ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ РАСТИТЕЛЬНЫХ ПОЛИМЕРОВ

Кафедра высшей математики

МАТЕМАТИКА

Контрольная работа № 4
для студентов заочного отделения
ускоренной формы обучения

Методические указания

Санкт-Петербург
2005

УДК 51(07.07)

Математика. Контрольная работа № 4 для студентов заочного отделения ускоренной формы обучения: Методические указания /
Сост. Н.К.Брыксенкова, И.Ю.Малова, И.Э.Марусина, Т.А.Забавникова; ГОУВПО СПбГТУРП. СПб., 2005. 12с.

Настоящие методические указания содержат необходимые теоретические положения и решения типовых задач в соответствии с требованиями контрольной работы № 4. Предназначены для студентов заочного отделения ускоренной формы обучения.

Рецензент: зав.кафедрой прикладной и вычислительной математики ГОУВПО СПбГТУРП, д-р техн.наук, проф. О.К.Федоров.

Подготовлены и рекомендованы к печати кафедрой высшей математики ГОУВПО Санкт-Петербургского государственного технологического университета растительных полимеров (протокол № 8 от 14 апреля 2005г.).

Утверждены к изданию методической комиссией факультета промышленной энергетики ГОУВПО СПбГТУРП (протокол № 8 от 12 мая 2005 г.).

Редактор и корректор М.А.Полторак
Техн.редактор Л.Я.Титова

Подп.к печати 10.01.06. Формат 60x84/16. Бумага тип №1.
Печать офсетная. Объем 0,75 печ.л.0,75 уч.-изд.л.
Тираж 50 экз. Изд.№ 123. Цена «С»123. Заказ 1245.

Ризограф ГОУВПО Санкт-Петербургского государственного технологического университета растительных полимеров, 198095, Санкт-Петербург, ул. Ивана Черных, 4.

Часть 1

Дифференциальные уравнения

Выполнение заданий № 321-330 предполагает знание способов решения однородных дифференциальных уравнений 1го порядка и линейных дифференциальных уравнений 1го порядка.

Однородные дифференциальные уравнения 1го порядка

Дифференциальное уравнение

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{1}$$

называется однородным, если P(x,y) и Q(x,y) – однородные функции одинакового измерения.

Функция f(x,y) называется однородной измерения m, если выполняется

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m f(x,y) \tag{2}$$

Однородное дифференциальное уравнение может быть приведено к виду

$$y' = f(\frac{y}{x}) \tag{3}$$

(в правой части – однородная функция нулевого измерения).

С помощью подстановки y = Ux однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными по отношению к новой неизвестной функции U.

Пример 1.

Выяснить, является ли функция

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy \tag{4}$$

однородной, и если да, то какого порядка измерения.

Решение

Проверим выполнение формулы (2), для этого подставим соответственно λx и λy:

$$f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^2 + (\lambda y)^2 - 2(\lambda x)(\lambda y) =$$
$$= \lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2 - 2\lambda^2 xy = \lambda^2(x^2 + y^2 - 2xy)$$

Следовательно, функция (4) является однородной функцией нулевого измерения.

Пример 2.

Проинтегрировать уравнение

$$y - xy' = y\ln\frac{x}{y} \tag{5}$$

Решение

Вначале преобразуем уравнение (5) к виду (3) – убедимся, что данное

уравнение однородное. Для этого перенесем у слева направо и разделим обе части (5) на (-х), получим

$$y' = \frac{y}{x}\left(1 - \ln\frac{x}{y}\right),$$

используя свойство логарифма $(\ln\frac{1}{b} = -\ln b)$, запишем

$$y' = \frac{y}{x}\left(1 + \ln\frac{y}{x}\right) \quad , \qquad (6)$$

теперь правая часть представляет собой функцию от аргумента $(\frac{y}{x})$. Итак,

уравнение (5) приводится к виду (3) и является однородным.
Введем подстановку у = Ux, откуда $y' = U'x + U$. Сделаем замену переменной (новая искомая функция – U) в уравнении (6), получим

$$U'x + U = U(1 + \ln U) \text{ или}$$

$$U'x = U\ln U \qquad (7)$$

Уравнение (7) - уравнение с разделяющимися переменными.
Чтобы проинтегрировать (7), запишем его в дифференциальной форме

$$x\frac{dU}{dx} = U\ln U \qquad (8)$$

и разделим переменные. Для этого умножим обе части (8) на dx:
$xdU = U\ln U dx$ и разделим на $(x \cdot U \cdot \ln U)$:

$\frac{dU}{U\ln U} = \frac{dx}{x}$ - переменные разделены.

