

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования

**Санкт-Петербургский государственный технологический  
университет растительных полимеров**

---

# **ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА**

**Учебно-методическое пособие  
для студентов заочного факультета**

Санкт-Петербург  
2007

0104

# ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

**Учебно-методическое пособие  
для студентов заочного факультета**

Санкт-Петербург  
СПГТУРП  
НАУЧНО-ИНФОРМАЦИОННЫЙ  
ЦЕНТР  
С-Петербург, ул.Ивана Черных, 4

Федеральное агентство по образованию  
Государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования

Санкт-Петербургский государственный  
технологический университет  
растительных полимеров

# ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Учебно-методическое пособие  
для студентов заочного факультета

Санкт-Петербург  
2007

ББК 22. 21 я 7

Т 338

УДК 531 (075)

**Теоретическая механика:** учебно-методическое пособие для студентов заочного факультета / сост. О.Г. Ковалевская, Н.Н. Кокушин, Ю.Н. Лазарев, Э.В. Азарова, А.А. Тихонов; СПбГТУРП. СПб., 2007.-118 с.

Представлены примеры решения задач по теоретической механике по разделам: статика, кинематика, динамика. Перед каждым разделом курса приведена теоретическая часть и даны основные формулы для расчета.

Настоящее учебно-методическое пособие предназначено для специальностей 240406, 280201, 150405, 220301.

Рецензенты: канд.техн.наук, профессор, декан факультета МАП ГОУВПО СПбГТУРП А.А.Гаузе;  
доцент БГТУ «ВОЕНМЕХ» канд.физ.-мат.наук Н.Н.Дмитриев.

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом университета в качестве учебно-методического пособия.

©ГОУВПО Санкт-Петербургский  
государственный технологический университет  
растительных полимеров, 2007

## РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

Механическое движение как одна из форм движения материи. Предмет механики. Теоретическая механика и ее место среди естественных и технических наук. Механика как теоретическая база ряда областей современной техники. Объективный характер законов механики. Основные исторические этапы развития механики.

### СТАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

**Основные понятия и аксиомы статики.** Предмет статики. Основные понятия статики, абсолютно твердое тело, сила, эквивалентные системы сил, равнодействующая, уравновешенная система сил, силы внешние и внутренние. Аксиомы статики. Связи и реакции связей. Основные виды связей: гладкая плоскость, поверхность и опора, гибкая нить, цилиндрический шарнир (подшипник), сферический шарнир (подпятник), невесомый стержень; реакции этих связей.

**Система сходящихся сил.** Геометрический и аналитический способы сложения сил. Сходящиеся силы. Равнодействующая сходящихся сил. Геометрическое условие равновесия системы сходящихся сил. Аналитические условия равновесия пространственной и плоской систем сходящихся сил. Теорема о равновесии трех непараллельных сил.

**Теория пар сил.** Момент силы относительно точки (центра) как вектор. Пара сил. Момент пары сил как вектор. Теорема о сумме моментов сил, образующих пару, относительно любого центра. Теоремы об эквивалентности пар. Сложение пар, произвольно расположенных в пространстве. Условия равновесия системы пар.

**Приведение произвольной системы сил к данному центру.** Теорема о параллельном переносе силы. Основная теорема статики о приведении системы сил к данному центру. Главный вектор и главный момент системы сил

**Система сил, произвольно расположенных на плоскости (плоская система сил).** Алгебраическая величина момента силы. Вычисление главного вектора и главного момента плоской системы сил. Частные случаи приведения плоской системы сил: приведение к паре сил, к равнодействующей и случай равновесия. Аналитические условия равновесия плоской системы сил.

**Условия равновесия:** а) равенство нулю сумм проекций сил на две взаимно перпендикулярные оси и суммы их моментов относительно любого центра; б) равенство нулю сумм моментов сил относительно двух центров и суммы их проекций на ось, перпендикулярную плоскости сил; в) равенство нулю сумм моментов сил относительно любого центра и суммы их проекций на ось, перпендикулярную плоскости сил. **Условия равновесия плоской системы параллельных сил.** Теорема Вариньона о моменте равнодействующей.

**Сосредоточенные и распределенные силы.** Силы, равномерно распределенные по отрезку прямой, и их равнодействующая. Реакция жесткой заделки. Равновесие системы тел. Статически определимые и статически неопределимые системы. Равновесие при наличии сил трения. Коэффициент трения. Предельная сила трения. Угол и конус трения.

**Система сил, произвольно расположенных в пространстве (пространственная система сил).** Момент силы относительно оси, его вычисление. Зависимость между моментами силы относительно центра и относительно оси, проходящей через этот центр. Аналитические формулы для вычисления моментов силы относительно трех координатных осей. Вычисление главного вектора и главного момента пространственной системы сил. Частные случаи приведения пространственной системы сил: приведение к паре сил, к равнодействующей, к динамическому винту и случай равновесия. Аналитические условия равновесия произвольной пространственной системы сил. Условия равновесия пространственной системы параллельных сил. Теорема Вариньона о моменте равнодействующей относительно оси.

**Центр параллельных сил и центр тяжести.** Центр параллельных сил. Формулы для определения координат центра параллельных сил. Центр тяжести твердого тела; формулы для определения его координат. Координа-

ты центров тяжести однородных тел (центры тяжести объема, площади и линии). Способы определения положения центров тяжести тел. Центры тяжести дуги окружности, треугольника и кругового сектора.

## КИНЕМАТИКА

**Введение в кинематику.** Предмет кинематики. Пространство и время в классической механике. Относительность механического движения. Система отсчета. Задачи кинематики.

**Кинематика точки.** Векторный способ задания движения точки. Траектория точки. Скорость точки как производная ее радиуса-вектора по времени. Ускорение точки как производная ее вектора равна скорости по времени.

Координатный способ задания движения точки (в прямоугольных декартовых координатах). Определение траектории точки. Определение скорости и ускорения точки по их проекциям на координатные оси.

**Естественный способ задания движения точки.** Естественный трехгранник. Алгебраическая величина скорости точки. Определение ускорения точки по его проекциям на оси естественного трехгранника; касательное и нормальное ускорения точки. Равномерное и равнопеременное криволинейное движения точки; законы этих движений.

## Кинематика твердого тела

**Поступательное движение.** Поступательное движение твердого тела. Теорема о траекториях, скоростях и ускорениях точек твердого тела при поступательном движении.

**Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси (вращательное движение)** Уравнение (или закон) вращательного движения твердого тела.

Угловая скорость и угловое ускорение твердого тела. Законы равномерного и равнопеременного вращения. Скорость и ускорение точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. Векторы угловой скорости и углового ускорения тела. Выражение скорости точки вращающегося тела и ее касательного и нормального ускорений в виде векторных произведений.

**Плоскопараллельное (плоское) движение твердого тела.** Плоское движение твердого тела и движение плоской фигуры в ее плоскости. Уравнения движения плоской фигуры. Разложение движения плоской фигуры на поступательное вместе с полюсом и вращательное вокруг полюса. Независимость угловой скорости и углового ускорения фигуры от выбора полюса. **Определение скорости любой точки плоской фигуры как геометрической суммы скорости полюса и скорости этой точки при вращении фигуры вокруг полюса. Теорема о проекциях скоростей двух точек фигуры (тела). Мгновенный центр скоростей.** Определение скоростей точек плоской фигуры с помощью мгновенного центра скоростей. Определение ускорения любой точки плоской фигуры как геометрической суммы ускорения полюса и ускорения этой точки при вращении фигуры вокруг полюса. Понятие о мгновенном центре ускорений.

**Движение твердого тела вокруг неподвижной точки (сферическое движение).** Углы Эйлера. Уравнения движения твердого тела вокруг неподвижной точки. Мгновенная ось вращения тела. Векторы угловой скорости и углового ускорения тела. Определение скоростей и ускорений точек твердого тела, имеющего одну неподвижную точку.

**Общий случай движения свободного твердого тела.** Уравнения движения свободного твердого тела. Разложение этого движения на поступательное движение вместе с полюсом и движение вокруг полюса. Определение скоростей и ускорений точек свободного твердого тела.

**Сложное движение точки и твердого тела (составное движение).** Абсолютное и относительное движения точки; переносное движение. Относительная, переносная и абсолютная скорости и относительное, переносное и

абсолютное ускорения точки. Теорема о сложении скоростей. Теорема Кориолиса о сложении ускорений. Модуль и направление Кориолиса ускорения. Случай поступательного переносного движения.

Сложное движение твердого тела. Сложение поступательных движений. Сложение мгновенных вращений твердого тела вокруг пересекающихся и параллельных осей. Пара мгновенных вращений. Кинематический винт. Мгновенная винтовая ось.

## ДИНАМИКА

**Введение в динамику.** Предмет динамики. Основные понятия и определения: масса, материальная точка, сила. Силы, зависящие от времени, от положения точки и от ее скорости. Законы механики Галилея — Ньютона. Инерциальная система отсчета. Задачи динамики.

### Динамика точки

**Решение первой и второй задач динамики.** Дифференциальные уравнения движения свободной и несвободной материальной точки в декартовых координатах. Естественные уравнения движения точки (уравнения в проекциях на оси естественного трехгранника).

Две основные задачи динамики для материальной точки. Решение первой задачи динамики.

Решение второй задачи динамики. Начальные условия. Постоянные интегрирования и их определение по начальным условиям. Примеры интегрирования дифференциальных уравнений движения точки в случаях силы, зависящей от времени, от положения (координат) точки и от ее скорости.

**Несвободное и относительное движения точки.** Несвободное движение материальной точки. Дифференциальные уравнения движения точки

по заданной гладкой неподвижной кривой. Определение закона движения и реакции связи.

**Относительное движение материальной точки.** Дифференциальные уравнения относительного движения материальной точки; переносная и Кориолисова сила инерции. Принцип относительности классической механики. Случай относительного покоя.

**Прямолинейные колебания точки.** Свободные колебания материальной точки под действием восстанавливающей силы, пропорциональной расстоянию от центра колебаний. Амплитуда, начальная фаза, частота и период колебаний. Затухающие колебания материальной точки при сопротивлении, пропорциональных скорости; период этих колебаний, декремент колебаний. Аперидическое движение.

**Вынужденные колебания материальной точки** при действии гармонической возмущающей силы и сопротивлении, пропорциональном скорости; случай отсутствия сопротивления. Амплитуда вынужденных колебаний и сдвиг фаз, их зависимость от отношения частот; коэффициент динамичности. Явление резонанса.

**Введение в динамику механической системы.** Механическая система. Классификация сил, действующих на механическую систему: силы активные (задаваемые) и реакции связей; силы внешние и внутренние. Свойства внутренних сил. Масса системы. Центр масс; радиус-вектор и координаты центра масс.

**Моменты инерции.** Момент инерции твердого тела относительно оси; радиус инерции. Моменты инерции тела относительно плоскости и полюса. Теорема о моментах инерции относительно параллельных осей (теорема Гюйгенса). Примеры вычисления моментов инерции (моменты инерции однородного тонкого стержня, тонкого круглого кольца или полого цилиндра и круглого диска или сплошного круглого цилиндра). Формула для вычисления момента инерции относительно оси любого направления. Центробежные моменты инерции. Главные и центральные оси инерции и их свойства.

## Общие теоремы динамики

**Теорема о движении центра масс.** Дифференциальные уравнения движения механической системы. Теорема о движении центра масс механической системы. Закон сохранения движения центра масс.

**Теорема об изменении количества движения.** Количество движения материальной точки. Элементарный импульс силы. Импульс силы за конечный промежуток времени и его проекции на координатные оси. Теорема об изменении количества движения материальной точки в дифференциальной и конечной формах.

Количество движения механической системы; его выражение через массу системы и скорость ее центра масс. Теорема об изменении количества движения механической системы в дифференциальной и конечной формах. Закон сохранения количества движения механической системы.

Понятия о теле и точке переменной массы. Уравнение Мещерского. Формула Циолковского.

**Теорема об изменении момента количества движения.** Момент количества движения материальной точки относительно центра и относительно оси. Теорема об изменении момента количества движения материальной точки. Центральная сила. Сохранение момента количества движения материальной точки в случае центральной силы. Понятие о секторной скорости. Закон площадей.

Главный момент количеств движения или кинетический момент механической системы относительно центра и относительно оси. Кинетический момент вращающегося твердого тела относительно оси вращения. Теорема об изменении кинетического момента механической системы. Закон сохранения кинетического момента механической системы. Теорема об изменении кинетического момента механической системы в относительном движении по отношению к центру масс.

**Теорема об изменении кинетической энергии.** Кинетическая энергия материальной точки. Элементарная работа силы; аналитическое выражение элементарной работы. Работа силы на конечном перемещении точки ее приложения. Мощность. Работа силы тяжести, силы упругости и силы тяготения. Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки в дифференциальной и в конечной формах.

Кинетическая энергия механической системы. Формулы для вычисления кинетической энергии твердого тела при поступательном движении, при вращении вокруг неподвижной оси и в общем случае движения (в частности при плоскопараллельном движении). Теорема об изменении кинетической энергии механической системы в дифференциальной и в конечной формах. Равенство нулю суммы работ внутренних сил в твердом теле. Работа и мощность сил, приложенных к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси.

Понятие о силовом поле. Потенциальное силовое поле и силовая функция. Выражение проекций силы через силовую функцию. Поверхности равного потенциала. Работа силы на конечном перемещении точки в потенциальном силовом поле. Потенциальная энергия. Примеры потенциальных силовых полей: однородное поле тяжести и поле тяготения. Закон сохранения механической энергии.

**Динамика твердого тела.** Дифференциальные уравнения поступательного движения твердого тела. Дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси. Физический маятник. Дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела.

**Принцип Даламбера.** Сила инерции материальной точки. Принцип Даламбера для материальной точки и механической системы. Приведение сил инерции точек твердого тела к центру; главный вектор и главный момент сил инерции.

Определение динамических реакций подшипников при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси. Случай, когда ось вращения является главной центральной осью инерции тела.

**Принцип возможных перемещений и общее уравнение динамики.** Связи, налагаемые на механическую систему. Возможные (или виртуальные) перемещения материальной точки и механической системы. Число степеней свободы системы. Идеальные связи. Принцип возможных перемещений. Общее уравнение динамики.

**Уравнения движения системы в обобщенных координатах (уравнения Лагранжа).** Обобщенные координаты системы; обобщенные скорости. Выражение элементарной работы в обобщенных координатах. Обобщенные силы и их вычисление; случай сил, имеющих потенциал. Условия равновесия системы в обобщенных координатах. Дифференциальные уравнения движения системы в обобщенных координатах или уравнения Лагранжа 2-го рода. Уравнения Лагранжа в случае потенциальных сил; функция Лагранжа (кинетический потенциал).

Понятие об устойчивости равновесия. Малые свободные колебания механической системы с одной степенью свободы около положения устойчивого равновесия системы и их свойства.

Элементы теории удара. Явление удара. Ударная сила и ударный импульс. Действие ударной силы на материальную точку. Теорема об изменении количества движения механической системы при ударе. Прямой центральный удар тела о неподвижную поверхность; упругий и неупругий удары. Коэффициент восстановления при ударе и его опытное определение. Прямой центральный удар двух тел. Теорема Карно.



## Библиографический список

### Основная

**Бутенин Н. В., Луц Я. Л., Меркин Д. Р.** Курс теоретической механики. Т. 1, 2. М.: Наука, 1970, 1971.

**Воронков И. М.** Курс теоретической механики. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1954.

**Добронравов В. В., Никитин Н. Н., Дворников А. Л.** Курс теоретической механики. М.: Высшая школа, 1966.

**Яблонский А. А., Никифорова В. М.** Курс теоретической механики. Ч. 1. М.: Высшая школа, 1962.

**Яблонский А. А.** Курс теоретической механики. Ч. 2. М.: Высшая школа, 1962.

**Мещерский И. В.** Сборник задач по теоретической механике. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1952.

### Дополнительная

**Айзенберг Т. Б., Воронков И. М., Осецкий В. М.** Руководство к решению задач по теоретической механике. М.: Высшая школа, 1965.

**Бать М. И., Джанелидзе Г. Ю., Кельзон А. С.** Теоретическая механика в примерах и задачах. Ч. 1, 2. М.: Наука главная редакционная физико-математическая литература, 1961.

**Бражпиченко Н. А., Кан В. Л., Минцберг Б. Л., Морозов В. И., Ушакова Г. Н.** Сборник задач по теоретической механике. М.: Высшая школа, 1967.

**Гернет М. М.** Курс теоретической механики. М.: Высшая школа, 1970.

**Бутенин Н. В., Луц Я. Л., Меркин Д. Р.** Курс теоретической механики. Т. 1, 2. М.: Лань, 2007.

**А.А. Яблонский, С.С. Норейко, С.А. Вольфсон, и др.** Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: учебно-методическое пособие для технических вузов. М.: Высшая школа, 1985.

**А.А. Яблонский, В.М. Никифорова.** Курс теоретической механике М.: Лань, 2002.

## КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

### СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЙ, ВЫБОР ВАРИАНТОВ, ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТ, ПОЯСНЕНИЯ К ТЕКСТУ ЗАДАЧ

Студенты выполняют 5 контрольных заданий (работ).

Задание 1 (статика) — задачи С1—С5.

Задание 2 (кинематика) — задачи К1—К4.

Задание 3 (динамика) — задачи Д1—Д4.

Задание 4 (динамика) — задачи Д5—Д8.

Задание 5 (динамика) — задачи Д9—Д12.

К каждой задаче дается 10 рисунков и *таблица* (с тем же номером, что и задача), содержащая дополнительные к тексту задачи условия. Нумерация рисунков двойная, при этом номером рисунка является цифра, стоящая после точки. Например, рис. С 1.4 это рис. 4 к задаче С1 и т.д. (в тексте задачи при повторных ссылках на рисунок пишется просто рис. 4 и т.д.). Номера условий от 0 до 9 проставлены в 1-м столбце (или в 1-й строке) таблицы.

**Студент во всех задачах выбирает номер рисунка по предпоследней цифре шифра, а номер условия в таблице — по последней;** например, если шифр оканчивается числом 46, то берутся рис. 4 и условия № 6 из таблицы.

Каждое задание выполняется в отдельной тетради (ученической), страницы которой нумеруются. На обложке указываются: название дисциплины, номер работы, фамилия и инициалы студента, учебный шифр, факультет, специальность и адрес. На первой странице тетради записываются: номер работы, номера решаемых задач и год издания контрольных заданий.

Решение каждой задачи обязательно начинать на развороте тетради (на четной странице, начиная со второй, иначе работу трудно проверить).

Сверху указывается номер задачи, далее делается чертеж (можно карандашом) и записывается, что в задаче дано и что требуется определить (текст задачи не переписывать). Чертеж выполняется с учетом условий решаемого варианта задачи; на нем все углы, действующие силы, число тел и их расположение на чертеже должны соответствовать этим условиям. В результате в целом ряде задач чертеж получится более простой, чем общий.

Чертеж должен быть аккуратным и наглядным, а его размеры должны позволять ясно показать все силы или векторы скорости и ускорения и др.; показывать все эти векторы и координатные оси на чертеже, а также указывать единицы измерения получаемых величин нужно обязательно. Решение задач необходимо сопровождать краткими пояснениями (какие формулы или теоремы применяются, откуда получаются те или иные результаты и т.п.) и подробно излагать весь ход расчетов. На каждой странице следует оставлять поля для замечаний рецензента.

**Работы, не отвечающие всем перечисленным требованиям, проверяться не будут, а будут возвращаться для переделки.**

К работе, высылаемой на повторную проверку (если она выполнена в другой тетради), должна обязательно прилагаться незачтенная работа.

На экзамене необходимо представить зачтенные по данному разделу курса работы, в которых все отмеченные рецензентом погрешности должны быть исправлены.

При чтении текста каждой задачи учесть следующее. Большинство рисунков дано без соблюдения масштаба. На рисунках к задачам С1—С5 и Д1—Д12 все линии, параллельные строкам, считаются горизонтальными, а перпендикулярные строкам — вертикальными и это в тексте задач специально не оговаривается. Также без оговорок считается, что все нити (веревки, тросы) являются нерастяжимыми и невесомыми, нити, перекиннутые через блок, по блоку не скользят, катки и колеса (в кинематике и динамике) катятся по плоскостям без скольжения. Все связи, если не сделано других оговорок, считаются идеальными.

Когда тела на рисунке пронумерованы, то в тексте задач и в таблице  $P_1, l_1, r_1$  и т. п. означают вес или размеры тела 1;  $P_2, l_2, r_2$  — тела 2 и т. д. Аналогично в кинематике и динамике  $v_B, \omega_B$  означают скорость и ускорение точки  $B$ ;  $v_C, \omega_C$  — точки  $C$ ;  $\omega_1, \varepsilon_1$  — угловую скорость и угловое ускорение тела 1;  $\omega_2, \varepsilon_2$  — тела 2 и т. д. В каждой задаче подобные обозначения могут тоже специально не оговариваться.

Следует также иметь в виду, что некоторые из заданных в условиях задачи величин (размеров) при решении каких-нибудь вариантов могут не понадобиться, они нужны для решения других вариантов задачи.

Из всех пояснений в тексте задачи следует обратить внимание только на относящиеся к вашему варианту, т. е. к номеру вашего рисунка или вашего условия в таблице.

Методические указания по решению задач, входящих в контрольные задания, даются для каждой задачи после изложения ее текста под рубрикой «Указания»; затем дается пример решения аналогичной задачи. Цель примера — разъяснить ход решения, но не воспроизвести его полностью. Поэтому в ряде случаев промежуточные расчеты опускаются. Но при выполнении задания все преобразования и числовые расчеты должны быть обязательно последовательно проделаны с необходимыми пояснениями; в конце должны быть даны ответы.

## ЗАДАЧИ К КОНТРОЛЬНЫМ ЗАДАНИЯМ

### СТАТИКА

#### Задача С1

Жесткая рама (рис. С 1.0 — С1.9, табл. С1) закреплена в точке  $A$  шарнирно, а в точке  $B$  прикреплена или к невесомому стержню с шарнирами на концах, или к шарнирной опоре на катках.

В точке  $C$  рамы привязан трос, перекинутый через блок и несущий на конце груз весом  $P = 25$  кН. На раму действуют пара сил, с моментом  $M = 60$  кН·м и две силы, величины которых, направления и точки приложения указаны в таблице (например, в условиях № 1 на раму действуют сила  $\bar{F}_2$  под углом  $15^\circ$  к горизонтальной оси, приложенная в точке  $D$ , и сила  $\bar{F}_3$  под углом  $60^\circ$  к горизонтальной оси, приложенная в точке  $E$  и т. д.).

Определить реакции связей в точках  $A, B$ , вызываемые действующими нагрузками. При окончательных расчетах принять  $a = 0,5$  м.

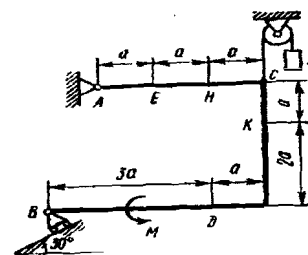


Рис. С1.0

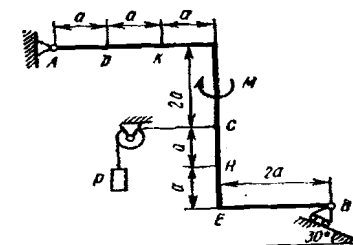


Рис. С1.1

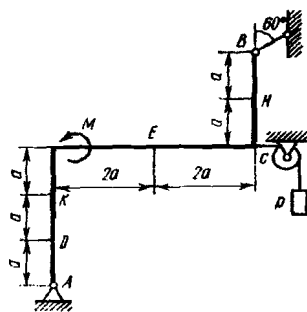


Рис. С1.2

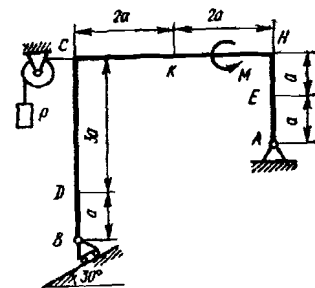


Рис. С1.3

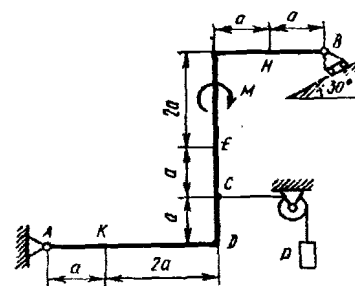


Рис. С1.8

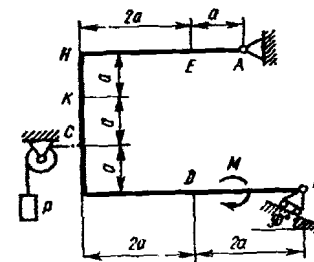


Рис. С1.9

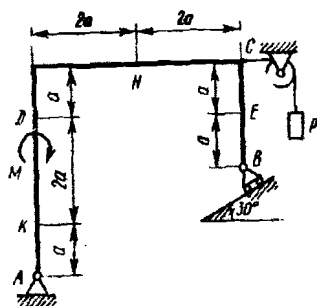


Рис. С1.4

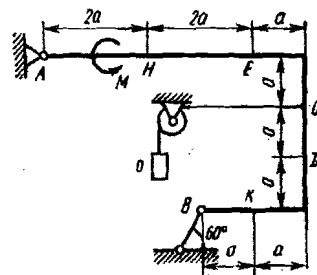


Рис. С1.5

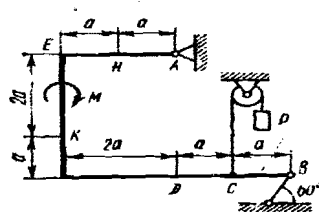


Рис. С1.6

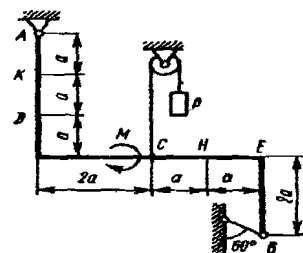


Рис. С1.7

**Указания.** Задача С1—на равновесие тела под действием произвольной плоской системы сил. При ее решении учесть, что натяжения обеих ветвей нити, перекинутой через блок, когда трением пренебрегают, будут одинаковыми. Уравнение моментов будет более простым (содержать меньше неизвестных), если брать моменты относительно точки, где пересекаются линии действия двух реакций связей. При вычислении момента силы  $\vec{F}$  часто удобно разложить ее на составляющие  $\vec{F}'$  и  $\vec{F}''$ , для которых плечи легко определяются, и воспользоваться теоремой Вариньона; тогда  $m_0(\vec{F}) = m_0(\vec{F}') + m_0(\vec{F}'')$ .

**Пример С1.** Жесткая пластина  $ABCD$  (рис. С1) имеет в точке  $A$  неподвижную шарнирную опору, а в точке  $B$  — подвижную шарнирную опору на катках. Все действующие нагрузки и размеры показаны на рисунке.

Дано:  $F = 25$  кН,  $\alpha = 60^\circ$ ,  $P = 13$  кН,  $\gamma = 75^\circ$ ,  $M = 50$  кНм,  $\beta = 30^\circ$ ,  $a = 0,5$  м.

Определить: реакции в точках  $A$  и  $B$ , вызываемые действующими нагрузками.

**Решение. 1.** Рассмотрим равновесие пластины. Проведем координатные оси  $x, y$  и изобразим действующие на пластину силы: силу  $\vec{F}$ , пару сил с моментом  $M$ , натяжение троса  $\vec{T}$  (по модулю  $T = P$ ) и реакции связей  $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{R}_B$  (реакцию неподвижной шарнирной опоры  $A$  изображаем двумя ее составляющими, реакция шарнирной опоры на катках направлена перпендикулярно опорной плоскости).

