

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

**Санкт-Петербургский государственный технологический
университет растительных полимеров**

**ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО
УПРАВЛЕНИЯ
(Дискретные системы автоматического
регулирования)**

**Методические указания
для выполнения контрольной работы № 4
для студентов заочной формы обучения**

Санкт-Петербург
2009

32-21

Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение высшего
профессионального образования

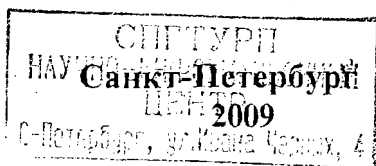
«Санкт-Петербургский государственный технологический
университет растительных полимеров»

Кафедра информационно - измерительных технологий и
систем управления

ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

(Дискретные системы автоматического
регулирования)

Методические указания для выполнения
контрольной работы № 4
для студентов заочной формы обучения



НАУЧНО-ИНФОРМАЦИОННЫЙ ЦЕНТР САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА РАСТИТЕЛЬНЫХ ПОЛИМЕРОВ

УДК 62-5(07)

Теория автоматического управления (Дискретные системы автоматического регулирования): методические указания для выполнения контрольной работы № 4 для студентов заочной формы обучения/ сост. А.В.Черникова; ГОУВПО СПбГТУРП.- СПб., 2009. - 27 с.; ил. 13.

Методические указания предназначены студентам заочной формы обучения по направлению «Автоматизация и управление» для выполнения контрольной работы № 4, содержащей задания по построению переходных процессов и области устойчивости дискретных систем. Могут быть использованы студентами очной формы обучения при выполнении курсовой работы и при изучении соответствующих разделов курса ТАУ.

Подготовлены и рекомендованы к печати кафедрой информационно-измерительных технологий и систем управления ГОУ ВПО СПбГТУРП (протокол №2 от 24.09.2009).

Утверждены к изданию учебно-методической комиссией факультета автоматизированных систем управления технологическими процессами ГОУ ВПО СПбГТУРП (протокол №1 от 28.09.2009).

Рецензент:

профессор кафедры автоматизации химических производств Санкт – Петербургского государственного технологического института (Технического университета), д-р техн. наук Русинов Л.А.

© ГОУВПО Санкт-Петербургский
государственный технологический университет
растительных полимеров, 2009

Введение

Контрольная работа № 4 выполняется студентами заочной формы обучения в 8 семестре и включает в себя 2 задачи:

- расчет и построение переходного процесса непрерывной части дискретной системы автоматического регулирования (САР);
- расчет и построение области устойчивости для замкнутой дискретной САУ в плоскости настроек регулятора.

Варианты контрольной работы приведены в Приложении 3.

1. Расчет переходного процесса решением разностного уравнения

Рассмотрим задачу, когда требуется рассчитать переходный процесс на выходе элемента дискретной САР решением полученного разностного уравнения для заданного вида входного воздействия и построить график изменения выходного сигнала элемента.

Одним из способов **расчета переходного процесса** является **решение** соответствующего **разностного уравнения**. Чтобы получить разностное уравнение, описывающее зависимость значений выходного сигнала от его предыдущих значений и значений входного сигнала в дискретные моменты времени, необходимо выполнить ряд действий.

1. *Найти дискретную передаточную функцию элемента или системы, зависимость между выходным и входным сигналами которых необходимо получить.*

Дискретная передаточная функция элемента $W(z)$ получается из непрерывной передаточной функции $W(p)$ на основе сложного многоступенчатого преобразования $W(p) \rightarrow w(t) \rightarrow w[nT] \rightarrow W(z)$, которое включает в себя обратное p -преобразование Лапласа, замену непрерывной функции на решетчатую и прямое z -преобразование Лапласа. Однако, в ряде случаев, когда математическая модель элемента является типовой, дискретную передаточную функцию можно получить с использованием таблиц Лапласа (Приложение 2).

Обычно символ Z соответствует дискретному прямому преобразованию Лапласа, когда по решетчатой функции $w[nT]$ находят ее дискретное изображение $W(z)$. Мы же, выполняя преобразование по таблицам, будем понимать под этим символом всю цепочку преобразований непрерывной передаточной функции в дискретную передаточную функцию:

$$W(z) = Z\{W(p)\}.$$

В общем случае дискретная передаточная функция имеет вид

$$W(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_1 z + b_0}{a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \dots + a_1 z + a_0}, \quad (1)$$

где из условия физической осуществимости устройства $m \leq k$.

Заметим, что для системы управления не всегда можно получить дискретную передаточную функцию. Это зависит от вида сигнала на входе системы. В случае, когда входной сигнал дискретной системы управления является непрерывным, например, возмущающее воздействие $f(t)$, получить передаточную функцию замкнутой системы по данному воздействию невозможно. А значит нельзя получить соответствующее разностное уравнение. В этом случае для построения переходного процесса используют два подхода: разложение изображения регулируемого параметра в ряд Лорана по степеням переменной z или метод структурного моделирования, который состоит в решении системы разностных уравнений, которыми описывается замкнутая система регулирования.

2. Выполнить деление числителя и знаменателя на максимальную степень переменной z , т.е. на z^k .

Заметим, что если не производить деления на z^k , то разностное уравнение, получаемое на основе передаточной функции (1), будет связывать текущее значение выходного сигнала не с предыдущими, а с последующими значениями. В реальных системах значения выходного сигнала зависят не от будущих, а от прошлых, по отношению к моменту времени nT , значений.

Это и вызывает необходимость деления (1) на z^k .

После деления выражение (1) примет вид

$$W(z) = \frac{b_m z^{m-k} + b_{m-1} z^{m-k-1} + \dots + b_1 z^{1-k} + b_0 z^{-k}}{a_k + a_{k-1} z^{-1} + \dots + a_1 z^{-k+1} + a_0 z^{-k}} \quad (2)$$

3. Записать уравнение в изображениях.

Согласно определению передаточная функция элемента (или системы) - отношение изображения выходного сигнала к изображению входного сигнала при нулевых начальных условиях.

$$W(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

Тогда выражение (2) можно записать в виде:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_m z^{m-k} + b_{m-1} z^{m-k-1} + \dots + b_1 z^{1-k} + b_0 z^{-k}}{a_k + a_{k-1} z^{-1} + \dots + a_1 z^{-k+1} + a_0 z^{-k}} \quad (3)$$

Уравнение в изображениях получают из (3) в соответствии со свойством пропорции:

$$Y(z) \cdot (a_k + a_{k-1} z^{-1} + \dots + a_1 z^{-k+1} + a_0 z^{-k}) = X(z) \cdot (b_m z^{m-k} + b_{m-1} z^{m-k-1} + \dots + b_1 z^{1-k} + b_0 z^{-k})$$

или

$$a_k Y(z) + a_{k-1} z^{-1} Y(z) + \dots + a_1 z^{-k+1} Y(z) + a_0 z^{-k} Y(z) = b_m z^{m-k} X(z) + b_{m-1} z^{m-k-1} X(z) + \dots + b_1 z^{1-k} X(z) + b_0 z^{-k} X(z) \quad (4)$$

4. Перейти от изображений к решетчатым функциям.

Выполняется обратное z преобразование для выражения (3).

$$Z^{-1} \{a_k Y(z) + a_{k-1} z^{-1} Y(z) + \dots + a_1 z^{-k+1} Y(z) + a_0 z^{-k} Y(z)\} = Z^{-1} \{b_m z^{m-k} X(z) + b_{m-1} z^{m-k-1} X(z) + \dots + b_1 z^{1-k} X(z) + b_0 z^{-k} X(z)\}.$$

Эта процедура проводится аналогично обратному p - преобразованию.

