Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

«Санкт-Петербургский государственный технологический
университет растительных полимеров»

Математика.
Контрольная работа № 3

Методические указания для студентов
заочного отделения
ускоренной формы обучения

Санкт-Петербург
2008

УДК 51(07.07)

Математика. Контрольная работа № 3: методические указания для студентов заочного отделения ускоренной формы обучения /сост. О.Е. Куляхтина, И.Э.Марусина, Н.Л.Белая, З.Л.Абжандадзе, Е.А.Титова; ГОУВПО СПбГТУРП. – СПб., 2008.- 35с.

Излагаются основные положения теории интегралов (неопределенный, определенный, тройной, криволинейный интегралы и их приложения). Рассмотрены типовые задачи для выполнения контрольной работы. Рекомендуются для студентов заочного отделения ускоренной формы обучения технического (технологического) профиля.

Рецензент: профессор кафедры дифференциальных уравнений математико-механического факультета СПбГУ, доктор физ.- мат. наук Чурин Ю.В.

Подготовлены и рекомендованы к печати кафедрой высшей математики ГОУВПО Санкт-Петербургского государственного технологического университета растительных полимеров (протокол № 3 от 11 ноября 2008 г.).

Утверждены к изданию методической комиссией факультета промышленной энергетики ГОУВПО СПбГТУРП (протокол № 4 от 24 декабря 2008 г.).

Редактор и корректор Н.П.Новикова
Техн.редактор Л.Я.Титова

Подп. к печати 25.12.08. Формат 60x84/16. Бумага тип № 1. Печать офсетная. Объём 2,25 печ.л., 2,25 уч.-изд. л. Тираж 50 экз.
Изд. № 101. Цена «С». Заказ 2132

Ризограф ГОУВПО Санкт-Петербургского государственного технологического университета растительных полимеров, 198095, Санкт-Петербург, ул. Ивана Черных, 4.

Введение

Настоящие указания предназначены для студентов - заочников инженерно-технических специальностей, обучающихся по ускоренной программе. Материал, содержащийся в них, может быть использован студентами всех форм обучения как дополнительный по практическим занятиям в разделе «Интегрирование функций».

Особое внимание уделяется разбору примеров; теоретический материал имеет преимущественно справочный характер. Для успешного решения задач контрольной работы №3 следует основательно изучить все методы интегрирования, а также возможности применения определенных интегралов к решению геометрических задач, которые приведены ниже. Перед выполнением каждого пункта рекомендуем изучить теорию по данному разделу в учебниках [1], [2]. К выполнению контрольного задания следует приступать, решив достаточное количество задач, соответствующих этому заданию, которые можно найти в задачниках [3], [4].

I.Неопределенный интеграл
(задачи 281-290)

1. Основной задачей дифференциального исчисления является задача дифференцирования функций. Поставим теперь обратную задачу: найти функцию, зная ее производную. Эта операция называется ***интегрированием.***

Функция $F(x)$ называется ***первообразной*** для функции $f(x)$, если эта последняя является производной от $F(x)$, т.е.

$$f(x) = F'(x).$$

Если $F(x)$ - какая-то первообразная для $f(x)$, то выражение $F(x)+C$, где C может принимать любое постоянное значение, называется ***неопределенным интегралом*** функции $f(x)$ и обозначается через $\int f(x)dx$, таким образом,

$$\int f(x)dx = F(x)+C.$$

<u>Правило.</u> Чтобы убедиться, справедливо ли равенство $\int f(x)dx = F(x)+C$, надо продифференцировать его правую часть. Если получится функция $f(x)$, то равенство верно.

Для выработки умения интегрировать, необходимо знать ***таблицу интегралов:***

1. $\int dx = x + C$
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, (n \neq 1)$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
4. $\int e^x dx = e^x + C$
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
6. $\int \cos x dx = \sin x + C$
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$
9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
11. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$
12. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm m}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm m}\right| + C$.

Отметим, что проверка каждой формулы может быть произведена по вышесформулированному правилу.

Все формулы в таблице написаны для независимой переменной x. Очевидно, что те же равенства можно записать, используя любое буквенное обозначение:

$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$,

$\int e^z dz = e^z + C$,

$\int dt = t + C$ и т.п.

2. При интегрировании часто приходится пользоваться свойствами неопределенного интеграла. Сформулируем наиболее важные из них.

Свойство 1. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы двух или нескольких функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций.

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx \ .$$

Свойство 2. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, т.е.

$$\int a \cdot f(x)dx = a \cdot \int f(x)dx, \text{ где } a = const \ .$$

Используя свойства, можно в ряде случаев свести интегрирование к табличным формулам.

3. ***Замена переменной*** в неопределенном интеграле (способ подстановки).

Пусть требуется найти интеграл $\int f(x)dx$, причем преобразовать его с помощью свойств к табличным интегралам невозможно. Сделаем замену переменной в подынтегральном выражении, введя вспомогательную переменную t:

$x = \varphi(t)$, тогда $dx = \varphi'(t)dt$ и $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt$.

Если интеграл $\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt$ принадлежит к табличным, или сводится к ним легче, чем исходный, то преобразование достигает цели.

Сформулируем правило подстановки: чтобы вычислить интеграл, в котором независимой переменной служит x, можно перейти к другой переменной t, связанной каким-нибудь образом с x, выразив через t все подынтегральное выражение (включая dx!). После нахождения вновь полученного интеграла надо возвратиться к старой переменной x.

Выделим важный частный случай замены переменной.

Пусть $\int f(x)dx = F(x) + C$, тогда $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$.

4. Существует еще один широко применяемый способ интегрирования, называемый «интегрированием по частям». Всякое подынтегральное выражение можно некоторыми способами представить в виде произведения U и dV. ***Интегрированием по частям*** называется сведение данного интеграла $\int UdV$ к интегралу $\int VdU$ с помощью формулы

$$\int UdV = U \cdot V - \int VdU .$$

Этот прием ведет к цели, если $\int VdU$ находится легче, чем $\int UdV$.

Отметим шесть типов интегралов, вычислять которые удобно интегрированием по частям:

1. $\int x^n e^x dx$
2. $\int x^n \sin x dx$
3. $\int x^n \cos x dx$
4. $\int x^n \ln x dx$
5. $\int x^n arctgx dx$
6. $\int x^n \arcsin x dx$.

Для интегралов 1, 2, 3 за U следует принимать множитель x^n.

В интегралах 4, 5, 6 за dV следует принять $x^n dx$.

5. Важнейшим из классов интегрируемых функций являются ***рациональные функции***, т. е. дроби вида

$$\frac{a_0 \cdot x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 \cdot x^m + b_1 \cdot x^{m-1} + \ldots + b_m}.$$

Для интегрирования дроби стараются представить ее в форме суммы простых дробей.

а) Разложение рациональных дробей на простые.