Таблица С1

Силы	$\vec{F}_1$		$\vec{F}_2$		$\vec{F}_3$		$\vec{F}_4$	
	$F_1=10\text{kH}$	$F_2=20\text{kH}$	$F_3=30\text{kH}$	$F_4=40\text{kH}$				
номер условия	точка прилож.	$\alpha_1^\circ$	точка прилож.	$\alpha_2^\circ$	точка прилож.	$\alpha_3^\circ$	точка прилож.	$\alpha_4^\circ$
0	Н	30					К	60
1			D	15	E	60		
2	К	75					E	30
3			К	60	Н	30		
4	D	30					E	60
5			Н	30			D	75
6	E	60			К	15		
7			D	60	Н	15		
8	Н	60			D	30		
9			E	75	К	30		

2. Для полученной плоской системы сил составим три уравнения равновесия. При вычислении момента силы  $F$  относительно точки  $A$  воспользуемся теоремой Вариньона, т.е. разложим силу  $F$  на составляющие  $F'$ ,  $F''$  ( $F'=F \cos \alpha$ ,  $F''=F \sin \alpha$ ) и учтем, что  $m_a(\vec{F})=m_a(\vec{F}')+m_a(\vec{F}'')$ . Получим:

$$\sum F_{RX}=0, X_A + R_B \sin \beta - F \cos \alpha + T \sin \gamma = 0; \quad (1)$$

$$\sum F_{Ry}=0, Y_A + R_B \cos \beta + F \sin \alpha - T \cos \gamma = 0; \quad (2)$$

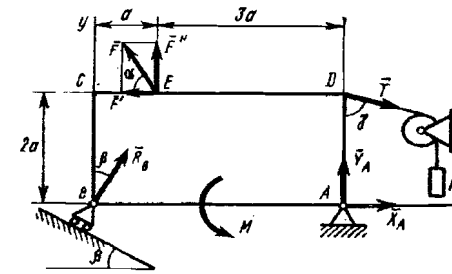


Рис. С1

$$\sum m_A(\vec{F}_R) = 0, M - R_B \cos \beta \cdot 4a + F \sin \alpha \cdot 3a - T \sin \gamma \cdot 2a = 0. \quad (3)$$

Подставив в составленные уравнения числовые значения заданных величин и решив эти уравнения, определим искомые реакции.

Ответ:  $X_A = -8,5 \text{ кН}$ ,  $Y_A = -23,3 \text{ кН}$ ,  $R_B = 7,3 \text{ кН}$ . Знаки указывают, что силы  $X_A$  и  $Y_A$  имеют направления, противоположные показанным на рис. С 1.

### Задача С 2

Конструкция состоит из жесткого угольника и стержня, которые в точке  $C$  или соединены друг с другом шарнирно (рис. С2.0—С2.5) или свободно опираются друг о друга (рис. С2.6—С2.9). Внешними связями, наложенными на конструкцию, являются: в точке  $A$  или шарнир или жесткая заделка; в точке  $B$  или невесомый стержень  $BB'$  (рис. 0 и 1), табл. С2а или гладкая плоскость (рис. 2 и 3) или шарнир (рис. 4—9); в точке  $D$  или невесомый стержень  $DD'$  (рис. 1, 2, 7) или шарнирная опора на катках (рис. 9).

На каждую конструкцию действуют: пара сил с моментом  $M=60 \text{ кН/м}$ , равномерно распределенная нагрузка интенсивности  $q=20 \text{ кН/м}$  и еще две силы. Величины этих сил, их направления и точки приложения указаны в табл. С 2; там же в столбце «Участок» указано, на каком участке действует

распределенная нагрузка (например, в условиях № 1 на конструкцию действуют сила  $\bar{F}_2$  под углом  $60^\circ$  к горизонтальной оси, приложенная в точке  $L$ , сила  $\bar{F}_1$  под углом  $30^\circ$  к горизонтальной оси, приложенная в точке  $E$ , и нагрузка, распределенная на участке  $CK$ ).

Определить реакции связей в точках  $A, B, C$  (для рис. 1, 2, 7, 9 еще и в точке  $D$ ), вызванные заданными нагрузками. При окончательных расчетах принять  $a=0,2$  м. Направление распределенной нагрузки на различных по расположению участках указано в табл. С2а.

Таблица С2

Силы									Участок
	$F_1=10\text{kH}$		$F_2=20\text{kH}$		$F_3=30\text{kH}$		$F_4=40\text{kH}$		
номер условия	точка прилож.	$\alpha_1$	точка прилож.	$\alpha_2$	точка прилож.	$\alpha_3$	точка прилож.	$\alpha_4$	
0	К	60			Н	30			CL
1			L	60			Е	30	СК
2	L	15			К	60			АЕ
3			К	30			Н	60	СL
4	L	30			Е	60			СК
5			L	75			К	30	АЕ
6	Е	60			К	75			СL
7			Н	60	L	30			СК
8			К	30			Е	15	СL
9	Н	30					L	60	СК

Участок на угольнике		Участок на стержне	
горизонтальный	вертикальный	рис. С2.1, С2.2, С2.4, С2.7, С2.9	рис. С2.0, С2.3, С2.5, С2.6, С2.8

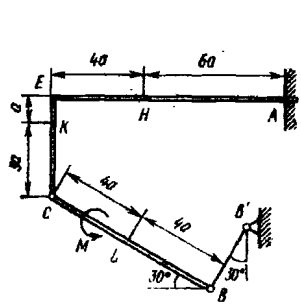


Рис. С2.0

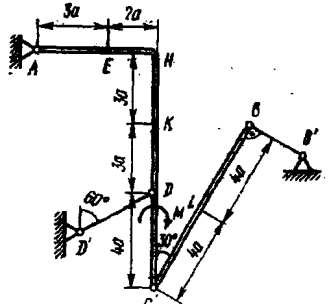


Рис. С2.1

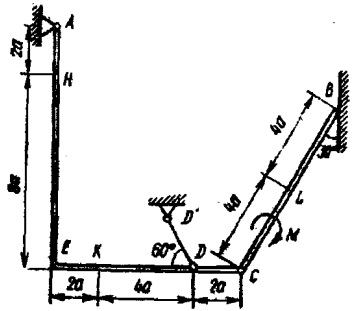


Рис. С2.2

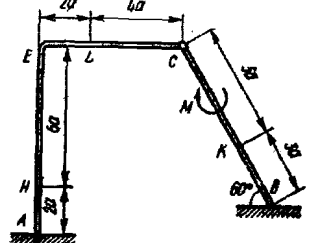


Рис. С2.3

НАУЧНО-ИНФОРМАЦИОННЫЙ ЦЕНТР САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

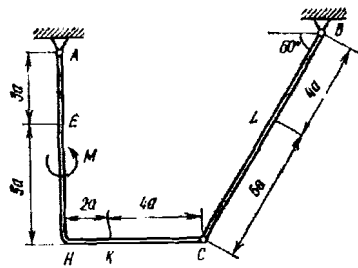


Рис. С2.4

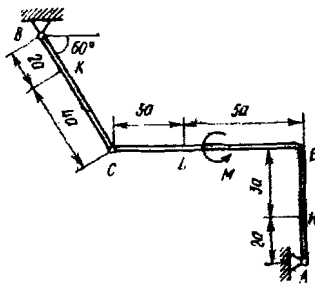


Рис. С2.5

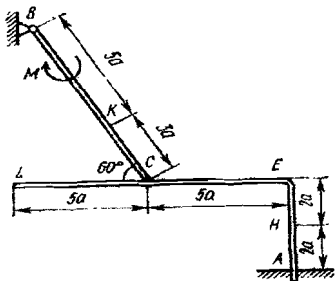


Рис. С2.6

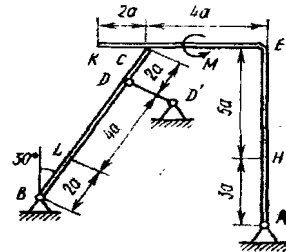


Рис. С2.7

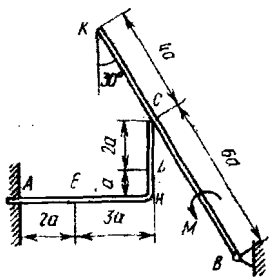


Рис. С2.8

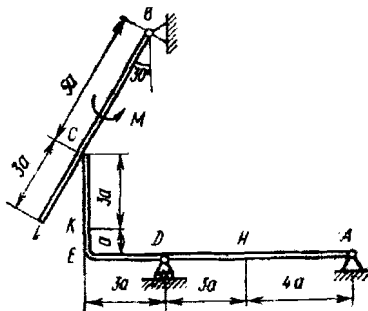


Рис. С2.9

**Указания.** Задача С 2 — на равновесие системы тел, находящихся под действием плоской системы сил. При ее решении можно или рассмотреть сначала равновесие всей системы в целом, а затем — равновесие одного из

тел системы, изобразив его отдельно, или же сразу расчленив систему и рассмотреть равновесие каждого из тел в отдельности, учтя при этом аксиому (закон) о равенстве действия и противодействия. В задачах, где имеется жесткая заделка, учесть, что ее реакция представляется силой, модуль и направление которой неизвестны, и парой сил, момент которой тоже неизвестен.

**Пример С2.** На угольник  $ABC$  ( $\text{угол}ABC = 90^\circ$ ), конец  $A$  которого жестко заделан, в точке  $C$  опирается стержень  $DE$  (рис С2, а).

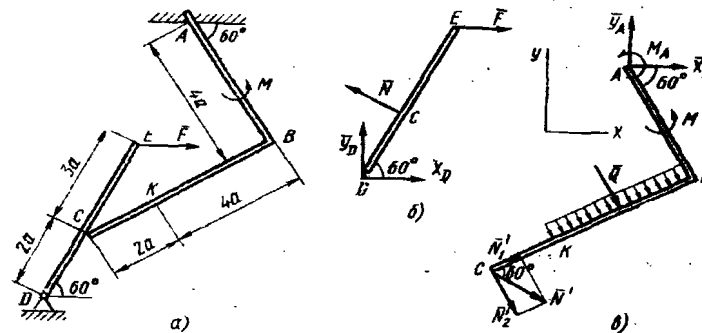


Рис. С2

Стержень имеет в точке  $D$  неподвижную шарнирную опору и к нему приложена сила  $F$ , а к угольнику — равномерно распределенная на участке  $KB$  нагрузка интенсивности  $q$  и пара с моментом  $M$ .

Дано:  $F=10\text{кН}$ ,  $M=5\text{кНм}$ ,  $q=20\text{кН/м}$ ,  $a=0,2\text{м}$ .

Определить: реакции в точках  $A$ ,  $C$ ,  $D$ , вызванные заданными нагрузками.

**Решение.** 1. Для определения реакций расчленим систему и рассмотрим сначала равновесие стержня  $DE$  (рис. С2,б). Проведем координатные оси  $x$  и  $y$  и изобразим действующие на стержень силы: силу  $F$ , реакцию  $N$ , направленную перпендикулярно стержню, и составляющие  $\bar{X}_D$  и  $\bar{Y}_D$  реакции шарнира  $D$ . Для полученной плоской системы сил составляем три уравнения равновесия:

**Задача С3**

Тело находится на наклонной плоскости. Вес тела –  $P$ . На тело действует усилие  $\bar{R}$ , которое создается ползуном, скрепленным шарниром со стержнем АЕ, который передает усилие  $\bar{K}$  телу. Коэффициент трения ползуна с его направляющими –  $f1$ ; коэффициент трения тела с наклонной плоскостью –  $f2$ . Определить величину усилия  $\bar{R}$ , удерживающего тело на наклонной плоскости, в зависимости от изменения коэффициентов  $f1$  и  $f2$ . Данные необходимые для расчета приведены в таблице С3.  $\alpha$  – угол наклона плоскости,  $\beta$  – угол между усилием  $s$  и осью  $X$ . Указание Задачи С3 равновесие тела под действием плоской системы сил при наличии трения скольжения, которая вычисляется по формуле  $\bar{F}_{тр} = \bar{N}f$  здесь  $\bar{N}$  – сила нормального давления. Определить при каких значениях коэффициентов трения тело начнет движение; начальные значения трения указаны в таблице С3.

Таблица С3

Номер условия	1	2	3	4	5	6	7	8
$P, Н$	5	0,1	3	0,05	0,1	0,1	0,2	5
$f1$	0,05	0,01	0,1	0,1	0,05	0,1	0,05	0,2
$f2$	0,15	0,2	0,05	0,5	0,2	0,15	0,3	0,05
$\alpha$	30°	90°	0°	90°	90°	30°	45°	0°
$\beta$	30°	0°	45°	60°	80°	30°	30°	60°

$$\sum F_{Rx} = 0, X_D + F - N \sin 60^\circ = 0, \quad (1)$$

$$\sum F_{Ry} = 0, Y_D + N \cos 60^\circ, \quad (2)$$

$$\sum m_D = (\bar{F}_R) = 0, N \cdot 2a - F \cdot 5a \sin 60^\circ = 0. \quad (3)$$

2. Теперь рассмотрим равновесие угольника (рис. С2, в). На него действуют: сила давления стержня  $N'$ , направленная противоположно реакции  $N$ , равномерно распределенная нагрузка, которую заменяем силой  $Q$ , приложенной в середине участка  $KB$  (численно  $Q=q4a=16кН$ ), пара сил с моментом  $M$  и реакция жесткой заделки, слагающаяся из силы, которую представим составляющими  $\bar{X}_A$  и  $\bar{Y}_A$  и пары с моментом  $M_A$ . Для этой плоской системы сил' тоже составляем три уравнения равновесия:

$$\sum F_{Rx} = 0, X_A + Q \cos 60^\circ + N' \sin 60^\circ = 0 \quad (4)$$

$$\sum F_{Ry} = 0, Y_A - Q \sin 60^\circ - N' \cos 60^\circ, \quad (5)$$

$$\sum m_A(\bar{F}_R) = 0, \quad (6)$$

$$M_A + M + Q \cdot 2a + N' \cos 60^\circ \cdot 4a + N' \cos 30^\circ \cdot 6a.$$

При вычислении момента силы  $N'$  разлагаем ее на составляющие  $N_1'$  и  $N_2'$ ) и применяем теорему Вариньона. Подставив в составленные уравнения числовые значения заданных величин и решив систему уравнений (1) — (6), найдем искомые реакции. При решении учитываем, что численно  $N' = N$  в силу равенства действия и противодействия.

Ответ:  $N = 21,7кН$ ,  $Y_A = 24,7кН$ ,  $Y_D = -10,8кН$ ,  $X_D = 8,8кНм$ ,  $X_A = -26,8кН$ ,  $M_A = -42,6кНм$ . Знаки указывают, что силы  $\bar{X}_A$  и  $\bar{Y}_D$  момент  $M_A$  имеют направления, противоположные показанным на рисунках.



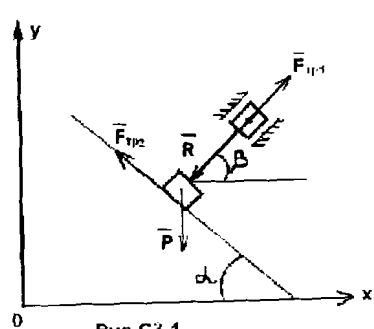


Рис.С3.1

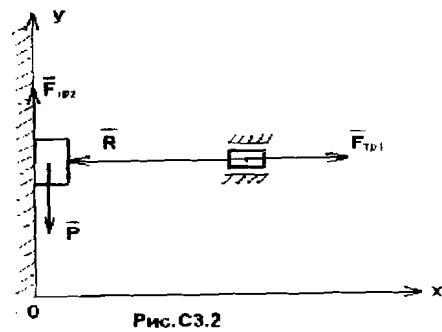


Рис.С3.2

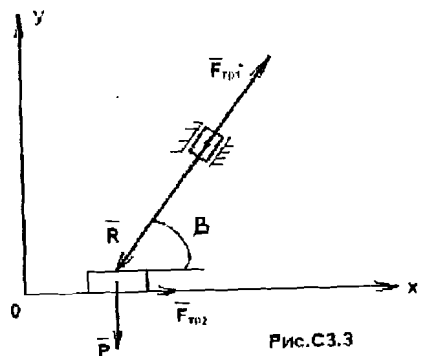


Рис.С3.3

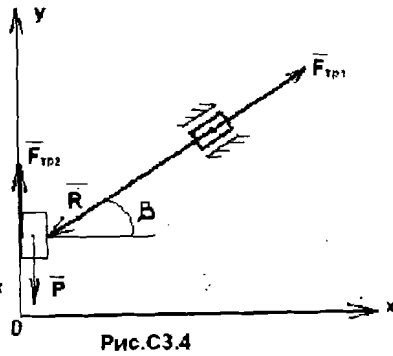


Рис.С3.4

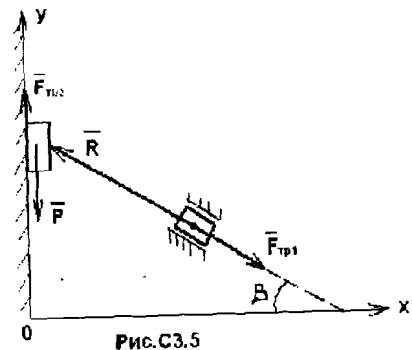


Рис.С3.5

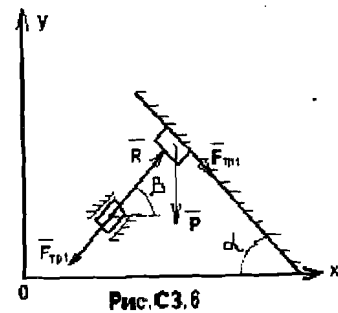


Рис.С3.6

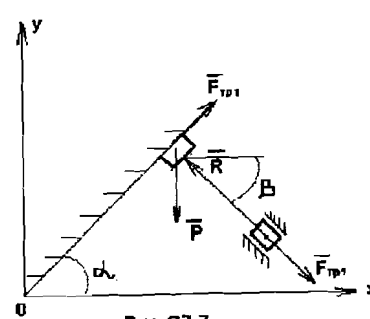


Рис.С3.7

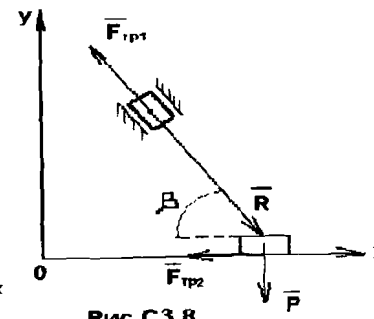


Рис.С3.8

**Пример.** Тело находится на наклонной плоскости, которая имеет угол  $\alpha=30^\circ$  с осью  $X$ . Вес тела  $20\text{Н}$ . Усилие,  $R$  которое создает ползун, осуществляет передвижение по наклонной плоскости. Угол  $\beta=20^\circ$ . Коэффициент трения ползуна по направляющим  $f_1=0,15$ ; коэффициент трения тела с наклонной плоскостью  $f_2=0,1$ . Определить величину усилия  $R$ , удерживающего тело на наклонной плоскости в положении равновесия (рис. С3).

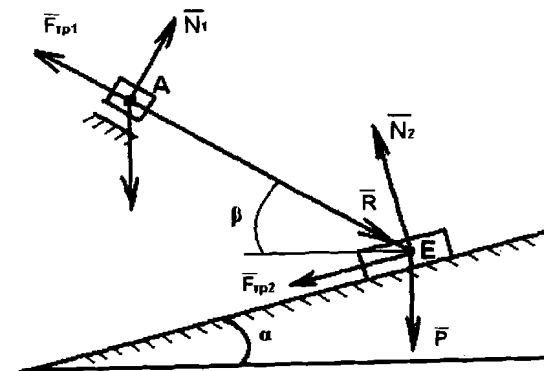


Рис. С3

**Решение:** трение тела с наклонной плоскостью  $F_{\text{тр}2} = f_2 N_2$ ; трение ползуна о направляющие вычисляется по формуле  $F_{\text{тр}1} = f_1 N_1$ ;  $N_1$  – сила нормального давления, с которым направляющие ползуна давят на него; усилие  $N_1$  перпендикулярно  $R$ . Напишем уравнение равновесия тела.

Проекция на ось  $X$ :

$$-F_{\text{тр}1} \cos \beta + R \cos \beta - N_1 \sin \beta - F_{\text{тр}2} \cos \alpha - N_2 \sin \alpha = 0. \quad (1)$$

Проекция на ось  $Y$ :

$$F_{\text{тр}1} \sin \beta + R \sin \beta - N_1 \cos \beta - F_{\text{тр}2} \sin \alpha - N_2 \cos \alpha - P = 0. \quad (2)$$

Момент всех действующих сил относительно т. А шарнира ползуна:

$$N_2 EA \cos(\beta + \alpha) - F_{\text{тр}2} EA \sin(\beta + \alpha) - P \sin \alpha EA = 0. \quad (3)$$

Считая совместно систему уравнений (1)-(3), получим из (3):

$$N_2 = \frac{P \sin \alpha}{\cos(\alpha + \beta) - f_2 \sin(\beta + \alpha)}; \quad (4)$$

из (1) получим:

$$N_1 = RA + N_2 B; \quad (5)$$

Здесь введено обозначение:

$$A = \frac{\cos \beta}{f_1 \cos \beta + \sin \beta}; \quad B = -\frac{f_2 \cos \beta + \sin \alpha}{f_1 \cos \beta + \sin \beta}; \quad (6)$$

Из уравнения (2) получим, с учетом ранее полученных формул (4) и (5), значения величины  $R$ :

$$R = \frac{P - NC}{D}, \text{ здесь} \quad (7)$$

$$C = f_1 \sin \alpha - \cos \alpha - B \cos \beta - f_1 \sin \beta B; \quad (8)$$

$$D = Af_1 \sin \beta - \sin \beta + A \cos \beta; \quad (9)$$

Подставляя исходные данные, получим:

$$\begin{aligned} F_{\text{тр}2} &= 1,39H & F_{\text{тр}1} &= 0,179H \\ P \sin \alpha &= 10H & R &= 10,59H; \end{aligned}$$

Условие равновесия системы определяем из неравенства, в котором скатывающая сила  $P \sin \alpha$ , сила трения  $F_{\text{тр}2}$ ,  $R$  и сила  $F_{\text{тр}1}$ , приложенная к ползуну, проектируются на ось  $X$ :

$$\cos \alpha (P \sin \alpha + F_{\text{тр}2}) \leq R \cos \beta - F_{\text{тр}1} \cos \beta. \quad (10)$$

Неравенство написано в предположении, что груз движется вверх по наклонной плоскости под действием силы  $R$ . Подставляя в неравенство вычисленные значения, получим, что левая часть неравенства больше правой

$$9,9 > 9,78;$$

Последнее неравенство означает, что груз под действием силы  $R$  не может двигаться вверх. Предположим, что груз движется вниз, тогда (10) запишется:

$$\cos \alpha (P \sin \alpha - F_{\text{тр}2}) \leq R \cos \beta - F_{\text{тр}1} \cos \beta; \quad (11)$$

Подставляя вычисленные значения  $R$ ,  $F_{\text{тр}1}$ ,  $F_{\text{тр}2}$ , получим  $6,45 \leq 10,11$ , т.е. усилие  $R$  препятствует движению груза вниз. Из последних двух неравенств следует, что груз не может подниматься вверх по наклонной плоскости под действием приложенного усилия  $R$ , но  $R$  удерживает груз от движения вниз по наклонной плоскости, то есть груз находится в состоянии равновесия.

### Задача С4

Главный вектор и главный момент пространственной системы сил.

Дана пространственная система сил приложения к параллелепипеду ABCDA'B'C'D'. Сила  $\vec{F}_1$  приложена в вершине B', сила  $\vec{F}_2$  приложена в плоскости D'DC'C под углом  $\alpha$  с ребром C'C, сила  $\vec{F}_3$  приложена в вершине D. Силы  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  (рис.1) неуравновешенны, параллелепипед не закреплен, поэтому под действием приложенных сил он движется в пространстве.

Выберем вершину параллелепипеда центром приведения. Назначим эту точку началом координат. Векторная сумма заданных сил называется главным вектором.

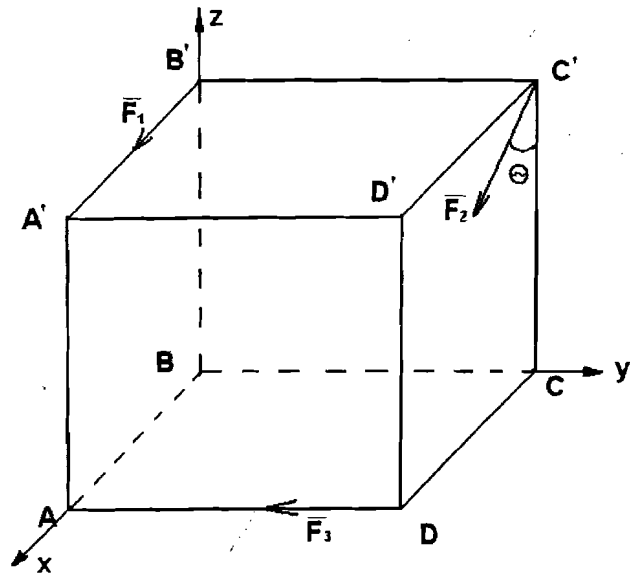


Рис.С4.1

$$\vec{V}_{\text{гл}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3, \quad (1)$$

Проекции главного вектора на оси координат вычисляются по формулам (2) с учетом, что  $\vec{F}_1(F_1, 0, 0); \vec{F}_2(F_2 \sin \Theta, 0, -F_2 \cos \Theta); \vec{F}_3(0, -F_3, 0)$

$$\begin{cases} V_x = F_1 + F_2 \sin \Theta \\ V_y = -F_3 \\ V_z = -F_2 \cos \Theta \end{cases} \quad (2)$$

Построим главный вектор по определенным нами проекциям (2), рис.С4.2.

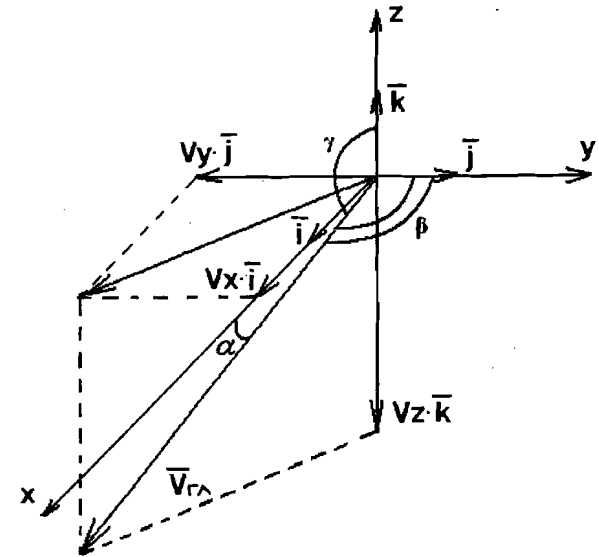


Рис.С4.2

$$\vec{V}_{zn} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k} \quad (3)$$

Так как параллелепипед не имеет опор, которые препятствуют движению, то он движется по направлению главного вектора  $\vec{V}$  (рис.С4.2). Модуль вычисляется по формуле  $V_{zn}$

$$|\vec{V}_{zn}| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}; \quad (4)$$

Направляющие косинусы главного вектора вычисляются по формулам  $(5)$

$$\cos \alpha = \frac{V_x}{|\vec{V}_{zn}|};$$

$$\cos \beta = \frac{V_y}{|\vec{V}_{zn}|}; \quad (5)$$

$$\cos \gamma = \frac{V_z}{|\vec{V}_{zn}|}.$$

Главный момент  $\vec{M}_B^n$  данной системы сил относительно центра приведения  $B$  – сумма моментов всех сил данной системы сил относительно точки  $B$   $(6)$ :

$$\vec{M}_B^n = \sum_{i=1}^3 M_B(\vec{F}_i). \quad (6)$$

Главный момент  $\vec{M}_B^n$  запишется в проекциях на оси координат:

$$\vec{M}_B^n = M_x \vec{i} + M_y \vec{j} + M_z \vec{k}; \quad (7)$$

здесь

$$M_x = \sum_{i=1}^3 M_x(\vec{F}_i) \quad (8)$$

$$M_y = \sum_{i=1}^3 M_y(\vec{F}_i)$$

$$M_z = \sum_{i=1}^3 M_z(\vec{F}_i).$$

Для заданной системы сил проекции  $\vec{M}^n$   $(4)$  на оси координат вычисляются по формуле  $(9)$

$$\begin{aligned} M_x &= -F_2 \cos \alpha \cdot BC \\ M_y &= F_2 \sin \alpha \cdot C'C + F_1 B'B \\ M_z &= -F_2 \sin \alpha B'C' - F_3 AB \end{aligned} \quad (9)$$

На рис.С4.3 представлен вектор  $\vec{M}^n$ , вычисленный по формулам  $(9)$

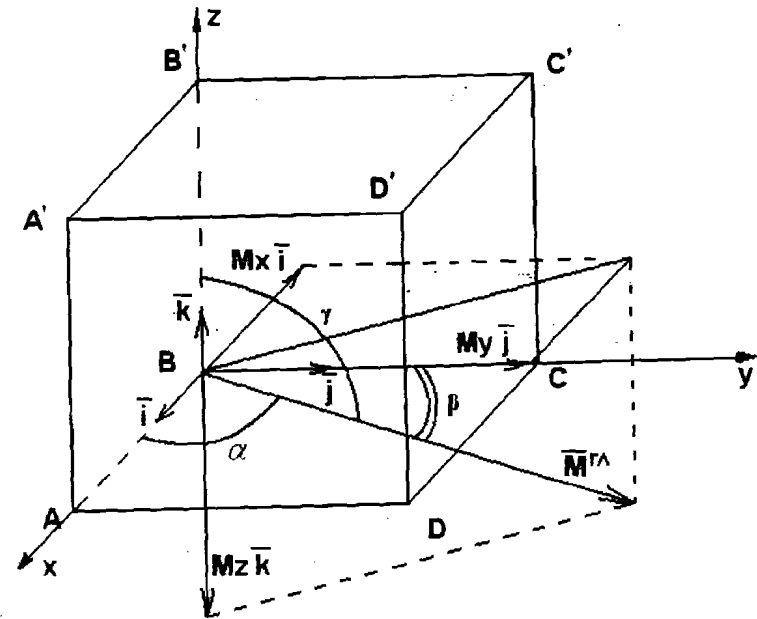


Рис.С4.3

Модуль  $\vec{M}_B^n$  вычисляется по формуле

$$|\vec{M}_B^n| = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}; \quad (10)$$

Направляющие косинуса  $\vec{M}_B^n$  вычисляются по формулам:

$$\cos(\vec{M}_n', \vec{i}) = \frac{M_x}{|M_n'|} \quad (11)$$

$$\cos(\vec{M}_n', \vec{j}) = \frac{M_y}{|M_n'|}$$

$$\cos(\vec{M}_n', \vec{k}) = \frac{M_z}{|M_n'|}$$

Напишем уравнение плоскости, в которой лежит приведённая пара сил, векторное представление которой -  $\vec{M}''$ . Уравнение плоскости, проходящей через начало координат (центр приведения), и перпендикуляр вектору  $\vec{M}''$  записываются в векторном виде:

$$\vec{M}'' \cdot \vec{r} = 0 \quad (12)$$

Общее уравнение этой плоскости:

$$M_x x + M_y y + M_z z = 0; \quad (13)$$

На рис.С4.4 показан вектор,  $\vec{M}_n''$  плоскость  $W$ , в которой лежит приведённая пара сил, вызывающая вращение тела - параллелепипеда от действия неуравновешенной системы сил.