При этом

- все изображения заменяют на соответствующие решетчатые функции $Y(z) \rightarrow y[nT]; X(z) \rightarrow x[nT];$
- все коэффициенты, согласно теореме линейности (Приложение 1) выносятся за знак преобразования;
- согласно теореме смещения (Приложение 1),

$$Z^{-1} \{z^{-m} X(z)\} = x[nT - mT].$$

С учетом вышеизложенного получаем

$$a_k y[nT] + a_{k-1} y[nT - T] + \dots + a_1 y[nT - kT + T] + a_0 y[nT - kT] = b_m x[nT + mT - kT] + b_{m-1} x[nT + mT - kT - T] + \dots + b_1 x[nT - kT + T] + b_0 x[nT - kT] \quad (5)$$

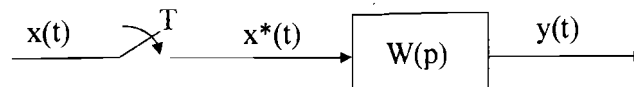
5. Записать уравнение в удобном виде.

Для этого делят коэффициенты полученного уравнения на a_k и группируют слагаемые таким образом, чтобы в левой части уравнения было значение выходного сигнала в текущий момент времени nT , а остальные слагаемые - в правой части.

$$y[nT] = -\frac{a_{k-1}}{a_k} y[nT - T] - \dots - \frac{a_1}{a_k} y[nT - kT + T] - \frac{a_0}{a_k} y[nT - kT] + \frac{b_m}{a_k} x[nT + mT - kT] + \frac{b_{m-1}}{a_k} x[nT + mT - kT - T] + \dots + \frac{b_0}{a_k} x[nT - kT]. \quad (6)$$

Чтобы решить полученное разностное уравнение и построить график переходного процесса, необходимо рассчитать значения $y[nT]$ по шагам при аргументе $n = 0, 1, 2, \dots$, известном значении периода дискретности T и известных значениях входного сигнала в дискретные моменты времени.

ПРИМЕР 1. Пусть известны модель элемента дискретной САУ в виде непрерывной передаточной функции $W(p)$, вид входного воздействия $x(t)$ и период дискретности T :



$$W(p) = \frac{-2 \cdot e^{-p}}{p \cdot (3p + 1)}, \quad x(t) = 4 \cdot I[t - 2], \quad T = 1.$$

Требуется рассчитать переходный процесс на выходе элемента и построить график.

РЕШЕНИЕ.

1. Найдем дискретную передаточную функцию элемента по непрерывной передаточной функции:

$$W(z) = Z\{W(p)\} = Z\left\{\frac{-2 \cdot e^{-p}}{p(3p+1)}\right\}$$

Чтобы выполнить преобразование по таблицам, необходимо привести выражение в фигурных скобках к табличному виду (Приложение 2), в данном случае это выражение $\frac{a}{p(p+a)}$.

Выполним следующие преобразования:

- в соответствии с теоремой смещения (Приложение 1) изображение решетчатой функции с запаздыванием на целое число m периодов квантования помножается на z^{-m} , т.е. $W(p) \cdot e^{-\tau p} \rightarrow w(t-\tau) \rightarrow w[nT-mT] \rightarrow W(z) \cdot z^{-m}$;

где $m = \frac{\tau}{T}$, τ – запаздывание элемента, T – период дискретности;

- в знаменателе выносим за скобку множитель перед переменной p ;
- в соответствии с теоремой линейности (Приложение 1) выносим коэффициент за знак преобразования.

Тогда

$$W(z) = Z\left\{\frac{-2 \cdot e^{-p}}{p(3p+1)}\right\} = -2 \cdot z^{-1} \cdot Z\left\{\frac{\frac{1}{3}}{p \cdot (p + \frac{1}{3})}\right\}$$

Получили выражение в фигурных скобках, которое соответствует табличному выражению для p -изображения функции, тогда окончательно получим:

$$W(z) = -2 \cdot z^{-1} \cdot \frac{z \cdot (1 - e^{-\frac{1}{3}})}{(z-1) \cdot (z - e^{-\frac{1}{3}})} = \frac{-2 \cdot 0,3}{(z-1) \cdot (z-0,7)} = \frac{-0,6}{z^2 - 1,7z + 0,7}$$

2. Разделим числитель и знаменатель полученного выражения на максимальную степень переменной z и запишем передаточную функцию как отношение изображения выходного сигнала к изображению входного сигнала при нулевых начальных условиях:

$$W(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{-0,6z^{-2}}{1 - 1,7z^{-1} + 0,7z^{-2}}$$

3. Получим уравнение в изображениях:

$$Y(z) \cdot (1 - 1,7z^{-1} + 0,7z^{-2}) = X(z) \cdot (-0,6z^{-2})$$

или, раскрыв скобки,

$$Y(z) - 1,7z^{-1} \cdot Y(z) + 0,7z^{-2} \cdot Y(z) = -0,6z^{-2} \cdot X(z)$$

4. Перейдем от изображений к решетчатым функциям, выполнив обратное z -преобразование:

$$Z^{-1}\{Y(z) - 1,7z^{-1} \cdot Y(z) + 0,7z^{-2} \cdot Y(z)\} = Z^{-1}\{-0,6z^{-2} \cdot X(z)\}$$

При этом

- все изображения заменим на соответствующие решетчатые функции $Y(z) \rightarrow y[nT]; X(z) \rightarrow x[nT];$

- все коэффициенты вынесем за знак преобразования;
- согласно теореме смещения слагаемые, имеющие множителем переменную z в отрицательной степени, заменим на решетчатую функцию с запаздыванием на целое число периодов квантования.

Получим

$$y[nT] - 1,7y[nT-T] + 0,7y[nT-2T] = -0,6x[nT-2T]$$

5. Окончательно разностное уравнение элемента примет вид:

$$y[nT] = 1,7y[nT-T] - 0,7y[nT-2T] - 0,6x[nT-2T]$$

6. Найдем значения входного сигнала $x(t)$ в дискретные моменты времени.

Согласно заданию, входной сигнал представляет собой функцию вида $x(t) = 4 \cdot 1[t-2]$.

Значения входного сигнала определяются выражением

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t < 2 \\ 4, & t \geq 2 \end{cases}$$

Чтобы найти значения входного сигнала в дискретные моменты времени, перейдем от непрерывной функции к решетчатой. В данном случае это можно сделать путем формальной замены t на nT $x[nT] = 4 \cdot 1[nT-2]$

$$x[nT] = \begin{cases} 0, & nT < 2 \\ 4, & nT \geq 2 \end{cases} \quad \text{или для } T=1 \quad x[n] = \begin{cases} 0, & n < 2 \\ 4, & n \geq 2 \end{cases}$$

Система значений входного сигнала дает возможность получить значение сигнала в дискретные моменты времени, в данном примере совпадающие с номером такта:

$$\text{на } 0 \text{ такте (n=0)} \quad x[0] = 0,$$

$$\text{на } 1 \text{ такте (n=1)} \quad x[1] = 0,$$

$$\text{на } 2 \text{ такте (n=2)} \quad x[2] = 4,$$

.....

$$\text{на } 10 \text{ такте (n=10)} \quad x[10] = 4.$$

7. Перепишем разностное уравнение, подставив значение периода дискретности $T=1$ и решим его по шагам. При этом полагаем начальные условия нулевыми, это означает, что на отрицательных тактах значения входного и выходного сигналов равны нулю.

$$y[n] = 1,7y[n-1] - 0,7y[n-2] - 0,6x[n-2] \quad (7)$$

$$n=0 \quad y[0] = 1,7y[-1] - 0,7y[-2] - 0,6x[-2] = 0$$

$$n=1 \quad y[1] = 1,7y[0] - 0,7y[-1] - 0,6x[-1] = 0$$

$$n=2 \quad y[2] = 1,7y[1] - 0,7y[0] - 0,6x[0] = 0 - 0 - 0,6 \cdot 4 = -2,4$$

$n=3 \quad y[3] = 1,7y[2] - 0,7y[1] - 0,6x[1] = 1,7 \cdot (-2,4) - 0 - 0,6 \cdot 4 = -6,48$
 $n=4 \quad y[4] = 1,7y[3] - 0,7y[2] - 0,6x[2] = 1,7 \cdot (-6,48) - 0,7 \cdot (-2,4) - 0,6 \cdot 4 = -11,74$
 $n=5 \quad y[5] = 1,7y[4] - 0,7y[3] - 0,6x[3] = 1,7 \cdot (-11,74) - 0,7 \cdot (-6,48) - 0,6 \cdot 4 = -17,82$
 и так далее.