Дробь называется ***правильной***, если степень ее числителя ниже степени знаменателя. Если числитель неправильной дроби разделить (с остатком, ибо мы предполагаем, что рассматриваемые дроби несократимы) на ее знаменатель, то дробь представится в форме суммы целого многочлена и правильной дроби. Итак, мы будем раскладывать правильные вещественные дроби, знаменатель которых представлен в виде произведения простых множителей. Для таких дробей имеет место следующий тип разложения на более простые дроби:

$$\frac{f(x)}{(x-a)^\alpha \cdot (x-b)^\beta \ldots (x^2+px+q)\ldots} = \frac{A_0}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} + \frac{B_0}{(x-b)^\beta} +$$
$$+ \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \ldots + \frac{B_{\beta-1}}{x-b} + \ldots + \frac{Px+Q}{x^2+px+q} + \ldots$$

Здесь числа A_0, A_1, ..., B_0, ..., $B_{\beta-1}$, P, Q, ... будут какими-то (сразу неизвестными) постоянными. Эти числа можно определить из следующих

соображений. Написанное равенство есть тождество, поэтому, приведя дроби к общему знаменателю, получим тождественные многочлены в числителях справа и слева. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему уравнений для определения неизвестных коэффициентов A_0, A_1, ..., $B_{\beta-1}$, P, Q, ...

б) Рассмотрим интегрирование простейших дробей, которые нам встретятся.

I. $$\int \frac{A}{x-a} dx = A \cdot \ln|x-a| + C .$$

II. $$\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A \cdot \int (x-a)^{-k} dx = A \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C = \frac{A}{(1-k)\cdot(x-a)^{k-1}} + C.$$

III. $$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx = \int \frac{\frac{A}{2}\cdot(2x+p) + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)}{x^2+px+q} dx =$$

$$= \frac{A}{2} \int \frac{2x+p}{x^2+px+q} dx + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dx}{x^2+px+q} =$$

$$= \frac{A}{2} \ln|x^2+px+q| + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}} arctg \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C .$$

Итак, чтобы проинтегрировать правильную рациональную дробь необходимо разложить ее на сумму простейших дробей и затем выполнить интегрирование этих простых дробей.

6. Теперь рассмотрим иррациональные функции, интегралы от которых с помощью подстановок приводятся к интегралам от рациональных функций, и, следовательно, интегрируются.

<u>*Правило.*</u> Если $f(U,V,W,\ldots)$ - рациональная функция своих аргументов (т. е. для нахождения $f(U,V,W,\ldots)$, над аргументами не надо производить никаких действий, кроме арифметических), а a, b, ..., α, β, ... - целые положительные числа, то интеграл

$$\int f\left(x, \sqrt[a]{x^\alpha}, \sqrt[b]{x^\beta}, \ldots\right) dx$$

приводится к интегралу от рациональной функции при помощи подстановки $x = t^k$, где k - наименьшее общее кратное a, b ...

Похожая подстановка рационализирует подынтегральную функцию и в интеграле

$$\int f\left(x, \sqrt[a]{(Ax+B)^{\alpha}}, \sqrt[b]{(Ax+B)^{\beta}}, \ldots\right)dx .$$

Именно здесь надо положить $Ax + B = t^k$, где k - наименьшее общее кратное a, b...

7. Интегрирование функций, рациональных относительно sin*x*, cos*x*, tg*x*.

Для интегралов вида $\int f(\sin x, \cos x)dx$, где $f(U,V)$ - рациональная функция своих аргументов существует универсальная тригонометрическая подстановка, позволяющая такой интеграл привести к интегралу от рациональной функции. Это подстановка

$$tg\frac{x}{2} = z .$$

Тогда $x = 2\cdot arctg(z)$ и $dx = \frac{2dz}{1+z^2}$

$$\cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2},\ \sin x = \frac{2z}{1+z^2},\ tgx = \frac{2z}{1-z^2},$$

и в результате этой подстановки интеграл преобразуется к виду $\int f\left(\frac{2z}{1+z^2}, \frac{1-z^2}{1+z^2}\right)\frac{2dz}{1+z^2}$, который есть интеграл от рациональной функции.

8. Примеры решения задач.

Найти неопределенные интегралы.

а) Пример № 1.

$$\int\frac{x^2}{4+x^6}dx$$

Данный интеграл не преобразуется к табличным с помощью алгебраических преобразований. Введем новую переменную $t = x^3$, тогда $dt = 3x^2dx$; $x^2dx = \frac{dt}{3}$.

$$\int\frac{x^2}{4+x^6}dx = \int\frac{dt}{3\cdot(4+t^2)} = \frac{1}{3}\int\frac{dt}{4+t^2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}arctg\frac{t}{2} + C = \frac{1}{6}arctg\frac{x^3}{2} + C.$$

Пример № 2.

$$\int\frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}dx = \left|\begin{array}{l} 1+\cos^2 x = t, \\ -2\cos x\cdot\sin x dx = dt, \\ -dt = \sin 2x dx \end{array}\right| = -\int\frac{dt}{\sqrt{t}} = -2\sqrt{t} + C = -2\sqrt{1+\cos^2 x} + C$$

Заметим, что в подобного рода интегралах нет необходимости вводить новую переменную. Так, в последнем примере, где $1+\cos^2 x$ - вспомогательная функция; $d(1+\cos^2 t) = -\sin 2x dx$ поэтому

$$\int\frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}dx = -\int\frac{d(1+\cos^2 x)}{\sqrt{1+\cos^2 x}} = -2\sqrt{1+\cos^2 x} + C.$$

б) Пример № 1.

$$\int\frac{x^2}{e^{2x}}dx .$$

В пункте **4** настоящих указаний было определено, что интегрирование такого типа интегралов производится интегрированием по частям, причем $U = x^2$.

$$\int x^2\cdot e^{-2x}dx = \left|\begin{array}{l} U = x^2, dU = 2xdx \\ dV = e^{-2x}dx, V = -\frac{1}{2}e^{-2x} \end{array}\right| = -\frac{1}{2}x^2\cdot e^{-2x} - \int -x\cdot e^{-2x}dx =$$

(последний интеграл снова интегрируем по частям)

$$= \left|\begin{array}{l} U = x, dU = dx \\ dV = e^{-2x}, V = -\frac{1}{2}e^{-2x} \end{array}\right| =$$

$$= -\frac{1}{2}x^2\cdot e^{-2x} - \frac{1}{2}x\cdot e^{-2x} + \int\frac{1}{2}e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}x^2\cdot e^{-2x} - \frac{1}{2}x\cdot e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C =$$

$$= -\frac{1}{4}e^{-2x}\cdot(2x^2 + 2x + 1) + C.$$

Пример № 2.

$$\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = \left| \begin{array}{l} \arcsin\sqrt{x} = U, dU = \dfrac{1}{2\cdot\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{x}}dx \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}}dx = dV, V = 2\sqrt{x} \end{array} \right| =$$

$$= 2\sqrt{x}\cdot\arcsin\sqrt{x} - \int\frac{dx}{\sqrt{1-x}} =$$

$$= 2\sqrt{x}\cdot\arcsin\sqrt{x} + \int\frac{d(1-x)}{\sqrt{1-x}} = 2\sqrt{x}\cdot\arcsin\sqrt{x} + 2\sqrt{1-x} + C.$$

