $f(x)$ - непрерывная и убывающая для $x\geq 1$.

Рассмотрим

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{x}=\lim_{b\to+\infty}\ln|x|\Big|_1^b=\lim_{b\to+\infty}\ln|b|=+\infty$$

т.е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ - расходится.

2. $k>1$

Снова применяя интегральный признак имеем:

$f(x)=\frac{1}{x^k}$ $\left(f(n)=\frac{1}{n^k}\right)$, $f(x)$ - непрерывная, убывающаяпри $x\geq 1$.

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^k}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{x^k}=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{1-k}\cdot\frac{1}{x^{k-1}}\Big|_1^b=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{1-k}\cdot\frac{1}{b^{k-1}}-\frac{1}{1-k}\right)=\frac{1}{1-k}$$

следовательно ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}$ сходится ($k\geq 1$).

Задача 3. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+3^n}$.

Решение.

Общий член ряда $a_n=\frac{1}{\sqrt{n}+3^n}$.

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$, общий член ряда $b_n = \frac{1}{3^n}$. Нетрудно заметить, что $a_n < b_n$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ сходится (задача 1) ; поэтому по первому признаку сравнения сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+3^n}$.

Задача 4. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(3n-1)^2}$.

Решение.

Здесь $a_n = \frac{\sqrt{n}}{(3n-1)^2}$.

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ $(b_n = \frac{1}{n^{3/2}})$. Воспользуемся вторым признаком сравнения рядов:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{(3n-1)^2} : \frac{1}{n^{3/2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\cdot n^{3/2}}{(3n-1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2(3-\frac{1}{n})^2} = \frac{1}{9},$$

т.к. $0 < \frac{1}{9} < +\infty$, то ряды сходятся или расходятся одновременно. Но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ сходится (задача 2), следовательно ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(3n-1)^2}$ сходится.

Задача 5. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(2n+1)!}$.

Решение.

Здесь $a_n = \frac{n^3}{(2n+1)!}$.

Воспользуемся признаком Даламбера:

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{(2(n+1)+1)!} : \frac{n^3}{(2n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3 \cdot (2n+1)!}{(2n+3)! \cdot n^3} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3(1+\frac{1}{n})^3(2n+1)!}{(2n+1)!(2n+2)(2n+3)n^3} = 0 ,$$

т.к. $l<1$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(2n+1)!}$ сходится.

Задача 6. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\cdot\sqrt[3]{\ln(n+1)}}$.

Решение.

Здесь $a_n = \frac{1}{(n+1)\cdot\sqrt[3]{\ln(n+1)}}$.

Применим интегральный признак:

$f(x) = \frac{1}{(x+1)\cdot\sqrt[3]{\ln(x+1)}}$ $\left(f(n) = \frac{1}{(n+1)\cdot\sqrt[3]{\ln(n+1)}} \right)$, $f(x)$ - непрерывная убывающая при $x \geq 1$.

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\cdot\sqrt[3]{\ln(x+1)}} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b (\ln(x+1))^{-\frac{1}{3}} d(\ln(x+1)) =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \frac{3}{2}(\ln(x+1))^{\frac{2}{3}} \Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{3}{2}(\ln(b+1))^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2}(\ln 2)^{\frac{2}{3}}\right) = +\infty$$

Так как рассмотренный несобственный интеграл расходится, следовательно расходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\cdot\sqrt[3]{\ln(n+1)}}$.

II. Степенные ряды
(задачи 431-440)

1. ***Степенным рядом*** называется ряд вида

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n+\ldots ,$$

где $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ постоянные числа.

Этот же ряд можно записать в виде $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$. Областью сходимости степенного ряда называют множество всех значений x, при которых этот ряд сходится как числовой. Чтобы найти область сходимости степенного ряда, обычно с помощью известных признаков изучают числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$, а затем накладывают условия на переменную x.

2. Примеры решения задач.

Задача 1. Найти интервал сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n \cdot n!}$.

Решение.

