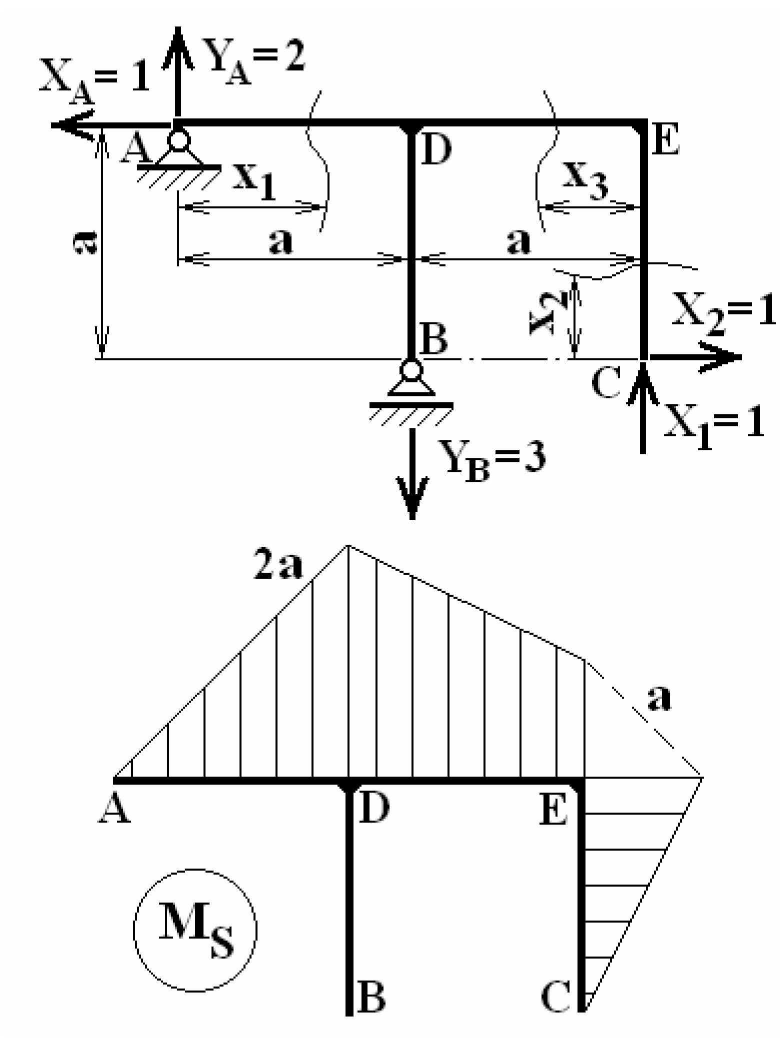
П. В. Кауров, С. Г. Петров

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ РАМЫ

Учебно-методическое пособие



Санкт-Петербург

2019

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«САНКТ–ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПРОМЫШЛЕННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ДИЗАЙНА»

ВЫСШАЯ ШКОЛА ТЕХНОЛОГИИ И ЭНЕРГЕТИКИ

П. В. Кауров, С. Г. Петров

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ РАМЫ

Учебно-методическое пособие

Санкт-Петербург

2019

УДК 539.3 (075)
ББК 22.251я7
К 301

Кауров П. В., Петров С. Г. Расчет статически неопределимой рамы: учебно-методическое пособие / СПбГУПТД ВШТЭ – СПб., 2019. – 34 с.

Учебно-методическое пособие содержит общие требования к выполнению расчетно-графической работы, краткие сведения по теории, варианты заданий и примеры расчета. Целью настоящего учебно-методического пособия является развитие у студентов навыков самостоятельного определения геометрических характеристик плоских фигур.

Учебно-методическое пособие предназначается для студентов дневной формы обучения, выполняющих расчетно-графическую работу по курсу "Техническая механика".

Рецензенты: зав. кафедрой машин автоматизированных систем ВШТЭ СПбГУПТД, д-р техн. наук, профессор А. В. Александров;

зав. кафедрой инженерной графики и автоматизированного проектирования ВШТЭ СПбГУПТД, канд. техн. наук, доцент А. В. Кишко.