в) **Пример № 1.**

$$\int\frac{2x^2-5x-2}{x^4+8x^2-9}dx.$$

Сначала разложим подынтегральную дробную функцию на сумму простейших дробей (данная дробь – правильная). Для этого необходимо

$$\frac{2x^2-5x-2}{x^4+8x^2-9} = \frac{2x^2-5x-2}{(x^2-1)\cdot(x^2+9)} = \frac{2x^2-5x-2}{(x+1)(x-1)(x^2+9)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+9} =$$

$$= \frac{A(x^3+x^2+9x+9)+B(x^3-x^2+9x-9)+Cx^3+Dx^2-Cx-D}{(x-1)(x+1)(x^2+9)} =$$

$$= \frac{(A+B+C)\cdot x^3+(A-B+D)\cdot x^2+(9A+9B-C)\cdot x+9A-9B-D}{(x-1)(x+1)(x^2+9)} =$$

$$= \frac{(A+B+C)\cdot x^3+(A-B+D)\cdot x^2+(9A+9B-C)\cdot x+9A-9B-D}{(x-1)(x+1)(x^2+9)} =$$

$$= \frac{2x^2-5x-2}{x^4+8x^2-9}.$$

Приравнивая коэффициенты числителей, соответствующие одинаковым степеням переменной, получим систему:

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ A-B+D=2 \\ 9A+9B-C=-5 \\ 9A-9B-D=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C=1/2 \\ D=2 \\ A=B \\ A+B=-1/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-1/4 \\ B=-1/4 \\ C=1/2 \\ D=2 \end{cases}$$

Возвращаясь к интегралу,

$$\int\frac{2x^2-5x-2}{x^4+8x^2-9}dx = \int\left(-\frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x+4}{x^2+9}\right)dx =$$

$$= -\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-1} - \frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+9)}{2(x^2+9)} + 2\int\frac{dx}{x^2+9} =$$

$$= -\frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln(x^2+9) + \frac{2}{3}arctg\frac{x}{3} + C =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\frac{x^2+9}{|x^2-1|} + \frac{2}{3}arctg\frac{x}{3} + C.$$

Пример № 2.

$$\int\frac{2x}{x^3-7x^2+15x-9}dx.$$

Здесь начнем раскладывать на множители знаменатель. Так как подставив в знаменатель $x=1$, получим 0, и можно выделить множитель $(x-1)$:

$$x^3-7x^2+15x-9 = x^3-x^2-6x^2+6x+9x-9 =$$

$$= x^2(x-1)-6x(x-1)+9(x-1) = (x-1)\cdot(x^2-6x+9) = (x-1)\cdot(x-3)^2,$$

теперь, преобразовывая подынтегральную дробь, имеем:

$$\frac{2x}{x^3-7x^2+15x-9} = \frac{2x}{(x-1)(x-3)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2} =$$

$$= \frac{Ax^2-6Ax+9A+Bx^2-4Bx+3B+Cx-C}{(x-1)(x-3)^2} =$$

$$= \frac{(A+B)x^2+(-6A-4B+C)x+9A+3B-C}{(x-1)(x-3)^2} = \frac{2x}{(x-1)(x-3)^2}$$

Составляем и решаем систему:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -6A-4B+C=2 \\ 9A+3B-C=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-B \\ 2B+C=2 \\ -6B-C=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=-1/2 \\ A=-1/2 \\ C=3 \end{cases}$$

Следовательно,

$$\int\frac{2x}{x^3-7x^2+15x-9}dx = \int\left(\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x-3)} + \frac{3}{(x-3)^2}\right)dx =$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x-3|-\frac{3}{x-3}+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x-3}\right|-\frac{3}{x-3}+C.$$

г) Пример № 1.

$$\int\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[4]{(x+1)^3}+1}dx$$

Выполним здесь подстановку, описанную в п. 6, а именно $x+1=t^4$.

$$\int\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[4]{(x+1)^3}+1}dx=\left|\begin{matrix}x+1=t^4\\ dx=4t^3dt\end{matrix}\right|=\int\frac{t^2\cdot 4t^3}{t^3+1}dt=4\int\frac{t^5+t^2-t^2}{t^3+1}dt=$$

$$=4\int\left(\frac{t^2\left(t^3+1\right)}{t^3+1}-\frac{t^2}{t^3+1}\right)dt=4\int t^2dt-\frac{4}{3}\int\frac{d(t^3+1)}{t^3+1}=$$

$$=\frac{4}{3}t^3-\frac{4}{3}\ln(t^3+1)+C=\frac{4}{3}\left(\sqrt[4]{(x+1)^3}-\ln\left(\sqrt[4]{(x+1)^3}+1\right)\right)+C.$$

Пример № 2.

$$\int\frac{dx}{2tgx-\sin x}dx$$

Для вычисления этого интеграла применим универсальную тригонометрическую подстановку (см. п. 7):

$$\int\frac{dx}{2tgx-\sin x}dx=\left|\begin{matrix}tg\frac{x}{2}=z,\sin x=\frac{2z}{1+z^2}\\ dx=\frac{2dz}{1+z^2},tgx=\frac{2z}{1-z^2}\end{matrix}\right|=\int\frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{\frac{4z}{1-z^2}-\frac{2z}{1+z^2}}=$$

$$=\int\frac{dz}{\left(1+z^2\right)\cdot\frac{2z(1+z^2)-z(1-z^2)}{(1-z^2)(1+z^2)}}=\int\frac{(1-z^2)dz}{z(3z^2+1)}$$

Для вычисления полученного интеграла необходимо разложить правильную подынтегральную функцию.

$$\frac{1-z^2}{z(3z^2+1)}=\frac{A}{z}+\frac{Bz+C}{(3z^2+1)}=\frac{3Az^2+A+Bz^2+Cz}{z(3z^2+1)}.$$

Составим систему для нахождения коэффициентов:

$$\begin{cases}3A+B=-1\\ C=0\\ A=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1\\ B=-4\\ C=0\end{cases}$$

Значит,

$$\int\frac{(1-z^2)dz}{z(3z^2+1)}=\int\frac{dz}{z}-4\int\frac{zdz}{3z^2+1}=\ln|z|-\frac{4}{6}\int\frac{d(3z^2+1)}{3z^2+1}=$$

$$=\ln|z|-\frac{2}{3}\ln(3z^2+1)+C.$$

Возвращаясь к переменной x, получаем окончательно:

$$\int\frac{dx}{2tgx-\sin x}=\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|-\frac{2}{3}\ln(3tg^2\frac{x}{2}+1)+C.$$

II.Определенный интеграл. Приложения определенного интеграла

(задачи 311-320)

1. Пусть $f(x)$ - положительная непрерывная функция, заданная на отрезке $[a;b]$.