Т.к. x может быть и отрицательной величиной, и положительной, рассмотрим сразу ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|x|^n \cdot n!}$ – в нём все члены положительны.

Воспользуемся признаком Даламбера, чтобы установить сходимость или расходимость ряда.

$$l=\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{|x|^{n+1}\cdot(n+1)!} : \frac{1}{|x|^n \cdot n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|x|^n \cdot n!}{|x|^{n+1}\cdot n!(n+1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{|x|\cdot(n+1)} = 0,$$

кроме случая, когда $x=0$ (при $x=0$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{|x|\cdot(n+1)} = +\infty$). Следовательно, т.к. $l<1\ (x\neq 0)$, данный ряд сходится для $x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

Задача 2. Найти интервал сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^2+1}x^n$.

Решение.

Как и в предыдущей задаче рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^2+1}|x|^n$. Применяя признак Даламбера, получаем:

$$l=\lim_{n\to+\infty}\frac{3^{n+1}}{(n+1)^2+1}|x|^{n+1}:\left(\frac{3^n}{n^2+1}|x|^n\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{3^{n+1}\cdot|x|^{n+1}\cdot n^2(1+\frac{1}{n})}{n^2((1+\frac{1}{n})^2+\frac{1}{n^2})\cdot|x|^n\cdot 3^n}=$$

$$=3|x|.$$

Тогда, если $3|x|<1$ или $|x|<\frac{1}{3}$,- ряд сходится; если $3|x|>1$ или $|x|>\frac{1}{3}$,- ряд сходится.

Остаётся неизвестным, сходится ли ряд при $|x|=\frac{1}{3}$. Установим это, рассмотрев два числовых ряда.

1) Пусть $x=\frac{1}{3}$, тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^2+1}x^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^2+1}\left(\frac{1}{3}\right)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$ сходится по первому признаку сравнения , т.к. $\frac{1}{n^2+1}<\frac{1}{n^2}$, а $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ - сходится (п.I, задача 2) .

2) Пусть $x=-\frac{1}{3}$, тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^2+1}x^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^2+1}\left(-\frac{1}{3}\right)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}$.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}$ - знакочередующийся, и он сходится абсолютно, т.к. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n^2+1}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$ (см. 1.). Поэтому, окончательно , ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^2+1}x^n$ сходится при $|x|\le\frac{1}{3}$, область сходимости: $x\in\left[-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right]$.

Задача 3. Найти интервал сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{(n+1)^n} x^n$.

Решение.

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{(n+1)^n} |x|^n$. По признаку Даламбера получим:

$$l = \lim_{n \to +\infty} \frac{(3(n+1))!}{(n+2)^{n+1}} |x|^{n+1} : \left(\frac{(3n)!}{(n+1)^n} |x|^n \right) =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{(3n)!(3n+1)(3n+2)(3n+3)|x|^{n+1}(n+1)^n}{(n+2)^{n+1}|x|^n (3n)!} =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{(3n+1)(3n+2)(3n+3)|x|}{(n+2)} \cdot \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^n =$$

$$= |x| \cdot \lim_{n \to +\infty} \frac{n(3+\frac{1}{n})(3n+2)(3n+3)}{n(1+\frac{2}{n})} \cdot e^{\ln\left(\frac{n+2-1}{n+2}\right)^n} = |x| \cdot \lim_{n \to +\infty} 3(3n+2) \cdot$$

$$\cdot (3n+3) e^{n \ln\left(1 - \frac{1}{n+2}\right)} = 3|x| \cdot \lim_{n \to +\infty} (3n+2)(3n+3) \cdot e^{n\left(-\frac{1}{n+2}\right)} =$$

$$= 3|x| \cdot \lim_{n \to +\infty} (3n+2)(3n+3) \cdot e^{-1} = +\infty \quad (\text{если } x \neq 0).$$

Следовательно, если $x \neq 0$, то ряд расходится. Если же $x = 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{(n+1)^n} x^n$ сходится.

