Министерство образования и науки Российской Федерации

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования

«Санкт-Петербургский государственный технологический университет растительных полимеров»

ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Методические указания для студентов очной и очно-заочной форм обучения

Санкт-Петербург
2011

УДК 517

Операционное исчисление: методические указания для студентов очной и очно-заочной форм обучения / сост.: Т. А. Забавникова, О. Е. Куляхтина, К. Ю. Лавров, И. Ю. Малова; ГОУВПО СПбГТУРП. — СПб., 2011. — 16 с.

Работа содержит теоретический материал, методические указания и примеры по теме «Операционное исчисление». Приведены также задания для самостоятельной работы.

Предназначается для студентов очной и очно-заочной форм обучения технических и технологических направлений СПбГТУРП.

Рецензент: доцент кафедры высшей математики СПбГЭТУ, кафедры теории вероятностей и математической статистики СПбГУ, канд. физ.-мат. наук С. В. Малов.

Подготовлены и рекомендованы к печати кафедрой высшей математики Санкт-Петербургского государственного технологического университета растительных полимеров (протокол № 7 от 9.03.11).

Утверждены к изданию методической комиссией факультета промышленной энергетики Санкт-Петербургского государственного технологического университета растительных полимеров (протокол № 7 от 14.03.11).

Редактор и корректор В. А. Басова
Техн. редактор Л. Я. Титова — Темплан 2011 г., поз. 27

Подп. к печати 14.03.11. Формат 60 × 84/16. Бумага тип N 1. Печать офсетная. Объем 1,0 печ. л.; 1,0 уч.-изд. л. Тираж 50 экз. Изд. № 27. Цена «С». Заказ .

Введение

Данные методические указания позволяют изучить операционное исчисление — один из методов решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Каких-либо решающих преимуществ этот метод перед другими не имеет; в то же время простота сделала его основным инструментом при решении задачи Коши в целом ряде прикладных наук (механике, радиотехнике, электротехнике и т.д.).

Пособие содержит теоретический материал. Приведены основные определения и свойства преобразования Лапласа, таблица стандартных изображений, а также рассмотрены основные примеры, позволяющие освоить методы операционного исчисления, применяемые для решения дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами: нахождение изображений по оригиналам, отыскание оригиналов по изображениям. Разобраны примеры решения дифференциальных уравнений операционным методом. В конце пособия приведены задачи для самостоятельного решения.

1. Основные определения и свойства

Определение. Функцией-оригиналом называется любая комплексная функция $f(t)$ действительной переменной t, определенная на всей числовой прямой и удовлетворяющая условиям:

1. $f(t) = 0$ при $t < 0$.
2. Существуют постоянные $M > 0$, $S_0 \in \mathbb{R}$, такие, что для всех t выполняется неравенство $|f(t)| < Me^{S_0 t}$.
3. На любом конечном отрезке $[0, T]$ функция $f(t)$ может иметь лишь конечное число точек разрыва, причем только первого рода.

Простейшей функцией-оригиналом является функция Хевисайда:

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, t \geq 0, \\ 0, t < 0. \end{cases}$$

Определение. Изображением функции-оригинала $f(t)$ называют функцию комплексного переменного $p = s + ib$, определяемую равенством

$$\overline{f}(p) = \int\limits_0^{+\infty} f(t)\, e^{-pt}\, dt. \qquad (1)$$

Функция $\overline{f}(p)$, определенная равенством (1), называется также преобразованием Лапласа функции $f(t)$.

Если функция $\overline{f}(p)$ является изображением $f(t)$, то пишут

$$f(t) \risingdotseq \overline{f}(p).$$

(Читается: «Функция $f(t)$ является оригиналом функции $\overline{f}(p)$» или «функция $\overline{f}(p)$ является изображением функции $f(t)$»).