Рассмотрим фигуру, ограниченную снизу осью Ox, сверху линией $y=f(x)$, а также прямыми $x=a$; $x=b$ (рис. 1). Эта фигура называется криволинейной трапецией.

Будем искать площадь S этой криволинейной трапеции. Для этого разделим отрезок $[a;b]$ на n отрезков точками

$$x_0=a<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$$

Если через точки деления провести прямые $x=x_k$, то они разобьют трапецию на n узких полосок. Каждую из этих полосок можно приближенно принять за прямоугольник. Принимая за значение $f(x)$ на всем отрезке $[x_{k-1};x_k]$ ее значение в какой-нибудь точке $\overline{x_k}$ этого отрезка, получаем, что высотой прямоугольника, за который мы принимаем полоску, будет $f\left(\overline{x_k}\right)$.

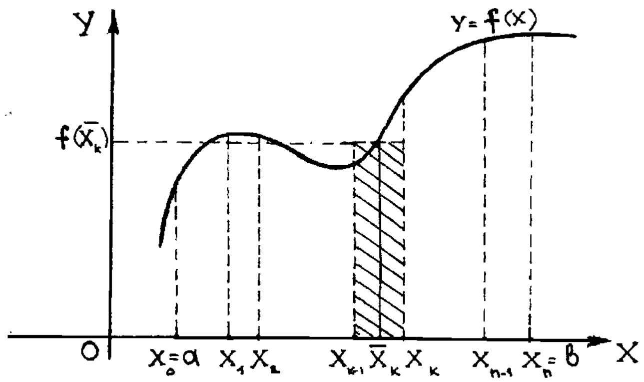


Рис. 1

Площадь одной полоски приближенно равна произведению $f(\overline{x_k})\cdot(x_k - x_{k-1})$. Обозначив $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, получается приближенное равенство для площади всей трапеции

$$S \approx \sum_{k=1}^{n} f(\overline{x_k})\Delta x_k .$$

Из вывода следует, что точность этого равенства тем выше, чем меньше отрезки $[x_{k-1};x_k]$, т. е. когда $\max \Delta x_k \to 0$.

Теперь сформулируем:

Определение. Если при любых разбиениях отрезка $[a;b]$ таких, что $\max \Delta x_k \to 0$ и при любом выборе точек $\overline{x_k}$ на отрезках $[x_{k-1};x_k]$ $\lim\limits_{\max \Delta x_k \to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} f(\overline{x_k})\Delta x_k = S$, то этот предел называют ***определенным интегралом*** от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ и обозначают

$$\int_a^b f(x)dx .$$

Таким образом, мы приходим к формуле

$$S = \int_a^b f(x)dx .$$

2. Для вычисления определенного интеграла применяется ***формула Ньютона-Лейбница:***

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ - первообразная функции $f(x)$.

Все приемы, позволяющие вычислять неопределенные интегралы, применимы и к вычислению определенных интегралов, однако в применении интегрирования по частям и в интегрировании с помощью замены переменной имеются некоторые особенности.

Формулу интегрирования по частям для определенного интеграла нужно писать в виде

$$\int_a^b u dv = u \cdot v \big|_a^b - \int_a^b v du .$$

Правило подстановки для случая определенных интегралов выражается формулой

$$\int_a^b f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(z)dz .$$

Сформулируем два важных ***свойства определенного интеграла***:

1) Определенный интеграл меняет знак при перестановке пределов интегрирования, т. е.

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx .$$

2) Пусть промежуток $[a;b]$ разбит на две части точкой c ($a<c<b$), тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx .$$

3. В геометрические приложения определенного интеграла входят задачи, связанные с нахождением площадей, объемов, длин дуги кривой.

3.1. Вычисление площади в декартовых координатах

Если нужно вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ и прямыми $x = a$; $x = b$, то при условии, что $f_1(x) \geq f_2(x)$, получаем (рис. 2)

$$S = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]dx .$$

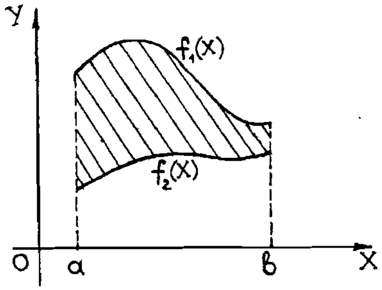


Рис. 2

3.2. Вычисление площади в полярных координатах

Площадь сектора *AOB*, ограниченного линией *AB* и лучами *OA* и *OB* (рис. 3), выражается формулой

$$S = \frac{1}{2}\int_{\varphi 1}^{\varphi 2} r^2 dy ,$$

где *r* - полярный радиус переменной *M* линии *AB*, φ - ее полярный угол.

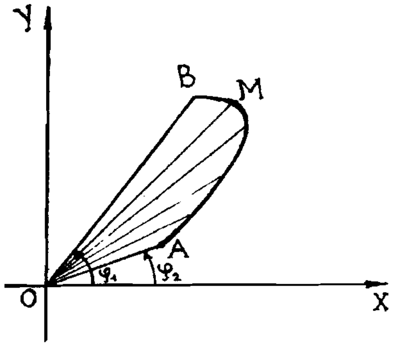


Рис. 3

3.3. Вычисление объема тела вращения

Пусть фигура, ограниченная линиями $x = a$, $x = b$, $y = 0$, $y = f(x)$, вращается вокруг оси *Ox* (рис. 4).

Для нахождения объема тела, полученного при этом вращении, применяется формула

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx .$$

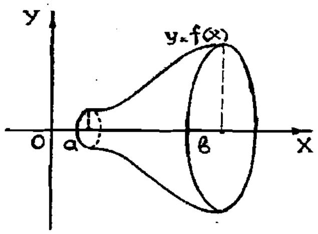


Рис. 4

3.4. Длина дуги кривой в декартовых координатах

Пусть на плоскости задана кривая уравнением $y = f(x)$. Длина дуги этой кривой, заключенной между прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 5), вычисляется по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx .$$

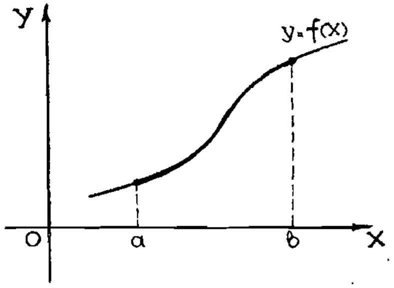


Рис. 5

3.5. Длина дуги в полярных координатах

Пусть требуется найти длину дуги кривой $r = f(\varphi)$, отвечающей промежутку $\alpha \le \varphi \le \beta$:

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(r')^2 + r^2}\, dy.$$

4. Примеры решения задач

Задача № 1.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 6x - 3x^2$ и $y = 3x - 6$.

Решение:

Выполним рисунок, изобразив на координатной плоскости параболу $y = 6x - 3x^2$ и прямую $y = 3x - 6$ (рис. 6).