Пошаговое решение разностного уравнения дает наглядное представление о том, как и за счет чего изменяется значение выходного сигнала. Однако зачастую этот способ является весьма трудоемким, поэтому если студент усвоил основные моменты решения таких уравнений, он может воспользоваться приложением Microsoft Office табличным редактором Excel.

При заполнении электронных таблиц на 1 этапе следует ввести исходные данные: задать изменение номера такта n , значения входного сигнала в дискретные моменты времени и нулевые значения выходного сигнала на отрицательных тактах равные нулю (рис.1).

На 2 этапе рассчитывают значения $y[n]$ по уравнению (7), при этом значение $y[n-1]$ на 2 такте равно значению $y[n]$ на 1 такте и т.д., а значение $y[n-2]$ на 3 такте равно значению $y[n-1]$ на 1 такте и значению $y[n]$ на 0 такте и т.д. (рис.2).

По данным таблицы строят график зависимости $y[n]$ от n (рис.3).

Чтобы определить момент окончания расчета, можно воспользоваться предельными теоремами Лапласа о начальном и конечном значениях (Приложение 1).

| n | x[n-2] | y[n-2] | y[n-1] | y[n] |
|----|--------|--------|--------|--------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 4 | 0 | 0 | -2,4 |
| 3 | 4 | 0 | -2,4 | -6,48 |
| 4 | 4 | -2,4 | -6,48 | -11,74 |
| 5 | 4 | -6,48 | -11,74 | -17,82 |
| 6 | 4 | -11,74 | -17,82 | -24,47 |
| 7 | 4 | -17,82 | -24,47 | -31,53 |
| 8 | 4 | -24,47 | -31,53 | -38,87 |
| 9 | 4 | -31,53 | -38,87 | -46,41 |
| 10 | 4 | -38,87 | -46,41 | -54,09 |
| 11 | 4 | -46,41 | -54,09 | -61,86 |
| 12 | 4 | -54,09 | -61,86 | -69,7 |
| 13 | 4 | -61,86 | -69,7 | -77,59 |
| 14 | 4 | -69,7 | -77,59 | -85,51 |
| 15 | 4 | -77,59 | -85,51 | -93,46 |
| 16 | 4 | -85,51 | -93,46 | -101,4 |
| 17 | 4 | -93,46 | -101,4 | -109,4 |
| 18 | 4 | -101,4 | -109,4 | -117,4 |
| 19 | 4 | -109,4 | -117,4 | -125,4 |

Рис. 1. Задание начальных значений для расчета переходного процесса

| n | x[n-2] | y[n-2] | y[n-1] | y[n] |
|----|--------|--------|--------|--------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 4 | 0 | 0 | -2,4 |
| 3 | 4 | 0 | -2,4 | -6,48 |
| 4 | 4 | -2,4 | -6,48 | -11,74 |
| 5 | 4 | -6,48 | -11,74 | -17,82 |
| 6 | 4 | -11,74 | -17,82 | -24,47 |
| 7 | 4 | -17,82 | -24,47 | -31,53 |
| 8 | 4 | -24,47 | -31,53 | -38,87 |
| 9 | 4 | -31,53 | -38,87 | -46,41 |
| 10 | 4 | -38,87 | -46,41 | -54,09 |
| 11 | 4 | -46,41 | -54,09 | -61,86 |
| 12 | 4 | -54,09 | -61,86 | -69,7 |
| 13 | 4 | -61,86 | -69,7 | -77,59 |
| 14 | 4 | -69,7 | -77,59 | -85,51 |
| 15 | 4 | -77,59 | -85,51 | -93,46 |
| 16 | 4 | -85,51 | -93,46 | -101,4 |
| 17 | 4 | -93,46 | -101,4 | -109,4 |
| 18 | 4 | -101,4 | -109,4 | -117,4 |
| 19 | 4 | -109,4 | -117,4 | -125,4 |

Рис.2. Расчет значений выходного сигнала по разностному уравнению

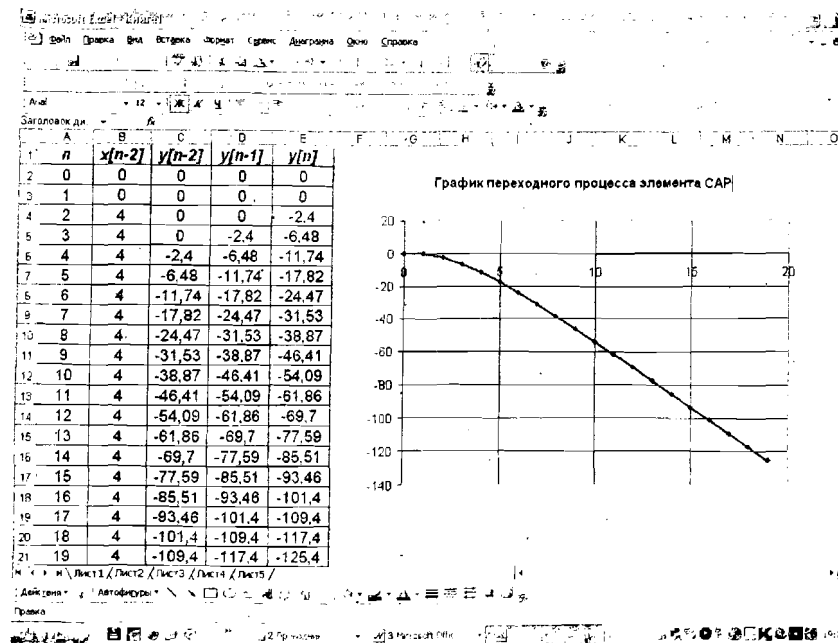


Рис.3. Экранная форма с графиком переходного процесса.

Конечное значение выходного сигнала может быть рассчитано по выражению:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y[n] = \lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{z-1}{z} \cdot Y(z) \right) = \lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{z-1}{z} \cdot W(z) \cdot X(z) \right). \quad (8)$$

Для рассматриваемого примера дискретная передаточная функция

$$W(z) = \frac{-0,6}{z^2 - 1,7z + 0,7}.$$

Найдем изображение входного сигнала $X(z)$. Было отмечено, что входной сигнал как непрерывная функция описывается выражением $x(t) = 4 \cdot [t - 2]$, соответствующая ему решетчатая функция имеет вид $x[nT] = 4 \cdot [nT - 2]$, тогда изображение входного сигнала, полученное по таблицам Лапласа, примет вид $X(z) = 4 \cdot z^{-2} \cdot \frac{z}{z-1}$.