$BGKE$  - вектор  $\vec{M}_{xy}$ , диагональ в параллелограмме  $BGKE$ , стороны которого  $M_x, M_y$ , являются сторонами  $BK$  параллелограмма  $BKLN$  со стороной -  $M_z$  ( $BN$ ) и стороной  $BK$ .

Здесь  $\vec{BL}$  -  $\vec{M}''$  Проходит через точку  $B$  плоскости  $W$ , в которой находится приведённая пара сил,  $\vec{BL}$  перпендикулярен плоскости  $EGN$ , которая проходит через три точки пространства: т.  $E$  - конец вектора  $BE$  (проекции вектора  $\vec{M}''$  на ось  $x$ ); вторая т.  $G$  - конец вектора  $BG$  (проекции  $\vec{M}''$  на ось  $y$ ); третья т.  $N$  - конец вектора  $BN$  (проекции  $\vec{M}''$  на ось  $z$ ).

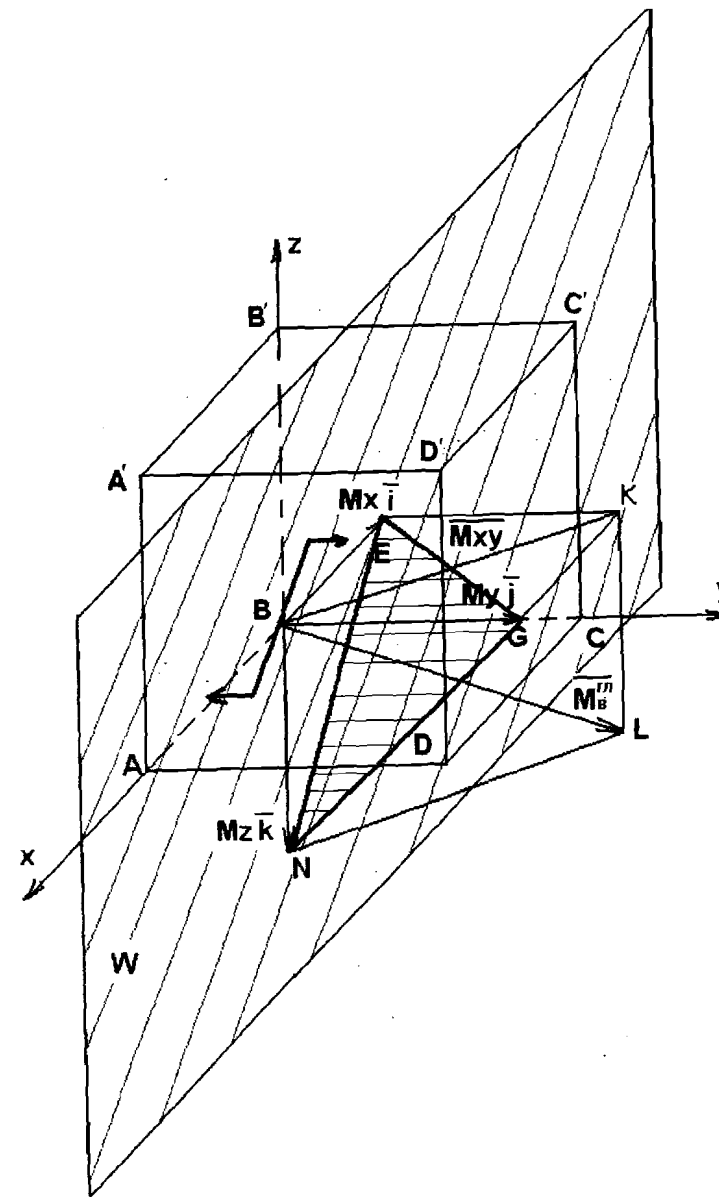


Рис.С4.4

Приведенная пара сил вызывает вращение тела в ту сторону, что глядя с конца вектора  $\overline{M}^{\prime}$ , мы видим вращение тела против часовой стрелки.

Таким образом, мы установили, что под действием неуравновешенной пространственной системы сил, тело движется по направлению вектора  $\overline{V}_{21}$  и вращается приведённой парой сил, векторным представлением которой является вектор  $\overline{M}^{\prime}$ . Теперь можно поставить сферические шарниры в вершинах  $A$  и  $C'$  параллелепипеда, которые будут сдерживать движение тела наиболее надежно.

**Пример:** Заданы силы, расположенные также, как на рис.С4.1.

$$F_1 = 1\text{Н}, \quad F_2 = 2\text{Н} \quad F_3 = 3\text{Н} \quad \alpha = 30^\circ$$

$$AB = 0,2\text{м} \quad BC = 0,3\text{м} \quad AA' = 0,2\text{м}$$

Проекция главного вектора по (2):

$$V_x^{21} = 1 + 2 \sin 30^\circ [\text{Н}]$$

$$V_y^{21} = -3 [\text{Н}]$$

$$V_z^{21} = -2 \cos 30^\circ = -1,74 [\text{Н}]$$

$$|\overline{V}^{21}| = \sqrt{4 + 9 + (1,74)^2} = 4,008 [\text{Н}]$$

$$\cos(\alpha) = \frac{V_x^{21}}{|\overline{V}^{21}|} = 0,5 \quad \alpha = 60^\circ$$

$$\cos(\beta) = \frac{V_y^{21}}{|\overline{V}^{21}|} = -0,75$$

$$\beta = -41^\circ 30' = 221^\circ 30'$$

$$\cos(\gamma) = \frac{V_z^{21}}{|\overline{V}^{21}|} = -\frac{1,74}{4} = -0,439$$

$$\gamma = -66^\circ 10' \quad \gamma = 246^\circ 10';$$

Проекция главного момента, вычисляемая по формулам (9)

$$M_x = -1,74 \cdot 0,3 = -0,528 [\text{Н} \cdot \text{м}]$$

$$M_y = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,2 = -0,8 [\text{Н} \cdot \text{м}]$$

$$|\overline{M}^{21}| = \sqrt{(0,528)^2 + (0,4)^2 + (0,8)^2} = 1,039 [\text{Н} \cdot \text{м}];$$

Направляющие косинусы  $\overline{M}^{21}$  вычисляются по формулам:

$$\cos \alpha = \cos(\overline{M}^{21}, \vec{i}) = \frac{M_x}{|\overline{M}^{21}|} = \frac{0,528}{1,039} = -0,508$$

$$\alpha = -59^\circ 30' \quad \text{или} \quad \alpha = 120^\circ 30'$$

$$\cos(\beta) = \cos(\overline{M}^{21}, \vec{j}) = \frac{M_y}{|\overline{M}^{21}|} = \frac{0,4}{1,039} = 0,384$$

$$\beta = 67^\circ 30'$$

$$\cos(\gamma) = \cos(\overline{M}^{21}, \vec{k}) = \frac{M_z}{|\overline{M}^{21}|} = \frac{0,8}{1,039} = -0,769$$

$$\gamma = -39^\circ \quad \gamma = 231^\circ;$$

### Задача С5

Две однородные прямоугольные тонкие плиты, сваренные под прямым углом друг к другу, закреплены сферическим шарниром (или подпятником) в точке  $A$ , цилиндрическим шарниром (подшипником) в точке  $B$  и невесомым стержнем 1 (рис. С5.0—С5.7) или же двумя подшипниками в точках  $A$  и  $B$  и двумя невесомыми стержнями 1 и 2 (рис. С5.8, С5.9); все стержни прикреплены к плитам и к неподвижным опорам шарнирами.

Размеры плит в направлениях, параллельных координатным осям  $x$ ,  $y$ ,  $z$  равны соответственно или  $2a$ ,  $3a$  и  $a$  (рис.С5.0—С5.4), или  $2a$ ,  $3a$ ,  $4a$  (рис.С5.5—С5.9); вес большей плиты  $P_1 = 3$  кН, вес меньшей плиты  $P_2 = 2$  кН.

Каждая из плит расположена параллельно одной из координатных плоскостей (плоскость  $xu$  горизонтальная).

На плиты действуют пара сил с моментом  $M = 4 \text{ кНм}$ , лежащая в плоскости одной из плит, и две силы. Величины этих сил, их направления и точки приложения указаны в табл. С5; при этом силы  $\bar{F}_1$  и  $\bar{F}_4$  лежат в плоскостях, параллельных плоскости  $xu$ , сила  $\bar{F}_2$  — в плоскости, параллельной  $xz$ , и сила  $\bar{F}_3$  в плоскости, параллельной  $yz$ . Точки приложения сил ( $D, E, H, K$ ) находятся в углах или в серединах сторон плит.

Определить реакции связей в точках  $A$  и  $B$  и реакцию стержня (стержней). При подсчетах принять  $a = 0,6 \text{ м}$ .

Таблица С5

Силы								
	$F_1=6\text{кН}$	$F_2=8\text{кН}$	$F_3=10\text{кН}$	$F_4=12\text{кН}$				
номер условия	точка прилож.	$\alpha_1$	точка прилож.	$\alpha_2$	точка прилож.	$\alpha_3$	точка прилож.	$\alpha_4$
0	Е	60	Н	30				
1			Д	60	Е	30		
2					К	60	Е	30
3	К	30			Д	0		
4			Е	30			Д	60
5	Н	0	К	60				
6			Н	90	HD	30		
7					КН	60	К	90
8	Д	30			К	0		
9			Д	90			Н	30

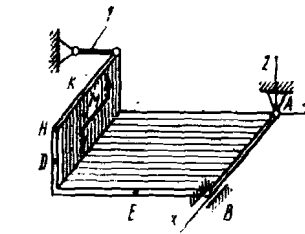


Рис. С5.0

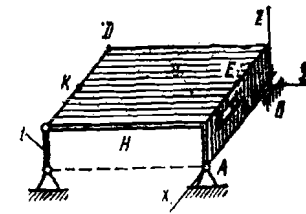


Рис. С5.1

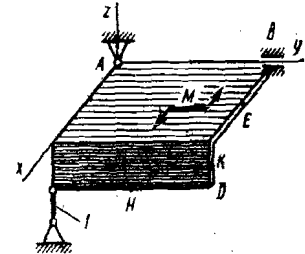


Рис. С5.2

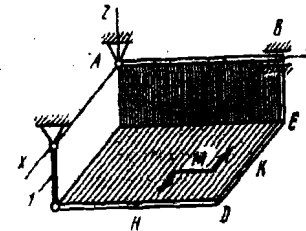


Рис. С5.3

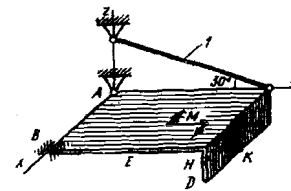


Рис. С5.4

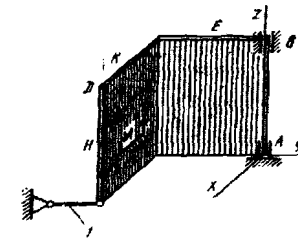


Рис. С5.5

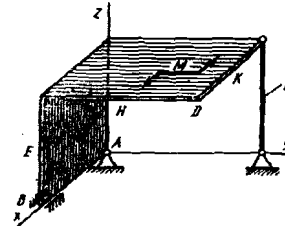


Рис. С5.6

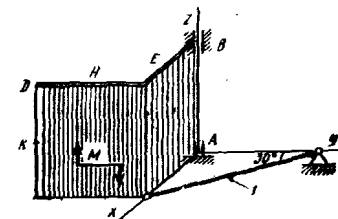


Рис. С5.7

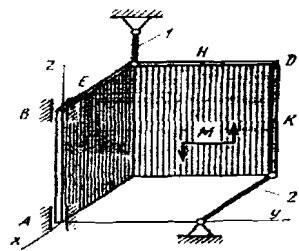


Рис. С5.8

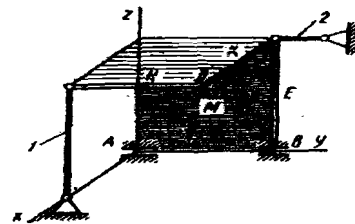


Рис. С5.9

**Указания.** Задача С5 — на равновесие тела под действием произвольной пространственной системы сил. При ее решении учесть, что реакция сферического шарнира (подпятника) имеет три составляющие (по всем трем координатным осям), а реакция цилиндрического шарнира (подшипника) — две составляющие, лежащие в плоскости, перпендикулярной оси шарнира (подшипника). При вычислении момента силы  $\vec{F}$  часто удобно разложить ее на две составляющие  $\vec{F}'$  и  $\vec{F}''$ , параллельные координатным осям (или на три); тогда по теореме Вариньона:

$$m_x(\vec{F}) = m_x(\vec{F}') + m_x(\vec{F}'')$$

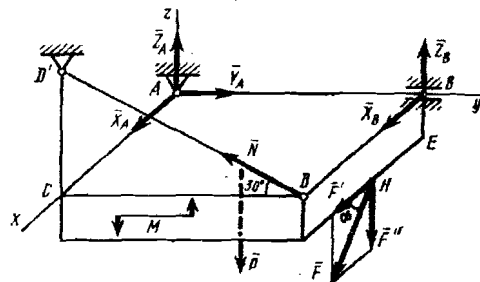


Рис. С5

**Пример С5.** Горизонтальная прямоугольная плита весом  $P$  (рис. С5) закреплена сферическим шарниром в точке  $A$ , цилиндрическим подшипни-

ком в точке  $B$  и невесомым стержнем  $DD'$ . На плиту в плоскости, параллельной  $xz$ , действует сила  $\vec{F}$ , а в плоскости, параллельной  $yz$ , — пара сил с моментом  $M$ .

Дано:  $P=3$  кН,  $F=8$  кН,  $M=4$  кНм,  $\alpha=60^\circ$ ,  $AC=0,8$  м,  $AB=1,2$  м,  $BE=0,4$  м,  $EH=0,4$  м.

Определить: реакции опор  $A$ ,  $B$  и стержня  $DD'$ .

**Решение 1.** Рассмотрим равновесие плиты. На плиту действуют заданные силы  $\vec{P}$ ,  $\vec{F}$  и пара с моментом  $M$ , а также реакции связей. Реакцию сферического шарнира разложим на три составляющие  $\vec{X}_A$ ,  $\vec{Y}_A$  и  $\vec{Z}_A$  цилиндрического подшипника — на две составляющие  $\vec{X}_B$  и  $Z_A$  (в плоскости, перпендикулярной оси подшипника); реакцию  $\vec{N}$  стержня направляем вдоль стержня от  $D$  к  $D'$ , предполагая, что он растянут.

2. Для определения шести неизвестных реакций составляем шесть уравнений равновесия действующей на плиту пространственной системы сил:

$$\sum F_{RX} = 0, X_A + X_B + F \cos 60^\circ = 0; \quad (1)$$

$$\sum F_{Ry} = 0, Y_A - N \cos 30^\circ = 0; \quad (2)$$

$$\sum F_{RZ} = 0, Z_A + Z_B - P + N \sin 30^\circ - F \sin 60^\circ = 0; \quad (3)$$

$$\sum m_x(\vec{F}_R) = 0, M - P \cdot \frac{AB}{2} + Z_B \cdot AB - F \sin 60^\circ \cdot AB + N \sin 30^\circ \cdot AB = 0; \quad (4)$$

$$\sum m_y(\vec{F}_R) = 0, P \cdot \frac{AC}{2} - N \sin 30^\circ \cdot AC + F \sin 60^\circ \cdot \frac{AC}{2} - F \cos 60^\circ \cdot BE = 0; \quad (5)$$

$$\sum m_z(\vec{F}_R) = 0, -F \cos 60^\circ \cdot AB - N \cos 30^\circ \cdot AC - X_B \cdot AB = 0. \quad (6)$$

При определении моментов силы  $\vec{F}$  относительно осей разлагаем ее на составляющие  $\vec{F}'$  и  $\vec{F}''$ , параллельные осям  $x$  и  $z$  ( $F' = F \cos \alpha$ ,  $F'' = F \sin \alpha$ ), и применяем теорему Вариньона (см. Указания). Аналогично можно поступить при определении моментов реакции  $\vec{N}$ .

Подставив в составленные уравнения числовые значения всех заданных величин и решив эти уравнения, найдем искомые реакции.



Ответ:  $X_A=3,4$  кН,  $Y_A=5,1$  кН,  $Z_A=4,8$  кН,  $X_B=-7,4$  кН,  $Z_B=-2,1$  кН,  $N=5,9$  кН. Знак минус указывает, что реакция  $X_B$  имеет направление, противоположное показанному на рис С5.

**КИНЕМАТИКА**

**Задача К1**

Точка  $B$  движется в плоскости  $xu$  (рис. К 1.0—К 1.9, табл. к1; траектория точки на рисунках показана условно). Закон движения точки задан уравнениями  $x=f_1(t)$ ,  $y=f_2(t)$ , где  $x$  и  $y$  выражены в сантиметрах,  $t$  — в секундах.

Найти уравнение траектории точки; для момента времени  $t_1=1$  с определить скорость и ускорение точки, а также ее касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны в соответствующей точке траектории.

Зависимость  $x=f_1(t)$  указана непосредственно на рисунках, а зависимость  $y=f_2(t)$  дана в табл. К1 (для рис. 0—2 в столбце 2, для рис. 3—6 в столбце 3, для рис. 7—9 в столбце 4). Как и в задачах С1—С5, номер рисунка выбирается по предпоследней цифре шифра, а номер условия в табл. К1 — по последней.

**Указания.** Задача К1 относится к кинематике точки и решается с помощью формул, по которым определяются скорость и ускорение точки в декартовых координатах (координатный способ задания движения точки), а также формул, по которым определяются касательное и нормальное ускорения точки.

В данной задаче все искомые величины нужно определить только для момента времени  $t_1=1$  с. В некоторых вариантах задачи при определении траектории или при последующих расчетах (для их упрощения) следует учесть известные из тригонометрии формулы:  $\cos 2a=1-2\sin^2 a=2\cos^2 a-1$ ;  $\sin 2a=2\sin^2 a \cos a$ .

Номер условия	$y=f^2(t)$		
	рис. 0-2	рис. 3-6	рис. 7-9
0	$12\sin(\pi/6t)$	$2t^2+2$	$4\cos(\pi/6t)-2$
1	$(-4)-6\cos(\pi/3t)$	$8\sin(\pi/4t)$	$14-16\cos^2(\pi/6t)$
2	$(-3)\sin^2(\pi/6t)$	$(2+t)^2$	$4\cos(\pi/3t)$
3	$9\sin(\pi/6t)-4$	$2t^3$	$(-10)\cos(\pi/6t)$
4	$3\cos(\pi/3t)-2$	$2+2\cos(\pi/4t)$	$(-4)\cos 2(\pi/6t)$
5	$(-10)\sin(\pi/6t)$	$2-3t^2$	$8-12\cos(\pi/3t)$
6	$2-6\sin^2(\pi/6t)$	$2-2\sin(\pi/4t)$	$3\cos(\pi/6t)$
7	$2\sin(\pi/6t)-2$	$(t+1)^3$	$6-8\cos(\pi/3t)$
8	$9\cos(\pi/3t)+5$	$2-t^3$	$9\cos(\pi/6t)-3$
9	$3-8\sin(\pi/6t)$	$4\cos(\pi/4t)$	$(-6)\cos(\pi/3t)$

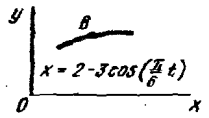


Рис. К1.0

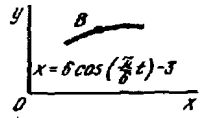


Рис. К1.1

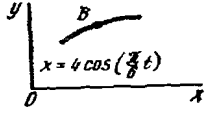


Рис. К1.2

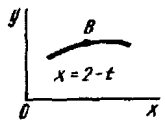


Рис. К1.3

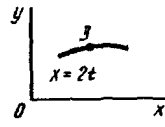


Рис. К1.4

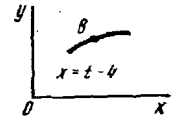


Рис. К1.5

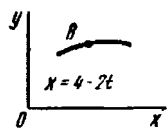


Рис. К1.6

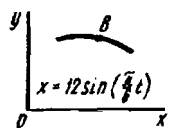


Рис. К1.7

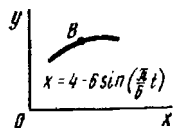


Рис. К1.8

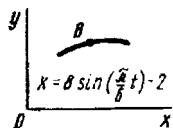


Рис. К1.9

**Пример К1.** Даны уравнения движения точки в плоскости  $xу$ :

$$x = -2 \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + 3; y = 2 \sin\left(\frac{\pi}{8}t\right) - 1, \text{ (где } x, y - \text{ в сантиметрах, } t - \text{ в секундах).}$$

Определить уравнение траектории точки; для момента времени  $t_1 = 1$  с найти скорость и ускорение точки, а также ее касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны в соответствующей точке траектории.

**Решение.** 1. Для определения уравнения траектории точки исключим из заданных уравнений движения время  $t$ . Поскольку  $t$  входит в аргументы тригонометрических функций, где один аргумент вдвое больше другого, используем формулу

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \text{ или } \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) = 1 - 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{8}t\right). \quad (1)$$

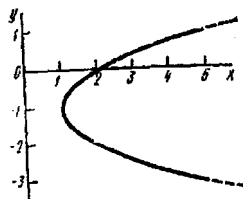


Рис. К1

Из уравнений движения находим выражения соответствующих функций и подставляем в равенство (1). Получим

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) = \frac{3-x}{2}, \sin\left(\frac{\pi}{8}t\right) = \frac{y+1}{2}$$

$$\text{и } \frac{3-x}{2} = 1 - 2 \frac{(y+1)^2}{4}.$$

Отсюда окончательно находим следующее уравнение траектории точки (параболы, рис. К1):

$$x = (y+1)^2 + 1. \quad (2)$$

2. Скорость точки найдем по ее проекциям на координатные оси:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right); V_y = \frac{dy}{dt} = \frac{\pi}{4} \cos\left(\frac{\pi}{8}t\right);$$

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$$

и при  $t = 1$  с

$$V_{1x} = 1,11 \text{ см/с}, V_{1y} = 0,73 \text{ см/с}, V_1 = 1,33 \text{ см/с}. \quad (3)$$

3. Аналогично найдем ускорение точки:

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{\pi^2}{8} \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right); a_y = \frac{dV_y}{dt} = -\frac{\pi^2}{32} \sin\left(\frac{\pi}{8}t\right);$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

при  $t = 1$  с

$$a_{1x} = 0,87 \text{ м/с}^2, a_{1y} = -0,12 \text{ м/с}^2, a_1 = 0,88 \text{ м/с}^2. \quad (4)$$

4. Касательное ускорение найдем, дифференцируя по времени равенство  $V^2 = V_x^2 + V_y^2$ . Получим:

$$2v \frac{dV}{dt} = 2v \left( \frac{dV_x}{dt} + 2v \right) \frac{dV_y}{dt} \text{ и } a_r = \frac{dV}{dt} = \frac{V_x a_x + V_y a_y}{V} \quad (5)$$

Числовые значения всех величин, входящих в правую часть выражения (5), определены и даются равенствами (3) и (4). Подставив в (5) эти числа, найдем сразу, что при  $t=1$  с  $a_{1r}=0,66$  см/с<sup>2</sup>.

5. Нормальное ускорение точки  $a_n = \sqrt{a^2 - a_r^2}$ . Подставляя сюда найденные числовые значения  $a_1$  и  $a_{1r}$ , получим, что при  $t=1$  с  $a_{1n} = 0,58$  см/с<sup>2</sup>.

6. Радиус кривизны траектории  $\rho = V^2/a_n$ . Подставляя сюда числовые значения  $V_1$  и  $a_{1n}$ , найдем, что при  $t_1=1$  с  $\rho_1 = 3,0$  см. Ответ:  $V_1 = 1,33$  см/с,  $a_1 = 0,88$  см/с<sup>2</sup>,  $a_{1r} = 0,66$  см/с<sup>2</sup>,  $a_{1n} = 0,58$  см/с<sup>2</sup>,  $\rho_1 = 3$  см.

### Задача К2

Механизм состоит из ступенчатых колес 1—3, находящихся в зацеплении или связанных ремненной передачей, зубчатой рейки 4 и груза 5, привязанного к концу нити, намотанной на одно из колес (рис. К2.0—К2.9, табл. К2). Радиусы ступеней колес равны соответственно: у колеса 1 —  $r_1 = 2$  см,  $R_1 = 4$  см, у колеса 2 —  $r_2 = 6$  см,  $R_2 = 8$  см, у колеса 3 —  $r_3 = 12$  см,  $R_3 = 16$  см. На ободе колес расположены точки *A*, *B* и *C*.

В столбце «Дано» таблицы указан закон движения или закон изменения скорости ведущего звена механизма, где  $\varphi_{1(t)}$ —закон вращения колеса 1,  $s_4(t)$ —закон движения рейки 4,  $\omega_2(t)$ —закон изменения угловой скорости колеса 2,  $v_5(t)$ —закон изменения скорости груза 5 и т. д. (везде  $\varphi$  выражено в радианах,  $s$  — в сантиметрах,  $t$  — в секундах). Положительное направление для  $\varphi$  и  $\omega$  против хода часовой стрелки, для  $s_4$ ,  $s_5$  и  $v_4$ ,  $v_5$  — вниз.

Определить в момент времени  $t_1 = 2$  с указанные в таблице в столбцах «Найти» скорости ( $V$ —линейные,  $\omega$  — угловые) и ускорения ( $a$  — линейные,  $\varepsilon$  — угловые) соответствующих точек или тел ( $V_5$  — скорость груза 5 и т. д.).