Точки пересечения данных линий находим решая систему уравнений:

$$\begin{cases} y = 6x - 3x^2 \\ y = 3x - 6 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -1 \\ y = -9 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

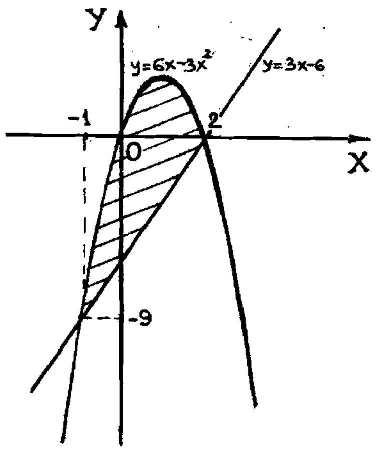


Рис. 6

Воспользуемся формулой из п. **3.1**.

Имеем: $a = -1$; $b = 2$; $f_1 = 6x - 3x^2$; $f_2 = 3x - 6$ ($f_1 \ge f_2$ для $x \in [-1;2]$), тогда

$$S = \int_{-1}^{2} \left[6x - 3x^2 - (3x - 6)\right] dx = \int_{-1}^{2} \left[-3x^2 + 3x + 6\right] dx =$$

$$= -x^3 + \frac{3x^2}{2} + 6x \Big|_{-1}^{2} = 13.5.$$

Задача № 2.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией, заданной в параметрической форме:

$x = a\cos t$; $y = b\sin t$.

Решение:

Данные уравнения задают эллипс на плоскости. В силу симметричности эллипса относительно координатных осей достаточно вычислить площадь его четверти, затем умножить на 4 (рис. 7).

Воспользуемся формулой из п. **3.1**.

$$S = 4\int_0^a y\,dx.$$

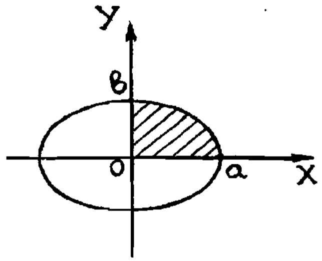


Рис. 7

Выполним в этом интеграле замену переменной $x = a\cos t$, тогда $dx = -a\sin t\,dt$, а $y = b\sin t$. Так как интеграл определенный, изменятся границы интегрирования: для $x = 0$, $t = \frac{\pi}{2}$; для $x = a$, $t = 0$.

$$S = 4\int_0^a y\,dx = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t(-a\sin t)\,dt = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,dt = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2t}{2}\,dt =$$

$$= 2ab\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi ab\,.$$

Задача № 3.

Найти площадь фигуры, ограниченной лемнискатой

$$\left(x^2 + y^2\right) = a^2\left(x^2 - y^2\right).$$

Решение:

В полярных координатах ($x = r\cos\varphi$; $y = r\sin\varphi$) лемниската имеет уравнение $r^2 = a^2\cos 2\varphi$ (рис. 8). Лемниската симметрична относительно обеих осей, поэтому вычислим площадь четверти фигуры, расположенной в первом координатном углу. Здесь имеем $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$. Воспользуемся формулой из п. **3.2**.

$$S = 4\cdot\left(\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2 dy\right) = 2a^2\cdot\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2y\,dy = a^2(\sin 2\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2\,.$$

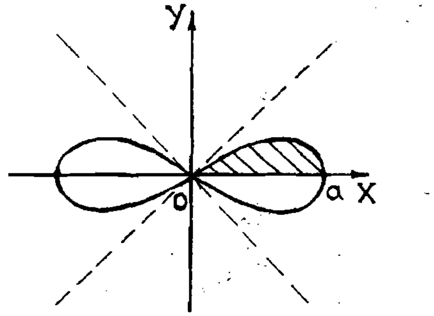


Рис. 8

Задача № 4.

Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{3 - x}$ и $y = -\frac{x}{2} + \frac{3}{2}$.

Решение:

Сначала изобразим на плоскости фигуру, ограниченную данными линиями (рис. 9):

$$\begin{cases} y = \sqrt{3 - x} \\ y = -\frac{x}{2} + \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases} \end{array}\right.$$

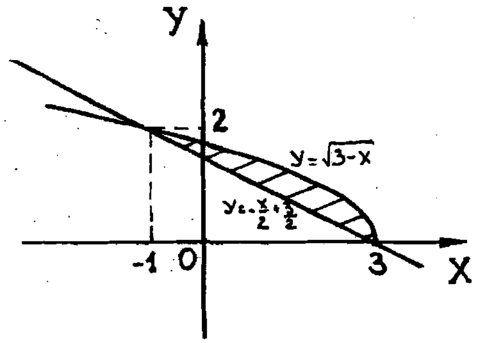


Рис. 9

Вращая данную фигуру вокруг оси Ox получим тело, объем которого нужно найти из п. **3.3**. Имеем

$$V = \pi\int_{-1}^{3}\left[\left(\sqrt{3 - x}\right)^2 - \left(-\frac{x}{2} + \frac{3}{2}\right)^2\right]dx = \pi\int_{-1}^{3}\left[3 - x - \frac{x^2}{4} + \frac{3x}{2} - \frac{9}{4}\right]dx =$$

$$= \pi\left(\frac{3}{4}x + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{12}\right)\Bigg|_{-1}^{3} = \frac{8\pi}{3}\,.$$

Задача № 5.

Вычислить длину окружности.

Решение:

Воспользуемся уравнением окружности в параметрической форме:

$x = R\cos t$,

$y = R\sin t$ ($0 \le t \le 2\pi$).

Так как окружность симметрична относительно обеих осей, вычислим длину четверти окружности (см. п. 3.4).

$$\frac{l}{4}=\int_0^R\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\left|\begin{array}{l}x=R\cos t\\ dx=-R\sin t\,dt\\ y=R\sin t\\ dy=R\cos t\,dt\end{array}\right|=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sqrt{1+\frac{R^2\cos^2 t}{R^2\sin^2 t}}(-R\sin t)dt=$$

$$=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}R\sqrt{\sin^2+\cos^2 t}\,dt=R\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt=R\cdot t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi R}{2},$$

окончательно $l=2\pi R$.

III.Тройной интеграл,

его вычисление трёхкратным интегрированием.

Объём пространственной области

(задачи 381-390)

1. Пусть функция f(M) непрерывна в каждой точке M некоторой пространственной области G. Разобьем эту область произвольным образом на n частичных областей с объёмами $\Delta v_1, \Delta v_2, ..., \Delta v_n$. Выберем в каждой из них по одной произвольной точке $M_1, M_2, \ldots, M_n$ и вычислим значения функции f в этих точках.

Составим сумму $f(M_1)\Delta v_1+f(M_2)\Delta v_2+...+f(M_n)\Delta v_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta v_i$.

Эта сумма называется ***интегральной суммой*** функции f(M) по области G.