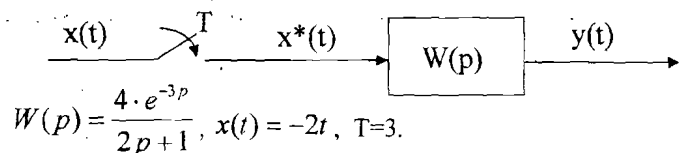
Подставим $W(z)$ и $X(z)$ в (8), тогда конечное значение выходного сигнала

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y[n] = \lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{z-1}{z} \cdot \frac{-0,6}{(z-1)(z-0,7)} \cdot 4 \cdot z^{-2} \cdot \frac{z}{z-1} \right) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{-2,4}{0} = -\infty.$$

Полученное значение позволяет нам выбрать любой момент окончания расчета, как только становится понятен характер изменения сигнала. Пусть для рассматриваемого примера $n_{кон} = 19$. Окончательно график переходного процесса представлен на рис.4. Так как период дискретности $T=1$, то значения по оси времени и по оси тактов совпадают.

Рассмотрим пример, когда период дискретности не равен 1.

ПРИМЕР 2. Пусть известна модель элемента в виде непрерывной передаточной функции $W(p)$, вид входного воздействия $x(t)$ и период дискретности T :



Требуется рассчитать переходный процесс на выходе элемента и построить график.

РЕШЕНИЕ.

Решим задачу в соответствии с изложенной выше методикой, подробно остановимся только на тех моментах, где важную роль при расчете играет значение периода дискретности.

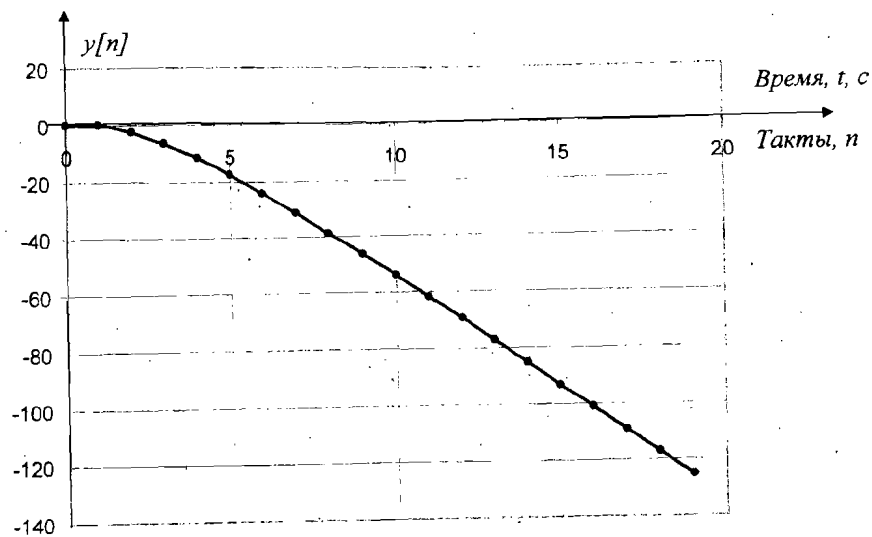


Рис.4. График переходного процесса элемента САР

1. Найдем дискретную передаточную функцию элемента по непрерывной передаточной функции.

$$\begin{aligned} W(z) &= Z\{W(p)\} = Z\left\{ \frac{4 \cdot e^{-3p}}{2p+1} \right\} = 4 \cdot z^{-1} \cdot Z\left\{ \frac{1}{2(p+1/2)} \right\} = 2 \cdot z^{-1} \cdot Z\left\{ \frac{1}{p+1/2} \right\} = \\ &= 2 \cdot z^{-1} \cdot \frac{z}{z - e^{-1/2}} = \frac{2}{z - e^{-1/2}} = \frac{2}{z - 0,22} \approx \frac{2}{z - 0,22} \end{aligned}$$

2. Разделим числитель и знаменатель полученного выражения на максимальную степень переменной z и запишем передаточную функцию как отношения изображения выходного сигнала к изображению входного сигнала:

$$W(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2z^{-1}}{1 - 0,22z^{-1}}.$$

3. Получим уравнение в изображениях:

$$Y(z) \cdot (1 - 0,22z^{-1}) = X(z) \cdot (2z^{-1})$$

или, раскрыв скобки,

$$Y(z) - 0,22z^{-1} \cdot Y(z) = 2z^{-1} \cdot X(z).$$

4. Перейдем от изображений к решетчатым функциям, выполнив обратное z - преобразование:

$$Z^{-1}\{Y(z) - 0,22z^{-1} \cdot Y(z)\} = Z^{-1}\{2z^{-1} \cdot X(z)\}$$

Получим

$$y[nT] - 0,22y[nT - T] = 2x[nT - T]. \quad (9)$$

5. Окончательно, с учетом значения периода дискретности $T=3$, разностное уравнение элемента примет вид:

$$y[3n] = 0,22y[3n - 3] - 2x[3n - 3].$$

6. Найдем значения входного сигнала $x(t)$ в дискретные моменты времени.

Согласно заданию, входной сигнал представляет собой линейную функцию вида $x(t) = -2 \cdot t$.

Значения входного сигнала при нулевых начальных условиях определяются системой:

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ -2t, & t \geq 0 \end{cases}$$

Чтобы найти значения входного сигнала в дискретные моменты времени, перейдем от непрерывной функции к решетчатой. В данном случае это можно сделать путем формальной замены t на nT $x[nT] = -2 \cdot nT$

$$x[nT] = \begin{cases} 0, & nT < 0 \\ 4nT, & nT \geq 0 \end{cases} \quad \text{или для } T=3. \quad x[3n] = \begin{cases} 0, & 3n < 0 \\ -6n, & n \geq 0 \end{cases}$$

Система значений входного сигнала дает возможность получить значения сигнала в дискретные моменты времени. Для рассматриваемого примера эти моменты времени отстоят друг от друга на одинаковые интервалы, равные периоду дискретности $T=3$.

на 0 такте ($n=0$) $x[0] = 0,$

на 1 такте ($n=1$) $x[3] = -6,$

на 2 такте ($n=2$) $x[6] = -12,$

на 10 такте ($n=10$) $x[30] = -60.$

7. Решим разностное уравнение по шагам, полагая при этом начальные условия нулевыми (на отрицательных тактах значения входного и выходного сигналов равны нулю).

$$y[3n] = 0,22 \cdot y[3n - 3] - 2 \cdot x[3n - 3]$$

$n=0$ $y[0] = 0,22y[-3] - 2x[-3] = 0$

$n=1$ $y[3] = 0,22y[0] - 2x[0] = 0$

$n=2$ $y[6] = 0,22y[3] - 2x[3] = 0 - 2 \cdot (-6) = 12$

$n=3$ $y[9] = 0,22y[6] - 2x[6] = 0,22 \cdot 12 - 2 \cdot (-12) = 26,64$

$n=4$ $y[12] = 0,22y[9] - 2x[9] = 0,22 \cdot 26,64 - 2 \cdot (-18) = 41,86$

$n=5$ $y[15] = 0,22y[12] - 2x[12] = 0,22 \cdot 41,86 - 2 \cdot (-24) = 57,2$ и так далее.

Отметим, что при расчете переходного процесса по разностному уравнению вручную никаких сложностей не возникает, так как каждый раз мы считаем аргумент $3n$, для которого затем подставляем значение решетчатой функции.

8. Проиллюстрируем расчет разностного уравнения с использованием Excel (рис.5). В этом случае при значении периода дискретности $T=3$ (а также для любого другого значения периода дискретности $\neq 1$) может возникнуть ряд сложностей: при задании нулевых начальных условий и при записи формулы разностного уравнения.

Так, нулевые значения записываются для функций $x[3n-3]$ и $y[3n-3]$ при $n=0$, что соответствует их значениям на -3 такте.