**Указания.** Задача К2 — на исследование вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси. При решении задачи учесть, что когда два колеса находятся в зацеплении, скорость точки зацепления имеет у каждого колеса одну и ту же величину, а когда два колеса связаны ремненной передачей, то все точки ремня и, следовательно, точки, лежащие на ободе каждого из этих колес, имеют в данный момент времени численно одинаковые скорости; при этом считается, что ремень по ободу колеса не скользит.

**Пример К2.** Рейка 1, ступенчатое колесо 2 с радиусами  $R_2$  и  $r_2$  и колесо 3 радиуса  $R_3$ , скрепленное с валом радиуса  $r_3$ , находятся в зацеплении; на вал намотана нить с грузом 4 на конце (рис. К2). Рейка движется по закону  $s_1 = f(t)$ .

Номер условия	Дано	Найти	
		скорости	ускорения
0	$S_4=4(7t-t^2)$	$V_B, V_C$	$\varepsilon_2, a_A, a_5$
1	$V_5=2(t^2-3)$	$V_A, V_C$	$\varepsilon_2, a_B, a_4$
2	$\varphi_1=2t^2-9$	$V_4, \omega_2$	$\varepsilon_2, a_C, a_5$
3	$\omega_2=7t-3t^2$	$V_5, \omega_3$	$\varepsilon_2, a_A, a_4$
4	$\varphi_3=3t-t^2$	$V_4, \omega_1$	$\varepsilon_1, a_B, a_5$
5	$\omega_1=5t-2t^2$	$V_5, V_B$	$\varepsilon_2, a_C, a_4$
6	$\varphi_2=2(t^2-3t)$	$V_4, \omega_1$	$\varepsilon_1, a_C, a_5$
7	$V_4=3t^2-8$	$V_A, \omega_3$	$\varepsilon_3, a_B, a_5$
8	$S_5=2t^2-5t$	$V_4, \omega_2$	$\varepsilon_1, a_C, a_4$
9	$\omega_3=8t-3t^2$	$V_5, V_B$	$\varepsilon_2, a_A, a_4$

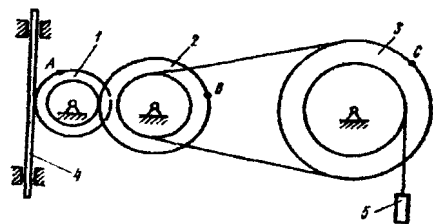


Рис. К2.0

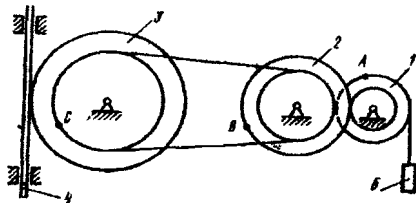


Рис. К2.1

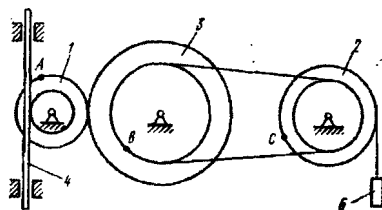


Рис. К2.2

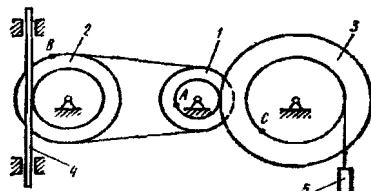


Рис. К2.3

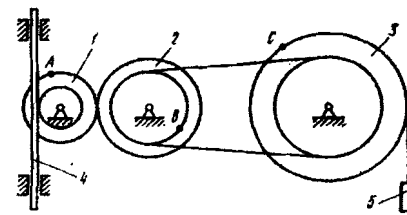


Рис. К2.4

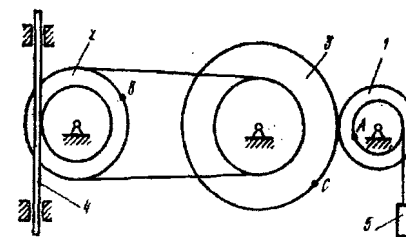


Рис. К2.5

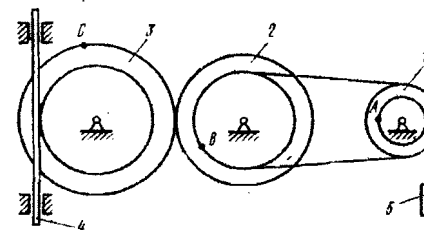


Рис. К2.6

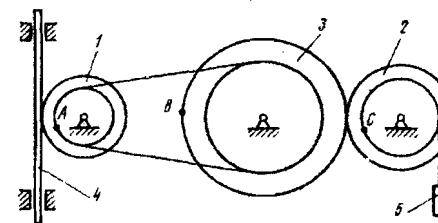


Рис. К2.7

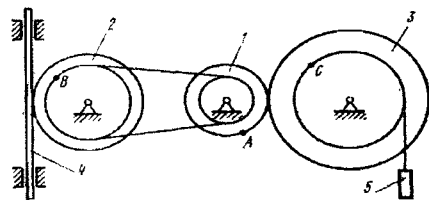


Рис. К2.8

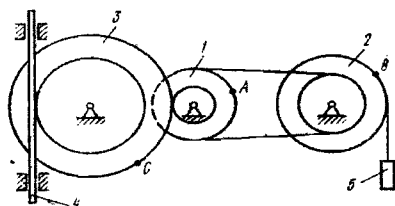


Рис. К2.9

Дано:  $R_2 = 6$  см,  $r_2 = 4$  см,  $R_3 = 8$  см,  $r_3 = 3$  см,  $S_1 = 3t^2$  (s — в сантиметрах,  $t$  — в секундах),  $A$  — точка обода колеса 3,  $t_1 = 3$  с.

Определить:  $\omega_3$ ,  $V_4$ ,  $\epsilon_3$ ,  $a_4$  в момент времени  $t = t_1$ .

**Решение.** Условимся обозначать скорости точек, лежащих на внешних ободах колес (радиуса  $R_i$ ), через  $V_i$ , а точек, лежащих на внутренних ободах (радиуса  $r_i$ ), — через  $u_i$ .

1. Определяем сначала угловые скорости всех колес, как функции времени  $t$ . Зная закон движения рейки 1, находим ее скорость

$$V_1 = s_1 = 9t^2; \quad (1)$$

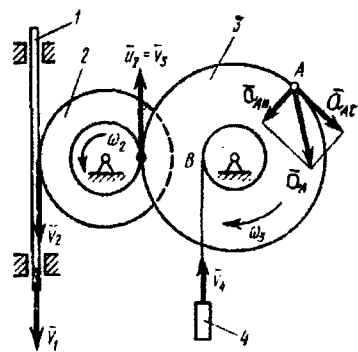


Рис. К2

Так как рейка и колесо 2 находятся в зацеплении, то  $V_2 = V_1$  или  $\omega_2 \cdot R_2 = V_1$ . Но колеса 2 и 3 тоже находятся в зацеплении, следовательно,  $u_2 = V_3$  или  $\omega_2 r_2 = \omega_3 R_3$ . Из этих равенств находим

$$\omega_2 = \frac{V_1}{R_2} = \frac{3}{2} t^2, \quad \omega_3 = \frac{r_2}{R_3} \omega_2 = \frac{3}{4} t^2. \quad (2)$$

Тогда для момента времени  $t_1 = 3$  с получим  $\omega_3 = 6,75$  с<sup>-1</sup>.

3. Определяем  $V_4$ . Так как  $V_4 = V_B = \omega_3 r_3$ , то при  $t_1 = 3$  с будет  $V_4 = 20,25$  см/с<sup>2</sup>.

4. Определяем  $\epsilon_3$ . Учитывая второе из равенств (2), получим  $\epsilon_3 = 1,5t$ . Тогда при  $t_1 = 3$  с будет  $\epsilon_3 = 4,5$  с<sup>-2</sup>.

5. Определяем  $a_A$ . Для точки  $A$   $\overline{a_A} = \overline{a_{Ar}} + \overline{a_{An}}$ , где численно  $a_{Ar} = R_3 \omega_3$ ,  $a_{An} = R_3 \omega_3^2$ . Тогда для момента времени  $t_1 = 3$  с будем иметь:

$$a_{Ar} = 36 \text{ см/с}^2, \quad a_{An} = 364 \text{ см/с}^2, \\ a_A = \sqrt{a_{Ar}^2 + a_{An}^2} = 366,3 \text{ см/с}^2.$$

Все скорости и ускорения точек, а также направления угловых скоростей показаны на рис. К2. Ответ:  $\omega_3 = 6,75$  с<sup>-1</sup>,  $V_4 = 20,25$  см/с;  $\epsilon_3 = 4,5$  с<sup>-2</sup>;  $a = 366,3$  см/с<sup>2</sup>.

### Задача К3

Плоский механизм состоит из стержней 1, 2, 3, 4 и ползуна  $B$  или  $E$  (рис. К3.0—К3.7) или же из стержней 1, 2, 3 и ползуну  $B$  и  $E$  (рис. К3.8, К3.9), соединенных друг с другом и с неподвижными опорами  $O_1, O_2$  шарнирами; точка  $D$  находится в середине стержня  $AB$ . Длины стержней равны соответственно:  $l_1 = 0,4$  м,  $l_2 = 1,2$  м,  $l_3 = 1,4$  м,  $l_4 = 0,6$  м. Положение механизма

определяется углами  $\alpha, \beta, \gamma, \varphi, \theta$ . Значения этих углов и других заданных величин указаны в табл. К3а (для рис.к2.0—к2.4) или в табл. К3б (для рис.к2.5—к2.9); при этом в табл. К3а  $\omega_1$  и  $\omega_4$  — величины постоянные.

Определить величины, указанные в таблицах в столбцах «Найти».

Дуговые стрелки на рисунках показывают, как при построении чертежа механизма должны откладываться соответствующие углы: *по ходу или против хода часовой стрелки* (например, угол  $\gamma$  на рис. к2.8 следует отложить от  $DB$  по ходу часовой стрелки, а на рис.к2.9 — против хода часовой стрелки и т.д.).

Построение чертежа начинать со стержня, направление которого определяется углом  $\alpha$ ; ползун с направляющими для большей наглядности изобразить так, как в примере К3 (см. рис. К3, б).

Заданные угловую скорость и угловое ускорение считать направленными против хода часовой стрелки, а заданные скорость  $\overline{V_B}$  и ускорение  $\overline{a_B}$  — от точки  $B$  к  $b$  (на рис.к2.5—к2.9).

**Указания.** Задача К3 — на исследование плоскопараллельного движения твердого тела. При ее решении для определения скоростей точек механизма и угловых скоростей его звеньев следует воспользоваться теоремой о проекциях скоростей двух точек тела и понятием о мгновенном центре скоростей, применяя эту теорему (или это понятие) **к каждому звену механизма в отдельности.**

При определении ускорений точек механизма исходить из векторного равенства  $\overline{a_B} = \overline{a_A} + \overline{a_{B,A}^n} + \overline{a_{B,A}^t}$ , где  $A$  — точка, ускорение  $\overline{a_A}$  которой или задано или непосредственно определяется по условиям задачи (если точка  $A$  движется по дуге окружности, то  $\overline{a_A} = \overline{a_A^n} + \overline{a_A^t}$ );  $B$  — точка, ускорение  $\overline{a_B}$  которой нужно определить (если точка  $B$  движется по дуге окружности радиуса  $l$ , то  $\overline{a_B} = \overline{a_B^n} + \overline{a_B^t}$ , где численно  $a_B^n = V_B^2 / l$ ; входящая сюда скорость  $V_B$  определяется так же, как и скорости других точек механизма).

Таблица К3а (к рис. К3.0-К3.4)

Номер условия	Углы					Дано		Найти			
	$\alpha$	$\beta^\circ$	$\gamma^\circ$	$\varphi^\circ$	$\theta^\circ$	$\omega_1$ 1/с	$\omega_4$ 1/с	V точек	$\omega$ звена	a точки	$\epsilon$ звена
0	0	60	30	0	120	6		B, E	DE	B	AB
1	90	120	150	0	30		4	A, E	AB	A	AB
2	30	60	30	0	120	5		B, E	AB	B	AB
3	60	150	150	90	30		5	A, E	DE	A	AB
4	30	30	60	0	150	4		D, E	AB	B	AB
5	90	120	120	90	60		6	A, E	AB	A	AB
6	90	150	120	90	30	3		B, E	DE	B	AB
7	0	60	60	0	120		2	A, E	DE	A	AB
8	60	150	120	90	30	2		D, E	AB	B	AB
9	30	120	150	0	60		8	A, E	DE	A	AB

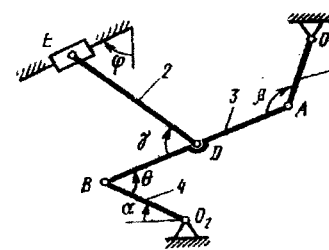


Рис. К3.0

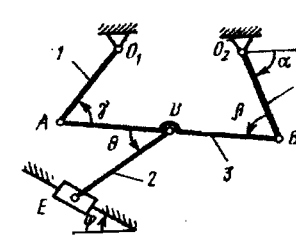


Рис. К3.1

Таблица К36 (к рис. К3.5-К3.9)

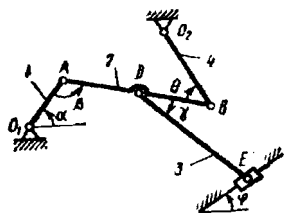


Рис. К3.2

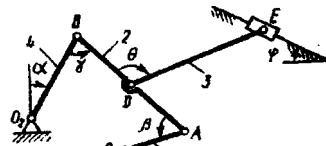


Рис. К3.3

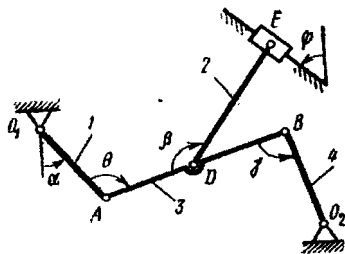


Рис. К3.4

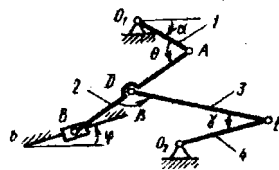


Рис. К3.5

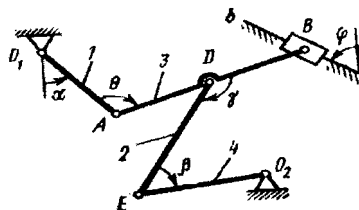


Рис. К3.6

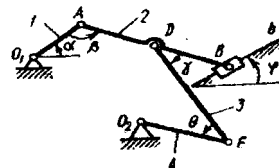


Рис. К3.7

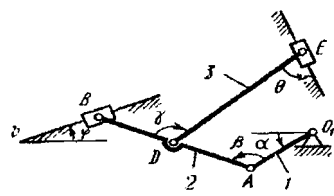


Рис. К3.8

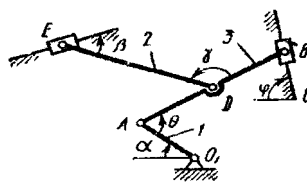


Рис. К3.9

№ усл.	Углы					Дано				Найти			
	$\alpha$	$\beta^\circ$	$\gamma^\circ$	$\varphi^\circ$	$\theta^\circ$	$\omega_1$ 1/с	$\epsilon_1$ 1/с <sup>2</sup>	$V_B$ м/с	$a_B$ м/с <sup>2</sup>	$V$ точек	$\omega$ звена	$a$ точки	$\epsilon$ звена
0	120	30	30	90	150	2	4			В,Е	АВ	В	АВ
1	0	60	90	0	120			4	6	А,Е	DE	А	АВ
2	60	150	30	90	30	3	5			В,Е	АВ	В	АВ
3	0	150	30	0	60			6	8	А,Е	АВ	А	АВ
4	30	120	120	0	60	4	6			В,Е	DE	В	АВ
5	90	120	90	90	60			8	10	D,Е	DE	А	АВ
6	0	150	90	0	120	5	8			В,Е	DE	В	АВ
7	30	120	30	0	60			2	5	А,Е	АВ	А	АВ
8	90	120	120	90	150	6	10			В,Е	DE	В	АВ
9	60	60	60	90	30			5	4	D,Е	АВ	А	АВ

**Пример К3.** Механизм (рис. К3, а) состоит из стержней 1, 2, 3, 4 и ползуна В, соединенных друг с другом и с неподвижными опорами  $O_1$  и  $O_2$  шарнирами.

Дано:  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\beta = 150^\circ$ ,  $\gamma = 90^\circ$ ,  $\varphi = 30^\circ$ ,  $\theta = 30^\circ$ ,  $AD = DB$ ,  $l_1 = 0,4$  м,

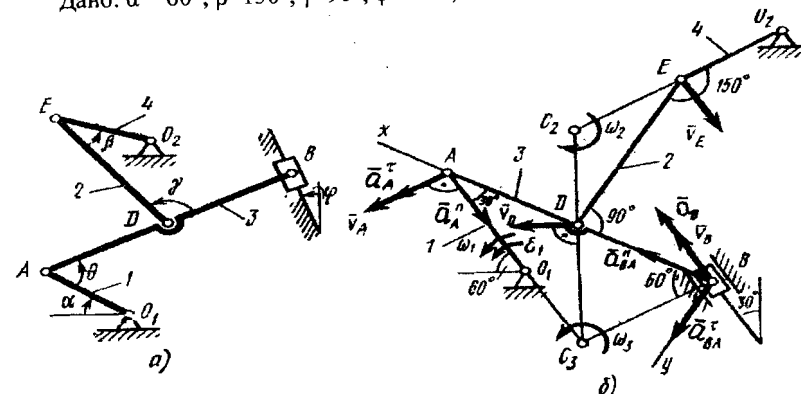


Рис. К3

$l_2 = 1,2$  м,  $l_3 = 1,4$  м,  $\omega_1 = 2$  с<sup>-1</sup>,  $\varepsilon_1 = 7$  с<sup>-2</sup> (направления  $\omega_1$  и  $\varepsilon_1$  — против хода часовой стрелки):

Определить:  $V_B$ ,  $V_E$ ,  $\omega_2$ ,  $a_B$ ,  $\varepsilon_3$ .

**Решение.** 1. Строим положение механизма в соответствии с заданными углами (рис. КЗ, б).

2. Определяем  $\bar{a}_B$ . Точка  $B$  принадлежит стержню  $AB$ . Чтобы найти  $a_B$ , надо знать скорость какой-нибудь другой точки этого стержня и направление  $\bar{V}_A$ . По данным задачи, учитывая направление,  $\omega_1$  можем определить  $\bar{V}_A$  численно

$$V_A = \omega_1 l_1 = 0,8 \text{ м/с}; \bar{V}_A \perp O_1 A, \quad (1)$$

Направление  $\bar{V}_B$  найдем, учтя, что точка  $B$  принадлежит одновременно ползуну, движущемуся вдоль направляющих поступательно. Теперь, зная  $\bar{V}_A$  и направление  $\bar{V}_B$ , воспользуемся теоремой о проекциях скоростей двух точек тела (стержня  $AB$ ) на прямую, соединяющую эти точки (прямая  $AB$ ). Сначала по этой теореме устанавливаем, в какую сторону направлен вектор  $\bar{V}_B$  (проекции скоростей должны иметь одинаковые знаки). Затем, вычисляя эти проекции, находим

$$V_B \cos 30^\circ = V_A \cos 60^\circ \quad \text{и} \quad V_B = 0,46 \text{ м/с}. \quad (2)$$

3. Определяем  $\bar{V}_E$ . Точка  $E$  принадлежит стержню  $DE$ . Следовательно, по аналогии с предыдущим, чтобы определить  $\bar{V}_E$ , надо сначала найти скорость точки  $D$ , принадлежащей одновременно стержню  $AB$ . Для этого, зная  $\bar{V}_A$  и  $\bar{V}_B$ , строим мгновенный центр скоростей (МЦС) стержня  $AB$ ; это точка  $C_3$ , лежащая на пересечении перпендикуляров к  $\bar{V}_A$  и  $\bar{V}_B$ , восстановленных из точек  $A$  и  $B$  (к  $\bar{V}_A$  перпендикулярен стержень 1). По направлению вектора  $\bar{V}_A$  определяем направление поворота стержня  $AB$  вокруг МЦС  $C_3$ . Вектор  $V_D$  будет перпендикулярен отрезку  $C_3 D$ , соединяющему точки  $D$  и  $C_3$ , и направлен в сторону поворота. Величину  $V_D$  найдем из пропорций

$$\frac{V_D}{C_3 D} = \frac{V_B}{C_3 B}. \quad (3)$$

Чтобы вычислить  $C_3 D$  и  $C_3 B$ , заметим, что  $\triangle AC_3 B$  прямоугольный, так как острые углы в нем равны  $30^\circ$  и  $60^\circ$ , и что  $C_3 B = AB \sin 30^\circ = 0,5 AB = BD$ . Тогда  $\triangle BC_3 D$  является равнобедренным и  $C_2 B = C_3 D$ . В результате равенство (3) дает

$$V_D = V_B = 0,46 \text{ м/с}, \quad \bar{V}_D \perp C_3 D. \quad (4)$$

Так как точка  $E$  принадлежит одновременно стержню  $O_2 E$ , вращающемуся вокруг  $O_2$ , то  $\bar{V}_E \perp O_2 E$ . Тогда восставляя из точек  $E$  и  $D$  перпендикуляры к скоростям  $\bar{V}_E$  и  $\bar{V}_D$ , построим МЦС  $C_2$  стержня  $DE$ . По направлению вектора  $\bar{V}_D$  определяем направление поворота стержня  $DE$  вокруг центра  $C_2$ . Вектор  $\bar{V}_E$  будет направлен в сторону поворота этого стержня. Из рис. КЗ, б видно, что угол  $\angle C_2 E D = \angle C_2 D E$  откуда  $C_2 E = C_2 D$ . Составив теперь пропорцию, найдем, что

$$\frac{V_E}{C_2 E} = \frac{V_D}{C_2 D}, \quad V_E = V_D = 0,46 \text{ м/с}. \quad (5)$$

4. Определяем  $\omega_2$ . Так как МЦС стержня 2 нам известен (точка  $C_2$ ) и

$$C_2 D = \frac{l_2}{2 \cos 30^\circ} = 0,69 \text{ м}, \quad \text{то} \quad \omega_2 = \frac{V_D}{C_2 D} = 0,67 \text{ с}^{-1}. \quad (6)$$

5. Определяем  $\bar{a}_B$ . Точка  $B$  принадлежит стержню  $AB$ . Чтобы найти  $\bar{a}_B$ , надо знать ускорение какой-нибудь другой точки стержня  $AB$  и траекторию точки  $B$ . По данным задачи можем определить



$\vec{a}_A = \vec{a}_A^r + \vec{a}_A^n$ , где численно

$$a_A^r = \varepsilon_1 l_1 = 2,8 \text{ м/с}^2; a_A^n = \omega_1^2 l_1 = 1,16 \text{ м/с}^2. \quad (7)$$

Вектор  $a_A^n$  направлен вдоль  $AO$ , а  $a_A^r$  — перпендикулярно  $AO$ ; изображаем эти векторы на чертеже.

Так как точка  $B$  одновременно принадлежит ползуну, то вектор  $\vec{a}_B$  будет параллелен направляющим ползуна. Изображаем вектор его на чертеже, полагая, что он направлен в ту же сторону, что и  $\vec{V}_B$ .

Для определения  $\vec{a}_B$  воспользуемся равенством

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A^r + \vec{a}_A^n + \vec{a}_{BA}^r + \vec{a}_{BA}^n. \quad (8)$$

Изображаем на чертеже векторы  $a_{BA}^n$  (вдоль  $BA$  от  $B$  к  $A$ ) и  $\vec{a}_{BA}^r$  (в любую сторону перпендикулярно  $BA$ ); численно  $a_{BA}^n = \omega_3^2 l_3$ . Найдя  $\omega_3$  с помощью построенного ранее МЦС  $C_3$  стержня  $3$ , получим

$$a_3 = \frac{V_A}{C_3 A} = \frac{V_A}{l_3 \cos 30^\circ} = 0,66 \text{ с}^{-1} \text{ и } a_{BA}^n = 0,61 \text{ м/с}^2. \quad (9)$$

Таким образом, у величин, входящих в равенство (8), неизвестны только численные значения  $a_B$  и  $a_{BA}^r$ ; их можно найти, спроектировав обе части равенства (8) на какие-нибудь две оси.

Чтобы определить  $a_B$  проектируем обе части равенства (8) на направление  $AB$  (ось  $x$ ), перпендикулярное к неизвестному вектору  $\vec{a}_{BA}$ . Тогда получим

$$a_B \cos 30^\circ = a_A^r \cos 60^\circ - a_A^n \cos 30^\circ + a_{BA}^n. \quad (10)$$

Подставив в равенство (10) числовые значения всех величин из (7) и (9), найдем, что

$$a_B = 0,72 \text{ м/с}^2. \quad (11)$$

Так как получилось  $a_B > 0$ , то, следовательно, вектор  $a_B$  имеет направление, показанное на рис. К.3, б.

6. Определяем  $\varepsilon_3$ . Чтобы найти  $\varepsilon_3$ , сначала определим  $a_{BA}^r$ . Для этого обе части равенства (8) спроектируем на направление, перпендикулярное  $AB$  (ось  $y$ ). Тогда получим

$$-a_B \sin 30^\circ = a_A^r \sin 60^\circ + a_A^n \sin 30^\circ + a_{BA}^r. \quad (12)$$

Подставив в равенство (12) числовые значения всех величин; (11) и (7), найдем, что  $a_{BA}^r = -3,58 \text{ м/с}^2$ . Знак указывает, что направление  $a_{BA}^r$  противоположно показанному на рис. К3, б.

Теперь из равенства  $a_{BA}^r = \varepsilon_3 l_3$  получим

$$\varepsilon_3 = \frac{|a_{BA}^r|}{l_3} = 2,56 \text{ с}^{-2}.$$

Ответ:  $V_B = 0,46 \text{ м/с}$ ;  $V_E = 0,46 \text{ м/с}$ ;  $\omega_2 = 0,67 \text{ с}^{-1}$ ;  $a_B = 0,74 \text{ м/с}^2$ ;  $\varepsilon_3 = 2,56 \text{ с}^{-2}$ .

#### Задача К4

Прямоугольная пластина (рис. К.4.0—К4.4) или круглая пластина радиуса  $R=60 \text{ см}$  (рис. К4.5—К4.9) вращается вокруг неподвижной оси по закону  $\varphi=f_1(t)$ , заданному в табл. К4. Положительное направление отсчета угла  $\varphi$  показано на рисунках дуговой стрелкой. На рис. О, 1, 2, 5, 6 ось вращения перпендикулярна плоскости пластины и проходит через точку О (пластина

вращается в своей плоскости); на рис. 3, 4, 7, 8, 9 ось вращения  $OO_1$  лежит в плоскости пластины (пластина вращается в пространстве).

По пластине вдоль прямой  $BD$  (рис.к4.0—к4.4) или по окружности радиуса  $R$  (рис.к4.5—к4.9) движется точка  $M$ ; закон ее относительного движения, т. е. зависимость  $s=AM=f_2(t)$  ( $s$  выражено в сантиметрах,  $t$  — в секундах), задан в таблице отдельно для рис.к4.0—к4.9 и для рис.к4.5—к4.9; там же даны размеры  $a$  и  $h$ . На рисунках точка  $M$  показана в положении, при котором  $s=AM>0$  (при  $s<0$  точка  $M$  находится по другую сторону от точки  $A$ ).

Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки  $M$  в момент времени  $t_1=1$  с.

**Указания.** Задача К4 — на сложное движение точки. Для ее решения воспользоваться теоремами о сложении скоростей и о сложении ускорений. Прежде чем производить все расчеты, следует по условиям задачи определить, где находится точка  $M$  на пластине в момент времени  $t_1=1$  с, и изобразить точку именно в этом положении (а не в произвольном, показанном на рисунках к задаче).

В случаях, относящихся к рис.к4.5—к4.9, при решении задачи не подставлять числового значения  $R$ , пока не будут определены положения точки  $M$  в момент времени  $t_1=1$  с и угол между радиусами  $CM$  и  $CA$  в этот момент.