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом университета в качестве учебно-методического пособия.

Редактор и корректор В. А. Басова
Техн. редактор Л. Я. Титова Темплан 2019 г., поз. 69.

Подп. к печати 18.06.19. Формат 60×84/16. Бумага тип. №1. Печать офсетная.
Печ. л. 2,25. Уч.- изд. л. 2,25. Тираж 25 экз. Изд № 69. Цена "С". Заказ .

Ризограф ВШТЭ СПбГУПТД, СПб., 198095, ул. Ивана Черных, 4.

Предисловие

Студенты дневной формы обучения, изучающие курс "Техническая механика", выполняют расчетно-графическую работу "Расчет статически неопределимой рамы методом сил".

Выполнение расчетно-графической работы прививает студентам навыки самостоятельной творческой работы, рационализации, пользования справочной литературой и таблицами, а также выполнения расчётов и составления расчётно-пояснительной записки

Работа выполняется согласно трехзначному шифру, получаемому студентом от преподавателя, ведущего практические занятия в группе.

Первая цифра шифра указывает схему сечения по рис. 22. Заданная схема состоит из нескольких стержней с постоянной изгибной жесткостью **EJ**, длина всех участков стержня одинакова и равна **a**. Вторая и третья цифры шифра указывают на величину приложенной силы **F** и внешнего изгибающего момента **M** из табл. 1.

Расчетно-графическая работа "Расчет статически неопределимой рамы методом сил" должна содержать в себе следующие пункты:

1. Исходные данные.
2. Определение степени статической неопределимости и выбор основной системы.
3. Определение коэффициентов канонических уравнений и их проверка.
4. Определение величин неизвестных усилий.
5. Построение расчетных эпюр.

Работа выполняется на одной стороне стандартного листа формата А4 (210 × 297 мм) вертикального расположения и брошюруется по левому полю бумаги. Текст и выполняемые расчёты пишутся чернилами, рисунки выполняются карандашом с обязательным соблюдением масштаба, который выбирается самостоятельно из соображений наилучшей выразительности чертежа.

На последнем листе работы необходимо привести расчетные схемы и построенные эпюры. Для чертежа на последнем листе работы допускается использование формата А3.

1. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ПО ТЕОРИИ

1.1. Статически неопределимые системы

Под статически неопределимой системой понимается система, для которой определение внешних реакций и всех внутренних силовых факторов не может быть произведено при помощи уравнений равновесия статики.

Статическая неопределимость возникает в том случае, когда число наложенных на систему связей оказывается большим, чем это необходимо для обеспечения ее равновесия.

Связь – условие закрепления или соединения элементов конструкции, не допускающее изменения их взаимного положения (внутренние связи) и положения в пространстве (внешние связи). Связью в механике называется всякое препятствие, не допускающее изменения взаимного положения точек или сечений системы.

При этом некоторые из этих связей становятся как бы "лишними", а усилия в них – лишними неизвестными. По числу лишних неизвестных устанавливают степень статической неопределимости системы. Термин "лишние" связи является условным, так как эти связи необходимы для обеспечения прочности и жесткости системы, хотя и "избыточны" с точки зрения ее равновесия.

В балке, показанной на рис. 1, две "лишние" связи.

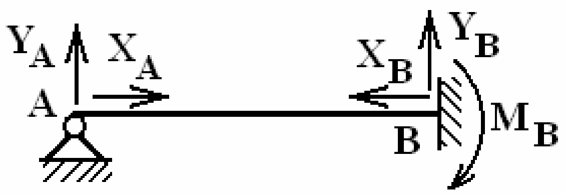


Рис. 1

Приведем примеры статически неопределимых систем.

Неразрезная балка, лежащая на трех опорах (см. рис. 2), одна из которых шарнирно-неподвижная (опора **А**), является системой один раз статически неопределимой, так как для любой плоской системы сил, находящихся в равновесии, статика дает всего лишь три уравнения. В состав этих уравнений в данном случае войдут четыре неизвестных; следовательно, задачу статически (т. е. с помощью одних лишь уравнений статики) решить невозможно. Дополнительные (недостающие) уравнения составляются на основе изучения деформаций системы. В данном случае необходимо составить одно такое уравнение деформаций.