Проинтегрируем левую часть по U, а правую по х:

$$\int\frac{dU}{U\ln U} = \int\frac{dx}{x} + \ln C .$$

Здесь для удобства в дальнейших выкладках постоянная интегрирования записана в виде (lnC). Отметим, что при нахождении решений дифференциальных уравнений произвольную постоянную интегрирования принято записывать со стороны независимой переменной (обычно – х).
Результатом интегрирования будет

$$\ln|\ln U| = \ln|x| + \ln C .$$

Потенцируя и исключая вспомогательную переменную U, найдем искомый общий интеграл

$$|\ln U| = C|x|; U = e^{cx} .$$

Окончательно общее решение уравнения (5) имеет вид

$$y = x \cdot e^{cx}.$$

Линейные дифференциальные уравнения 1^го^ порядка

Уравнение вида

$$y' + P(x)y = Q(x) \tag{9}$$

называется линейным. (Искомая функция y и ее первая производная y' входят в первых степенях, не перемножаясь между собой).

Если $Q(x) \neq 0$, то уравнение (1.1) называется линейным неоднородным, а если $Q(x) \equiv 0$ - линейным однородным.

Общее решение линейного однородного уравнения $y' + P(x)y = 0$ получается разделением переменных:

$$\frac{dy}{dx} = -P(x)y; \quad dy = -P(x)ydx; \quad \frac{dy}{y} = -P(x)dx; \quad \int \frac{dy}{y} = -\int P(x)dx;$$

$\ln y = -\int P(x)dx + \ln C$ и, наконец, $y = Ce^{-\int P(x)dx}$,

где C – произвольная постоянная.

Общее решение линейного неоднородного уравнения можно найти исходя из общего решения соответствующего однородного уравнения методом Лагранжа, варьируя произвольную постоянную, т.е. полагая

$$y = C(x)e^{-\int P(x)dx},$$

где C(x) – некоторая, подлежащая определению, дифференцируемая функция от x (этот способ рекомендуется проработать самостоятельно).

Для решения линейного неоднородного уравнения (9) можно также применить подстановку Бернулли

$$y = UV, \tag{10}$$

где U и V – две вспомогательные, подлежащие определению, функции. С помощью подстановки (10) линейное неоднородное уравнение 1^го^ порядка сводится к двум уравнениям с разделяющимися переменными относительно каждой из вспомогательных функций.

Если $y = UV$, то $y' = U'V + UV'$.

Подставим выражения для y и y' в уравнение (9)

$$U'V + UV' + P(x)UV = Q(x). \tag{11}$$

Сгруппируем члены в (11)

$$U'V + U(V' + P(x)V) = Q(x) \tag{12}$$

и, пользуясь тем, что одна из неизвестных функций (например, V) может быть выбрана произвольно (так как лишь произведение UV должно удовлетворять уравнению(9)), потребуем, чтобы выражение в скобках

$$V' + P(x)V = 0\,. \tag{13}$$

Последнее равенство – уравнение с разделяющимися переменными относительно V. За V принимают любое частное решение (13).
Из (12) найдем U (выражение в скобках равно 0 – получается уравнение с разделяющимися переменными для U). Окончательно, из (10) можно найти y.
Пример.
Проинтегрировать уравнение

$$y' + 2xy = xe^{-x^2}\,. \tag{14}$$

Решение
Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение 1^го^ порядка.
Сделаем подстановку Бернулли
$y = UV$, тогда $y' = U'V + UV'$.
Подставим y и y', выраженные через U, V, U', V' в уравнение (14)
$U'V + \underline{UV'} + \underline{2xUV} = xe^{-x^2}$.
Из подчеркнутых членов вынесем U:
$U'V + U(V' + 2xV) = xe^{-x^2}$.
Найдем V, потребовав, чтобы
$V' + 2xV = 0$.
Это уравнение с разделяющимися переменными относительно неизвестной функции V. Разделим в нем переменные:

$$\frac{dV}{dx} = -2xV;$$

$$\frac{dV}{V} = -2xdx.$$

интегрируя, получим

$$\ln|V| = -x^2,$$

$$V = e^{-x^2}$$

(константа интегрирования отсутствует – в данном случае C=0, так как нам достаточно найти одно частное решение). Подставляя V, получаем

$$U'e^{-x^2} = xe^{-x^2},$$

сократив на $e^{-x^2}, (e^{-x^2} \neq 0)$,
можно записать
$U' = x$ - это уравнение с разделяющимися переменными для U.
Далее,

$$\frac{dU}{dx} = x.$$

$$dU = xdx.$$

$$U = \frac{x^2}{2} + C.$$

Итак, искомое решение линейного неоднородного дифференциального уравнения $1^{го}$ порядка (14)

$$y(x) = (\frac{x^2}{2} + C) \cdot e^{-x^2}.$$

Выполнение заданий № 341-350 предполагает умение интегрировать линейные неоднородные дифференциальные уравнения $2^{го}$ порядка с постоянными коэффициентами.