**Пример К4.** Шар радиуса  $R$  (рис. к4, а) вращается вокруг своего диаметра  $AB$  по закону  $\varphi=f_1(t)$  (положительное направление отсчета угла  $\varphi$  показано на рис. К4, над дуговой стрелкой). По дуге большого круга («меридиану»)  $ADB$  движется точка  $M$  по закону  $s = AM = f_2(t)$ ; положительное направление отсчета расстояния  $s$  от  $A$  к  $D$ .

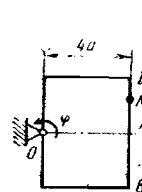


Рис. К4.0

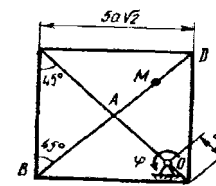


Рис. К4.1

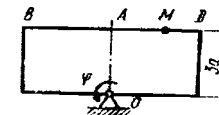


Рис. К4.2

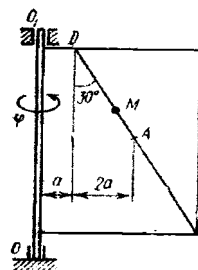


Рис. К4.3

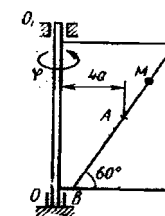


Рис. К4.4

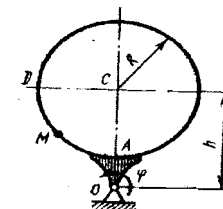


Рис. К4.5

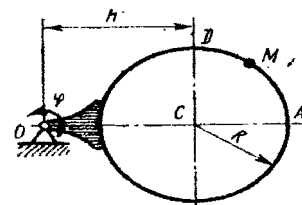


Рис. К4.6

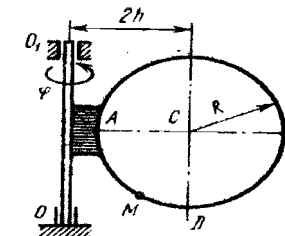


Рис. К4.7

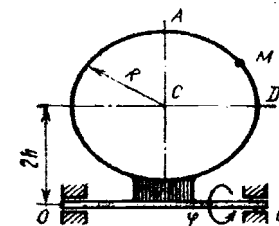


Рис. К4.8

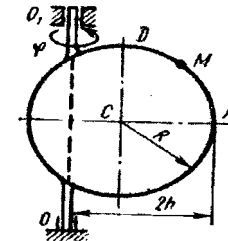


Рис. К4.9

Таблица К4

Номер условия	Для всех рис.	Для рис. К4.0-К4.4		Для рис. К4.5-К4.9	
	$\varphi=f_1(t)$	а, см.	$s=AM=f_2(t)$	h	$S=AM=f_2(t)$
0	$4(t^2-t)$	12	$50(3t^2-t^2)-64$	R	$\pi/3R(4t^2-2t^3)$
1	$3t^2-8t$	16	$40(3t^2-t^2)-32$	4/3R	$\pi/2R(2t^2-t^3)$
2	$6t^3-12t^2$	10	$80(t^2-t)+40$	R	$\pi/3R(2t^2-1)$
3	$t^2-2t^3$	16	$60(t^4-3t^2)+56$	R	$\pi/3R(t^4-3t^2)$
4	$10t^2-5t^3$	8	$80(2t^2-t^2)-48$	R	$\pi/6R(3t-t^2)$
5	$2(t^2-t)$	20	$60(t^3-2t^2)$	R	$\pi/3R(t^3-2t)$
6	$5t-4t^2$	12	$40(t^2-3t)+32$	3/4R	$\pi/2R(t^3-2t^2)$
7	$15t-3t^3$	8	$60(t-t^3)+24$	R	$\pi/6R(t-5t^2)$
8	$2t^3-11t$	10	$50(t^3-t)-30$	R	$\pi/3R(3t^2-t)$
9	$6t^2-3t^3$	20	$40(t-2t^3)-40$	4/3R	$\pi/2R(t-2t^2)$

Дано:  $R = 0,5$  м,  $\varphi = 2t^3 - 4t^2$ ,  $s = \pi R/6(7t - 2t^2)$  ( $\varphi$  — в радианах,  $s$  — в метрах,  $t$  — в секундах).

Определить:  $V_a$  и  $a_a$  в момент времени  $t_1 = 1$  с.

**Решение.** Рассмотрим движение точки  $M$  как сложное, считая ее движение по дуге  $ADB$  относительным ( $AB$  — относительная траектория точки), а вращение шара — переносным движением. Тогда абсолютная скорость  $\vec{V}_A$  и абсолютное ускорение  $\vec{a}_a$  точки найдутся по формулам:

$$V_a = \vec{V}_{от} + \vec{V}_{пер}, \quad \vec{a}_a = \vec{a}_{от} + \vec{a}_{пер} + \vec{a}_{кор}, \quad (1)$$

где, в свою очередь,

$$\vec{a}_{от} = \vec{a}_{от}^{\tau} + \vec{a}_{от}^n, \quad \vec{a}_{пер} = \vec{a}_{пер}^{\tau} + \vec{a}_{пер}^n.$$

Определим все характеристики относительного и переносного движений.

**1. Относительное движение.** Это движение происходит по закону

$$S = AM = \frac{\pi R}{6} (7t - 2t^2). \quad (2)$$

Сначала установим, где будет находиться точка  $M$  на дуге  $ADB$  в момент времени  $t_1$ . Полагая в уравнении (2)  $t_1 = 1$ с, получим  $s = \frac{\pi R}{6} (7-2)$ .

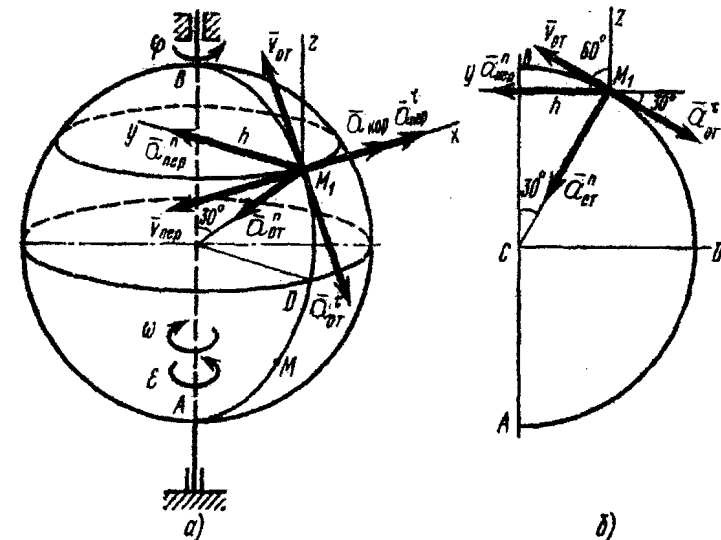


Рис. К4

Тогда угол  $ACM = s_1/R = 5/6 \pi = 150^\circ$  или угол  $BCM = 30^\circ$ . Изображаем на рис. К4, а точку в положении, определяемом этим углом (точка  $M_1$ ),

Теперь находим числовые значения  $V_{от}$ ,  $a_{от}^t$ ,  $a_{от}^n$ :

$$V_{от} = s = \frac{\pi R}{6} (7 - 4t), \quad a_{от}^t = V_{от} = -\frac{2}{3} \pi R,$$

$$a_{от}^n = \frac{V_{от}^2}{\rho_{от}} = \frac{V_{от}^2}{R},$$

где  $\rho_{от}$  — радиус кривизны относительной траектории, т. е. дуги  $\overset{\smile}{ADB}$ . Для момента времени  $t_1 = 1$  с, учитывая, что  $R = 0,5$  м, получим:

$$V_{от} = \frac{\pi R}{6} \cdot 3 = \frac{\pi}{4} \text{ м/с}, \quad a_{от}^t = -\frac{\pi}{3} \text{ м/с}^2,$$

$$a_{от}^n = \frac{\pi^2}{8} \text{ м/с}^2. \quad (3)$$

Знаки показывают, что вектор  $\vec{V}_{от}$  направлен в сторону положительного отсчета расстояния  $s$ , а вектор  $\vec{a}_{от}^t$  — в противоположную сторону; вектор  $\vec{a}_{от}^n$  направлен к центру  $C$  дуги  $\overset{\smile}{ADB}$ . Изображаем все эти векторы на рис. К4, а. Для наглядности приведен рис. К4, б, где дуга  $\overset{\smile}{ADB}$  совмещена с плоскостью чертежа.

**2. Переносное движение.** Это движение (вращение) происходит по закону  $\varphi = 2t^3 - 4t^2$ . Найдем угловую скорость  $\omega$  и угловое ускорение  $\varepsilon$  переносного вращения:  $\omega = \dot{\varphi} = 6t^2 - 8t$ ,  $\varepsilon = \dot{\omega} = 12t - 8$  и при  $t_1 = 1$  с.

$$\omega = -2 \text{ с}^{-1}, \quad \varepsilon = 4 \text{ с}^{-2}. \quad (4)$$

Знаки показывают, что при  $t_1 = 1$  с направление  $\varepsilon$  совпадает с направлением положительного отсчета угла  $\varphi$ , а направление  $\omega$  ему противоположно; отметим это на рис. К4, а соответствующими дуговыми стрелками.

Для определения  $\vec{V}_{пер}$  и  $\vec{a}_{пер}$  находим сначала расстояние  $h$  точки  $M_1$  от оси вращения. Получаем  $h = R \sin 30^\circ = 0,25$  м. Тогда в момент времени  $t_1 = 1$  с, учитывая равенства (4), будем иметь:

$$V_{пер} = |\omega| \cdot h = 0,5 \text{ м/с}, \quad a_{пер}^t = \varepsilon \cdot h = 1 \text{ м/с}^2,$$

$$a_{пер}^n = \omega^2 \cdot h = 1 \text{ м/с}^2. \quad (5)$$

Изображаем на рис. К4, а векторы  $\vec{V}_{пер}$  и  $\vec{a}_{пер}^t$  с учетом направлений  $\omega$  и  $\varepsilon$  и вектор  $\vec{a}_{пер}^n$  (направлен к оси вращения). 0

**3. Кориолисово ускорение.** Так как угол между вектором  $V_{от}$  и осью вращения (вектором  $\vec{\omega}$ ) равен  $60^\circ$ , то численно в момент времени  $t_1 = 1$  с [см. равенства (3) и (4)]

$$a_{кор} = 2|V_{от}| \cdot |\omega| \cdot \sin 60^\circ = 2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2,72 \text{ м/с}^2. \quad (6)$$

Направление  $\vec{a}_{кор}$  найдем, спроектировав вектор  $\vec{V}_{от}$  на плоскость, перпендикулярную оси вращения (проекция направлена так же, как вектор  $\vec{a}_{пер}^n$ ), и, повернув затем эту проекцию в сторону  $\omega$ , т. е. по ходу часовой стрелки, на  $90^\circ$ . Иначе направление  $\vec{a}_{кор}$  можно найти, учтя, что  $a_{кор} = 2(\vec{\omega} \times \vec{V}_{от})$ . Изображаем вектор  $\vec{a}_{кор}$  (на рис. К4), и теперь можно вычислить значения  $V_a$  и  $a_a$ .

**4. Определение  $V_a$ .** Так как  $\vec{V}_a = \vec{V}_{от} + \vec{V}_{пер}$ , а векторы  $\vec{V}_{от}$  и  $\vec{V}_{пер}$  взаимно перпендикулярны (см. рис. К4, а), то в момент времени  $t_1 = 1$  с

$$V_a = \sqrt{V_{от}^2 + V_{пер}^2} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + (0,5)^2} = 0,93 \text{ м/с}.$$

5. Определение  $a_{\nu}$ . Вектор  $\vec{a}_\nu$  складывается из следующих векторов:

$\vec{a}_\nu = \vec{a}_{OT}^i + \vec{a}_{OT}^n + \vec{a}_{ПЕР}^i + \vec{a}_{ПЕР}^n + \vec{a}_{КОР} = \sum \vec{a}_k$ . Для определения  $a_{\nu}$  проведем координатные оси  $M_1$   $uz$  (см. рис. К4, а) и вычислим проекции вектора  $\vec{a}_\nu$  на эти оси. Учтем при этом, что векторы  $\vec{a}_{ПЕР}^i$  и  $\vec{a}_{КОР}$  лежат на проведенной оси  $x$ . а векторы  $\vec{a}_{OT}^i$ ,  $\vec{a}_{OT}^n$  и  $\vec{a}_{ПЕР}^n$  расположены в плоскости дуги  $\overset{\curvearrowright}{ADB}$ , т. е. в плоскости  $M_1$   $uz$  (см. рис. К4, б). Тогда для момента времени  $t_1 = 1$  с, учтя равенства (3), (5), (6), получим:

$$a_{\nu x} = \sum a_{R_x} = a_{ПЕР}^i + a_{КОР}^i = 1 + 2,72 = 3,73 \text{ м/с}^2,$$

$$a_{\nu y} = \sum a_{R_y} = a_{ПЕР}^n + a_{OT}^n \cos 60^\circ - |a_{OT}^i| \cos 30^\circ = 1 + \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi\sqrt{3}}{6} = 0,71 \text{ м/с}^2$$

$$a_{\nu z} = \sum a_{R_z} = -|a_{OT}^i| \cos 60^\circ - a_{OT}^n \cos 30^\circ = -\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi^2\sqrt{3}}{16}\right) = -1,59 \text{ м/с}^2.$$

Отсюда находим значение  $a_\nu$  в момент времени  $t_1 = 1$  с:

$$a_\nu = \sqrt{a_{\nu x}^2 + a_{\nu y}^2 + a_{\nu z}^2} = 4,1 \text{ м/с}^2.$$

Ответ:  $V_\nu = 0,93 \text{ м/с}$ ,  $a_\nu = 4,1 \text{ м/с}^2$ .

## ДИНАМИКА

### Задача Д1

Груз  $D$  массой  $m$ , получив в точке  $A$  начальную скорость  $v_0$ , движется в изогнутой трубе  $ABC$ , расположенной в вертикальной плоскости; участки трубы или оба наклонные, или один горизонтальный, а другой наклонный (рис. Д1.0—Д1.9, табл. Д1); угол наклона  $\alpha = 30^\circ$ .

На участке  $AB$  на груз, кроме силы тяжести, действуют постоянная сила  $\vec{Q}$  (ее направление показано на рисунках), и сила сопротивления среды  $\vec{R}$ , зависящая от скорости  $\vec{V}$  груза (направлена против движения); трением груза о трубу на участке  $AB$  пренебречь.

В точке  $B$  груз, не изменяя величины своей скорости, переходит на участок  $BC$  трубы, где на него кроме силы тяжести действуют сила трения (коэффициент трения груза о трубу  $f=0,2$ ) и переменная сила  $F$ , проекция которой  $F_x$  на ось  $x$  задана в таблице (силы  $F_x$ ,  $Q$ ,  $R$  даны в таблице в ньютонах; единицу измерения коэффициента  $\mu$  должен определить и указать решающий задачу).

Считая груз материальной точкой и зная расстояние  $AB=l$  или время  $t_1$  движения груза от точки  $A$  до точки  $B$ , найти закон движения груза на участке  $BC$ , т. е.  $x=f(t)$ , где  $x=BD$ .

**Указания.** Задача Д1 — на интегрирование дифференциальных уравнений движения точки (решение основной задачи динамики). Решение задачи разбивается на две части. Сначала нужно составить и проинтегрировать методом разделения переменных дифференциальное уравнение движения точки (груза) на участке  $AB$ , учтя начальные условия. Затем, зная время движения груза на участке  $AB$  или длину этого участка, определить, какую скорость будет иметь груз в точке  $B$ . Эта скорость будет начальной для движения груза на участке  $BC$ . После этого нужно составить и проинтегрировать дифференциальное уравнение движения груза на участке  $BC$  тоже с учетом начальных условий. При интегрировании уравнения движения на участке  $AB$  в случае, когда задана его длина, целесообразно перейти к переменному  $x$ , учтя, что

$$\frac{dV_x}{dt} = V_x \frac{dV_x}{dx}.$$

Таблица Д1

Номер условия	$m$ , кг	$V_0$ , м/с	$Q$	$R$	$\mu$	$l$ , м	$t_1$ , с	$F_x$
0	2	20	6	$\mu V$	0,4		2,5	$2\sin(4t)$
1	2,4	12	6	$\mu V^2$	0,8	1,5		$6t$
2	4,5	18	9	$\mu V$	0,5		3	$3\sin(2t)$
3	6	14	18	$\mu V^2$	0,6	5		$(-3)\cos(2t)$
4	1,6	18	4	$\mu V$	0,4		2	$4\cos(4t)$
5	8	10	16	$\mu V^2$	0,5	4		$(-6)\sin(2t)$
6	1,8	15	5	$\mu V$	0,3		2	$9t^2$
7	4	12	12	$\mu V^2$	0,8	2,5		$(-8)\cos(2t)$
8	3	22	9	$\mu V$	0,5		3	$2\cos(2t)$
9	4,8	10	12	$\mu V^2$	0,2	4		$(-6)\sin(4t)$

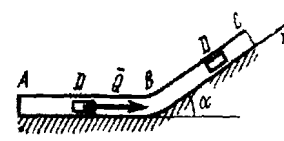


Рис. Д1.4

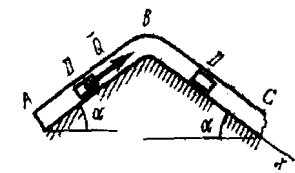


Рис. Д1.5

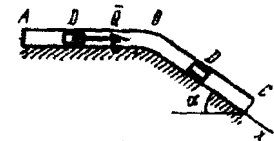


Рис. Д1.6

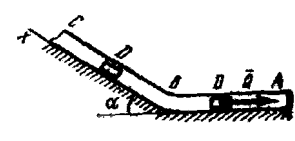


Рис. Д1.7

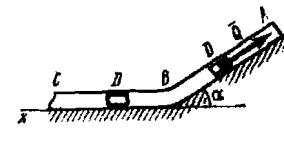


Рис. Д1.8

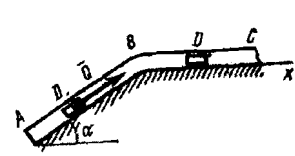


Рис. Д1.9

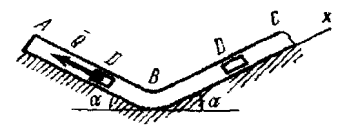


Рис. Д1.0

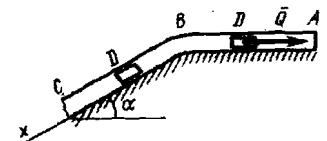


Рис. Д1.1

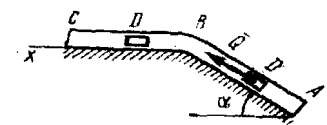


Рис. Д1.2

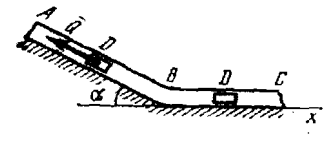


Рис. Д1.3

Пример Д1. На вертикальном участке  $AB$  трубы (рис. Д1) на груз  $D$  массой  $m$  действуют сила тяжести и сила сопротивления  $R$ ; движение от точки  $A$ , где  $V_0 = 0$ , до точки  $B$  длится  $t_1$  с. На наклонном участке  $BC$  на груз действуют сила трения (коэффициент трения груза о трубу равен  $f$ ) и переменная сила  $F = F(t)$ .

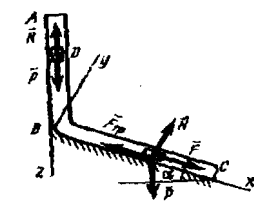


Рис. Д1

Дано:  $m = 8$  кг,  $R = \mu v^2$ , где  $\mu = 0,2$  кг/м,  $V_0 = 0$ ,  $t_1 = 2$  с,  $f = 0,2$ ,  $F_x = 16 \sin(3t+2)$ ,  $\alpha = 30^\circ$ .

Определить:  $x = f(t)$  — закон движения груза на участке BC.

**Решение.** 1. Рассмотрим движение груза на участке AB, считая груз материальной точкой. Изображаем груз (в произвольном положении) и действующие на него силы  $P = m\bar{g}$  и R. Проводим ось  $A_z$  и составляем дифференциальное уравнение движения груза в проекции на эту ось:

$$m \frac{dV_z}{dt} = \sum F_{i,z} \text{ или } m \frac{dV_z}{dt} = P_z + R_z. \quad (1)$$

Далее находим  $P_z = P \cos \alpha$ ,  $R_z = -R = -\mu V^2$ ; подчеркиваем, что в уравнении все переменные силы надо обязательно выразить через величины, от которых они зависят. Учтя еще, что  $V_z = V$ , получим

$$m \frac{dV}{dt} = mg \cos \alpha - \mu V^2 \text{ или } \frac{dV}{dt} = \frac{\mu}{m} \left( \frac{mg \cos \alpha}{\mu} - V^2 \right). \quad (2)$$

Введем для сокращения записей обозначение

$$a^2 = \frac{mg \cos \alpha}{\mu} = 400 \quad (a = 20 \text{ м/с}), \quad (3)$$

где при подсчете принято  $g = 10 \text{ м/с}^2$ . Тогда, разделяя в уравнении (2) переменные и беря затем от обеих частей равенства интегралы, получим

$$\frac{dV}{a^2 - V^2} = \frac{\mu}{m} dt \text{ и } \frac{1}{2a} \ln \frac{a+V}{a-V} = \frac{\mu}{m} t + C_1. \quad (4)$$

По начальным условиям при  $t=0$   $V=V_0 = 0$ , что дает  $C_1 = (1/2a) \ln 1 = 0$ . Введя еще одно обозначение

$$R = a \frac{\mu}{m} = 0,5 \text{ с}^{-1}, \quad (5)$$

получим из (4)

$$\ln \frac{a+V}{a-V} = 2Rt \text{ и } \frac{a+V}{a-V} = e^{2Rt}.$$

Отсюда находим, что

$$V = a \frac{1 - e^{-2Rt}}{1 + e^{-2Rt}}; \quad (6)$$

Полагая здесь  $t = t_1 = 2$  с и заменяя  $a$  и  $R$  их значениями (3) и (5), определим скорость  $V_B$  груза в точке B (число  $e = 2,7$ ).

$$V_B = 20 \frac{1 - e^{-2}}{1 + e^{-2}} = 15,2 \text{ м/с}. \quad (7)$$

2. Теперь рассмотрим движение груза на участке BC; найденная скорость  $V_B$  будет для движения на этом участке начальной скоростью ( $V_0 = V_B$ ). Изображаем груз (в произвольном положении) и действующие на него силы  $P = m\bar{g}$ ;  $\bar{N}$ ,  $\bar{F}_{\text{тр}}$  и  $\bar{F}$ . Проведем из точки B оси  $Bx$  и  $By$  и составим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось  $Bx$ :

$$m \frac{dV_x}{dt} = P_x + N_x + F_{\text{тр}x} + F_x \text{ или} \\ m \frac{dV_x}{dt} = mg \sin \alpha - F_{\text{тр}} + F_x, \quad (8)$$

где  $F_{\text{тр}} = fN$ . Для определения  $N$  составим уравнение в проекции на ось  $By$ . Так как  $\alpha_y = 0$ , получим  $0 = N - mg \cos \alpha$ , откуда  $N = mg \cos \alpha$ . Следовательно,  $F_{\text{тр}} = fmg \cos \alpha$ ; кроме того,  $F_x = 16 \sin(3t+2)$ , и уравнение (8) примет вид

$$m \frac{dV_t}{dt} = mg(\sin \alpha - f \cos \alpha) + 16 \sin(3t + 2). \quad (9)$$

Разделив обе части равенства на  $m$ , вычислим

$$g(\sin \alpha - f \cos \alpha) = g(\sin 30^\circ - 0,2 \cos 30^\circ) = 3,2; \quad 16/m = 2$$

и подставим эти значения в (9). Тогда получим

$$\frac{dV_t}{dt} = 3,2 + 2 \sin(3t + 2). \quad (10)$$

Умножая обе части уравнения (10) на  $dt$  и интегрируя, найдем

$$V_t = 3,2t - \frac{2}{3} \cos(3t + 2) + C_2. \quad (11)$$

По начальным условиям при  $t = 0$ ,  $V = V_0 = V_B$  где  $V_B$  дается равенством (7).

Подставляя эти величины в (11), получим

$$C_2 = V_B + \frac{2}{3} \cos 2 = 15,2 - 0,3 = 14,9.$$

Примечание. При отсутствии таблиц тригонометрических функций, где угол задан в радианах, учесть, что  $1 \text{ рад} = 57,3^\circ$ . Тогда в нашем случае  $\cos 2 = \cos 115^\circ = -\cos 65^\circ = -0,42$ .

При найденном значении  $C_2$  уравнение (11) даст

$$V_t = \frac{dx}{dt} = 3,2t - 0,67 \cos(3t + 2) + 14,9. \quad (12)$$

Умножая здесь обе части на  $dt$  и снова интегрируя, найдем

$$x = 1,16t^2 - 0,22 \sin(3t + 2) + 14,9t + C_3. \quad (13)$$

Так как при  $t = 0$   $x = 0$ , то  $C_3 = 0,22 \sin 2 = 0,2$ , и окончательно искомый закон движения груза будет

$$x = 1,16t^2 + 14,9t - 0,22 \sin(3t + 2) + 0,2. \quad (14)$$

### Задача Д2

Механическая система состоит из катков (или катка и подвижного блока) 1 и 2, ступенчатого шкива 3 с радиусами ступеней  $R_3 = 0,3 \text{ м}$ ,  $r_3 = 0,1 \text{ м}$  и радиусом инерции относительно оси вращения  $\rho_3 = 0,2 \text{ м}$ , блока 4. радиуса  $R_4 = 0,2 \text{ м}$  и грузов 5 и 6 (рис. Д2.0— Д2.9, табл. Д2.); тела 1 и 2 считать сплошными однородными цилиндрами, а массу блока 4 — равномерно распределенной по ободу. Коэффициент трения грузов о плоскость  $f = 0,1$ . Тела системы соединены друг с другом нитями, перекинутыми через блоки и намотанными на шкив 3 (или на шкив и один из катков); участки нитей параллельны соответствующим плоскостям. К одному из тел прикреплена пружина с коэффициентом жесткости  $s$ .

По действием силы  $F = f(s)$ , зависящей от перемещения  $s$  точки ее приложения, система приходит в движение из состояния покоя; деформация пружины в момент начала движения равна нулю. При движении на шкив 3 действует постоянный момент  $M$  сил сопротивления (от трения в подшипниках).

Определить значение искомой величины в тот момент времени, когда перемещение  $s$  станет равным  $S_1 = 0,2 \text{ м}$ . Искомая величина указана в столбце «Найти» таблицы, где обозначено:  $V_{с1}$  — скорость центра масс тела 1,  $\omega_3$  — угловая скорость тела 3 и т. д. Все катки, включая и катки, обмотанные нитями (как, например, каток 2 на рис Д2.3), катятся по плоскостям без скольжения.



На всех рисунках не изображать груз 5 или 6, если  $m_5 = 0$  или  $m_6 = 0$ , а также каток 1 на рис. Д2.0 – Д2.4, если  $m_1 = 0$ , и каток 2 на рис. Д2.5 – Д2.9, если  $m_2 = 0$ ; все остальные тела должны изображаться и тогда, когда их масса равна нулю.