Решетчатая функция четко определяется через значения соответствующих ячеек. Выражение, записанное в строке формул при расчете, представленном на рис.5, имеет вид: $=0,22 * C2 - 2 * B2$.

| n | x[3n-3] | y[3n-3] | y[3n] |
|----|---------|----------|-----------|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | -6 | 0 | -12 |
| 2 | -12 | -12 | -26.64 |
| 3 | -18 | -26.64 | -41.8608 |
| 4 | -24 | -41.8608 | -57.20938 |
| 5 | -30 | -57.2094 | -72.58606 |
| 6 | -36 | -72.5861 | -87.96892 |
| 7 | -42 | -87.9689 | -103.3532 |
| 8 | -48 | -103.353 | -118.7377 |
| 9 | -54 | -118.738 | -134.1223 |
| 10 | -60 | -134.122 | -149.5069 |
| 11 | -66 | -149.507 | -164.8915 |
| 12 | -72 | -164.892 | -180.2761 |
| 13 | -78 | -180.276 | -195.6607 |
| 14 | -84 | -195.661 | -211.0454 |
| 15 | -90 | -211.045 | -226.43 |
| 16 | -96 | -226.43 | -241.8146 |
| 17 | -102 | -241.815 | -257.1992 |
| 18 | -108 | -257.199 | -272.5838 |
| 19 | -114 | -272.584 | -287.9684 |

Рис.5. Фрагмент расчета переходного процесса для примера 2

По формуле (8) определим момент окончания расчета.

Для рассматриваемого примера входной сигнал как непрерывная функция описывается выражением $x(t) = -2 \cdot t$, соответствующая ему решетчатая функция имеет вид $x[nT] = -2 \cdot nT$, тогда изображение входного

сигнала, выполненное по таблицам Лапласа, примет вид $X(z) = -2 \cdot 3 \cdot \frac{z}{(z-1)^2} = -6 \cdot \frac{z}{(z-1)^2}$.

Подставим полученное изображение в (8), тогда конечное значение выходного сигнала

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y[n] = \lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{z-1}{z} \cdot \frac{2}{z-0,22} - 6 \cdot \frac{z}{(z-1)^2} \right) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{-12}{0} = -\infty.$$

Полученное значение позволяет нам выбрать любой момент окончания расчета, как только становится понятен характер изменения сигнала, пусть для рассматриваемого примера $n_{кон} = 19$. Окончательно график переходного процесса представлен на рис.6, так как период дискретности $T=3$, то значения по оси времени и по оси тактов не совпадают.

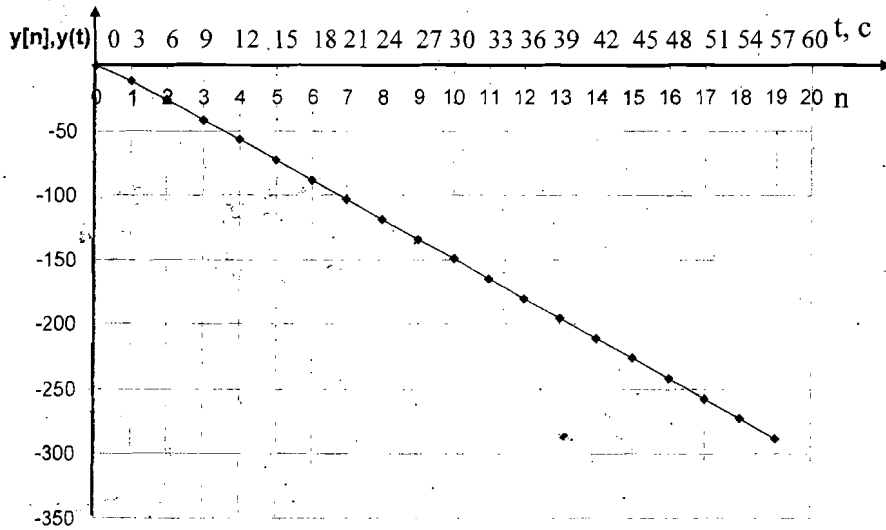


Рис.6. График переходного процесса

В случае, когда требуется рассчитать большое число точек переходного процесса (например, в курсовой работе), не только разумно, но и необходимо воспользоваться средствами вычислительной техники. Однако разностное уравнение при этом может иметь достаточно сложный вид. Поэтому, чтобы избежать трудностей, описанных выше для примера 2, можно применить следующий подход.

Во-первых, в разностном уравнении положить $T=1$ и записать его в упрощенной форме. Тогда уравнение (9), полученное в п.4, примет вид:

$$y[n] - 0,22y[n-1] = 2x[n-1]$$

$$\text{или } y[n] = 0,22y[n-1] + 2x[n-1].$$

Во-вторых, п.6 выполняется так же, как и в примере 2, но при заполнении электронных таблиц следует учитывать не значение аргумента входного сигнала, который записан в квадратных скобках, а номер такта n:

при $n=0$ $x[0] = 0,$
 при $n=1$ $x[3] = -6,$
 при $n=2$ $x[6] = -12,$

Тогда таблица с заполненными начальными значениями примет вид, представленный на рис.7.

В-третьих, так как номер такта и значение времени не совпадают, то разумно ввести в расчет еще один столбец – время, с – и пересчитать номера тактов в секунды (рис.8).

Все остальные этапы расчета – запись разностного уравнения и копирование ячеек – выполняются так же, как это описано в примерах 1 и 2. Окончательная таблица рассчитанных данных приведена на рис.9, а график переходного процесса – на рис.10.

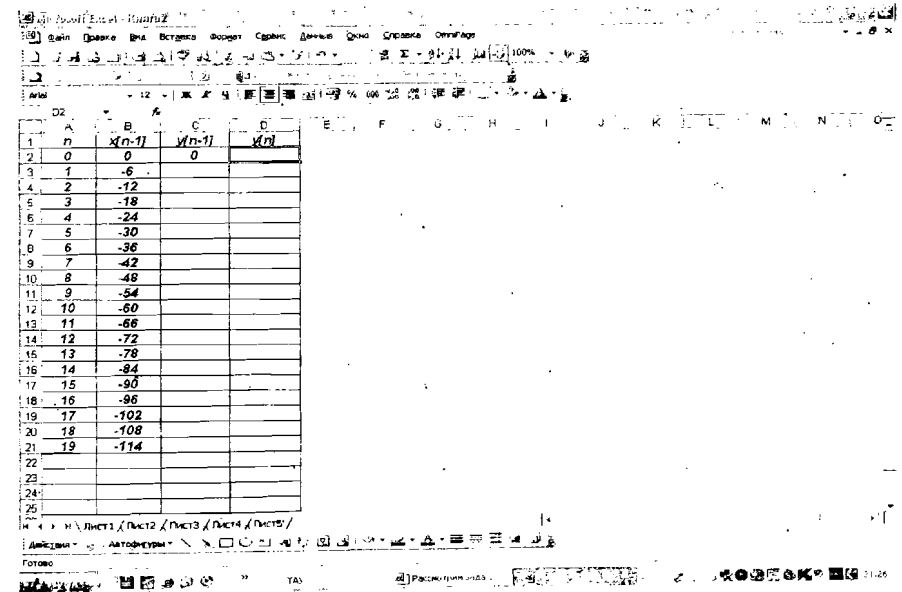


Рис.7. Начальные значения решетчатых функций

| А | В | С | Столбец | Е |
|----|----|----|---------|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 3 | 1 | -6 | |
| 4 | 6 | 2 | -12 | |
| 5 | 9 | 3 | -18 | |
| 6 | 12 | 4 | -24 | |
| 7 | 15 | 5 | -30 | |
| 8 | 18 | 6 | -36 | |
| 9 | 21 | 7 | -42 | |
| 10 | 24 | 8 | -48 | |
| 11 | 27 | 9 | -54 | |
| 12 | 30 | 10 | -60 | |
| 13 | 33 | 11 | -66 | |
| 14 | 36 | 12 | -72 | |
| 15 | 39 | 13 | -78 | |
| 16 | 42 | 14 | -84 | |
| 17 | 45 | 15 | -90 | |
| 18 | 48 | 16 | -96 | |
| 19 | 51 | 17 | -102 | |
| 20 | 54 | 18 | -108 | |
| 21 | 57 | 19 | -114 | |