III. Ряды Тейлора и Маклорена. Вычисление определенных интегралов с помощью рядов.

(задачи 441-450)

1. Приведём основные факты.

Известно, что для функции $f(x)$, имеющей производные до $n+1$ порядка включительно в окрестности точки a, имеет место формула Тейлора:

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+R_n(x),$$

где $\quad R_n(x)=\dfrac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a) \quad ,a<t<x$.

Если функция $f(x)$ имеет производные всех порядков в окрестности точки a, допустим, что $\lim\limits_{n\to\infty} R_n=0$, тогда

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\ldots$$

или $$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a).$$

Если в ряде Тейлора $a=0$, получаем частный случай - ряд Маклорена:

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\ldots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\ldots$$

Приведём разложение некоторых функций в ряд Маклорена, указав области сходимости:

1. $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dfrac{x^7}{7!}\ldots+(-1)^{n+1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots$ (ряд сходится при любом x)

2. $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\dfrac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^{n+1}\dfrac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}+\ldots$ (ряд сходится при любом x)

3. $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^4}{4!}+\ldots+\dfrac{x^n}{n!}+\ldots$ (ряд сходится при любом x)

4. $(1+x)^m=1+mx+\dfrac{m(m-1)x^2}{2!}+\dfrac{m(m-1)(m-2)x^3}{3!}+\ldots+$

$$+\frac{m(m-1)...(m-(n-1))x^n}{n!}+... \qquad \text{(ряд сходится при } |x|<1)$$

$$5.\ \ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+... \qquad \text{(ряд сходится при } |x|<1)$$

$$6.\ \operatorname{arctg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}...+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+... \qquad \text{(ряд сходится при } |x|<1)$$

Верно утверждение, что после почленного интегрирования степенного ряда, если пределы интегрирования лежат внутри интервала сходимости, получается ряд, сумма которого равняется соответствующему интегралу от суммы данного ряда. Поэтому определённые интегралы, которые как функции верхнего предела не выражаются элементарными функциями, удобно вычислять с помощью рядов. Нужно сначала разложить подынтегральную функцию в ряд, а потом проинтегрировать ряд почленно.

2. Примеры решения задач.

Задача 1. Вычислить $\int\limits_0^{1/8}\ln(1+\sqrt[3]{x})dx$ с точностью до 10^{-2}.

Решение.

Для вычисления этого интеграла разложим подынтегральную функцию в ряд, заменяя в разложении $\ln(1+x)$ x на $\sqrt[3]{x}$:

$$\ln(1+\sqrt[3]{x})=\sqrt[3]{x}-\frac{(\sqrt[3]{x})^2}{2}+\frac{(\sqrt[3]{x})^3}{3}-\frac{(\sqrt[3]{x})^4}{4}+..+(-1)^{n+1}\frac{\sqrt[3]{x}^n}{n}+...$$

Тогда

$$\int\limits_0^{1/8}\ln(1+\sqrt[3]{x})dx=\int\limits_0^{1/8}x^{\frac{1}{3}}dx-\int\limits_0^{1/8}\frac{x^{\frac{2}{3}}}{2}dx+\int\limits_0^{1/8}\frac{x}{3}dx+..+(-1)^{n+1}\int\limits_0^{1/8}\frac{x^{\frac{n}{3}}}{n}dx+...=$$

$$=\left(\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}-\frac{x^{\frac{5}{3}}}{2\cdot\frac{5}{3}}+...+(-1)^{n+1}\frac{x^{\frac{n+3}{3}}}{n\cdot\frac{n+3}{3}}+...\right)\Bigg|_0^{1/8}=\frac{(1/8)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}-\frac{(1/8)^{\frac{5}{3}}}{2\cdot\frac{5}{3}}+...+(-1)^{n+1}\frac{(1/8)^{\frac{n+3}{3}}}{n\cdot\frac{n+3}{3}}+...$$

т.к. получивший ряд знакочередуюшийся , $|R_{n-1}| \le \dfrac{(1/8)^{\frac{n+3}{3}}}{n\cdot\frac{n+3}{3}}$ и требуемая

точность достигается при $n=2$, т.е. $|R_1| \le \dfrac{(1/8)^{\frac{5}{3}}}{2\cdot\frac{5}{3}} = \dfrac{(0{,}5)^5\cdot 3}{2\cdot 5} = 0{,}009375$.