При составлении интегральной суммы можно различными способами разбивать область G на n частичных областей Δv_i и в каждой из них

можно произвольно выбирать одну точку M_i. Поэтому для всякой данной функции f(M) и всякой данной области G можно составить сколько угодно различных интегральных сумм, но все эти интегральные суммы при неограниченном возрастании n и при стремлении к нулю наибольшего из диаметров частичных областей имеют один общий предел, который называется ***тройным интегралом*** от функции f(M) по области G и обозначается

$$\iiint_G f(M)dv=\lim_{\substack{n\to\infty\\ \max\Delta v_i\to 0}}\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta v_i$$

Свойства тройного интеграла аналогичны свойствам двойного и обыкновенного определённых интегралов: область интегрирования можно разбивать на части; интеграл от суммы функций равен сумме интегралов от всех слагаемых; постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.

Вычисление тройного интеграла сводится к трехкратному интегрированию, то есть к последовательному вычислению трех обыкновенных определенных интегралов по каждой из трех переменных координат точки трехмерного пространства.

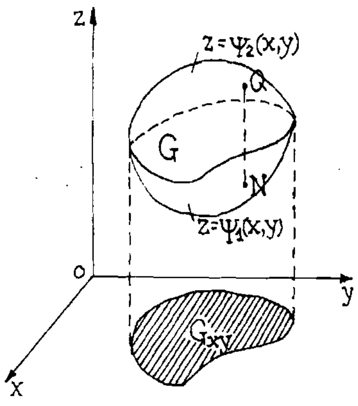


Рис. 1

Пусть область интегрирования G отнесена к прямоугольной системе координат Oxyz. Разобьем ее на частичные области плоскостями, паралельными координатным плоскостям. Тогда объем частичной области dv = dxdydz (как объем прямоугольного параллелепипеда с ребрами dx, dy и dz) и тройной интеграл преобразуется к виду

$$\iiint_G f(M)dv=\iiint_G f(x,y,z)dxdydz$$

При этом, если область G такова, что любая прямая, проходящая внутри области G параллельно оси Oz, пересекает её границу (ограничивающую её замкнутую поверхность) в двух точках (рис. 1), то тройной интеграл можно вычислить по формуле

$$\iiint\limits_{G} f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_{G_{xy}} dxdy \int\limits_{z=\psi_1(x,y)}^{z=\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz, \qquad (1)$$

где G_{xy} – проекция области G на Oxy; $z=\psi_1(x,y)$ и $z=\psi_2(x,y)$ – уравнения нижней и верхней поверхностей, ограничивающих область G.

По формуле (1) вычисление тройного интеграла сводится к последовательному вычислению обыкновенного определенного интеграла с переменной z, причем x и y рассматриваются как постоянные, и двойного интеграла с переменными x и y по области G_{xy}, расположенной в плоскости Oxy.

При вычислении тройного интеграла указанным способом после вычисления внутреннего обыкновенного интеграла иногда целесообразно для вычисления двойного интеграла перейти от прямоугольных координат к полярным.

2. Объём пространственной области G (рис. 1) вычисляется по формуле

$$V = \iiint\limits_{G} dv = \iiint\limits_{G} dxdydz = \iint\limits_{G_{xy}} dxdy \int\limits_{z=\psi_2(x,y)}^{z=\psi_2(x,y)} dz. \qquad (2)$$

Чтобы вычислить объем пространственной области G, необходимо знать, какие именно поверхности ограничивают эту область.

3.*Примеры некоторых поверхностей второго порядка*

1) $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ – сфера с центром в точке (a,b,c) и радиуса R.

2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ - эллиптический цилиндр;

3) $z=\frac{x^2}{2p}$ или $z=\frac{y^2}{2p}$ - параболический цилиндр;

4) $z=\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{b^2}$ - параболоид.

4.Рассмотрим примеры вычисления ***объема пространственной области.***

Задача № 1.

Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями

$y=x^2$, $y=1$, $z=o$, $z=2$.

Решение: Построим данные поверхности в декартовой системе координат Oxyz:

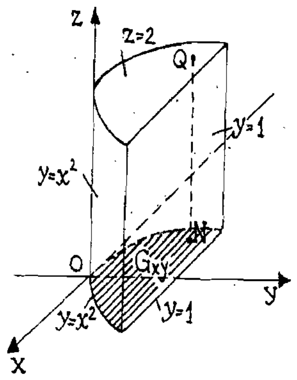


Рис. 2

z = 0 - плоскость, совпадающая с координатной плоскостью Oxy ; z = 2 - плоскость, параллельная плоскости Oxy, расположенная выше её на 2 единицы; y = 1 – плоскость, параллельная плоскости Oxz, расположенная правее её на 1 единицу; $y=x^2$ – параболический цилиндр, образующая которого параллельна оси Oz.

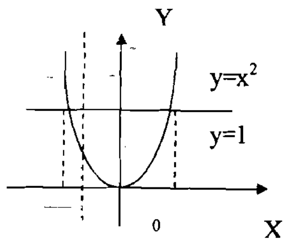
Область G, ограниченная данными поверхностями есть прямой цилиндр, образующие которого параллельны оси Oz.

Объём тела вычисляется по формуле (2): $V=\iint\limits_{G_{xy}} dxdy \int\limits_{z=\psi_2(x,y)}^{z=\psi_1(x,y)} dz$.

Как видно (рис.2), прямая, проходящая через произвольную внутреннюю точку области G параллельно оси Oz, пересекает поверхности, ограничивающие эту область, в двух точках N и Q.

Тогда, уравнения поверхностей, ограничивающих область G, таковы: $z=0=\psi_1(x,y)$ и $z=2=\psi_2(x,y)$.

Отдельно нарисуем проекцию G_{xy} области G на плоскость Oxy (рис. 3):



Области изменения переменных x и y для области G_{xy} таковы: $-1 \le x \le 1$ и $x^2 \le y \le 1$.

Рис. 3

Итак,

$$V = \iint\limits_{G_{xy}} dxdy \int\limits_{z=0}^{z=2} dz = \iint\limits_{G_{xy}} z\,|_0^2\, dxdy = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{1} 2dy = 2\int\limits_{-1}^{1} dxy\,|_{x^2}^{1} =$$

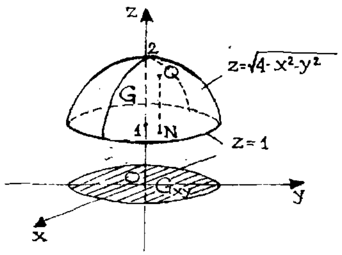
$$= 2\int\limits_{-1}^{1}(1-x^2)dx = 2\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{8}{3}$$

Задача № 2.

Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ и $z = 1$.

Решение:

Построим данные поверхности в декартовой системе координат Oxyz:



$x^2 + y^2 + z^2 = 4$ – сфера с центром в начале координат и радиуса 2;

z = 1 – плоскость, параллельная плоскости Oxy;

G – область, занимаемая данным телом.

Рис. 4

Как видно (рис.4), прямая, проходящая через произвольную точку области G параллельно оси Oz, пересекает поверхности, ограничивающие область G, в двух точках N и Q. Тогда уравнение поверхностей, ограничивающих область G, таковы: $z = 1 = \psi_1(x, y)$ и $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} = \psi_2(x, y)$.