Свойства преобразования Лапласа

1. Свойство линейности. Для любых комплексных постоянных α и β

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \risingdotseq \alpha\overline{f}(p) + \beta\overline{g}(p).$$

2. Теорема подобия. Для любой постоянной $\alpha > 0$

$$f(\alpha t) \risingdotseq \frac{1}{\alpha}\overline{f}(p/\alpha).$$

3. Дифференцирование оригинала. Если функция $f(t)$ непрерывна при $t > 0$ и её производные $f'(t), f''(t), \ldots, f^{(n)}(t)$ являются оригиналами, то

$$\begin{aligned}
&f'(t) \risingdotseq p\overline{f}(p) - f(0)\\
&f''(t) \risingdotseq p^2\overline{f}(p) - pf(0) - f'(0),\\
&f'''(t) \risingdotseq p^3\overline{f}(p) - p^2 f(0) - pf'(0) - f''(0),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&f^{(n)}(t) \risingdotseq p^n\overline{f}(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0).
\end{aligned} \qquad (2)$$

4. Дифференцирование изображения

$$(-1)^n t^n f(t) \risingdotseq \overline{f}^{(n)}(p).$$

5. Интегрирование оригинала

$$\int\limits_0^t f(t)\,dt \leftarrow\!\!\div\; \overline{f}(p)/p.$$

6. Интегрирование изображения. Если интеграл $\int\limits_0^\infty \overline{f}(p)\,dp$ сходится, то он служит изображением функции $f(t)/t$, т. е.

$$f(t)/t \leftarrow\!\!\div \int\limits_0^\infty \overline{f}(p)\,dp.$$

7. Теорема запаздывания. Для любого положительного τ

$$f(t-\tau) \leftarrow\!\!\div\; e^{-p\tau}\overline{f}(p).$$

8. Теорема смещения. Для любого комплексного α

$$e^{\alpha t}f(t) \leftarrow\!\!\div\; \overline{f}(p-\alpha).$$

9. Теорема умножения

$$\int\limits_0^t f(\tau)q(t-\tau)\,d\tau \leftarrow\!\!\div\; \overline{f}(p)\overline{q}(p).$$

Таблица изображений некоторых элементарных функций

1.	$1 \leftarrow\!\!\div \dfrac{1}{p}$	6.	$t^n e^{\alpha t} \leftarrow\!\!\div \dfrac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$
2.	$t^n \leftarrow\!\!\div \dfrac{n!}{p^{n+1}}$	7.	$e^{\alpha t}\sin(\omega t) \leftarrow\!\!\div \dfrac{\omega}{(p-\alpha)^2+\omega^2}$
3.	$e^{\alpha t} \leftarrow\!\!\div \dfrac{1}{p-\alpha}$	8.	$e^{\alpha t}\cos(\omega t) \leftarrow\!\!\div \dfrac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\omega^2}$
4.	$\cos(\omega t) \leftarrow\!\!\div \dfrac{p}{p^2+\omega^2}$	9.	$t\cos(\beta t) \leftarrow\!\!\div \dfrac{p^2-\beta^2}{(p^2+\beta^2)^2}$
5.	$\sin(\omega t) \leftarrow\!\!\div \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$	10.	$t\sin(\beta t) \leftarrow\!\!\div \dfrac{2p\beta}{(p^2+\beta^2)^2}$

2. Нахождение изображений функций оригиналов

При нахождениии изображений функций оригиналов нужно использовать таблицу изображений и свойство линейности преобразования Лапласа.

Пример 1. Найти изображение функции $7t^2 + 5\cos 2t - t^3e^t$. Используем формулы 2, 4, 6 из таблицы изображений:

$$7\cdot t^2+5\cdot\cos 2t-t^3e^t \leftarrow\!\!\div\; 7\cdot\frac{2!}{p^3}+5\cdot\frac{p}{p^2+4}-\frac{3!}{(p-1)^4}=\frac{14}{p^2}+\frac{5p}{p^2+4}-\frac{6}{(p-1)^4}.$$

Пример 2. Найти изображение функции $\sin^2 t$. Для нахождения изображения этой функции используем формулу понижения степени

$$\sin^2 t=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2t=\frac{1}{2}\cdot 1-\frac{1}{2}\cdot\cos 2t \leftarrow\!\!\div$$

$$\leftarrow\!\!\div\; \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+4}=\frac{1}{2p}-\frac{1}{2p^2+8}.$$

3. Нахождение оригинала по изображению

Оригинал восстанавливается по изображению при помощи таблицы и свойств преобразования Лапласа.

Пример. Найдем оригиналы следующих изображений:

1) $\frac{7}{p}$, 2) $\frac{7}{p^5}$, 3) $\frac{5}{(p+1)^4}$, 4) $\frac{2p+3}{p^2+p+3}$, 5) $\frac{p}{p^2-5p+6}$, 6) $\frac{p}{(p-1)^2(p^2+1)}$.