Таблица Д2

Номер условия	$m_1$ кг	$m_2$ кг	$m_3$ кг	$m_4$ кг	$m_5$ кг	$m_6$ кг	$c$ Н/м	$M$ Н·м	$F=f(s)$ Н	Найти
0	2	0	4	0	6	0	180	1,2	$80(3+4s)$	$V_{C1}$
1	0	2	0	6	0	4	120	0,6	$20(6+5s)$	$V_{C2}$
2	6	0	0	2	4	0	400	1,8	$60(4+s)$	$\omega_3$
3	0	4	6	0	0	2	240	0,3	$40(3+8s)$	$\omega_4$
4	4	0	0	2	0	6	320	1,5	$50(5+2s)$	$V_6$
5	2	0	4	0	0	6	100	0,9	$30(4+3s)$	$V_{C2}$
6	0	4	0	6	2	0	160	2,4	$60(2+5s)$	$V_5$
7	6	0	0	4	0	2	120	0,3	$80(1+4s)$	$\omega_4$
8	0	6	2	0	4	0	200	1,2	$20(8+3s)$	$V_{C1}$
9	0	2	0	4	6	0	100	0,6	$40(3+2s)$	$\omega_3$

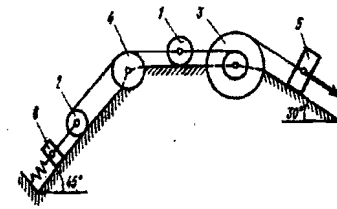


Рис. Д2.2

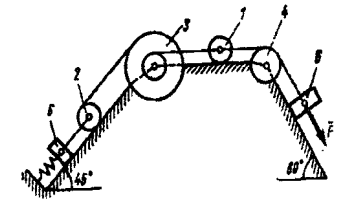


Рис. Д2.3

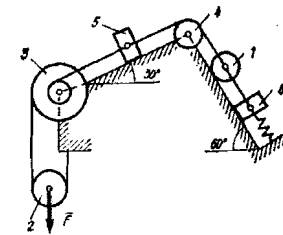


Рис. Д2.4

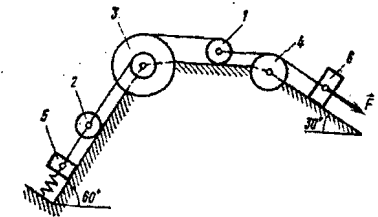


Рис. Д2.5

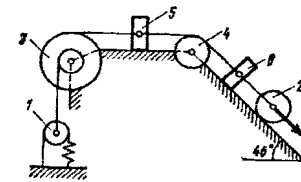


Рис. Д2.6

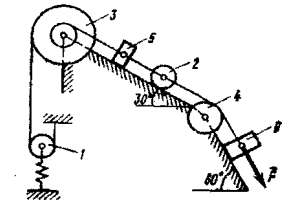


Рис. Д2.7

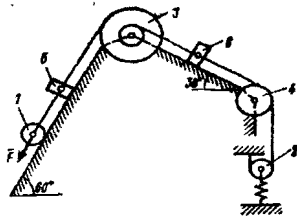


Рис. Д2.0

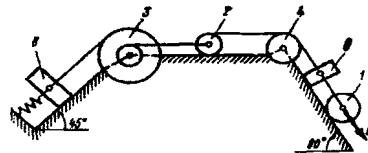


Рис. Д2.1

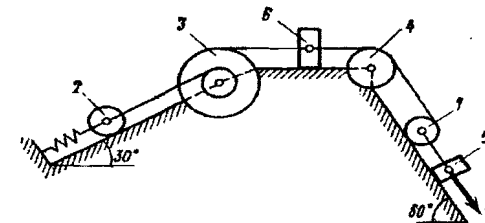


Рис. Д2.8

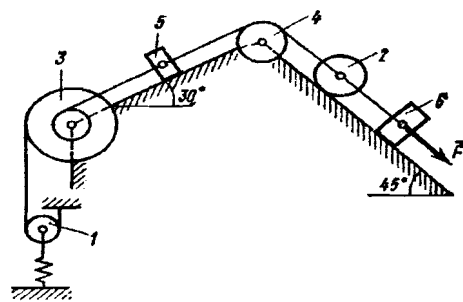


Рис. Д2.9

**Указания.** Задача Д2 — на применение теоремы об изменении кинетической энергии системы. При решении задачи учесть, что кинетическая энергия  $T$  системы равна сумме кинетических энергий всех входящих в систему тел; эту энергию нужно выразить через ту скорость (линейную или угловую), которую в задаче надо определить. При вычислении  $T$ , для установления зависимости между скоростями точек тела, движущегося плоскопараллельно, или между его угловой скоростью и скоростью центра масс воспользоваться мгновенным центром скоростей (кинематика). При вычислении работы надо все перемещения выразить через заданное.

**Пример Д2.** Механическая система (рис. Д2) состоит из сплошного однородного цилиндрического катка 1, подвижного блока 2, ступенчатого шкива 3 с радиусами ступеней  $R_3$  и  $r_3$  и радиусом инерции относительно оси вращения  $\rho_3$ , блока 4 и груза 5 (коэффициент трения груза о плоскость равен  $f$ ). Тела системы соединены нитями, намотанными на шкив 3. К центру  $E$  блока 2 прикреплена пружина с коэффициентом жесткости  $c$ ; ее начальная деформация равна нулю.

Система приходит в движение из состояния покоя под действием силы  $F=f(s)$ , зависящей от перемещения  $s$  точки ее приложения. На шкив 3 при движении действует постоянный момент  $M$  сил сопротивления.

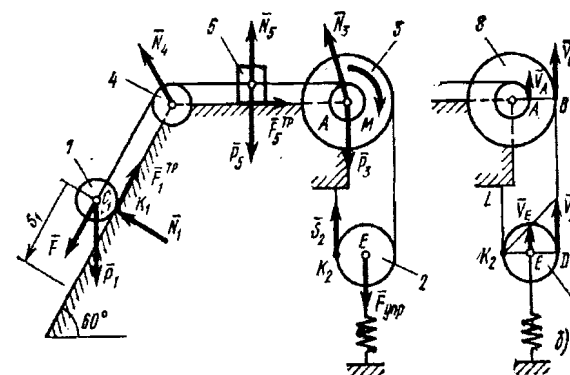


Рис. Д2

Дано:  $m_1=8$  кг,  $m_2=0$ ,  $m_3 = 4$  кг,  $m_4=0$ ,  $m_5 = 10$  кг,  $R_3 = 0,3$  м,  $r_3=0,1$  м,  $\rho_3=0,2$  м,  $f=0,1$ ,  $c=240$  Н/м,  $M=0,6$  Нм,  $F=20(3 + 2s)$  Н,  $s_1 = 0,2$  м.

Определить:  $\omega_3$  в тот момент времени, когда  $s = s_1$ .

**Решение. 1.** Рассмотрим движение неизменяемой механической системы, состоящей из весовых тел 1, 3, 5 и невесомых тел 2, 4, соединенных нитями. Изобразим действующие на систему внешние силы: активные  $\bar{F}$ ,  $\bar{F}_{упр}$ ,  $\bar{P}_1$ ,  $\bar{P}_3$ ,  $\bar{P}_5$ , реакции  $\bar{N}_1$ ,  $\bar{N}_3$ ,  $\bar{N}_4$ ,  $\bar{N}_5$ , натяжение нити  $\bar{S}_2$ , силы трения  $\bar{F}_1^{тр}$ ,  $\bar{F}_5^{тр}$  и момент  $M$ .

Для определения  $\omega_3$  воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии

$$T_1 - T_0 = \sum A_R^e \quad (1)$$

2. Определяем  $T_0$  и  $T_1$ . Так как в начальный момент система находилась в покое, то  $T_0 = 0$ . Величина  $T_1$  равна сумме энергий всех тел системы:

$$T_1 = T_1^{(1)} + T_1^{(3)} + T_1^{(5)}. \quad (2)$$

Учитывая, что тело 1 движется плоско параллельно, тело 5 — поступательно, а тело 3 вращается вокруг неподвижной оси, получим:

$$\begin{aligned} T_1^{(1)} &= \frac{1}{2} m_1 V_{C_1}^2 + \frac{1}{2} I_{C_1} \omega_1^2, \quad T_1^{(3)} = \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2, \\ T_1^{(5)} &= \frac{1}{2} m_5 V_5^2 \end{aligned} \quad (3)$$

Все входящие сюда скорости надо выразить через искомую  $\omega_3$ . Для этого предварительно заметим, что  $V_{C_1} = V_5 = V_A$ , где  $A$  — любая точка обода радиуса  $r_3$  шкива 3 и что точка  $K_1$  — мгновенный центр скоростей катка 1, радиус которого обозначим  $r_1$ . Тогда

$$V_{C_1} = V_5 = \omega_3 r_3 \omega_1 = \frac{V_{C_1}}{K_1 C_1} = \frac{V_{C_1}}{r_1} = \omega_3 \frac{r_3}{r_1}. \quad (4)$$

Кроме того, входящие в (3) моменты инерции имеют значения

$$I_{C_1} = 0,5 m_1 \cdot r_1^2 \cdot I_3 = m_1 \rho_3^2. \quad (5)$$

Подставив все величины (4) и (5) в равенства (3), а затем используя равенство (2), получим окончательно

$$T_1 = \left( \frac{3}{4} m_1 r_3^2 + \frac{1}{2} m_1 \rho_3^2 + \frac{1}{2} m_5 r_3^2 \right) \omega_3^2. \quad (6)$$

3. Теперь найдем сумму работ всех действующих внешних сил при том перемещении, которое будет иметь система, когда точка  $C_1$  пройдет путь  $S_1$ . Введя обозначения:  $S_5$  — перемещение груза 5 ( $s_5 = S_1$ ),  $\varphi_3$  — угол поворота шкива 3,  $\lambda_0$  и  $\lambda_1$  — начальное и конечное удлинения пружины, получим:

$$\begin{aligned} A(\bar{F}) &= \int_0^{S_1} 20(3+2s) ds = 20(3s_1 + s_1^2); \\ A(\bar{P}_1) &= P_1 \cdot S_1 \cdot \sin 60^\circ; \\ A(\bar{F}_5^{mp}) &= -F_5^{mp} s_5 = -f P_5 \cdot s_1; \\ A(M) &= -M \varphi_3; \quad A(\bar{F}_{imp}) = \frac{c}{2} (\lambda_0^2 - \lambda_1^2) \end{aligned}$$

Работы остальных сил равны нулю, так как точки  $K_1$  и  $K_2$ , где приложены силы  $\bar{N}_1$ ,  $\bar{F}_1^{mp}$  и  $\bar{S}_2$ , — мгновенные центры скоростей; точки, где прило-

жены  $P_3$ ,  $N_3$  и  $P_4$ , — неподвижны; а реакция  $\bar{N}_5$  перпендикулярна перемещению груза.

По условиям задачи  $\lambda_0 = 0$ . Тогда  $\lambda_1 = s_1$ , где  $s_1$  — перемещение точки  $E$  (конца пружины). Величины  $s_1$  и  $\varphi_3$  надо выразить через заданное перемещение  $S_1$ , для этого учтем, что зависимость между перемещениями здесь будет такой же, как и между соответствующими скоростями. Тогда, поскольку  $\omega_3 = V_A/r_3 = V_{C_1}/r_3$  (равенство  $V_{C_1} = V_A$  уже отмечалось), то и  $\varphi_3 = s_1/r_3$ .

Далее, из рис. Д2, б видно, что  $V_D = V_B = \omega_3 R_3$ , а так как точка  $K_2$  является мгновенным центром скоростей для блока 2 (он как бы «катится» по участку нити  $K_2 L$ ), то  $V_E = 0,5 V_D = 0,5 \omega_3 R_3$ ; следовательно, и  $\lambda_1 = s_E = 0,5 \varphi_3 R_3 = 0,5 s_1 R_3/r_3$ . При найденных значениях  $\varphi_3$  и  $\lambda_1$  для суммы всех вычисленных работ получим

$$\sum A_R^e = 20(s_1 + s_1^2) + P_1 s_1 \sin 60^\circ - f P_5 s_1 - M \frac{s_1}{r_3} - \frac{c}{8} \frac{R_3^2}{r_3^2} s_1^2. \quad (7)$$

Подставляя выражения (6) и (7) в уравнение (1) и учитывая, что  $T_0 = 0$ , будем иметь

$$\left( \frac{3}{4} m_1 r_3^2 + \frac{1}{2} m_1 \rho_3^2 + \frac{1}{2} m_5 r_3^2 \right) \omega_3^2 = 20(3s_1 + s_1^2) + P_1 s_1 \sin 60^\circ - f P_5 s_1 - \frac{M}{r_3} s_1 - \frac{c}{8} \frac{R_3^2}{r_3^2} s_1^2; \quad (8)$$

Из равенства (8), подставив в него числовые значения заданных величин, найдем искомую угловую скорость  $\omega_3$ . Ответ:  $\omega_3 = 8,1 \text{ с}^{-1}$ .

### Задача Д3

Механическая система состоит из прямоугольной вертикальной плиты 1 с массой  $m_1 = 18 \text{ кг}$ , движущейся вдоль горизонтальных направляющих, и груза  $D$  с массой  $m_2 = 6 \text{ кг}$  (рис. Д3.0—Д3.9, табл. Д3). В момент времени  $t_0 = 0$ , когда плита имеет скорость  $u_0 = 2 \text{ м/с}$ , груз под действием внутренних сил начинает двигаться по имеющемуся на плите желобу.

На рис Д3.0 – Д3.3 желоб  $KE$  прямолинейный и при движении груза расстояние  $s = AD$  изменяется по закону  $s = f_1(t)$ , а на рис Д3.4 – Д3.9. же-

лоб — окружность радиуса  $R = 0,8$  м и при движении груза угол  $\varphi = \angle AC_1D$  изменяется по закону  $\varphi = f_2(t)$ . В табл. Д5 эти зависимости даны отдельно для рис. Д3.0 – Д3.1 для рис. Д3.2 и Д3.3 и т. д., где  $s$  выражено в метрах,  $\varphi$  — в радианах,  $t$  — в секундах.

Считая груз материальной точкой и пренебрегая всеми сопротивлениями, определить величину, указанную в таблице в столбце «Найти», где обозначено:  $z_1$  — перемещение плиты за время от  $t_0 = 0$  до  $t_1 = 1$  с;  $u_1, w_1, N_1$  — значения в момент времени  $t_1 = 1$  с скорости плиты, ускорения плиты и полной нормальной реакции направляющих соответственно.

**Указания.** Задача Д5 на применение теорем о движении центра масс и об изменении количества движения системы. Первой теоремой удобнее пользоваться, когда надо найти перемещение (или закон движения) одного из тел системы, движущегося поступательно, а второй — когда надо найти скорость такого тела. При определении ускорения тела или реакции связи тоже удобнее воспользоваться первой теоремой.

**Пример Д3.** В центре тяжести  $A$  тележки массой  $m_1$ , движущейся по гладкой горизонтальной плоскости, укреплен невесомый стержень  $AD$  длиной  $l$  с грузом  $D$  массой  $m_2$  на конце (рис. Д3, а). В момент времени  $t_0 = 0$ , когда тележка имеет скорость  $u_0$ , стержень  $AD$  начинает вращаться вокруг оси  $A$  по закону  $\varphi = \varphi(t)$ .

Дано:  $m_1 = 24$  кг,  $m_2 = 12$  кг,  $u_0 = 0,5$  м/с,  $l = 0,6$  м,  $\varphi = \pi/3 (1 + 2t^3)$  радиан ( $t$  — в секундах).

Определить в момент времени  $t_1 = 1$  с: а) перемещение  $x_1$  тележки (перемещение за время от  $t_0 = 0$  до  $t_1 = 1$  с); б) ускорение  $a_1$  тележки; в) скорость  $u_1$  тележки; г) полную нормальную реакцию  $N_1$  плоскости.

**Решение.** Рассмотрим, механическую систему, состоящую из тележки и груза  $D$ , в произвольном положении. Изобразим действующие на систему внешние силы: силы тяжести  $P_1, P_2$  и реакции плоскости  $N', N''$ . Проведем координатные оси  $Oxy$  так, чтобы ось  $y$  проходила через точку  $AO$ , где находился центр масс тележки в момент времени  $t_0 = 0$ .

Номер условия	$s=f_1(t)$		$\varphi=f_2(t)$			Найти
	рис. Д3.0-Д3.6	рис. Д3.2-Д3.3	рис. 3.4-Д3.5	рис. 3.6-Д3.7	рис. 3.8-Д3.9	
0	$0,4(2t^2-1)$	$0,2(1-3t^2)$	$\pi/3(3-2t^2)$	$\pi/4(1-3t^2)$	$\pi/3(1-4t^2)$	$z_1$
1	$0,8\cos(\pi/6t^2)$	$0,4\sin(\pi/3t^2)$	$\pi/3(t^2+1)$	$\pi/6(t^2-3)$	$\pi/4t^2$	$u_1$
2	$0,2\cos(\pi t^2)$	$1,8\cos(\pi/3t)$	$\pi/6(1+2t^2)$	$\pi/2t^2$	$\pi(2-t^2)$	$a_1$
3	$0,5(2-3t^2)$	$0,3(6t^2-5)$	$\pi/3(1-3t^2)$	$\pi/6(3-4t^2)$	$\pi/4(5t^2-1)$	$z_1$
4	$0,8\sin(\pi/2t^2)$	$0,4\cos(\pi/2t^2)$	$\pi/2(t^2-2)$	$\pi(2t^2-1)$	$\pi/6(4t^2-1)$	$N_1$
5	$0,6\cos(\pi/3t)$	$1,2\sin(\pi/6t^2)$	$\pi/3(t^2+3)$	$\pi/6(5-t^2)$	$\pi/4(t^2+2)$	$u_1$
6	$0,2(4-7t^2)$	$0,6(1-2t^2)$	$\pi/6(3+4t^2)$	$\pi/3t^2$	$\pi/6(3t^2-1)$	$a_1$
7	$1,2\cos(\pi/2t^2)$	$0,6\sin(\pi t^2)$	$\pi/3(t^2-4)$	$\pi/4(5-3t^2)$	$\pi/2(t^2+1)$	$a_1$
8	$0,5\sin(\pi t^2)$	$1,8\cos(\pi/6t)$	$\pi/6(t^2+2)$	$\pi/4(t^2+1)$	$\pi t^2$	$N_1$
9	$1,2\sin(\pi/4t^2)$	$0,8\cos(\pi/4t)$	$\pi/4(2-t^2)$	$\pi/6(1-5t^2)$	$\pi/3(3+t^2)$	$u_1$

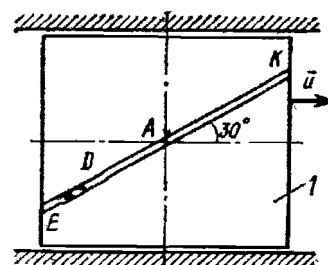


Рис. Д3.0

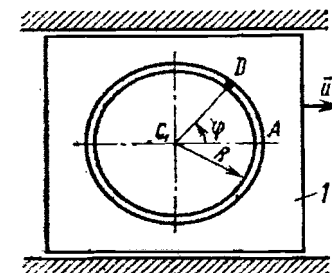


Рис. Д3.4

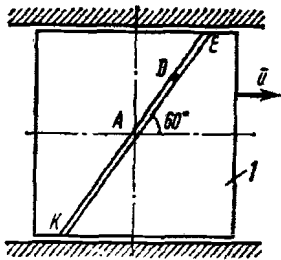


Рис. Д3.2

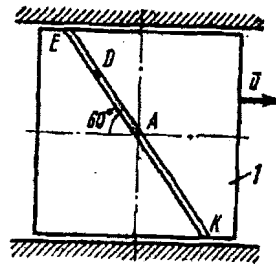


Рис. Д3.3

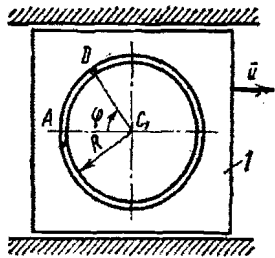


Рис. Д3.4

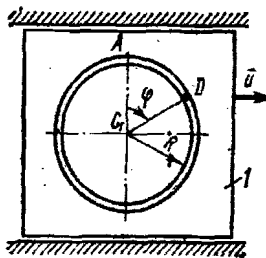


Рис. Д3.5

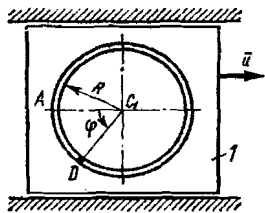


Рис. Д3.6

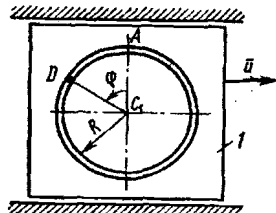


Рис. Д3.7

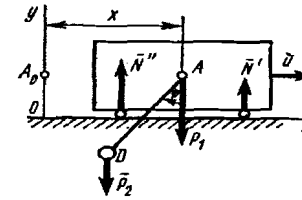


Рис. Д3а

а) Определение перемещения  $z_1$ .

Для определения  $z_1$  воспользуемся теоремой о движении центра масс системы. Составим дифференциальное уравнение его движения в проекции на ось  $x$ . Получим

$$Mz = \sum F_{kx}^e \quad \text{и} \quad Mz_c = 0, \quad (1)$$

так как  $\sum F_{kz}^e = 0$ , поскольку все действующие на систему внешние силы, вертикальны.

Определим значение  $Mz_c$ . Из рис. Д3 видно, что в произвольный момент времени абсциссы  $x_A$  — центра масс тележки и  $x_D$  — груза равны соответственно:  $x_A = x$ ,  $x_D = x - l \sin \varphi$ . Так как по формуле, определяющей координату  $z_c$  центра масс системы  $Mz_c = m_1 x_A + m_2 x_D$ , то будем иметь:

$$Mz_c = m_1 x + m_2 x - m_2 l \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} t^3\right) \quad (2)$$

Теперь, проинтегрировав уравнение (1), найдем, что

$$Mz_c = C_1, \quad Mz_c = C_1 t + C_2, \quad (3)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — постоянные интегрирования. Подставив во второе из этих уравнений значение  $Mz_c$  из равенства (2), получим:

$$(m_1 + m_2)x - m_2 l \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} t^3\right) = C_1 t + C_2. \quad (4)$$

Для определения  $C_1$  и  $C_2$  понадобится еще одно уравнение, которое получим, продифференцировав обе части равенства (4) по времени:

$$(m_1 + m_2)x - 2m_2 l \pi t^2 \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} t^3\right) = C_1, \quad (5)$$

где  $x = v$  — скорость тележки. По начальным условиям при  $t=0$   $x=0$ ,  $x=v_0$ . Подставляя эти величины в равенства (4) и (5), найдем, что  $C_1 = (m_1 + m_2)v_0$ ,  $C_2 = -m_2 l \sin(\pi/3)$ . При этих значениях  $C_1$  и  $C_2$  уравнение (4) примет вид

$$(m_1 + m_2)x - m_2 l \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} t^3\right) = (m_1 + m_2)v_0 - m_2 l \sin \frac{\pi}{3}.$$

Отсюда получаем зависимость от времени координаты  $x$ , определяющей одновременно перемещение тележки:

$$x = v_0 t + \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \left[ \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} t^3\right) - \sin \frac{\pi}{3} \right]. \quad (6)$$

Полагая здесь  $t=1$  с, найдем искомое перемещение  $x_1$ . Ответ:  $x_1 = 0,33$  м.

### б) Определение ускорения $a_1$ .

Проделав те же рассуждения и выкладки, что и в предыдущем примере, получим уравнение (1) и формулу (2). Для определения  $a_1$  продифференцируем дважды по времени обе части равенства (2). Получим:

$$M x_c = (m_1 + m_2)x - 2m_2 l \pi t^2 \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} t^3\right),$$

$$M x_c = (m_1 + m_2)x - 4m_2 l \pi t \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} t^3\right) + 4m_2 l \cdot \pi^2 t^4 \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} t^3\right),$$

где  $z=a$  — ускорение лифта. Но согласно уравнению (1)  $Mz_c=0$ ; в результате находим следующую зависимость  $w$  от времени:

$$\omega = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \left[ 4\pi t \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} t^3\right) - 4\pi^2 t^4 \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} t^3\right) \right].$$

Полагая здесь  $t=1$  с, определим искомое ускорение  $a_1$ . Ответ:  $a_1 = -2,51$  м/с<sup>2</sup>. Знак указывает, что ускорение тележки направлено влево.

### в) Определение скорости $u_1$ .

Чтобы определить  $u_1$ , воспользуемся теоремой об изменении количества движения системы в проекции на ось  $x$ . Так как все действующие на систему внешние силы вертикальны (рис. Д3б), то  $\sum F_{ix}^e = 0$  и теорема дает:

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum F_{ix}^e = 0, \quad \text{откуда } Q_x = C_1. \quad (1)$$

Для рассматриваемой механической системы  $\bar{Q} = \bar{Q}^T + \bar{Q}^D$ , где  $\bar{Q}^T = m_1 u_1$  и  $\bar{Q}^D = m_2 \bar{V}_D$  — количества движения тележки и груза  $D$  соответственно ( $u_1$  — скорость тележки,  $V_D$  — скорость груза по отношению к осям  $Oxy$ ). Тогда из равенства (1) следует, что

$$Q_x^T + Q_x^D = C_1 \quad \text{или} \quad m_1 u_1 + m_2 V_{Dx} = C_1. \quad (2)$$

Для определения  $V_{Dx}$  рассмотрим движение груза  $D$  как сложное, считая его движение по отношению к тележке относительным (это движение, совершаемое при вращении стержня  $AD$  вокруг оси  $A$ ), а движение самой тележки — переносным движением. Тогда

$$\vec{V}_D = \vec{V}_D^{nep} + \vec{V}_D^{om} \text{ и}$$

$$V_{Dx} = V_{Dx}^{nep} + V_{Dx}^{om} \quad (3)$$

Но  $\vec{r}_D^{in,t} = u$  и, следовательно,  $V_{Dx}^{nep} = u_x$ . Вектор и  $\vec{V}_D^{ot}$  направлен перпендикулярно стержню и численно  $V_D^{ot} = l\omega_{AD} = l\varphi = 2\pi t^3$ . Изобразив этот вектор на рис. Д3б с учетом знака  $\varphi$ , найдем, что  $V_{Dx}^{om} = -V_D^{om} \cos\varphi$ . Окончательно из равенства (3) получим:

$$V_{Dx} = u_x - V_D^{om} \cos\varphi = u_x - 2l\pi t^2 \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}t^3\right). \quad (4)$$

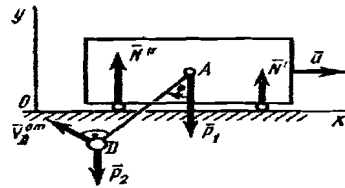


Рис. Д3б

(В данной задаче величину  $V_{Dx}$  можно еще найти другим путем, определив абсциссу  $x_D$  груза  $D$ , для которой, как видно из рис. Д3а, получим  $x_D = x - l\sin\varphi$ ; тогда  $V_{Dx} = \dot{x}_D = \dot{x} - l\dot{\varphi}\cos\varphi$ , где  $\dot{x} = u$ , а  $\dot{\varphi} = 2\pi t^2$ )

При найденном значении  $V_{Dx}$  равенство (2), если учесть, что  $u_x = u$ , примет вид:

$$m_1 u + m_2 u - m_2 2l\pi t^2 \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}t^3\right) = C_1. \quad (5)$$

Постоянную интегрирования  $C_1$  определим по начальным условиям: при  $t = 0$   $u = u_0$ . Подстановка этих величин в уравнение (5) дает  $C_1 = (m_1 + m_2)u_0$  и тогда из (5) получим:

$$m_1 u + m_2 u + 2m_2 l \pi t^2 \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}t^3\right) = (m_1 + m_2)u_0. \quad (5)$$

Отсюда находим следующую зависимость скорости и тележки от времени

$$u = u_0 + \frac{2l\pi m_2}{m_1 + m_2} t^2 \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}t^3\right). \quad (6)$$

Положив в уравнении (6)  $t=1$ с, определим искомую скорость  $u_1$ . Ответ:  $u_1 = 0,76$  м/с. Знак указывает, что скорость тележки направлена влево.