Отдельно нарисуем проекцию G_{xy} области G на плоскость Oxy внутреннюю (рис. 5):

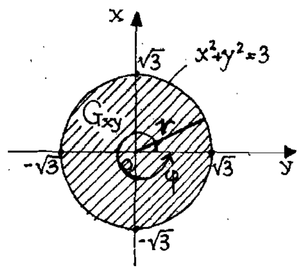


Рис. 5

Проекция G_{xy} является кругом, поскольку на плоскость Oxy проектируется часть сферы. Уравнение окружности, ограничивающей область G_{xy}, получаем из уравнения сферы, подставляя в него z = 1: $x^2 + y^2 + 1 = 4$ или $x^2 + y^2 = 3$.

Поскольку область G_{xy} – круг, удобно перейти от декартовых координат к полярным:

$x = r\cos\varphi$; $y = r\sin\varphi$; $dxdy = rdrd\varphi$;

для области G_{xy} переменные r и φ изменяются в следующих пределах: $0 \le r \le \sqrt{3}$ и $0 \le \varphi \le 2\pi$ (рис. 5)

$$V = \iint\limits_{G_{xy}} dxdy \int\limits_{z=1}^{z=\sqrt{4-x^2-y^2}} dz = \iint\limits_{G_{xy}} z\,|_1^{\sqrt{4-x^2-y^2}}\, dxdy = \iint\limits_{G_{xy}} (\sqrt{4-x^2-y^2} - 1)dxdy =$$

Итак,

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{3}} (\sqrt{4-r^2} - 1)rdr = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{3}} (r\sqrt{4-r^2} - r)dr =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi}\left(-\frac{(4-r^2)^{3/2}}{3} - \frac{r^2}{2}\right)\Big|_0^{\sqrt{3}}\, d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \frac{5}{6} d\varphi = \frac{5}{6}\varphi\,|_0^{2\pi} = \frac{5}{3}\pi.$$

Задача № 3.

Вычислить объём тела, ограниченного поверхностями: $x + y + z = 4$, $x = 3$, $y = 2$, $x = 0, y = 0, z = 0$.

Решение: Построим данные поверхности в декартовой системе координат Oxyz:

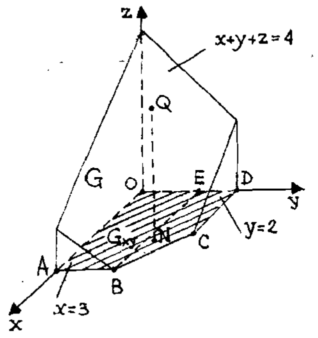


Рис. 6

x + y + z = 4 – плоскость;

x = 0 - координатная плоскость Ozy;

y = 0 - координатная плоскость Oxz;

z = 0 - координатная плоскость Oxy;

x = 3 – плоскость, параллельная плоскости Ozy;

y = 2 – плоскость, параллельная плоскости Oxz;

G – область, занимаемая данным телом.

Как видно (рис. 6), прямая, проходящая через произвольную точку пространственной области G параллельно оси Oz, пересекает поверхности, ограничивающие эту область, в двух точках N и Q. Тогда уравнение поверхностей, ограничивающих область G таковы: $z = 0 = \psi_1(x,y)$ и $z = 4 - x - y = \psi_2(x,y)$.

Отдельно нарисуем проекцию G_{xy} области G на плоскость Oxy (рис.7) :

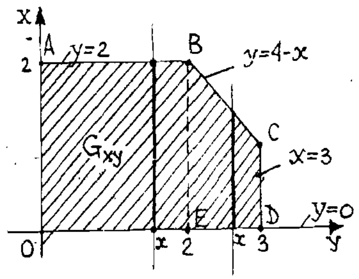


Рис. 7

Прямая BC есть пересечение двух плоскостей x + y + z = 4 и z = 0, тогда её уравнение можно записать в виде системы $\begin{cases} x+y+z=4 \\ z=0 \end{cases}$ или

x + y + 0 = 4; x + y = 4; y = 4 – x.

Верхняя граница области G_{xy} состоит из двух разных уравнений: прямой AB y = 2 и прямой BC y = x - 4, значит, область G_{xy} при интегрировании следует разбить на две области OABE и BCDE.

$$V = \iint dxdy \int_{z=0}^{z=4-x-y} dz = \iint_{G_{xy}} z\,|_0^{4-x-y}\, dxdy = \iint_{G_{xy}} (4-x-y)dxdy =$$

$$= \int_0^2 dx \int_0^2 (4-x-y)dy + \int_2^3 dx \int_0^{4-x} (4-x-y)dy =$$

$$= \int_0^2 dx((4-x)y - \frac{y^2}{2})|_0^2 + \int_2^3 dx((4-x)y - \frac{y^2}{2})|_0^{4-x} =$$

$$= \int_0^2 (2(4-x)-2)dx + \int_2^3 \frac{(4-x)^2}{2} dx = = \int_0^2 (6-2x)dx + \frac{1}{2}\int_2^3 (4-x)^2 dx =$$

$$= (6x - x^2)|_0^2 - \frac{(4-x)^3}{6}|_2^3 = \frac{55}{6}.$$

IV. Криволинейные интегралы и их вычисление

(задачи 391-400)

1. Пусть функция f(M) непрерывна в каждой точке M дуги AB. Разобьем эту дугу произвольным образом на n частичных дуг длиной $\Delta l_1, \Delta l_2, ..., \Delta l_n$. Спроектируем эти частичные дуги на ось Ox.

Обозначим за $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$ проекции $\Delta l_1, \Delta l_2, ..., \Delta l_n$ на ось Ox.

Выберем на каждой дуге Δl_i одну произвольную точку M_i и вычислим значения функции в этих точках (рис. 1).

Составим сумму :

$$f(M_1)\Delta x_1 + f(M_2)\Delta x_2 + ... + f(M_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta x_i.$$

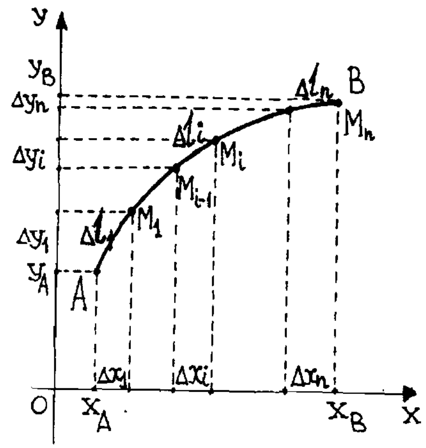


Рис. 1

Такая сумма называется ***интегральной суммой*** функции f(M) ***по дуге*** AB по координате x.

Аналогично определяется интегральная сумма по координате y. Очевидно, что для всякой данной функции f(M) и всякой данной дуги AB можно составить бесчисленное множество различных интегральных сумм – если по-разному делить эту дугу на n частичных дуг, проектировать их на ось Ox (или Oy) и по-разному выбирать на каждой из них по одной точке M_i.