1) $\frac{7}{p}=7\cdot\frac{1}{p}\div\!\!\rightarrow 7\cdot 1=7.$

2) $\frac{7}{p^5}=\frac{7}{4!}\cdot\frac{4!}{p^5}\div\!\!\rightarrow\frac{7}{4!}\cdot t^4=\frac{7}{24}t^4.$

3) $\frac{5}{(p+1)^4}=\frac{5}{3!}\cdot\frac{3!}{(p+1)^4}=\frac{5}{6}\cdot\frac{3!}{(p-(-1))^4}\div\!\!\rightarrow\frac{5}{6}t^3e^{-t}.$

4) Заметим, что дискриминант знаменателя дроби $\frac{2p+3}{p^2+p+3}$ отрица-

тельный. Поэтому для нахождения оригинала выделяем полный квадрат знаменателя дроби:

$$p^2+p+3=p^2+2\cdot\frac{1}{2}p+3=p^2+2\cdot\frac{1}{2}p+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+3=\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}.$$

Получаем, что

$$\frac{2p+3}{p^2+p+3}=\frac{2p+3}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}}=\frac{2\left(p+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)+3}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}}=$$

$$=\frac{2\left(p+\frac{1}{2}\right)-1+3}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}}=2\cdot\frac{p+\frac{1}{2}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}}+2\cdot\frac{1}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}}=$$

$$=2\cdot\frac{p+\frac{1}{2}}{\left(p-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2+\left(\frac{\sqrt{11}}{2}\right)^2}+2\cdot\frac{2}{\sqrt{11}}\frac{\frac{\sqrt{11}}{2}}{\left(p-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2+\left(\frac{\sqrt{11}}{2}\right)^2}$$

Следовательно,

$$\frac{2p+3}{p^2+p+3}\div 2e^{-\frac{1}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{11}}{2}t\right)+\frac{4}{\sqrt{11}}e^{-\frac{1}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{11}}{2}t\right)$$

5) Заметим, что знаменатель дроби можно разложить на множители. Для нахождения оригиналов такого вида необходимо:

- разложить знаменатель дроби на множители;
- представить дробь в виде суммы простейших дробей с неопределёнными коэффициентами;
- найти неопределённые коэффициенты;
- найти по таблице оригиналы простейших дробей.

Теперь найдем оригинал функции $\frac{p}{p^2-5p+6}$. Разложим знаменатель дроби на множители:

$$p^2-5p+6=(p-2)(p-3).$$

Тогда

$$\frac{p}{(p-2)(p-3)}=\frac{A^{\backslash p-3}}{p-2}+\frac{B^{\backslash p-2}}{p-3}.$$

Найдем коэффициенты A и B с использованием соотношения

$$p = A(p-3) + B(p-2)$$

или

$$p = Ap - 3A + Bp - 2B$$

для любого значения p. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях p, получаем:

$$\begin{array}{c|ll} p^1 & 1 = A + B & \Rightarrow \quad A = 1 - B, \\ p^0 & 0 = -3A - 2B & 0 = -3(1-B) - 2B. \end{array}$$

Следовательно,

$$0 = -3 + 3B - 2B \quad \Rightarrow \quad B = 3,\ A = 1 - 3 = -2.$$

Тогда

$$\frac{p}{(p-2)(p-3)} = \frac{-2}{p-2} + \frac{3}{p-3} \ \div\!\!\rightarrow\ -2e^{2t} + 3e^{3t}.$$

6) Найдем оригинал функции $\dfrac{p}{(p-2)^2(p^2+1)}$. Разложим выражение на простейшие дроби:

$$\frac{p}{(p-2)^2(p^2+1)} = \frac{A^{\backslash (p-1)(p^2+1)}}{p-1} + \frac{B^{\backslash p-2}}{(p-1)^2} + \frac{Cp + D^{\backslash (p-1)^2}}{p^2+1}.$$

Значения A, B, C и D находим из соотношения

$$p = A(p-1)(p^2+1) + B(p^2+1) + (Cp+D)(p-1)^2$$

или

$$p = Ap^3 - Ap^2 + Ap - A + Bp^2 + B + Cp^3 - 2Cp^2 + Cp + Dp^2 - 2Dp + D.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях p

$$\begin{array}{c|l} p^3 & 0 = A + C, \\ p^2 & 0 = -A + B - 2C + D, \\ p^1 & 1 = A + C - 2D, \\ p^0 & 0 = -A + B + D. \end{array}$$