### г) Определение реакции $N_1$ .

Для определения  $N_1$  воспользуемся теоремой о движении центра масс системы. Составим дифференциальное уравнение его движения в проекции на ось  $y$  (см. рис. Д4а):

$$M \ddot{y}_c = \sum F_{iy}^e \text{ или } M \ddot{y}_c = N' + N'' - P_1 - P_2, \quad (1)$$

Отсюда, полагая  $N' + N'' = N$ , получим:

$$N = M \ddot{y}_c + P_1 + P_2. \quad (2)$$

Из формулы, определяющей ординату  $y_c$  центра масс системы, имеем  $M y_c = m_1 y_A + m_2 y_D$ , где  $y_A$  и  $y_D$  — соответственно ординаты центра масс  $A$  тележки и груза  $D$ . В нашем случае  $y_A = A_0 O = \text{const}$ ,  $y_D = A_0 O - l \cos\varphi$ . Тогда

$$M \ddot{y}_c = (m_1 + m_2) A_0 O - m_2 l \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}t^3\right).$$

Продифференцируем обе части этого равенства два раза по времени, получим:

$$M y_c = 2m_2 l \pi t^2 \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} t^3\right),$$

$$M y_c = 4m_2 l \pi t \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} t^3\right) + 4m_2 l \pi^2 t^4 \left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} t^3\right).$$

Подставив найденное выражение  $M y_c$  в уравнение (2), получим зависимость  $N$  от  $t$ :

$$M y_c = 2m_2 l \pi t^2 \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} t^3\right),$$

$$N = 4m_2 l \pi t \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} t^3\right) + 4m_2 l \pi^2 t^4 \left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} t^3\right) + (m_1 + m_2)g.$$

Полагая здесь  $t_1 = 1$  с, найдем искомую реакцию  $N_1$ . Ответ:  $N_1 = 68,9$  Н.

### Задача Д4

Однородная горизонтальная платформа (круглая радиуса  $R = 1,2$  м или прямоугольная со сторонами  $R$  и  $2R$ ), имеющая массу  $m_1 = 24$  кг, вращается с угловой скоростью  $\omega_0 = 10$  с<sup>-1</sup> вокруг вертикальной оси  $z$ , отстоящей от центра масс  $C$  платформы на расстоянии  $OC = h$  (рис. Д4.0—Д4.9, табл. Д4); размеры для всех прямоугольных платформ показаны на рис. Д4. (вид сверху).

В момент времени  $t_0 = 0$  по имеющемуся на платформе желобу начинает двигаться (под действием внутренних сил) груз  $D$  массой  $m_2 = 8$  кг по закону  $s = AD = F(t)$ , где  $s$  выражено в метрах,  $t$  — в секундах. Одновременно на платформе, изображенные на рис. Д4.0—Д4.4, начинает действовать пара сил с моментом  $M$  (задан в ньютон-метрах; при  $M < 0$  его направление про-

тивоположно показанному на рисунках); для платформ, изображенных на рис. Д4.5—Д4.9,  $M = 0$ .

Определить: для платформ, изображенных на рис. Д4.0—Д4.4, зависимость  $\omega = f(t)$ , т. е. угловую скорость платформы, как функцию времени; для платформ, изображенных на рис. Д4.5—Д4.9, — угловую скорость  $\omega_1$  платформы в момент времени  $t_1 = 1$  с.

Форма желоба на рис. Д4.0—Д4.4 прямолинейная (желоб  $KE$ ), на рис. Д4.5—Д4.7 — окружность радиуса  $R$  (обод платформы), на рис. Д4.8, Д4.9 — окружность радиуса  $r = 0,5R$ . На всех рисунках груз  $D$  показан в положении, при котором  $s > 0$  (когда  $s < 0$ , груз находится по другую сторону от точки  $A$ ); на рис. Д4.5—Д4.9 расстояние  $s = AD$  отсчитывается по дуге окружности. При изображении чертежа решаемой задачи провести ось  $z$  на заданном расстоянии  $OC = h$  от центра  $C$ .

**Указания.** Задача Д4 — на применение теоремы об изменении кинетического момента системы. При применении теоремы к системе, состоящей из платформы и груза, кинетический момент  $K_c$  системы относительно оси  $z$  определяется как сумма моментов платформы и груза. При этом следует учесть, что абсолютная скорость  $v$  груза складывается геометрически из относительной  $\vec{v}_{от}$  и переносной  $\vec{v}_{пл}$  скоростей, т. е.  $\vec{v} = \vec{v}_{от} + \vec{v}_{пл}$ . Поэтому и количество движения этого груза  $m\vec{v} = m\vec{v}_{от} + m\vec{v}_{пл}$ . Тогда можно воспользоваться теоремой Вариньона (статика), согласно которой  $m_c(m\vec{v}) = m_c(m\vec{v}_{от}) + m_c(m\vec{v}_{пл})$ ; эти моменты вычисляются так же, как моменты сил. Подробнее ход решения для случая, когда надо найти  $\omega = f(t)$ , разъяснен в примере Д4.

В случае, когда  $M = 0$  и надо определить  $\omega_1$ , воспользоваться законом сохранения кинетического момента (показав, что он здесь имеет место). При этом следует сначала найти и показать на чертеже положения  $D_0$  и  $D_1$  груза в моменты времени  $t_0 = 0$  и  $t_1 = 1$  с (найти, чему равен угол  $ACD$  при  $t_0 = 0$  и  $t_1 = 1$  с), а также определить, чему равна и как направлена скорость  $\vec{v}_{от}$  в эти моменты времени. После этого, так же как в примере Д4, надо вычислить  $K_c$ ,



не для произвольного момента времени, а сначала для момента  $t_0 = 0$  (когда груз в положении  $D_0$  и  $\omega = \omega_0$ ), а затем для момента  $t_1 = 1$  с (когда груз в положении  $D_1$  и  $\omega = \omega_1$  и использовать закон сохранения  $Kz$ .

Момент инерции прямоугольной пластины с массой  $m$  и сторонами  $a$  и  $b$  относительно оси  $Cz$ , перпендикулярной пластине и проходящей через ее центр масс  $C$ , равен  $m/12(a^2 + b^2)$ .

Таблица Д4

Номер условия	$h$	Рис. Д4.0-Д4.4		Рис. Д4.5-Д4.7	Рис. Д4.8, Д4.9
		$s=F(t)$	$M$	$s=F(t)$	$s=F(t)$
0	$R$	$0,6\cos(2t)$	8	$\pi R/6(3-5t^2)$	$\pi r/3(3-t^2)$
1	$R/2$	$0,8t^2$	$2+4t$	$\pi R/3(4t^2-1)$	$\pi r/6(7t^2-3)$
2	$R$	$0,4(1-t^2)$	$8t^2-2$	$\pi R/6(t^3+3)$	$\pi r/6(2-5t^2)$
3	$R/2$	$(-0,8)\cos(2t)$	$(-12)$	$\pi R/3(t^2+2)$	$\pi r/3(3-4t^2)$
4	$R$	$0,4t^3$	$(-6)t^2$	$\pi R/6(3-7t^2)$	$\pi r/6(5t^2-3)$
5	$R/2$	$(-0,6)t^2$	$12t$	$\pi R/3(3-2t^2)$	$\pi r/6(4-7t^2)$
6	$R$	$0,4\cos(3t)$	10	$\pi R/6(t^2+2)$	$\pi r/3(5t^2-3)$
7	$R/2$	$0,6(2-t^2)$	$6t$	$\pi R/3(3-5t^2)$	$\pi r/6(4-t^2)$
8	$R/2$	$(-0,5)\cos(3t)$	12	$\pi R/6(7t^2-4)$	$\pi r/6(3-t^2)$
9	$R$	$0,8(t^3+1)$	$(-9)t^2$	$\pi R/6(5t^2-2)$	$\pi r/3(2t^2+1)$

При решении задачи полезно изобразить на вспомогательном чертеже вид на платформу сверху (с конца оси  $z$ ), как это сделано в качестве примеров для рис. Д4.0 и Д4.1 (рис. Д4.0а и Д4.1а).

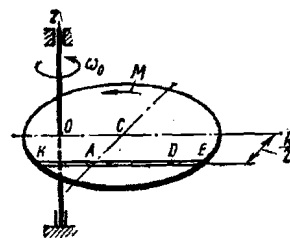


Рис. Д4.0

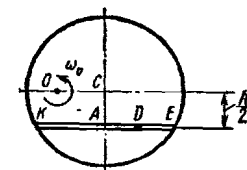


Рис. Д4.1а

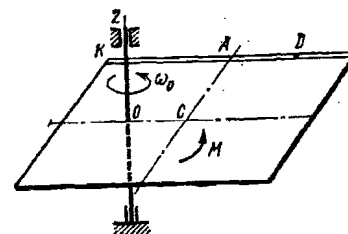


Рис. Д4.2

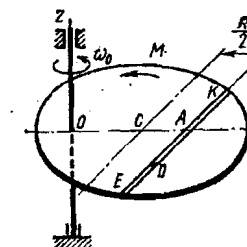


Рис. Д4.3

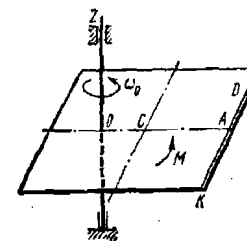


Рис. Д4.4

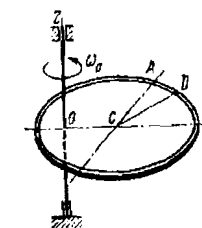


Рис. Д4.5

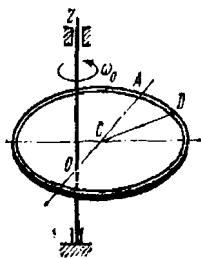


Рис. Д4.6

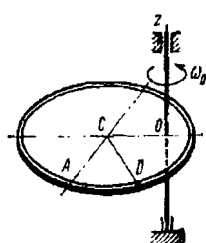


Рис. Д4.7

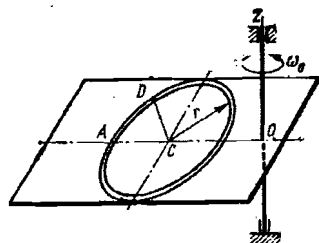


Рис. Д4.8

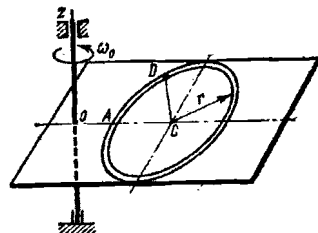


Рис. Д4.9

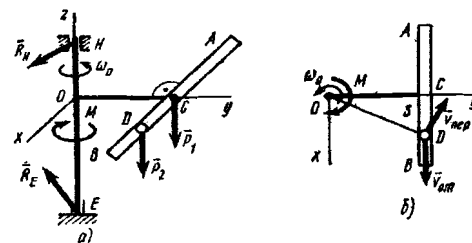


Рис. Д4

**Пример Д4.** Горизонтальная трубка  $AB$  массой  $m_1$  (рис. Д4а, а) с помощью стержня  $OC$  жестко скреплена с вертикальным валом  $EH$ , который вращается вокруг оси  $z$  с угловой скоростью  $\omega_0$  (на рис. Д4, б показан вид сверху). В середине  $C$  трубки находится шар  $D$  массой  $m_2$ . В момент времени  $t_0=0$  на вал начинает действовать вращающий момент  $M$  (момент относительно оси  $z$ ) и одновременно шар начинает двигаться вдоль трубки по закону  $CD = s = f_1(t)$ .

Дано:  $m_1=15$  кг,  $m_2=10$  кг,  $AC=CB=CO=1$  м,  $\omega_0=2$  с<sup>-1</sup>,  $s=0,4$  т<sup>2</sup> ( $s$  — в метрах,  $t$  — в секундах),  $M=kt$ , где  $k=6$  Н·м/с.

Определить:  $\omega = f(t)$  — закон изменения угловой скорости трубки, пренебрегая массой стержня  $OC$  и вала.

**Решение.** Рассмотрим механическую систему, состоящую из трубки  $AB$  и шара  $D$ . Для определения  $\omega$  применим теорему об изменении кинетического момента системы относительно оси  $z$ :

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum m_i (\bar{F}_R^z) \quad (1)$$

Изобразим действующие на систему внешние силы: силы тяжести  $\bar{P}_1, \bar{P}_2$ , реакции  $\bar{R}_E, \bar{R}_H$  и вращающий момент  $M$ . Так как силы  $\bar{P}_1, \bar{P}_2$  и параллельны оси  $Z$ , а реакции  $\bar{R}_E, \bar{R}_H$  эту ось пересекают, то их моменты относительно оси  $z$  равны нулю. Тогда, считая для момента положительным направление  $\omega_0$  (т. е. против хода часовой стрелки), получим  $\sum m_i (\bar{F}^z_k) = -M = -kt$ , и уравнение (1) примет вид:

$$\frac{dK_z}{dt} = -kt \quad (2)$$

Умножая обе части этого уравнения на  $dt$  и интегрируя, получим:

$$K_z = -\frac{k}{2} t^2 + C_1 \quad (3)$$

Для рассматриваемой механической системы

$$K_z = K_z^{mp} + K_z^D \quad (4)$$

где  $K_z^{TP}$  и  $K_z^D$  — кинетические моменты трубки и шара D соответственно.

Так как трубка вращается вокруг оси  $z$ , то  $K_z^{TP} = J_z \omega$ . Значение  $J_z$  найдем по теореме Гюйгенса:  $J_z = J_{Cz'} + m_1 (OC)^2 = J_{Cz'} + m_1 l^2 (J_{Cz'} — момент инерции относительно оси  $z'$ , параллельной оси  $z$  и проходящей через центр масс  $C$  трубки). Рассматривая трубку как однородный стержень длиной  $AB = 2l$ , будем иметь:$

$$J_{Cz'} = \frac{m_1 (2l)^2}{12} = \frac{m_1 l^2}{3}, \quad H H_z = \frac{m_1 l^2}{3} = \frac{4}{3} m_1 l^2.$$

Следовательно,

$$K_z^{TP} = \frac{4}{3} m_1 l^2 \omega. \quad (5)$$

Для определения  $K_z^D$  обратимся к рис. Д4, б и будем рассматривать движение шара  $D$  как сложное, считая его движение по трубке относительным, а вращение самой трубки вокруг оси  $z$  — переносным движением. Тогда абсолютная скорость шара  $\vec{V} = \vec{V}_{OT} + \vec{V}_{PER}$ . Поскольку шар  $D$  движется по закону  $s = CD = 0,4 t^2$ , то  $V_{OT} = s = 0,8 t$ ; изображаем вектор  $\vec{V}_{OT}$  на рис. Д4, б с учетом знака  $s$  (при  $s < 0$  направление  $\vec{V}_{OT}$  было бы противоположным). Затем, учитывая направление  $\omega$ , изображаем вектор  $\vec{V}_{PER}$  ( $\vec{V}_{PER} \perp OD$ ); численно  $\vec{V}_{PER} = \omega \cdot OD$ . Тогда по теореме Вариньона будем иметь:

$$K_z^D = m_2 (m_2 \vec{V}) = m_2 (m_2 \vec{V}_{OT}) + m_2 (m_2 \vec{V}_{PER}) = -m_2 V_{OT} OC + m_2 V_{PER} OD = -m_2 \cdot 0,8 t \cdot l + m_2 \cdot \omega \cdot (OD)^2. \quad (6)$$

Но из рис. Д4, б видно, что  $OD^2 = l^2 + s^2 = l^2 + 0,16 t^4$ . Подставляя эту величину в равенство (6), а затем значения  $K_z^D$  и  $K_z^{TP}$  из (6) и (5) в равенство (4), получим с учетом данных задачи:

$$K_z = \frac{4}{3} m_1 l^2 \omega + m_2 \omega (l^2 + 0,16 t^4) - m_2 \cdot 0,8 t \cdot l = (30 + 1,6 t^4) \omega - 8 t. \quad (7)$$

Тогда уравнение (3), где  $k = b$ , примет вид:

$$(30 + 1,6 t^4) \omega - 8 t = -3 t^2 + C_1. \quad (8)$$

Постоянную интегрирования определяем по начальным условиям: при  $t=0$ ,  $\omega = \omega_0$ . Получим  $C_1 = 30 \omega_0 = 60$ . При этом значении  $C_1$  из уравнения (8) находим искомую зависимость  $\omega$  от  $t$ .

Ответ:  $\omega = 60 + 8t - 3t^2 + 30 + 1,6t^4$  с<sup>-1</sup> (где  $t$  — в секундах).

#### Задача Д5

Вертикальный вал АК (рис. Д5.0—Д5.9), вращающийся с постоянной угловой скоростью  $\omega = 10$  с<sup>-1</sup>, закреплен подпятником в точке А и цилиндрическим подшипником в точке, указанной в табл. Д5 в столбце 2 ( $AB = BD = DE = EK = b = 0,4$  м). К валу прикреплен жестко или с помощью шарнира тонкий однородный ломаный стержень массой  $m = 10$  кг, состоящий из частей 1 и 2 (на рис. Д5.0—Д5.5) или 1, 2 и 3 (на рис. Д5.6—Д5.9). Размеры частей стержня показаны на рисунках, где  $a = 0,1$  м, а массы этих частей пропорциональны их длинам.

Определить величины, указанные в таблице в столбце 9, где обозначено:  $R_n$ ,  $R_k$  и т. д. — реакция соответствующего подшипника или шарнира,  $N$  — реакция невесомого стержня. Весом вала пренебречь.

Способ крепления стержня к валу и точка, где он прикреплен, указаны в таблице в столбцах 3 и 4. Когда крепление к валу шарнирное, ломаный стержень удерживается в положении, определяемом углом  $\alpha$ , невесомым стержнем 3 (на рис. Д5.0—Д5.5) или 4' (на рис. Д5.6—Д5.9), образующим с валом угол  $\varphi$ ; при жестком креплении этот невесомый стержень отсутствует (на чертеже не изображать).

На рис. Д5.10 в качестве примера показан вид чертежа в случае, когда подшипник находится в точке *D*, а ломаный стержень прикреплен к валу в точке *E* жестко (приварен); невесомый стержень отсутствует.

Таблица Д5

Номер условия	Подшипник в точке	Крепл. стержня		$\alpha^\circ$	$\beta^\circ$	$\gamma^\circ$	$\varphi^\circ$	Найти
		жестко	шарнир					
0	В	Д		45	135	225		$R_A, R_B$
1	В	Е		60	240	150		$R_A, R_B$
2	К		Е	30	210	120	60	$R_E, N$
3	Д	К		60	150	240		$R_A, R_D$
4	К		Д	30	120	210	60	$R_D, N$
5	Е	В		45	225	135		$R_A, R_E$
6	К		Д	60	60	150	120	$R_D, N$
7	К	В		30	30	120		$R_A, R_K$
8	К		Е	60	150	60	120	$R_E, N$
9	Е	К		30	120	210		$R_A, R_E$

**Указания.** Задача Д5 — на применение к изучению движения системы принципа Даламбера. При решении задачи учесть, что когда силы инерции частиц тела (в данной задаче стержня) имеют равнодействующую  $\bar{R}^n$ , то численно  $R^n = ma_c$ , где  $a_c$  — ускорение центра масс *C* тела, но линия действия силы  $\bar{R}^n$  в общем случае не проходит через точку *C* (см. пример Д5).

**Пример Д5.** Вертикальный вал, закрепленный подшипником *A* и подшипником *E* (рис. Д5,а), вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Ломаный однородный стержень массой *m* и длиной  $10a$ , состоящий из частей 1, 2, 3, прикреплен к валу шарниром *B* и невесомым стержнем 4.

Дано:  $m=10$  кг,  $\omega = 8$  с<sup>-1</sup>,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\beta = 150^\circ$ ,  $\varphi = 90^\circ$ ,  $a = 0,2$  м.

Определить: реакции шарнира *B* и стержня 4.

**Решение.** 1. Изображаем вал и прикрепленный к нему ломаный стержень в соответствии с заданными углами (рис. Д5, б). Массы и веса частей 1, 2 и 3 этого стержня, так как они пропорциональны длинам частей, а длина всего стержня равна  $10a$  (рис. Д5,а), будут соответственно равны:

$$m_1 = 0,6m, \quad m_2 = 0,3m, \quad m_3 = 0,1m; \\ P_1 = 0,6mg, \quad P_2 = 0,3mg, \quad P_3 = mg. \quad (1)$$

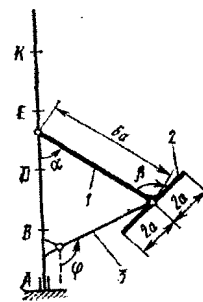


Рис. Д5.0

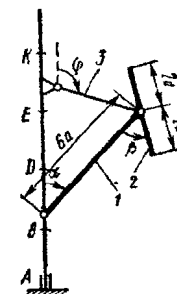


Рис. Д5.1

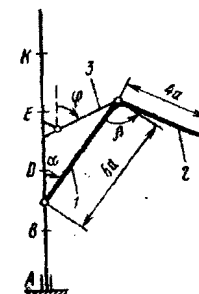


Рис. Д5.2

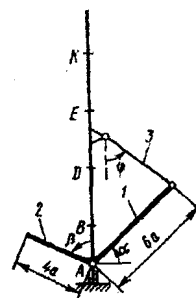


Рис. Д5.3

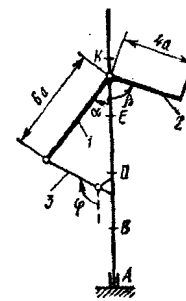


Рис. Д5.4

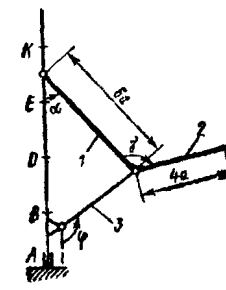


Рис. Д5.5

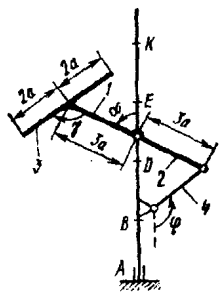


Рис. Д5.6

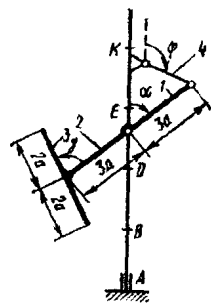


Рис. Д5.7

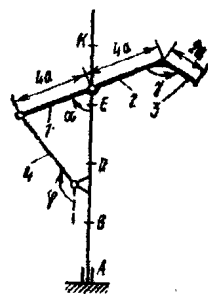


Рис. Д5.8

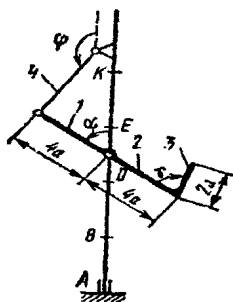


Рис. Д5.9

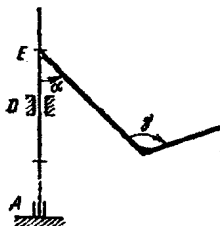


Рис. Д5.10

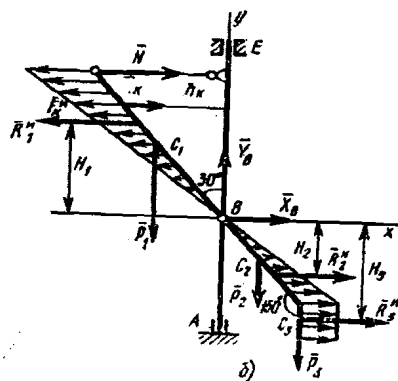
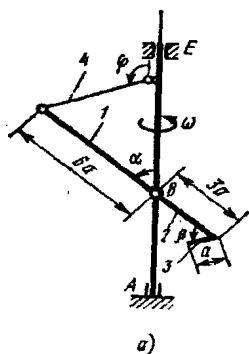


Рис. Д5

2. Для определения искомых реакций рассмотрим движение ломаного стержня и применим принцип Даламбера. Проведем вращающиеся вместе с

валом координатные оси  $Bx$  так, чтобы стержень лежал в плоскости  $xu$  и изобразим действующие на него внешние силы: силы тяжести  $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3$ , составляющие  $\bar{X}_B, \bar{Y}_B$ , реакции шарнира  $B$  и реакцию  $\bar{N}$  стержня 4.

Присоединим к этим силам силы инерции элементов стержня. Так как вал вращается равномерно, то элементы стержня имеют только нормальные ускорения  $a_{nk}$ , направленные к оси вращения, а численно  $a_{nk} = \omega^2 h_k$ , где  $h_k$  — расстояния элементов от оси вращения. Тогда силы инерции  $\bar{F}k''$  будут направлены от оси вращения, а численно  $F_k'' = \Delta m \cdot a_{nk} = \Delta m \cdot \omega^2 h_k \Delta m$  — масса элемента. Поскольку всё  $\bar{F}k''$  оказались пропорциональными  $h_k$ , то эпюры этих параллельных сил образуют для частей 1 и 2 треугольники, а для части 3 — прямоугольник (рис. Д5, б).

Каждую из полученных систем параллельных сил инерции заменим ее равнодействующей, равной главному вектору этих сил. Так как модуль главного вектора сил инерции любого тела имеет значение  $R'' = ma_c$ , где  $m$  — масса тела,  $a_c$  — ускорение его центра масс, то для частей стержня соответственно получим:

$$R_1'' = m_1 a_{C1}, R_2'' = m_2 a_{C2}, R_3'' = m_3 a_{C3}, \quad (2)$$

но центры масс частей стержня, как и его элементы, имеют только нормальные ускорения, равные

$$a_{C1} = \omega^2 h_{C1}, a_{C2} = \omega^2 h_{C2}, a_{C3} = \omega^2 h_{C3},$$

где  $h_{C1} = 3a \sin 30^\circ, h_{C2} = 1,5a \sin 30^\circ, h_{C3} = 3a \sin 30^\circ$  — расстояния центров масс частей от оси вращения. В результате из равенств (2) и (1), учтя, что  $a = 0,2$  м, будем иметь:

$$\begin{aligned} R_1^u &= 0,6m\omega^2 3a \sin 30^\circ = 115,2 \text{ Н}, \\ R_2^u &= 0,3m\omega^2 1,5a \sin 30^\circ = 28,8 \text{ Н}, \\ R_3^u &= 0,13m\omega^2 3a \sin 30^\circ = 28,8 \text{ Н}. \end{aligned} \quad (3)$$

При этом линии действия равнодействующих  $\bar{R}_1^u$  и  $\bar{R}_2^u$  пройдут через центры тяжести соответствующих треугольников, т. е. на расстояниях  $H_1$  и  $H_2$  от оси  $x$ , а равнодействующая  $\bar{R}_3^u$  приложена в середине части 3 и проходит на расстоянии  $H_3$  от оси  $x$ , где

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{2}{3} 6a \cos 30^\circ = 0,69 \text{ м}, \\ H_2 &= \frac{2}{3} 3a \cos 30^\circ = 0,35 \text{ м}, \\ H_3 &= 3a \cos 30^\circ + \frac{a}{2} = 0,62 \text{ м}. \end{aligned} \quad (4)$$

3. Согласно принципу Даламбера, приложенные внешние силы и силы инерции образуют уравновешенную систему сил. Составляя для этой плоской системы сил три уравнения равновесия, получим:

$$\begin{aligned} \sum F_{Rx} = 0, \quad X_B - R_1^u + R_2^u + R_3^u + N &= 0; \\ \sum F_{Ry} = 0, \quad Y_B - P_1 - P_2 - P_3 &= 0; \\ \sum M_B(\bar{F}_R) = 0, \quad P_1 3a \sin 30^\circ + R_1^u H_1 - P_2 1,5a \sin 30^\circ + \\ R_2^u H_2 - P_3 3a \sin 30^\circ + R_3^u H_3 - N 6a \cos 30^\circ &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Подставив сюда значения соответствующих величин из равенств (1), (3), (4) и решив затем эту систему уравнений, найдем искомые реакции. Ответ:  $X_B = -40,4 \text{ Н}$ ;  $Y_B = 98,1 \text{ Н}$ ;  $N = 107,6 \text{ Н}$ .

**Примечание.** Если по условиям задачи ломаный стержень в точке  $B$  жестко скреплен с валом (невесомый стержень 4 отсутствует) и требуется определить реакции подпятника  $A$  и подшипника  $E$ , то для решения надо рассмотреть движение механической системы, со слитно стоящей из ломаного

стержня и вала и тоже применить принцип Даламбера. При этом действующими внешними силами будут все силы тяжести и реакции подпятника  $A$  и подшипника  $E$ . Силы инерции вычисляются так же, как в рассмотренном примере. Затем составляются три уравнения равновесия и из них определяются искомые реакции.

### Задача Д6

Механическая система состоит из однородных ступенчатых шкивов 1 и 2, обмотанных нитями, грузов 3—6, прикрепленных к этим нитям, и невесомого блока (рис. Д6.0—Д6.9, табл. Д6). Система движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести и пары сил с моментом  $M$ , приложенной к одному из шкивов. Радиусы ступеней шкива 1 равны:  $R_1 = 0,2 \text{ м}$ ,  $r_1 = 0,1 \text{ м}$ , а шкива 2 —  $R_2 = 0,3 \text{ м}$ ,  $r_2 = 0,15 \text{ м}$ ; их радиусы инерции относительно осей вращения равны соответственно  $\rho_1 = 0,1 \text{ м}$  и  $\rho_2 = 0,2 \text{ м}$ .