Тогда

$$\int_0^{1/8} \ln(1+\sqrt[3]{x})dx \approx \frac{(1/8)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} \approx 0{,}0469.$$

Задача 2. Вычислить $\int_0^1 \frac{\sin 2x}{x}dx$ с точностью до 0,001.

Решение.

Разложим $\sin 2x$ в ряд Маклорена, заменяя в разложении $\sin x$, x на $2x$:

$$\sin 2x = 2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} - \frac{(2x)^7}{7!} ... + (-1)^{n+1}\frac{(2x)^{2n-1}}{(2n-1)!} + ...$$

Тогда

$$\int_0^1 \frac{\sin 2x}{x}dx = \int_0^1 \left(2 - \frac{(2x)^3}{x\cdot 3!} + \frac{(2x)^5}{x\cdot 5!} - \frac{(2x)^7}{x\cdot 7!} ... + (-1)^{n+1}\frac{(2x)^{2n-1}}{x(2n-1)!} + ...\right)dx =$$

$$= \left(2x - \frac{8x^3}{3\cdot 3!} + \frac{32x^5}{5\cdot 5!} - ... + (-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)\cdot(2n-1)!} + ...\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= 2 - \frac{8}{3\cdot 3!} + \frac{32}{5\cdot 5!} - ... + (-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}}{(2n-1)\cdot(2n-1)!} + ...$$

Этот ряд знакочередующийся, поэтому $|R_{n-1}| \le \dfrac{2^{2n-1}}{(2n-1)\cdot(2n-1)!}$,

требуемая точность достигается при $n=6$, т.е. $|R_5| \le \dfrac{2^{11}}{11\cdot(11)!} = 0{,}0000047$.

Тогда

$$\int_0^1 \frac{\sin 2x}{x}dx \approx 2 - \frac{8}{3\cdot 3!} + \frac{32}{5\cdot 5!} - \frac{128}{7\cdot 7!} + \frac{512}{9\cdot 9!} = 2 - 0{,}44444444 + 0{,}053333 -$$

$$-0{,}003628 + 0{,}000157 = 1{,}605418 \approx 1{,}6054 \quad .$$

IV. Применение степенных рядов к решению дифференциальных уравнений

(задачи 451-460)

1. Один из способов решения дифференциальных уравнений с помощью рядов состоит в том, что для представления функций применяется ряд Тейлора.

Пусть требуется найти решение уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$. Представим разложение искомого решения в ряд по степеням разности $x - x_0$.

Оно таково:

$$y = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots \quad ,$$

$y(x_0)$ известно .

Подставив в уравнение значение $x = x_0$, найдём и $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$.

Далее, дифференцируя заданное уравнение, получим

$$y'' = f'_x(x, y) + f'_y(x, y) \cdot y'$$, откуда находим

$$y''(x_0) = f'_x(x_0, y_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot y' \quad .$$

Далее аналогично дифференцируем y'' и, полагая $x = x_0$, найдём $y'''(x_0)$ и т.д. Таким образом, мы сможем найти сколь угодно много членов разложения решения дифференциального уравнения.

2. Примеры решения задач.

Задача 1. Найти четыре первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y' = x - y^2$, удовлетворяющего условию: $y(1) = 1$.