Но при неограниченном увеличении n и при стремлении к нулю наибольшей из длин проекций частичных дуг все эти различные интегральные суммы имеют один общий предел, который называется криволинейным интегралом от функции f(M) по дуге AB по координате x и обозначается

$$\int_{AB} f(M)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta x_i .$$

Аналогично определяется криволинейный интеграл от функции по дуге AB по координате y:

$$\int_{AB} f(M)dy = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta y_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta y_i$$

Криволинейный интеграл $\int_{AB} Pdx + Qdy$ обозначает сумму криволинейных интегралов указанных видов (P и Q – непрерывные в каждой точке дуги AB функции).

Криволинейный интеграл по замкнутой плоской линии ℓ при положительном направлении ее обхода (против движения часовой стрелки) обозначается $\oint_{+\lambda}$, а при отрицательном направлении обхода обозначается $\oint_{-\lambda}$.

При перемене направления на кривой интегрирования криволинейный интеграл по координатам изменяет свой знак: $\int_{AB} = -\int_{BA}$

Кривую интегрирования можно разбивать на части: $\int_{AB} = \int_{AC} + \int_{CB}$

Вычисление криволинейного интеграла сводится к вычислению обыкновенного определенного интеграла: исходя из уравнения (или уравнений) линии интегрирования AB подынтегральное выражение криволинейного интеграла преобразуется к одной переменной, значения которой в начале и в конце дуги AB будут пределами полученного обыкновенного интеграла.

2. Примеры решения задач.

Задача № 1.

Вычислить криволинейный интеграл

$\int_{AB} (xy-1)dx + x^2 ydy$ от точки A(1;0) до точки B(0;2)

а) по дуге параболы $4x + y^2 = 4$ (рис. 2);

б) по дуге эллипса $x = \cos t$, $y = 2\sin t$ (рис. 3).

Решение:

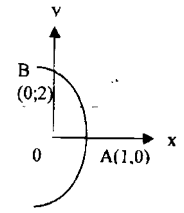


Рис. 2

а) Пользуясь данным уравнением линии интегрирования, преобразуем криволинейный интеграл в обыкновенный определённый интеграл с переменной y, затем вычисляем его:

$x = 1 - \frac{y^2}{4}$; $dx = -\frac{y}{2}dy$ (полученные выражения подставляем в исходный интеграл вместо x и dx):

$$\int_{AB}(xy-1)dx + x^2ydy = \int_{y_A=0}^{y_B=2}((1-\frac{y^2}{4})y-1)(-\frac{y}{2}dy) + (1-\frac{y^2}{4})^2 ydy =$$

$$= \int_0^2(\frac{y^5}{16} + \frac{y^4}{8} - \frac{y^3}{2} - \frac{y^2}{2} + \frac{3y}{2})dy = (\frac{y^6}{96} + \frac{y^5}{40} - \frac{y^4}{8} - \frac{y^3}{6} + \frac{3y^2}{4})|_0^2 = -\frac{1}{5}.$$

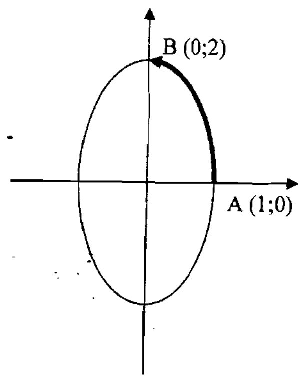


Рис. 3

б) Преобразуем данный интеграл в обыкновенный с переменной t (так как x, и y являются функциями от t), затем вычисляем его:

x = cost; dx = - sintdt;

y = 2sint, dy = 2costdt;

$x_A = 1$; $1 = \cos t_A \Rightarrow t_A=0$;

$x_B = 0$; $0 = \cos t_B \Rightarrow t_B = \pi/2$.

Подставим полученные выражения в исходный интеграл:

$$\int_{AB}(xy-1)dx + x^2ydy = \int_{t_A=0}^{t_B=\frac{\pi}{2}}((\cos t 2\sin t - 1)(-\sin t dt) +$$

$$+ \cos^2 t 2\sin t 2\cos t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(4\cos^3 t\sin t + \sin t - 2\sin^2 t\cos t)dt =$$

$$= -4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 t d(\cos t) + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t dt - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t d(\sin t) =$$

$$= (-\cos^4 t - \cos t - \frac{2}{3}\sin^3 t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3}.$$

Задача № 2.

Вычислить криволинейный интеграл вдоль границы треугольника ABC, обходя ее по часовой стрелке, где A(-1;0); B(0;2); C(2;0).

Решение:

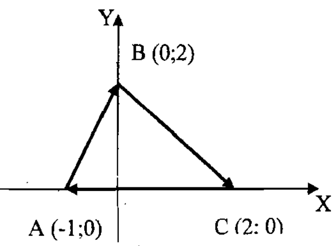


Рис. 4

Здесь линия интегрирования (замкнутая) состоит из трех отрезков, которые лежат на различных прямых (с различными уравнениями) (рис.4). Соответственно этому ,криволинейный интеграл по ломаной ABCA вычисляем как сумму интегралов, взятых по отрезкам AB, BC и CA:

$$\oint_{-\lambda} = \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CA}$$

Составим уравнение прямой AB в отрезках:

$$\frac{x}{-1} + \frac{y}{2} = 1 \Rightarrow y = 2x + 2 \Rightarrow dy = 2dx,$$

$$\int_{AB} 2xdx - (x+2y)dy = \int_{X_A=-1}^{X_B=0} 2xdx - (x + 2(2x+2))2dx =$$

$$\int_{-1}^{0} (2x - 2x - 8x - 8)dx = -8\int_{-1}^{0} (x+1) = -8(\frac{x^2}{2} + x)\,|_{-1}^{0} = -4.$$

Составим уравнение прямой BC в отрезках:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 1 \Rightarrow y = 2 - x \Rightarrow dy = -dx,$$

$$\int_{BC} 2xdx - (x+2y)dy = \int_{Xb=0}^{Xc=2} 2xdx - (x + 2(2-x))(-dx) =$$

$$\int_{0}^{2} (2x - x + 4)dx = \int_{0}^{2} (x+4)dx = (\frac{x^2}{2} + 4x)\,|_{0}^{2} = 10.$$

Прямая CA совпадают с осью Ox, значит её уравнение $y = 0$, $dy = 0$,

$$\int_{CA} 2xdx - (x+2y)dy = \int_{Xc=2}^{Xa=-1} 2xdx = x\,|_{2}^{-1} = -3.$$

Итак, $\oint_{-\lambda} = \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CA} = -4 + 10 - 3 = 3$.

Библиографический список

1. Бермант А.Ф. Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа.- СПб. : Лань, 2006.

2. Натансон И.Г. Краткий курс высшей математики.- СПб. : Лань, 2005.

3.Задачи и упражнения по математическому анализу / под ред. Б.П.Демидовича.– М. : Астрель, 2001.

4. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа .- М.: Наука, 1985.

Содержание