Получаем, что

$$C = -A$$

и

$$\begin{cases} 0 = -A + B - 2(-A) + D, \\ 1 = A + (-A) - 2D, \\ 0 = -A + B + D. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\begin{cases} 0 = A + B + D, \\ 1 = -2D, \\ 0 = -A + B + D. \end{cases} \Rightarrow D = -\frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 0 = A + B - \frac{1}{2}, \\ 0 = -A + B - \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Складывая последние два уравнения, получаем

$$0 = 2B - 1 \quad \Rightarrow \quad B = +\frac{1}{2},\ A = 0,\ C = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{p}{(p-2)^2(p^2+1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(p-1)^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p^2+1} \div \frac{1}{2}te^t - \frac{1}{2}\sin t.$$

4. Решение дифференциальных уравнений операционным методом

Нахождение изображения для дифференциального уравнения. Чтобы найти изображение для линейного дифференциального уравнения, нужно найти с помощью формулы (2) изображения всех производных, входящих в уравнение, и изображение правой части уравнения с помощью таблицы.

Пример 1. Найти изображение уравнения

$$y'' - 8y' + 7y = 3\cos t, \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 2.$$

Находим изображения производных с помощью свойства дифференцирования оригинала:

$$y(t) \div \overline{y}(p),$$

$$y'(t) \div p\overline{y}(p) - y(0) = p\overline{y}(p) - 1,$$

$$y''(t) \div p^2\overline{y}(p) - py(0) - y'(0) = p^2\overline{y}(p) - p - 2.$$

Находим изображение правой части уравнения по таблице изображений

$$3\cos(t) \div 3 \cdot \frac{1}{p^2+1} = \frac{3}{p^2+1}.$$

Подставляем найденные изображения в уравнение

$$p^2\overline{y}(p) - p - 2 - 8(p\overline{y}(p) - 1) + 7\overline{y}(p) = \frac{3}{p^2+1}.$$

Чтобы решить дифференциальное уравнение операционным методом, необходимо:

- найти изображения правой и левой частей уравнения;
- выразить из полученного уравнения $\overline{y}(p)$;
- по найденному изображению $\overline{y}(p)$ найти оригинал при помощи таблицы.

Пример 2. Решить дифференциальное уравнение операционным методом

$$y'' - 2y' + y = 0, \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$$

Перейдем к изображениям

$$p^2\overline{y}(p) - py(0) - y'(0) - 2(p\overline{y}(p) - y(0)) + \overline{y}(p) = 0,$$

$$p^2\overline{y}(p) - 1 - 2p\overline{y}(p) + \overline{y}(p) = 0,$$

$$p^2\overline{y}(p) - 2p\overline{y}(p) + \overline{y}(p) = 1,$$

$$\overline{y}(p) = \frac{1}{p^2 - 2p + 1},$$

$$\overline{y}(p) = \frac{1}{(p-1)^2}.$$

Следовательно,

$$y(t) = te^t.$$

Пример 3. Найти общее решение дифференциального уравнения операционным методом

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

В качестве начальных условий возьмем произвольные константы $y(0) = c_1$, $y'(0) = c_2$. Находим изображение данного уравнения:

$$p^2\overline{y}(p) - py(0) - y'(0) - 3(p\overline{y}(p) - y(0)) + 2\overline{y}(p) = 0$$

или

$$p^2\overline{y}(p) - pc_1 - c_2 - 3p\overline{y}(p) + 3c_1 + 2\overline{y}(p) = 0.$$

Откуда

$$\overline{y}(p) = \frac{c_2 + pc_1 - 3c_1}{p^2 - 3p + 2}.$$

Разложим знаменатель полученной дроби на множители, затем разложим дробь на сумму простейших дробей:

$$\frac{c_2 + pc_1 - 3c_1}{p^2 - 3p + 2} = \frac{c_2 + pc_1 - 3c_1}{(p-1)(p-2)} = \frac{A^{\backslash p-2}}{p-1} + \frac{B^{\backslash p-1}}{(p-2)}.$$