Рис.8. Таблица с дополнительным столбцом

| А | В | С | Д | Е |
|----|----|----|------|-----------|
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 3 | 1 | -6 | |
| 4 | 6 | 2 | -12 | -26,64 |
| 5 | 9 | 3 | -18 | -41,8608 |
| 6 | 12 | 4 | -24 | -57,20938 |
| 7 | 15 | 5 | -30 | -72,68006 |
| 8 | 18 | 6 | -36 | -87,96893 |
| 9 | 21 | 7 | -42 | -103,3532 |
| 10 | 24 | 8 | -48 | -118,7377 |
| 11 | 27 | 9 | -54 | -134,1223 |
| 12 | 30 | 10 | -60 | -149,5069 |
| 13 | 33 | 11 | -66 | -164,8915 |
| 14 | 36 | 12 | -72 | -180,2761 |
| 15 | 39 | 13 | -78 | -195,6607 |
| 16 | 42 | 14 | -84 | -211,0454 |
| 17 | 45 | 15 | -90 | -226,43 |
| 18 | 48 | 16 | -96 | -241,8146 |
| 19 | 51 | 17 | -102 | -257,1992 |
| 20 | 54 | 18 | -108 | -272,5838 |
| 21 | 57 | 19 | -114 | -287,9684 |

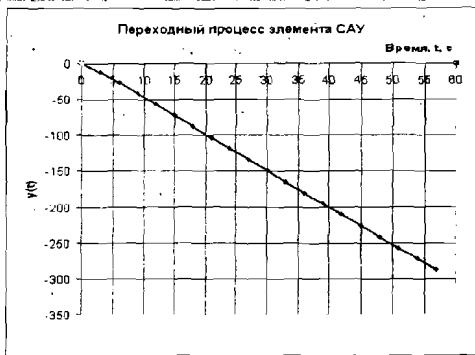


Рис.9. Расчет переходного процесса

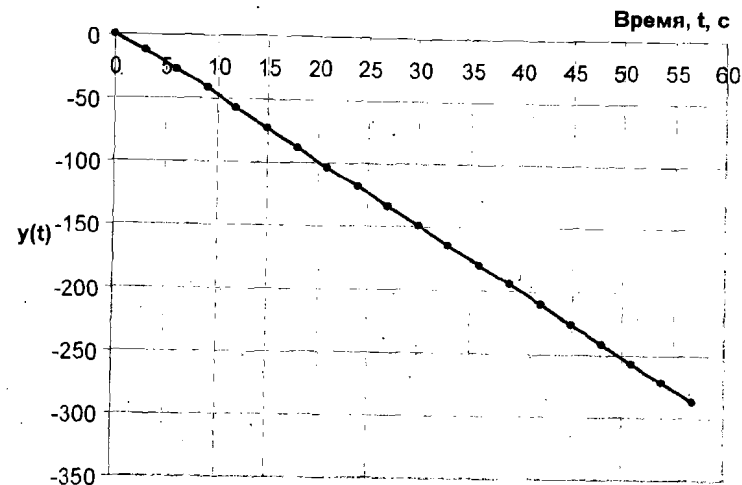


Рис.10. График переходного процесса для примера 2

2. Построение области устойчивости по критерию Рауса-Гурвица

Чтобы применить критерий устойчивости Рауса-Гурвица к дискретной системе, производят замену переменной, вводя новую переменную w подстановкой

$$z = \frac{w + 1}{w - 1} \quad (10)$$

В этом случае область устойчивости дискретной системы на плоскости z . Заключенная внутри круга единичного радиуса с центром в начале координат, она отобразится на левую полуплоскость новой комплексной переменной w . Границей устойчивости при этом является мнимая ось плоскости w . В этом случае условия устойчивости дискретной системы совпадают с условиями устойчивости непрерывных систем.

Алгебраический критерий Рауса-Гурвица целесообразно применять для дискретных систем с характеристическим уравнением не выше 4 – го порядка. Применение этого критерия для дискретных систем более высокого порядка приводит к усложненным расчетам.

Критерий Рауса-Гурвица применяют в теории дискретных систем для построения области устойчивости. В этом случае алгоритм решения задачи сводится к следующим этапам.

1. Получают передаточную функцию замкнутой системы регулирования $\Phi(z)$;
2. Получают характеристическое уравнение замкнутой системы $D(z) = 0$;
3. Производят замену переменной, вводя новую переменную w в соответствии с (10) и записывают характеристическое уравнение относительно w ($D(w) = 0$);
4. Записывают условие устойчивости в виде системы неравенств относительно коэффициентов характеристического уравнения;
5. Изображают графически полученное в п.3 условие и определяют область устойчивости.

ПРИМЕР 3. Пусть известна структурная схема замкнутой дискретной САР (рис.11) и заданы математические модели элементов:

- непрерывной части системы $W_1(p) = 0,2e^{-1,5p}, W_2(p) = 2e^{-2p}$;
- формирующего элемента – фиксатора нулевого порядка $W_{\text{фз}}(p) = \frac{1 - e^{-Tp}}{p}$, где T – период дискретности;
- регулятора, реализующего дискретный закон управления $D_{\text{рег}}(z) = \frac{k_1 z - k_2}{z - 1}$

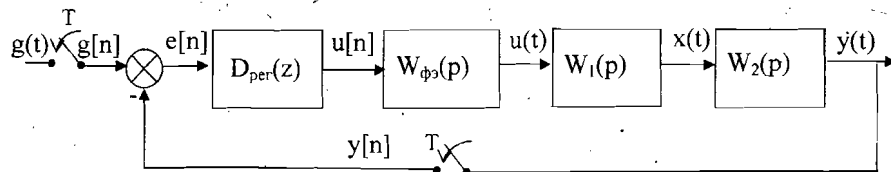


Рис.11. Структурная схема дискретной системы

Требуется найти уравнения границ области устойчивости замкнутой системы и построить эту область в плоскости настроек регулятора k_1 и k_2 .

РЕШЕНИЕ.

1. Найдем передаточную функцию замкнутой дискретной системы.
В общем виде выражения для передаточной функции замкнутой дискретной системы, имеющей структуру, представленную на рис.11, имеют вид:

$$\Phi(z) = \frac{D(z) \cdot Z\{W_{\text{нч}}(p)\}}{1 + D(z) \cdot Z\{W_{\text{нч}}(p)\}} = \frac{D(z) \cdot Z\{W_{\text{фз}}(p)W_1(p)W_2(p)\}}{1 + D(z) \cdot Z\{W_{\text{фз}}(p)W_1(p)W_2(p)\}} \quad (11)$$

Преобразование $Z\{W_{\text{фз}}(p)W(p)\}$ в случае, если формирующий элемент – фиксатор нулевого порядка примет вид:

$$Z\{W_{\text{фз}}(p)W(p)\} = \frac{z-1}{z} \cdot Z\left\{\frac{W(p)}{p}\right\} \quad (12)$$

Тогда, с учетом свойств z-преобразования и (12), можно записать

$$\Phi(z) = \frac{\frac{k_1 z - k_2}{z-1} \cdot \frac{0,4}{z}}{1 + \frac{k_1 z - k_2}{z-1} \cdot \frac{0,4}{z}} = \frac{(k_1 z - k_2) \cdot 0,4}{z(z-1) + 0,4 \cdot (k_1 z - k_2)}$$

2. Характеристический полином замкнутой системы представляет собой знаменатель передаточной функции замкнутой системы, поэтому

$$D(z) = z(z-1) + 0,4 \cdot (k_1 z - k_2) = z^2 - z + 0,4k_1 z - 0,4k_2 = z^2 + (0,4k_1 - 1)z - 0,4k_2 \quad (13)$$

3. Так как рассматриваемая система регулирования 2-го порядка, для построения области устойчивости воспользуемся критерием Рауса - Гурвица и выполним билинейное преобразование Лапласа, перейдя от переменной z к переменной w .