Общие сведения

1.Однородные уравнения

Линейное дифференциальное уравнение $2^{го}$ порядка с постоянными коэффициентами p и q без правой части (или однородное) имеет вид

$$y'' + py' + qy = 0. \qquad (15)$$

Для нахождения частных решений уравнения (10) составляется характеристическое уравнение

$$k^2 + pk + q = 0,$$

которое получается из (15) заменой y'' через $k^2, y' - k$, сама функция заменяется единицей.

Если k_1 и k_2 – корни характеристического уравнения, то общее решение уравнения (15) записывается в одном из следующих трех видов:

$$y_0 = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}, \qquad (16)$$

если k_1 и k_2 вещественны и $k_1 \neq k_2$;

$$y_0 = e^{kx}(C_1 x + C_2), \text{ если } k_1 = k_2 = k; \qquad (17)$$

$$y_0 = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x), \textit{если} \qquad (18)$$

$k_1 = \alpha + i\beta, k_2 = \alpha - i\beta$; α, β – вещественные $(\beta \neq 0)$, i – мнимая единица $(i \equiv \sqrt{-1})$.

2.Неоднородные уравнения

Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения

$$y'' + py' + qy = f(x), f(x) \neq 0.$$

можно записать в виде

$$y = y_0 + y_{rn}, \qquad (19)$$

где y_0 - общее решение соответствующего однородного уравнения, определяемое по формулам (16-18), y_{rn} – частное решение данного уравнения (19).

Функция $y_{гн}$ может быть найдена методом неопределенных коэффициентов в следующих простейших случаях:

$$\text{а) } f(x) = e^{ax} \cdot P_n(x), \tag{20}$$

где $P_n(x)$ – многочлен степени x от n.

Если a не является корнем характеристического уравнения, то полагают

$y_{гi} = e^{ax} \cdot Q_n(x)$,

где $Q_n(x)$ – многочлен степени n с неопределенными коэффициентами.

Если a – корень характеристического уравнения, то

$$y_{гн} = x^r \cdot e^{ax} \cdot Q_n(x), \tag{21}$$

где r – кратность корня a (r=1 или r=2);

$$\text{б) } f(x) = e^{ax}\left[P_n(x)\cos bx + Q_m \sin bx\right].$$

Если $(a \pm ib)$ не является корнем характеристического уравнения, то полагают

$$y_{гн} = e^{ax}\left[S_N(x)\cos bx + T_N \sin bx\right], \tag{22}$$

где $S_N(x)$ и $T_N(x)$ – многочлены степени $N = \max\{m,n\}$

Если $a \pm ib$ – корень характеристического уравнения, то

$$y_{гн} = xe^{ax}\left[S_N(x)\cos bx + T_N(x)\sin bx\right], \tag{23}$$

Пример.

Найти общее решение уравнения

$2y'' - y' - y = 4xe^{2x}$.

Решение

Составляем характеристическое уравнение

$2k^2 - k - 1 = 0$.

его корни $k_1 = 1$ и $k_2 = \frac{1}{2}$

Общее решение соответствующего однородного уравнения (см.(11))

$y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{-\frac{x}{2}}$.

Правая часть данного уравнения

$f(x) = 4xe^{2x} = e^{ax} P_N(x)$, т.е.

$a = 2; (\neq k_1, \neq k_2), n = 1$.

Следовательно,

$y_{гн} = e^{2x}(Ax + B)$,

$r = 0, (Ax + B)$ – запись многочлена 1 степени в общем виде, A и B подлежат определению.

Чтобы найти A и B, дифференцируем $y_{гн}$ два раза:

$y'_{гi} = 2e^{2x}(Ax + B) + e^{2x} \cdot A = e^{2x}(2Ax + A + 2B)$;

$y''_{гi} = 2e^{2x}(2Ax + A + 2B) + e^{2x} \cdot 2A = e^{2x}(4Ax + 4B + 4A)$.

подставляя $y''_{rn}, y'_{rn}, y_{rn}$ в данное уравнение, получим

$$2e^{2x}(4Ax+4B+4A)-e^{2x}(2Ax+A+2B)-e^{2x}(Ax+B)=4xe^{4x}.$$

Сократим обе части последнего равенства на $e^{2x}>0$:

$$2(4Ax+4B+4A)-(2Ax+A+2B)-(Ax+B)=4x.$$

Группируя слагаемые левой части по степеням x, получим равенство 2 многочленов, из которого определим неизвестные A и B, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях (условие равенства 2 многочленов):

$$x(8A-2A-A)+(8B+8A-A-2B-B)=4x$$

или

$$5Ax+(5B-7A)=4x$$

x^1 | 5A=4

x^0 | 5B-7A=0,

отсюда $A=\dfrac{4}{5};B=-\dfrac{28}{25};y_{rn}=e^{2x}(\dfrac{4}{5}x-\dfrac{28}{25})$.