Получим:

$$c_1 p + c_2 - 3c_1 = Ap - 2A + Bp - B,$$

откуда

$$\begin{cases} A + B = c_1, \\ -2A - B = c_2 - 3c_1. \end{cases}$$

Решая данную систему, получаем

$$\begin{cases} A = 2c_1 - c_2, \\ B = -c_1 + c_2. \end{cases}$$

Используя таблицу изображений, получаем общее решение дифференциального уравнения:

$$y(t) = (2c_1 - c_2)e^t + (-c_1 + c_2)e^{2t}.$$

Пример 4. Решить дифференциальное уравнение операционным методом

$$y'' - 2y' - 3y = e^{3t}, \qquad y(0) = 0, \ \ y'(0) = 0.$$

Переходим к изображениям

$$p^2\overline{y}(p) - py(0) - y'(0) - 2(p\overline{y}(p) - y(0)) - 3\overline{y}(p) = \frac{1}{p-3},$$

или

$$p^2\overline{y}(p) - 2p\overline{y}(p) - 3\overline{y}(p) = \frac{1}{p-3}.$$

Таким образом

$$\overline{y}(p) = \frac{1}{(p+1)(p-3)^2}.$$

Разложим правую часть данного выражения на простейшие дроби:

$$\frac{1}{(p+1)(p-3)^2} = \frac{A}{(p-3)^2} + \frac{B}{p-3} + \frac{C}{(p+1)}.$$

После приведения правой части к общему знаменателю получим:

$$1 = A(p+1) + B(p-3)(p+1) + C(p-3)^2.$$

Решим систему:

$$\begin{cases} B + C = 0, \\ A - 2B - 6C = 0, \\ A - 3B + 9C = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A - 2B - 6C = 0, \\ B + C = 0, \\ B - 15C = -1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 1/16, \\ B = -1/16, \\ A = 1/4. \end{cases}$$

Получаем, что

$$\overline{y}(p) = \frac{1}{4}\frac{1}{(p-3)^2} - \frac{1}{16}\frac{1}{p-3} + \frac{1}{16}\frac{1}{(p+1)}.$$

Откуда

$$y(t) = \frac{1}{4}te^{3t} - \frac{1}{16}e^{3t} + \frac{1}{16}e^{-t}.$$

Пример 5. Найти решение дифференциального уравнения операционным методом

$$y'' - 3y' + 2y = te^t \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 3.$$

Находим изображения правой и левой частей уравнения:

$$p^2\overline{y}(p) - p - 3 - 3(p\overline{y}(p) - 1) + 2\overline{y}(p) = \frac{1}{(p-1)^2}.$$

Из полученного соотношения выражаем $\overline{y}(p)$

$$p^2\overline{y}(p) - 3p\overline{y}(p) + 2\overline{y}(p) - p = \frac{1}{(p-1)^2}.$$

Тогда

$$\overline{y}(p)(p^2 - 3p + 2) = \frac{1}{(p-1)^2} + p.$$

Получаем, что

$$\overline{y}(p) = \frac{1 + p(p-1)^2}{(p-1)^2(p^2 - 3p + 2)}$$

или

$$\overline{y}(p) = \frac{p^3 - 2p^2 + p + 1}{(p-1)^2(p^2 - 3p + 2)}.$$

Находим оригинал функции $\overline{y}$. Знаменатель дроби раскладываем на множители:

$$(p-1)^2(p^2 - 3p + 2) = (p-1)^2(p-1)(p-2) = (p-1)^3(p-2).$$

Раскладываем на простейшие дроби:

$$\frac{p^3-2p^2+p+1}{(p-1)^2(p^2-3p+2)} = $$
$$= \frac{A^{\backslash(p-1)^3}}{p-2} + \frac{B^{\backslash(p-1)^2(p-2)}}{p-1} + \frac{C^{\backslash(p-1)(p-2)}}{(p-1)^2} + \frac{D^{\backslash(p-2)}}{(p-1)^3}.$$

Получаем:

$$p^3-2p^2+p+1 = A(p-1)^3 + B(p-1)^2(p-2) + C(p-1)(p-2) + D(p-2)$$

при любом значении p, или

$$\begin{aligned} p^3-2p^2+p+1 &= Ap^3 - 3Ap^2 + 3Ap - A + Bp^3 - 4Bp^2 + \\ &+ 5Bp - 2B + Cp^2 - 3Cp + 2C + Dp - 2D. \end{aligned}$$