Тогда характеристическое уравнение (13) примет вид

$$D(w) = z^2 + (0,4k_1 - 1)z - 0,4k_2 \Big|_{z = \frac{w+1}{w-1}} = \left(\frac{w+1}{w-1}\right)^2 + (0,4k_1 - 1) \cdot \left(\frac{w+1}{w-1}\right) - 0,4k_2 = 0.$$

Упростим выражение:

$$\frac{(w+1)^2 + (0,4k_1 - 1) \cdot (w+1) \cdot (w-1) - 0,4k_2 \cdot (w-1)^2}{(w-1)^2} = 0.$$

Раскроем скобки и приравняем к нулю только числитель дроби

$$w^2 + 2w + 1 + 0,4k_1 w^2 - 0,4k_1 - w^2 + 1 - 0,4k_2 w^2 + 0,8k_2 w - 0,4k_2 = 0.$$

Сгруппируем слагаемые по степеням переменной w :

$$(0,4k_1 - 0,4k_2)w^2 + (2 + 0,8k_2)w + (2 - 0,4k_1 - 0,4k_2) = 0.$$

3. Согласно критерию Рауса – Гурвица, чтобы непрерывная система 2-го порядка была устойчива необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты характеристического уравнения были положительны. Как уже было отмечено, для характеристического уравнения дискретной системы, записанной относительно переменной w , условия устойчивости совпадают с условиями устойчивости непрерывных систем. Запишем систему неравенств, соответствующих устойчивому состоянию системы:

$$\begin{cases} 0,4k_1 - 0,4k_2 > 0 \\ 2 + 0,8k_2 > 0 \\ 2 - 0,4k_1 - 0,4k_2 > 0 \end{cases} \quad (14)$$

Чтобы построить границы области устойчивости, приравняем выражения (14) к нулю:

уравнение 1-й границы - $k_1 = k_2$;

уравнение 2-й границы - $k_2 = -2,5$;

уравнение 3-й границы - $k_1 = 5 - k_2$.

Изобразим границы устойчивости в плоскости настроек регулятора и заштригуем полуплоскости, определяемые неравенствами (14). Вид рабочего листа при выполнении расчета границ и построении области устойчивости представлен на рис.12, а сам график области устойчивости приведен на рис.13.

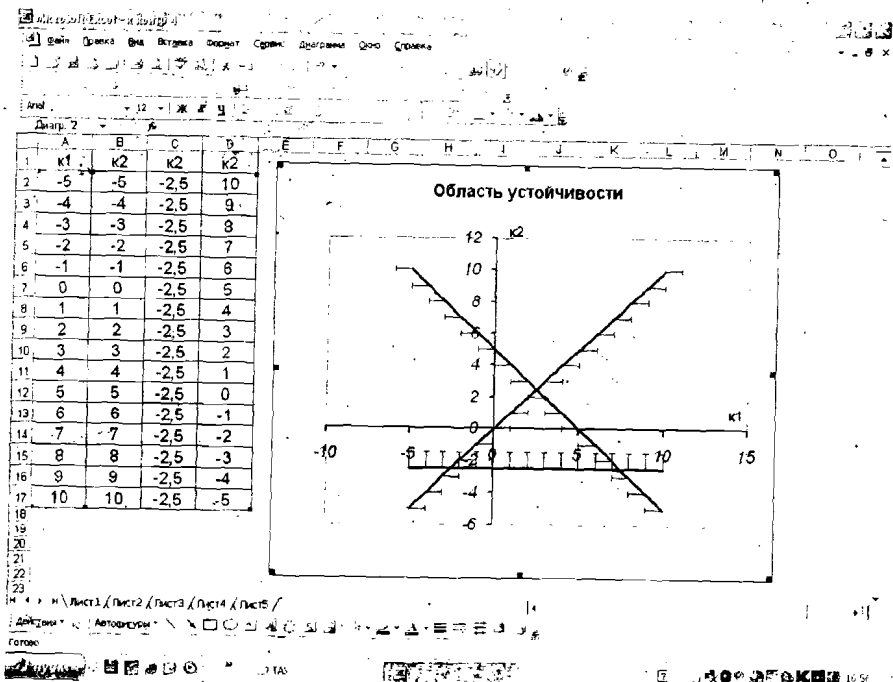


Рис. 12. Расчет и построение границ области устойчивости

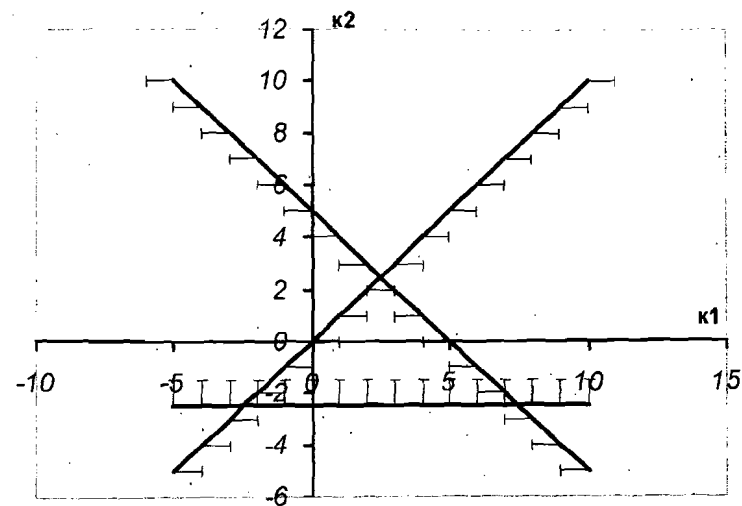


Рис.13. Область устойчивости в плоскости настроек регулятора

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Рассмотрим основные свойства дискретного преобразования Лапласа.

1. Теорема линейности.

Изображение суммы нескольких функций равно сумме изображений этих функций:

$$Z\{f_1(t) + f_2(t) + \dots + f_n(t)\} = Z\{f_1(t)\} + L\{f_2(t)\} + \dots + L\{f_n(t)\} = F_1(z) + F_2(z) + \dots + F_n(z)$$

и наоборот

$$Z^{-1}\{F_1(z) + F_2(z) + \dots + F_n(z)\} = Z^{-1}\{F_1(z)\} + Z^{-1}\{F_2(z)\} + \dots + Z^{-1}\{F_n(z)\} = f_1(t) + f_2(t) + \dots + f_n(t).$$

Константа выносится за знак изображения:

$$Z\{a \cdot f(t)\} = a \cdot Z\{f(t)\} = a \cdot F(z)$$

и наоборот

$$Z^{-1}\{a \cdot F(z)\} = a \cdot Z^{-1}\{F(z)\} = a \cdot f(t)$$

2. Теорема смещения.

Изображение от функции с запаздыванием $\tau = mT$ равно произведению множителя z^{-m} на изображение исходной функции:

$$Z\{f(t - \tau)\} = Z\{f(t - mT)\} = z^{-m} \cdot Z\{f(t)\} = z^{-m} \cdot F(z)$$

и наоборот

$$Z^{-1}\{F(z) \cdot z^{-m}\} = f(t - mT) = f(t - \tau).$$

3. Теорема Лапласа о начальном значении.