Решение. Будем искать решение в виде:

$$y = y(1) + \frac{y'(1)}{1!}(x - 1) + \frac{y''(1)}{2!}(x - 1)^2 + \frac{y'''(1)}{3!}(x - 1)^3 + \ldots$$

Последовательно дифференцируя заданное уравнение, получим:

$$y'' = 1 - 2y \cdot y',$$

$$y''' = -2(y')^2 - 2y \cdot y'',$$

$$y^{(4)} = -6y' \cdot y'' - 2y \cdot y''',$$

$$y^{(5)} = -6(y'')^2 - 8y' \cdot y''' - 2y \cdot y^{(4)}.$$

Подставляя начальные условия, найдём:

$y'(1) = 0$; $y''(1) = 1$; $y'''(1) = -2$; $y^{(4)}(1) = 4$.

Таким образом, решение имеет первые слагаемые:

$$y = 1 + \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{-2}{6}(x-1)^3 + \frac{4}{24}(x-1)^4 + \ldots.$$

Или окончательно :

$$y = 1 + \frac{(x-1)^2}{2} - \frac{(x-1)^3}{3} + \frac{(x-1)^4}{6} + \ldots$$

Задача 2. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в ряд решения уравнения $y' = \sin x + xy$, если $y(0) = 1$.

Решение. В данном случае решение будем искать в виде:

$$y = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \ldots$$

$y'(0) = 0$ (из уравнения $y'(0) = \sin 0 + 0 \cdot y(0)$).

Последовательно дифференцируя уравнение и подставляя начальные условия, получим:

$y'' = \cos x + y + x \cdot y',$ $\qquad y''(0) = \cos 0 + 1 = 2$;

$y''' = -\sin x + y' + y' + x \cdot y'',$ $\qquad y'''(0) = 0$;

$y^{(4)} = -\cos x + 2y'' + y'' + x \cdot y''',$ $\qquad y^{(4)}(0) = -\cos 0 + 3 = 2.$

Таким образом мы получаем три первых члена разложения в ряд решения:

$$y = 1 + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{2}{4!}x^4 + \ldots$$

Окончательно: $\qquad y = 1 + x^2 + \dfrac{x^4}{12} + \ldots$

V. Ряды Фурье.
(задачи 461-470)

1. Пусть $\{a_n\},\{b_n\}$ - числовые последовательности.

Функциональный ряд

$$\frac{a_0}{2}+(a_1\cos x+b_1\sin x)+(a_2\cos 2x+b_2\sin 2x)+\ldots+$$

$$(a_n\cos nx+b_n\sin nx)+\ldots=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

называется рядом Фурье.

Сформулируем главное утверждение.

Пусть $f(x)$ на интервале $(-\pi;\pi)$ удовлетворяет условием:

1) на этом интервале $f(x)$ имеет конечное число точек разрыва 1-го ряда.

2) интервал $(-\pi;\pi)$ содержит конечное число экстремумов функции $f(x)$.

3) существуют $\lim\limits_{x\to\pi-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to-\pi+0} f(x)$.

Тогда $f(x)$ может быть разложена в ряд Фурье, при этом сумма этого ряда равна:

1) $f(x)$ - в тех точках, где $f(x)$ непрерывна ;

2) $\frac{1}{2}(\lim\limits_{x\to a-0} f(x)+\lim\limits_{x\to a+0} f(x))$ в точке a - точке разрыва функции ;

3) $\frac{1}{2}(\lim\limits_{x\to -\pi+0} f(x)+\lim\limits_{x\to \pi-0} f(x))$ в точках $-\pi$ и π.

Кроме того, коэффициенты a_0, a_k, b_k ряда Фурье определяются по формулам:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \quad ;$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx \quad ;$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx \quad .$$

Заметим, что если $f(x)$ - чётная функция, то её ряд Фурье ищем в виде

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx \quad , \text{ где } a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx \quad ;$$

если же $f(x)$ нечётная, то её ряд Фурье-

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \quad \text{, где } \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx \quad .$$

2. Примеры решения задач.

Задача 1. Разложить в ряд Фурье $f(x)=x^2$ в интервале $(-\pi;\pi)$.

Решение.