Пренебрегая трением, определить ускорение груза, имеющего больший вес; вес  $P_1, \dots, P_6$  шкивов и грузов заданы в таблице в ньютонах. Грузы, веса которых равны нулю, на чертеже не изображать (шкивы 1, 2 изображать всегда, как части системы).

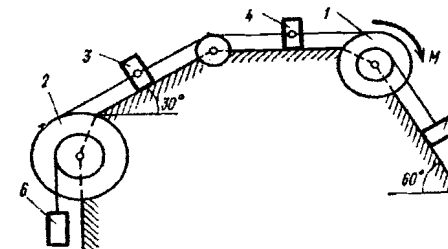


Рис. Д 6.0

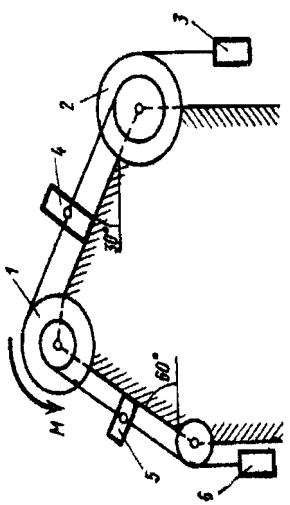


Рис. Д 6.1

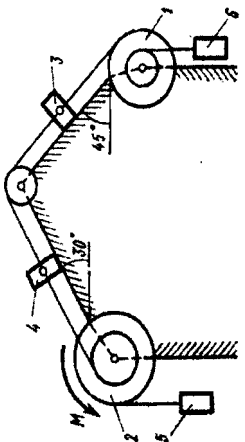


Рис. Д 6.2

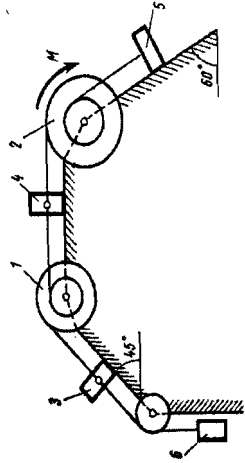


Рис. Д 6.3

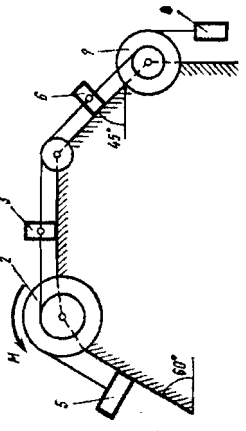


Рис. Д 6.4

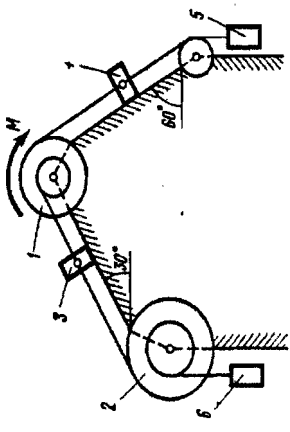


Рис. Д 6.5

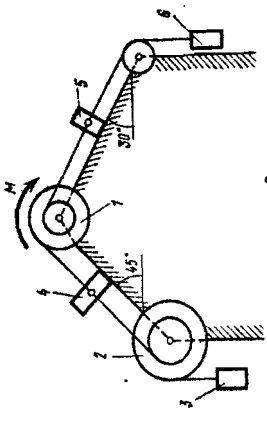


Рис. Д 6.6

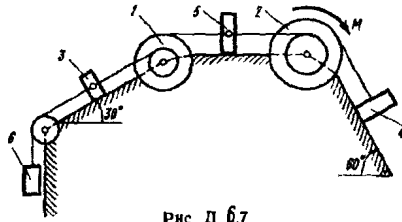


Рис. Д 6.7

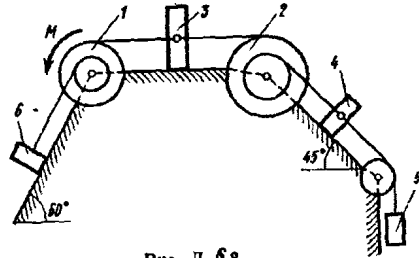


Рис. Д 6.8

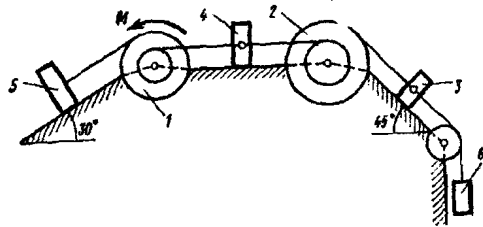


Рис. Д 6.9

Номер условия	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$M$ , Н·м
0	10	0	20	30	40	0	0,9
1	0	40	0	10	20	30	1,2
2	20	30	40	0	10	0	0,6
3	0	20	10	30	0	40	1,8
4	30	0	20	0	40	10	1,2
5	0	10	30	40	20	0	0,9
6	40	0	0	20	30	10	1,8
7	10	20	0	40	0	30	0,6
8	0	40	10	0	30	20	0,9
9	30	0	40	20	10	0	1,2

**Указания.** Задача Д6 — на применение к изучению движения системы общего уравнения динамики (принципа Даламбера—Лагранжа). Ход решения задачи такой же, как в задаче Д5, только предварительно надо присоединить к действующим на систему силам соответствующие силы инерции. Учесть при этом, что для Однородного тела, вращающегося вокруг своей оси симметрии (шкива), система сил инерции приводится к паре с моментом  $M'' = I_z \varepsilon$ , где  $I_z$  — момент инерции тела относительно оси вращения,  $\varepsilon$  — угловое ускорение тела, направление  $M''$  противоположно направлению  $\varepsilon$ .

**Пример Д6.** Механическая система (рис. Д6) состоит из обмотанных нитями блока 1 радиуса  $R_1$  и ступенчатого шкива 2 (радиусы ступеней  $R_2$  и  $r_2$ , радиус инерции относительно оси вращения  $\rho_2$ ), а также из грузов 3 и 4, прикрепленных к этим нитям. Система движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести и пары сил с моментом  $M$ , приложенной к блоку 1. Дано:  $P_1 = 0$ ,  $P_2 = 30$  Н,  $P_3 = 40$  Н,  $P_4 = 20$  Н,  $M = 16$  Н·м,  $R_1 = 0,2$  м,  $R_2 = 0,3$  м,  $r_2 = 0,15$  м,  $\rho_2 = 0,2$  м.

Определить: ускорение груза 3, пренебрегая трением.

**Решение.** 1. Рассмотрим движение механической системы, состоящей из тел 1, 2, 3, 4, соединенных нитями. Система имеет одну степень свободы. Связи, наложенные на эту систему, — идеальные. Для определения  $a_3$  применим общее уравнение динамики:

$$\sum \delta A''_n + \sum \delta A''_R = 0. \quad (1)$$



где  $\Sigma \delta A_k^a$  — сумма элементарных работ активных сил;  $\Sigma \delta A_k^u$  — сумма элементарных работ сил инерции.

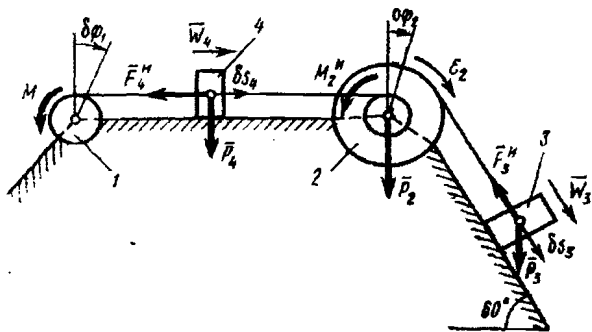


Рис. Д 6

2. Изображаем на чертеже активные силы  $\bar{P}_2$ ,  $\bar{P}_3$ ,  $\bar{P}_4$  и пару сил с моментом  $M$ . Задав шись направлением ускорения  $a_3$ , изображаем на чертеже силы инерции  $\bar{F}_3^u$ ,  $\bar{F}_4^u$  пару сил инерции с моментом  $M_2^u$ , величины которых равны:

$$\begin{aligned} F_3^u &= \frac{P_3}{g} a_3, F_4^u = \frac{P_4}{g} a_4, \\ M_2^u &= \frac{P_2}{g} \rho_2^2 \varepsilon_2. \end{aligned} \quad (2)$$

3. Сообщая системе возможное перемещение и составляя уравнение (1), получим:

$$(P_3 \sin 60^\circ - F_3^u) \delta s_3 - M_2^u \delta \varphi_2 - F_4^u \delta s_4 - M \delta \varphi_1 = 0 \quad (3)$$

Выразим все перемещения через  $\delta \varphi_2$ :

$$\begin{aligned} \delta s_3 &= R_2 \delta \varphi_2, \delta s_4 = r_2 \delta \varphi_2, \\ \delta \varphi_1 &= \frac{r_2}{R_1} \delta \varphi_2 \end{aligned} \quad (4)$$

Подставив величины (2) и (4) в уравнение (3), приведем его к виду:

$$\left[ P_3 \left( \sin 60^\circ - \frac{a_3}{g} \right) R_2 - \frac{P_2}{g} \rho_2^2 \varepsilon_2 - \frac{P_4}{g} a_4 r_2 - M \frac{r_2}{R_1} \right] \delta \varphi_2 = 0, \quad (5)$$

Входящие сюда величины  $\varepsilon_2$  и  $a_4$  выразим через искомую величину  $a_3$ .

$$\varepsilon_2 = \frac{\omega_3}{R_2}, a_4 = \varepsilon_2 \cdot r_2 = \frac{r_2}{R_2} a_3,$$

а затем, учтя, что  $\delta \varphi_2 \neq 0$ , приравняем нулю выражение, стоящее в (5) в квадратных скобках.

Из полученного в результате уравнения найдем:

$$\omega_3 = \frac{P_3 R_2 \sin 60^\circ - M \frac{r_2}{R_1}}{P_3 R_2 + P_2 \rho_2^2 / R_2 + P_4 \frac{r_2}{R_2}}$$

Вычисления дают следующий ответ:  $a = -0,9 \text{ м/с}^2$ . Знак указывает, что ускорение груза 3 и ускорения других тел имеют направления, противоположные показанным на рис. Д6.

### Задача Д7

Механическая система состоит из тел 1, 2, ..., 5 весом  $P_1, P_2, \dots, P_5$  соответственно, связанных друг с другом нитями, намотанными на ступенчатые блоки 2 и 5 (рис. Д7.0—Д7.9, табл. Д7). Радиусы ступенчатых блоков 2 и 5 равны соответственно:  $R_2 = R, r_2 = 0,8 R, R_5 = R, r_5 = 0,4 R$ . При вычислении моментов инерции все блоки, катки и колеса считать однородными сплошными цилиндрами радиуса  $R$ .

На систему кроме сил тяжести действуют сила  $\bar{F}$ , приложенная к телу 3 или 4 (или к соответствующему концу нити, когда тело в систему не вхо-

дит), и пары сил с моментами  $M_2, M_3, M_4$ , приложенные к блокам 2 и 5 и к катку или колесу 4; когда  $M < 0$ , направление момента противоположно показанному на рисунке.

На участке нити, указанном в таблице в столбцах «Пружина», включена пружина с коэффициентом жесткости  $c$  (например, если в столбце стоит  $AB$ , то участок  $AB$  является пружиной, если  $AD$ , то  $AD$  — пружина и т. д.); в начальный момент времени пружина не деформирована.

Составить для системы уравнения Лагранжа и найти закон изменения обобщенной координаты  $x$ , т. е.  $x = f(t)$ , считая, что движение начинается из состояния покоя; определить также частоту и период колебаний, совершаемых телами системы при ее движении (о выборе координаты  $x$  см. Указания).

Прочерк в столбцах таблицы, где заданы веса, означает, что соответствующее тело в систему не входит (на чертеже не изображать), а ноль — что тело считается невесомым, но в систему входит; для колес, обозначенных номером 4,  $P_4$  — их общий вес (вес платформы такой тележки не учитывается). На рис. 5 и 8 блок, к которому подвешен груз 1, невесомый.

Если в решаемом варианте задачи тележка в систему не входит (ее вес в таблице прочеркнут), а вес лежащего на ней тела 3 или 4 задан, то это тело следует считать движущимся по плоскости, на которой в исходном рисунке стоит тележка (тележку не изображать, а плоскость приподнять до касания с телом, т. е., например, изобразить тело и плоскость так, как это показано на рис. Д7.10, а для тела 4 или на рис. Д7.10, б для тела 3).

**Указания.** Задача Д7 — на применение к изучению движения системы уравнений Лагранжа. В задаче система имеет две степени свободы; следовательно, ее положение определяется двумя обобщенными координатами  $q_1$  и  $q_2$  и для нее должны быть составлены два уравнения.

**Решение** начать с выбора обобщенных координат, обозначив их:  $q_1 = x$  и  $q_2 = y$  или  $q_1 = x$  и  $q_2 = \varphi$ . За координату  $x$  принять удлинение пружины, отсчитываемое в сторону одного из крайних тел системы (но не блока), к которому пружина прикреплена; например, если пружина прикреплена к этому телу в

точке Б и ее длина в произвольный момент времени равна  $AB$ , то  $x = AB - l_0$ , где  $l_0$  — длина недеформированной пружины. Если другое крайнее тело системы тоже не блок, за координату  $y$  принять его расстояние (для катка — расстояние центра масс катка) от начального положения. Если же другое крайнее тело системы — блок (он может быть и невесомым), за координату  $q_2$  принять угол поворота  $\varphi$  блока, отсчитывая  $\varphi$  от начального положения. Примеры даны на рис. Д7.10.

Дальнейший ход решения разъяснен в примере Д7.

Таблица Д7

Номер условия	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$F$	$M_2$	$M_4$	$M_5$	Пружина	
										рис.Д7.0-Д7.3	рис.Д7.4-Д7.9
0		0	3P		4P	4P	0	0	PR	AD	AB
1	3P	2P			0	0	-	0	0	KE	KE
2		2P	P		0	0	0	0	2PR	AD	AB
3			2P	5P		0	0	-	0	BD	BD
4	2P	P	3P		0	3P	0	0	0	AD	AB
5			4P	3P		P	0	0	0	BD	BD
6	P	0			2P	0	-PR	0	0	KE	KE
7		4P		2P		3P	2PR	0	0	AB	AD
8	4P	0		3P	0	0	0	PR	0	KE	KE
9		0		P	2P	0	0	0	2PR	AB	AD

**Пример Д7.** Механическая система (рис. Д7) состоит из барабана 1 радиуса  $R$ , к которому приложена пара сил с моментом  $M$ , тележки 2 и катка 3 (барабан и каток однородные цилиндры); веса всех тел равны соответственно  $P_1, P_2$  и  $P_3$ , весом колес тележки пренебрегаем. Тележка соединена с барабаном намотанной на него нитью, а с катком — пружиной  $BD$ , коэффициент

жесткости которой равен  $c$ . Система начинает движение из состояния покоя; пружина в этот момент не деформирована.

Дано:  $R, c, P_1 = 2P, P_2 = 4P, P_3 = 2P, M = 4PR, \alpha = 30^\circ$ .

Определить: 1)  $x = f(t)$ , где  $x$  — удлинение пружины (или перемещение центра  $D$  катка по отношению к тележке); 2) частоту  $k$  и период  $T$  колебаний.

**Решение.** 1. Для решения задачи воспользуемся уравнениями Лагранжа. Рассматриваемая система имеет две степени свободы. Выберем в качестве обобщенных координат угол поворота барабана  $\varphi$  и удлинение пружины  $x$  ( $q_1 = \varphi, q_2 = x$ ). Тогда уравнения Лагранжа будут иметь вид:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_1, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_2, \quad (1)$$

2. Определим кинетическую энергию  $T$  системы, равную сумме энергий всех тел:

$$T = T_1 + T_2 + T_3, \quad (2)$$

Так как барабан вращается вокруг оси  $O$ , тележка движется поступательно, а каток — плоскопараллельно, то

$$T_1 = \frac{1}{2} J_0 \omega_1^2, \quad T_2 = \frac{1}{2} \frac{P_2}{g} v_2^2, \quad T_3 = \frac{1}{2} \frac{P_3}{g} v_D^2 + \frac{1}{2} J_D \omega_3^2, \quad (3)$$

где  $J_0 = (P_1/2g)R^2, J_D = (P_3/2g)R_3^2$  ( $R_3$  — радиус катка 3)

Все входящие сюда скорости надо выразить через обобщенные скорости  $\dot{\varphi}$  и  $\dot{x}$ . Очевидно, что  $\omega_1 = \dot{\varphi}, v_2 = R\omega_1 = R\dot{\varphi}$ . Для  $v_D$ , рас-

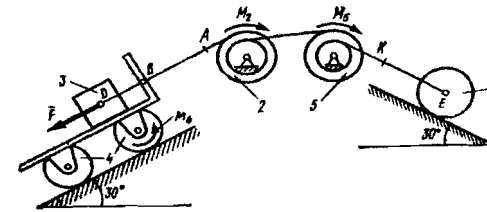


Рис. Д 7.0

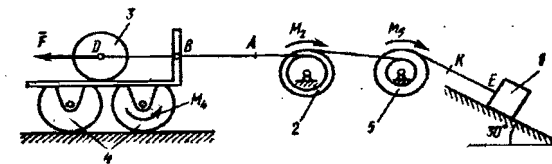


Рис. Д 7.1

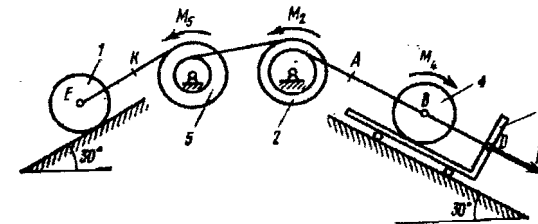


Рис. Д 7.2

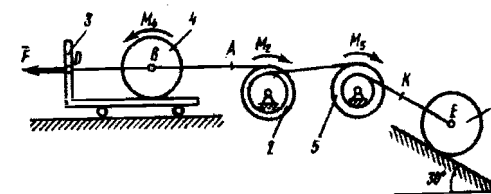


Рис. Д 7.3

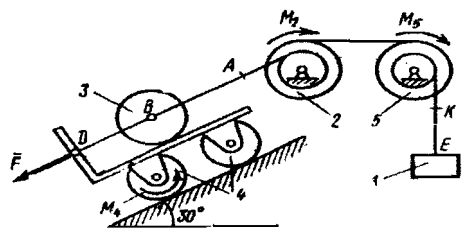


Рис. Д 7.4

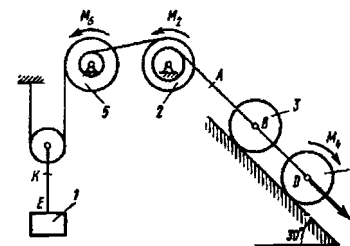


Рис. Д 7.8

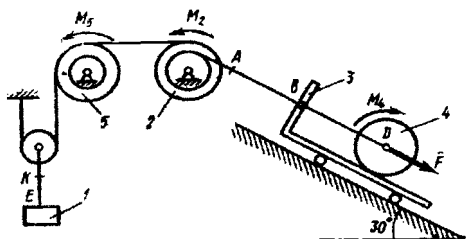


Рис. Д 7.5

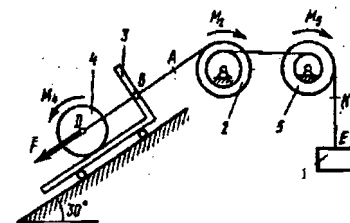


Рис. Д 7.9

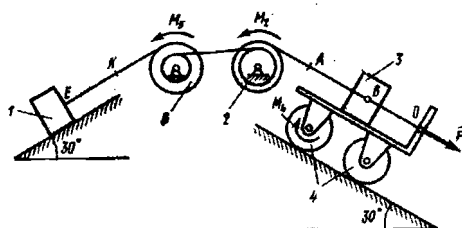


Рис. Д 7.6

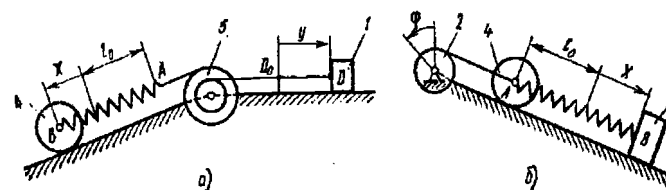


Рис. Д 7.10

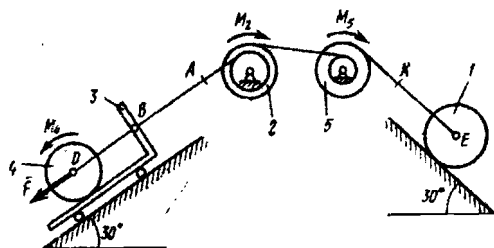


Рис. Д 7.7

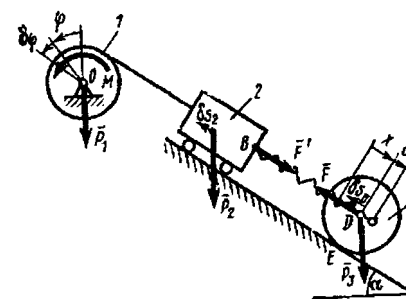


Рис. Д 7

осматривая движение катка как сложное и учитывая, что  $x$  определяет положение точки D по отношению к тележке, будем иметь  $\vec{V}_D = \vec{V}_D^{or} + \vec{V}_D^{ncp}$ , где численно  $V_D^{or} = z$ ,  $V_D^{ncp} = V_2 = R\dot{\varphi}$ . Тогда, принимая во внимание, что при возрастании  $\varphi$  и  $x$  скорости  $\vec{V}_D^{or}$  и  $\vec{V}_D^{ncp}$  направлены в разные стороны и что точка E для катка — мгновенный центр скоростей, получим

$$V_0 = \dot{x} - R\dot{\varphi}, \quad \omega_3 = \frac{V_D}{ED} = \frac{\dot{x} - R\dot{\varphi}}{R_3}.$$

Подставляя все найденные значения скоростей и значения  $J_0$  и  $J_D$  в равенства (3) и учитывая, что  $P_1 = P_3 = 2P$ , а  $P_2 = 4P$ , получим окончательно из (1) следующее выражение для T;

$$T = \frac{P}{g} \left( 4R^2 \dot{\varphi}^2 - 3R\dot{\varphi}\dot{x} + \frac{3}{2}\dot{x}^2 \right), \quad (4)$$

Отсюда находим

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{P}{g} (8R^2 \dot{\varphi} - 3R\dot{x}), \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{P}{g} (-3R\dot{\varphi} + 3\dot{x}), \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = 0.$$

3. Теперь определим обобщенные силы  $Q_1$  и  $Q_2$ . Изображаем действующие на систему активные силы: силы тяжести  $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$ , силы упругости  $\vec{F}$  и  $\vec{F}'$ , где численно  $F' = F = cx$ , и пару с моментом  $M$ .

а) Для определения  $Q_1$  сообщим системе возможное перемещение, при котором координата  $\varphi$  получает приращение  $\delta\varphi > 0$ , а  $x$  не изменяется, т. е.  $\delta x = 0$  (пружина при таком перемещении системы не изменяет свою длину).

Тогда тележка и центр D катка получают одинаковые перемещения

$\delta s_2 = \delta s_D = R\delta\varphi$  и  $\delta A_1$  действующих сил будет равна:

$$\delta A_1 = M\delta\varphi - P_2 \sin 30^\circ \delta S_2 - P_3 \sin 30^\circ \delta S_D - F\delta S_2 + F\delta S_D, \quad (5)$$

Заменив здесь все величины их значениями, найдем в результате, что

$$\delta A_1 = (M - 0,5P_2R - 0,5P_3R) \delta\varphi = PR\delta\varphi \quad (6)$$

б) Для определения  $Q_2$  сообщим системе возможное перемещение, при котором координата  $x$  получает приращение  $\delta x > 0$ , а  $\varphi$  не изменяется, т. е.  $\delta\varphi = 0$  (барабан не поворачивается и тележка не перемещается). Тогда элементарную работу совершают только силы  $\vec{P}_3$  и  $\vec{F}$ , и учтя, что  $P_3 = 2P$ , будем иметь:

$$\delta A_2 = P_3 \sin 30^\circ \delta x - F\delta x = (P - cx) \delta x \quad (7)$$

Коэффициенты при  $\delta\varphi$  и  $\delta x$  в равенствах (6) и (7) и будут искомыми обобщенными силами; следовательно,

$$Q_1 = PR, \quad Q_2 = P - cx. \quad (8)$$

Подставляя величины (5) и (8) в уравнения (1), получим следующие дифференциальные уравнения движения системы:

$$\frac{P}{g} (8R^2 \ddot{\varphi} - 3R\ddot{z}) = PR, \quad P/g (-3R\ddot{\varphi} + 3\ddot{z}) = P - cx. \quad (9)$$

4. Для определения  $x = f(t)$  исключим из уравнений (9)  $\ddot{\varphi}$ . Получим дифференциальное уравнение вида

$$\ddot{z} + k^2 x = a, \quad \text{где } k^2 = 8/5 \text{ cg/P, } a = 11/15 \text{ g.} \quad (10)$$

Общим решением уравнения (10), как известно из теории дифференциальных уравнений, будет  $x = x_1 + x_2$ , где  $x_1$  — общее решение однородного уравнения  $z + k^2 x = 0$ , т. е.  $x_1 = C_1 \sin(kt) + C_2 \cos(kt)$ , а  $x_2$  — частное решение уравнения (8). Будем искать решение  $x_2$  в виде  $x_2 = A = \text{const}$ . Подставляя значение  $x_2$  в уравнение (10), получим  $A = a/k^2$ . Таким образом, общее решение уравнения (10) имеет вид

$$x = C_1 \sin(Rt) + C_2 \cos(Rt) + a/R^2, \quad (11)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — постоянные интегрирования. Для их определения найдем еще производную  $\dot{x}$  от  $x$  по времени:

$$\dot{x} = C_1 R \cos(Rt) - C_2 \sin(Rt). \quad (12)$$

По начальным условиям при  $t=0$ ,  $x=0$ ,  $\dot{x}=0$  (движение начинается из состояния покоя и пружина в этот момент не деформирована). Подставляя эти величины в уравнения (11) и (12), найдем из них, что  $C_1=0$ ,  $C_2=-a/k^2$ .

Окончательно получим искомую зависимость  $x=f(t)$  в виде

$$x = \frac{a}{R^2}(1 - \cos Rt), \quad (13)$$

где значения  $a$  и  $k^2$  даются последними двумя из равенств (10). Таким образом, центр  $D$  катка совершает по отношению к тележке колебания, закон которых дает равенство (13). Круговая частота  $k$  и период  $\tau$  этих колебаний будут:

$$R = \sqrt{\frac{8cg}{15P}}, \quad \tau = \frac{2\pi}{R} = 2\pi \sqrt{\frac{15P}{8cg}}. \quad (14)$$

## Оглавление

Рабочая программа.....	3
Статика твердого тела.....	-
Кинематика.....	5
Динамика.....	7
Библиографический список.....	12
Контрольные задания.....	14
Задачи к контрольным заданиям.....	17
Статика.....	-
Кинематика.....	44
Динамика.....	68

**Учебное издание**

**Тихонов Алексей Александрович  
Ковалевская Ольга Георгиевна  
Кокушин Николай Николаевич  
Азарова Эльвира Владимировна  
Лазарев Юрий Николаевич**

## **ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА**

**Учебно-методическое пособие**

**Редактор и корректор Т. А. Смирнова  
Техн. редактор Л.Я. Титова**

**Темплан 2007 г., поз.86**

---

**Подп. к печати 1.11.07. Бумага тип №1. Печать офсетная. Объем 7,75 печ.л.  
Уч.-изд.л. 7,75. Тираж 100 экз. Изд №86. Цена «С». Заказ 1632.**

---

**Ризограф ГОУВПО Санкт-Петербургского государственного  
технологического университета растительных полимеров,  
198095, Санкт-Петербург, ул. Ивана Черных, 4.**