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{z \rightarrow \infty} z F(z)$$

4. Теорема Лапласа о конечном значении.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \cdot F(z)$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

При отыскании изображения заданной функции и при обратном преобразовании на практике не вычисляют определенные интегралы, а пользуются готовыми таблицами преобразований Лапласа (табл. П1).

Таблица П1

Фрагмент таблиц преобразования Лапласа

| № п/п | Оригинал функции f(t) | Изображение функции по Лапласу F(p) | Дискретное изображение функции F(z) |
|-------|---------------------------|-------------------------------------|---|
| 1 | $\delta(t)$ | 1 | z^0 |
| 2 | $1[t]$ | $\frac{1}{p}$ | $\frac{z}{z-1}$ |
| 3 | t | $\frac{1}{p^2}$ | $\frac{Tz}{(z-1)^2}$ |
| 4 | e^{-at} | $\frac{1}{p+a}$ | $\frac{z}{z-e^{-aT}}$ |
| 5 | $t \cdot e^{-at}$ | $\frac{1}{(p+a)^2}$ | $\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$ |
| 6 | $1 - e^{-at}$ | $\frac{a}{p(p+a)}$ | $\frac{z(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}$ |
| 7 | $e^{-at} - e^{-bt}$ | $\frac{b-a}{(p+a)(p+b)}$ | $\frac{z}{z-e^{-aT}} - \frac{z}{z-e^{-bT}}$ |
| 8 | $t - \frac{1-e^{-at}}{a}$ | $\frac{a}{p^2(p+a)}$ | $\frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{z(1-e^{-aT})}{a(z-1)(z-e^{-aT})}$ |

Задание для выполнения контрольной работы № 4

Задача 1.

Получить разностное уравнение, рассчитать переходный процесс на выходе системы и построить графики изменения $x(t)$ и $y(t)$.

Исходные данные:

1. Структурная схема системы имеет вид



2. Заданы математические модели элементов $W_1(p)$, $W_2(p)$ и период дискретности T (см. таблицу П2 задания согласно **предпоследней** цифре шифра).

3. Задан вид входного сигнала $x(t)$ (см. таблицу П3 задания согласно **последней** цифре шифра).

Таблица П2

| Вар. | $W_1(p)$ | $W_2(p)$ | T | Вар. | $W_1(p)$ | $W_2(p)$ | T |
|------|--------------------------|-------------------------|---|------|--------------------------|----------------------|---|
| 0 | $\frac{5}{3p+1}$ | $\frac{2e^{-2p}}{p}$ | 2 | 5 | $-0,7e^{2p}$ | $\frac{e^{-2p}}{p}$ | 2 |
| 1 | $\frac{-2e^{-2p}}{3p+1}$ | $\frac{5}{p}$ | 2 | 6 | $-2e^{2p}$ | $\frac{6}{p(4p+1)}$ | 2 |
| 2 | $\frac{-e^{-4p}}{2p+1}$ | $\frac{2e^{-2p}}{p}$ | 2 | 7 | $\frac{-0,5}{(4p+1)^2}$ | $-3e^{2p}$ | 2 |
| 3 | $\frac{-1}{2p+1}$ | $\frac{5e^{-3p}}{4p+1}$ | 3 | 8 | $\frac{-0,9p}{(3p+1)^2}$ | $\frac{5e^{-4p}}{p}$ | 4 |
| 4 | $-5e^{2p}$ | $\frac{0,1e^{-p}}{p}$ | 3 | 9 | $\frac{6}{(2p+1)^2}$ | $-0,7e^{2p}$ | 2 |

Таблица П3

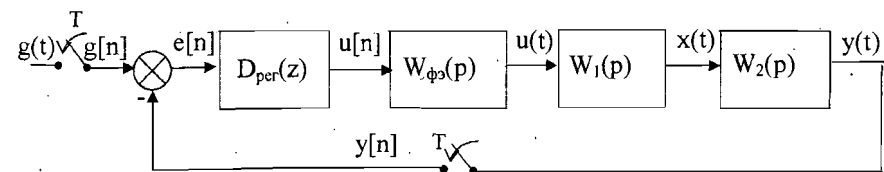
| Вариант | $x(t)$ |
|---------|-------------------|
| 0 | $3 \cdot 1[t]$ |
| 1 | $-2,5 \cdot 1[t]$ |
| 2 | $0,8 \cdot 1[t]$ |
| 3 | $3 \cdot t$ |
| 4 | $-0,2 \cdot t$ |
| 5 | $4 \cdot 1[t]$ |
| 6 | $-0,5 \cdot 1[t]$ |
| 7 | $0,1 \cdot t$ |
| 8 | $1,2 \cdot t$ |
| 9 | $-1,5 \cdot t$ |

Задача 2.

Найти уравнения границ области устойчивости замкнутой системы и построить эту область в плоскости настроек регулятора k_1 и k_2 .

Исходные данные:

1. Структурная схема системы имеет вид



2. Заданы математические модели элементов $W_1(p)$, $W_2(p)$ и период дискретности T (табл. П4 задания согласно **последней** цифре шифра).

3. Формирующий элемент – фиксатора нулевого порядка $W_{фз}(p) = \frac{1-e^{-Tp}}{p}$, где T – период дискретности;

$D_{\text{рег}}(z) = \frac{k_1 z - k_2}{z - 1}$ - модель регулятора, реализующего дискретный закон управления.

Таблица П4

| Вариант | $W_1(p)$ | $W_2(p)$ | T |
|---------|-------------------|------------------------|---|
| 0 | -2,5 | $\frac{4}{3p+1}$ | 2 |
| 1 | -1,5 | $\frac{6}{2p+1}$ | 2 |
| 2 | 2p | $\frac{e^{-3p}}{4p+1}$ | 2 |
| 3 | -2p | $\frac{e^{-3p}}{5p+1}$ | 3 |
| 4 | $-0,5e^{-p}$ | $\frac{2e^{-p}}{p}$ | 3 |
| 5 | $3,5e^{-p}$ | $\frac{4e^{-p}}{p}$ | 2 |
| 6 | $2e^{-2p}$ | $\frac{0,5p}{3p+1}$ | 2 |
| 7 | $2e^{-3p}$ | $\frac{-5p}{4p+1}$ | 2 |
| 8 | $\frac{7}{3p+1}$ | 2 | 4 |
| 9 | $\frac{-6}{2p+1}$ | 3 | 2 |

Библиографический список

Сборник задач по теории автоматического управления/ под ред. В.А.Бесекаерского. – М.: Наука, 1983.

Певзнер Л.Д. Теория систем управления. – М.: Издательство МГГУ, 2002.

Цыпкин Я.З. Основы теории автоматических систем. – М.: Наука, 1977.

Содержание

| | |
|--|----|
| Введение | 3 |
| 1. Расчет переходного процесса решением разностного уравнения ... | 3 |
| 2. Построение области устойчивости по критерию Рауса - Гурвица ... | 17 |
| Приложения | 22 |
| Библиографический список | 27 |

Анна Владимировна Черникова

ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

(Дискретные системы автоматического регулирования)

Методические указания для выполнения контрольной работы №4
для студентов заочной формы обучения

Редактор и корректор Т.А.Смирнова
Техн. редактор Л.Я. Титова

Темплан 2009 г, поз.111

Подп. к печати 28.10.09. Формат 60 x 84 / 16. Бумага тип. № 1. Печать офсетная.
Печ.л. 1,75. Уч.- изд. л. 1,75. Тираж 100 экз. Изд. № 111. Цена «С». Заказ 2158.

Ризограф ГОУВПО Санкт-Петербургского государственного
технологического университета растительных полимеров
198095, Санкт-Петербург, ул. Ивана Черных, 4