Составляем систему:

$$\begin{array}{c|l} p^3 & 1 = A + B \quad \Leftrightarrow \quad A = 1 - B, \\ p^2 & -2 = -3A - 4B + C, \\ p^1 & 1 = 3A + 5B - 3C + D, \\ p^0 & 1 = -A - 2B + 2C - 2D. \end{array}$$

Решаем данную систему

$$\begin{cases} A = 1 - B, \\ -2 = -3(1-B) - 4B + C, \\ 1 = 3(1-B) + 5B - 3C + D, \\ 1 = -(1-B) - 2B + 2C - 2D. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 - B, \\ B = C - 1, \\ 1 = 2B - 3C + D, \\ 2 = -B + 2C - 2D. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 - B, \\ B = C - 1, \\ C = D, \\ 2 = -B + 2C - 2D. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 - B, \\ B = C - 1, \\ C = D, \\ B = -2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 3, \\ B = -2, \\ C = -1, \\ D = -1. \end{cases}$$

Получаем

$$\overline{y}(p) = \frac{p^3-2p^2+p+1}{(p-1)^2(p^2-3p+2)} = \frac{3}{p-2} - \frac{2}{p-1} - \frac{1}{(p-1)^2} - \frac{1}{(p-1)^3} \risingdotseq$$
$$\risingdotseq 3e^{2t} - 2e^t - te^t - \frac{1}{2}t^2e^t.$$

Решение дифференциального уравнения записывается в виде

$$y(t) = 3e^{2t} - 2e^t - te^t - \frac{1}{2}t^2e^t.$$

5. Задания для самостоятельного решения

Задание 1. Найти общее решение дифференциального уравнения операционным методом.

1) $y'' - 5y' + 6y = 0$.
2) $y'' - y' - 6y = 0$.
3) $y'' - 3y' - 10y = 0$.
4) $y'' + 2y' - 8y = 0$.
5) $y'' - 7y' + 12y = 0$.
6) $y'' + y' - 12y = 0$.
7) $y'' + 3y' - 18y = 0$.
8) $y'' - 2y' + 15y = 0$.
9) $y'' - y' - 30y = 0$.
10) $y'' + 2y' - 15y = 0$.
11) $y'' - 3y' - 18y = 0$.
12) $6y'' - y' - y = 0$.
13) $6y'' + 5y' + 6y = 0$.
14) $y'' + 3y' - 4y = 0$.
15) $y'' - 7y' + 12y = 0$.
16) $y'' - 10y' - 11y = 0$.
17) $2y'' - y' - y = 0$.
18) $2y'' - y' - 3y = 0$.
19) $6y'' + y' - y = 0$.
20) $y'' + y' - 30y = 0$.
21) $2y'' + y' - 3y = 0$.
22) $6y'' - 5y' + 6y = 0$.
23) $2y'' + y' - y = 0$.
24) $y'' - 2y' - 8y = 0$.
25) $y'' - y' - 12y = 0$.

Задание 2. Найти общее решение дифференциального уравнения операционным методом.

1) $y'' - 2y' + y = 0$.
2) $y'' + 2y' + y = 0$.
3) $y'' - 4y' + 4y = 0$.
4) $y'' + 4y' + 4y = 0$.
5) $y'' - 6y' + 9y = 0$.
6) $y'' + 6y' + 9y = 0$.
7) $y'' - 8y' + 16y = 0$.
8) $y'' + 8y' + 16y = 0$.
9) $y'' - 10y' + 25y = 0$.
10) $y'' + 10y' + 25y = 0$.
11) $4y'' + 4y' + y = 0$.
12) $4y'' - 4y' + y = 0$.
13) $9y'' - 6y' + y = 0$.
14) $9y'' + 6y' + y = 0$.
15) $4y'' - 12y' + 9y = 0$.
16) $4y'' + 12y' + 9y = 0$.
17) $25y'' - 10y' + y = 0$.
18) $25y'' + 10y' + y = 0$.
19) $36y'' - 12y' + y = 0$.
20) $36y'' + 12y' + y = 0$.
21) $9y'' + 24y' + 16y = 0$.
22) $9y'' - 24y' + 16y = 0$.
23) $9y'' - 12y' + 4y = 0$.
24) $9y'' + 12y' + 4y = 0$.
25) $25y'' - 20y' + 4y = 0$.