Функция $f(x)=x^2$ удовлетворяет всем условиям, сформулированным в главном утверждении. Кроме того, $f(x)=x^2$ чётная, поэтому :

$$x^2 = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \quad ; \quad a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{3} \quad ;$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{2}{\pi} x^2 \frac{\sin nx}{n}\bigg|_0^{\pi} - \frac{4}{\pi n}\int_0^{\pi} x \sin nx dx = \frac{4}{\pi n} x \frac{\cos nx}{n}\bigg|_0^{\pi} -$$

$$-\frac{4}{\pi n^2}\int_0^{\pi} \cos nx dx = (-1)^n \frac{4}{n^2} \quad .$$

(Вычисляя a_n, мы два раза интегрировали по частям :

$$u = x^2; \quad dv = \cos nx dx \quad \Rightarrow du = 2x dx; \quad v = \frac{\sin nx}{n};$$

$$u_1 = x; \quad dv_1 = \sin nx dx \quad \Rightarrow du_1 = dx; \quad v_1 = -\frac{\cos nx}{n};$$

и учли, что $\cos(n\pi) = (-1)^n$). Тогда :

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2} \quad .$$

Задача 2.

Разложить $f(x) = \begin{cases} -1, & 0 < x < \pi \\ 1, & \pi < x < 2\pi \end{cases}$ в ряд Фурье в интервале $(0;2\pi)$.

Решение.

Данная функция удовлетворяет условиям главного утверждения. Точка $x=\pi$ - точка разрыва 1-го рода. На промежутках $(0;\pi)$ и $(\pi;2\pi)$ функция монотонна.

Будем искать коэффициенты для ряда Фурье:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(-\sin nx)dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi}\right) -$$

$$-\frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos nx}{n}\Big|_{\pi}^{2\pi}\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n} - \frac{(-1)^n}{n}\right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{n}\right) =$$

$$= \begin{cases} 0\ , & \text{если } n \text{ четно} \\ \frac{2}{\pi}\cdot\frac{2}{2k+1}, & \text{если } n \text{ нечетно и } n = 2k+1. \end{cases}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(-\cos nx)dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}\cos nx dx =$$

$$\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi}\right) + \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin nx}{n}\Big|_{\pi}^{2\pi}\right) = 0 \ ;$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(-1)dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}dx =$$

$$\frac{1}{\pi}\left(-x\Big|_0^{\pi}\right) + \frac{1}{\pi}\left(x\Big|_{\pi}^{2\pi}\right) = \frac{1}{\pi}(-\pi) + \frac{1}{\pi}\pi = 0 \ .$$

Тогда

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)}\sin(2k+1)x =$$

$$= \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots + \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1} + \ldots\right)$$

В точке разрыва $x = \pi$ мы имеем

$$\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to\pi-0} f(x) + \lim_{x\to\pi+0} f(x)\right) = \frac{-1+1}{2} = 0 = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)\pi}{(2k+1)}.$$

Библиографический список

1. Бермант А.Ф. Адамович И.Г. .Краткий курс математического анализа для ВТУЗов.-М.:Наука, 1971.

2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для ВТУЗов.-М.:Наука, 1985.

3. Задачи и упражнения по математическому анализу /под ред. Демидовича Б.П. -М.:Наука, 1978.

4. Берман Г.Н.. Сборник задач по курсу математического анализа.-М.:Наука, 1985.

Содержание

О.Е. Куляхтина, Н.Л.Белая, М.Э. Юдовин,
К.Ю. Лавров, Н.Ю. Косовская

Математика
Ряды

Методические указания для студентов заочного отделения

Редактор и корректор В.А.Басова
Техн.редактор Л.Я.Титова

Подп. к печати 21.12.09. Формат 60x84/16. Бумага тип № 1. Печать офсетная.
Объём 1,5 печ.л., 1,5 уч. - изд. л. Тираж 50 экз.
Изд. № 124 . Цена «С» . Заказ

Ризограф ГОУВПО Санкт-Петербургского государственного технологического университета растительных полимеров, 198095, Санкт-Петербург, ул. Ивана Черных, 4.