Тогда общее решение данного уравнения будет

$$y=C_1e^x+C_2e^{-\frac{x}{2}}+e^{2x}(\frac{4}{5}x-\frac{28}{25}).$$

Часть 2

Применение рядов к вычислению определенных интегралов

Для решения задач № 441-450 необходимо разложить подинтегральную функцию в ряд, затем проинтегрировать почленно.

Пример 1.

Вычислить

$\int\limits_0^{0,1}\dfrac{\ln(1+x)}{x}dx$ с точностью до 0,001.

Заменив в подинтегральном выражении ln(1+x) его разложением в степенной ряд, получим:

$$\int_0^{0,1}\frac{\ln(1+x)}{x}dx=\int_0^{0,1}\frac{x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\dots}{x}dx=\int_0^{0,1}(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}x^3+\dots)dx=$$

$$=\left[x-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{9}x^3-\frac{1}{16}x^4+\dots\right]_0^{0,1}=0,1-\frac{1}{4}\cdot 0,01+\frac{1}{9}\cdot 0,001-\dots\approx 0,098.$$

Пример 2.

Вычислить

$\int_0^1 e^{-x^2}dx$ с точностью до 0,001.

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx=\int_0^1(1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\dots)dx=\left[x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{2\cdot 5}-\frac{x^7}{6\cdot 7}+\frac{x^9}{24\cdot 9}-\frac{x^{11}}{120\cdot 11}\right]_0^1\approx 1-0,3333+0,1000-$$

$$-0,0238+0,0046-0,0008+\dots\approx 0,747.$$

Здесь использовали разложение в степенной ряд функции e^t, где $t=-x^2$.

Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью рядов (№451-460)

В некоторых случаях, когда интегрирование дифференциального уравнения в элементарных функциях невозможно, решение такого уравнения ищут в виде степенного ряда

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(x-x_0)^n.$$

Неопределенные коэффициенты Cn (n=0;1;2,…) находят подстановкой в уравнение и приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях разности $x-x_0$ в обеих частях полученного равенства. В тех случаях, когда для уравнения $y'=f(x,y)$ требуется решить задачу Коши при начальном условии $y(x_0)=y_0$, решения можно искать с помощью ряда Тейлора:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

где $\begin{aligned} y(x_0) &= y_0 \\ y'(x_0) &= f(x_0, y_0) \end{aligned}$,

а дальнейшие производные $y^{(n)}(x_0)$ находят последовательным дифференцированием исходного уравнения и подстановкой в результат дифференцирования вместо $x, y, y'...$ значений $x_0, y_0, y'_0...$

Пример.

Найти четыре первых, отличных от нуля, члена разложения в степенной ряд решения y=y(x) дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющего начальному условию $y(0) = y_0$:

$$y' = x^2 + y^2;$$

$$y(0) = 1.$$

Из уравнения и начальных условий: $y'(0) = 0^2 + 1^2 = 1$.

Дифференцируем данное уравнение:

$$y'' = 2x + 2yy',$$

$$y''' = 2 + 2(y')^2 + 2yy''.$$

Полагаем x=0 и используем y(0)=1; $y'(0) = 1$, последовательно находим

$$y''(0) = 2;$$

$$y'''(0) = 8.$$

Искомое решение имеет вид

$$y = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{2x^2}{2!} + \frac{8x^3}{3!} + ...$$

При решении задач рекомендуется пользоваться следующим разложением элементарных функций.

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + ... + \frac{z^n}{n!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

$$-\infty < z < +\infty.$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + ... + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!},$$

$$-\infty < z < +\infty.$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + ... + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$-\infty < z < +\infty.$$

$$(1+z)^{\alpha}=1+\alpha z+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^{2}+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots.(\alpha-n+1)}{n!}z^{n}+\ldots=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}z^{n},$$

при

$\alpha\geq 0;$

$-1\leq z\leq 1;$

при

$-1<m<0$

$-1<z\leq 1;$

при

$\alpha<-1$

$-1<z<1.$

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^{2}-z^{3}+\ldots+(-1)^{n}z^{n}+\ldots$$

$|z|<1.$

Библиографический список

Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальные уравнения Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. М.: Наука,1985.

Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Задачник. М.: Наука,1987.

Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. М.: Наука,1989. Т. 1-3

Пискунов Н.С. Дифференциальные и интегральные исчисления для втузов.М.: Наука,1985. Т.1,2.

Сборник задач по математике для втузов / Под ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича. М.: Наука,1987. Ч.1-4.