Задание 3. Найти общее решение дифференциального уравнения операционным методом.

1) $y'' - 2y' + 2y = 0.$
2) $y'' - 6y' + 10y = 0.$
3) $y'' - 2y' + 5y = 0.$
4) $y'' + 2y' + 2y = 0.$
5) $y'' + 2y' + 5y = 0.$
6) $y'' + 6y' + 10y = 0.$
7) $y'' + 4y' + 8y = 0.$
8) $y'' - 6y' + 13y = 0.$
9) $y'' - 4y' + 8y = 0.$
10) $y'' + 6y' + 13y = 0.$
11) $y'' - 4y' + 5y = 0.$
12) $y'' - 2y' + 10y = 0.$
13) $y'' + 2y' + 17y = 0.$
14) $y'' + 2y' + 10y = 0.$
15) $y'' + 4y' + 5y = 0.$
16) $y'' - 2y' + 17y = 0.$
17) $y'' - 4y' + 29y = 0.$
18) $y'' - 2y' + 26y = 0.$
19) $y'' - 10y' + 29y = 0.$
20) $y'' - 18y' + 18y = 0.$
21) $y'' - 10y' + 26y = 0.$
22) $y'' - 18y' + 18y = 0.$
23) $y'' + 2y' + 26y = 0.$
24) $y'' + 4y' + 29y = 0.$
25) $y'' + 10y' + 26y = 0.$

Задание 4. Решить операционным методом задачу Коши.
1) $y'' - 8y' + 16y = e^{4x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
2) $y'' + 4y' + 5y = 8\cos x$, $y(0) = y'(0) = 0$.
3) $y'' + 5y' = e^{-x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
4) $y'' + 2y' + 10y = x$, $y(0) = y'(0) = 0$.
5) $y'' - y' = 2 - x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
6) $2y'' + y' - y = 2e^{x}$, $y(0) = y'(0) = 0$.
7) $y'' + 36y = 6\sin 6x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.
8) $y'' - 4y' = x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
9) $y'' - 2y' = e^{x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
10) $y'' - y' = 2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.
11) $y'' - 2y' - 3y = 2x$, $y(0) = y'(0) = 0$.
12) $y'' + 4y = 4e^{-x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
13) $y'' - 6y' + 9y = -12x$, $y(0) = y'(0) = 0$.
14) $y'' + 9y' = 18e^{3x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$.
15) $y'' - y = 2(1 - x)$, $y(0) = y'(0) = 0$.
16) $y'' + y = \sin 3x$, $y(0) = y'(0) = 0$.
17) $y'' + 4y = x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
18) $y'' + y' - 2y = 1$, $y(o) = 0$, $y'(o) = 1$.
19) $y'' - 2y' + 10y = 6x$, $y(o) = 0$, $y'(o) = 1$.
20) $4y'' + 16y' + 15y = 4x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
21) $y'' - 4y' + 5y = e^{2x}$, $y(0) = y'(0) = 0$.
22) $y'' + 5y' + 6y = x^2$, $y(o) = 0$, $y'(o) = 2$.
23)$y'' - 2y' + 6y = \cos x$, $y(0) = y'(0) = 0$.
24) $y'' + 4y' + 3y = e^{x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
25) $y'' - 3y' + 2y = \sin x$, $y(0) = y'(0) = 0$.

Библиографический список

1. Данко П. Е., Попов А. Г. *Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть II.* — М.: Высшая школа, 1974.

2. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. *Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть II.* — М.: Высшая школа, 2000.

3. Запорожец Г. И. *Руководство к решению задач по математическому анализу.* — М.: Высшая школа, 1966.

4. Свешников А. Г., Тихонов А. Н. *Теория функций комплексной переменной.* — М.: Физматлит, 2005.

5. Филиппов А. Ф. *Сборник задач по дифференциальным уравнениям.* — Ижевск: НИЦ РХД, 2000.

6. Лоскутов А. В., Синицын И. Е., Орлова С. Н., Султанов С. Р. *Интегралы. Дифференциальные уравнения. Операционное исчисление: методические указания и контрольные задания.* — Рязань, Рязан. гос. радиотехн. ун-т, 2006.

Содержание