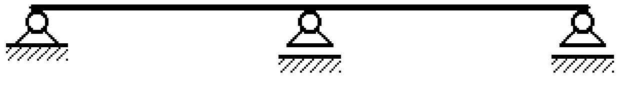


Рис. 2

Рама – конструкция, состоящая из стержней произвольной конфигурации и имеющая один или несколько жестких (не шарнирных) узлов; рама теряет геометрическую неизменяемость, если все жесткие узлы заменены шарнирными.

Помещенная на рис. 3 в прямоугольная замкнутая рама опирается на землю двумя опорами (шарнирно-неподвижной **A** и шарнирно-подвижной **B**) и поэтому в отношении опорных закреплений является системой статически определимой.

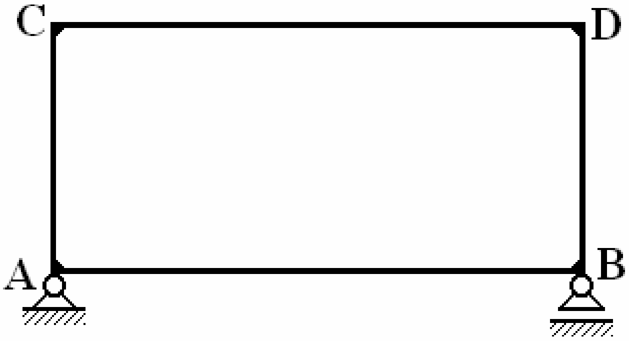


Рис. 3

По своему же внутреннему образованию она является системой трижды статически неопределимой, так как для превращения ее в статически определимую необходимо перерезать один из ее элементов и тем самым устранить три лишние внутренние связи. Реакциями этих связей являются: продольная сила **N**, поперечная сила **Q** и изгибающий момент **M** (см. рис. 4). Эти реакции с помощью уравнений статики найдены быть не могут.

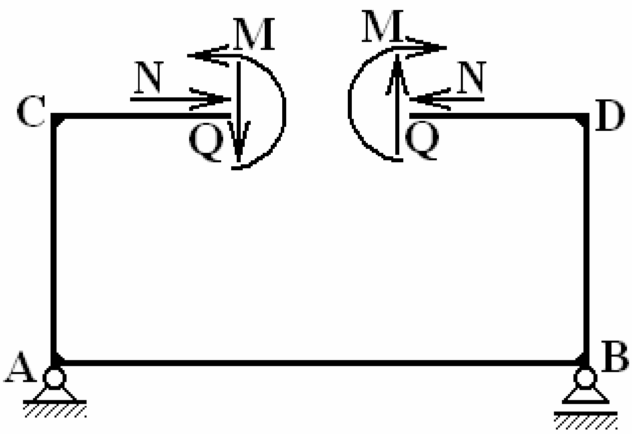


Рис. 4

1.2. Степень статической неопределимости

Расчет статически неопределимой системы начинается с анализа ее схемы. Анализ необходим прежде всего для того, чтобы установить степень статической неопределимости и, следовательно, число необходимых дополнительных (к уравнениям статики) уравнений — уравнений перемещений. Разность между числом неизвестных усилий в сооружении и числом независимых уравнений статики, которые можно составить при расчете этого сооружения, определяет степень его статической неопределимости. Эта разность равна числу так называемых лишних связей в конструкции, удаление которых превращает заданную статически неопределимую систему в определимую, не нарушая геометрической неизменяемости сооружения.

Геометрически неизменяемой называется такая система, изменение формы которой возможно лишь в связи с деформациями ее элементов.

Для балки, показанной на рис. 1, число неизвестных реакций, возникающих под действием внешних нагрузок, равно пяти (**Y_A, X_A, Y_B, X_B, M_B**), а число уравнений равновесия статики – трем. Следовательно, балка является дважды статически неопределимой системой.

Для превращения системы, представленной на рис. 5, в статически определимую достаточно заменить одну шарнирно-неподвижную опору на шарнирно-подвижную и разрезать затяжку. Две удаленные связи этой системы соответствуют двум степеням ее статической неопределимости.

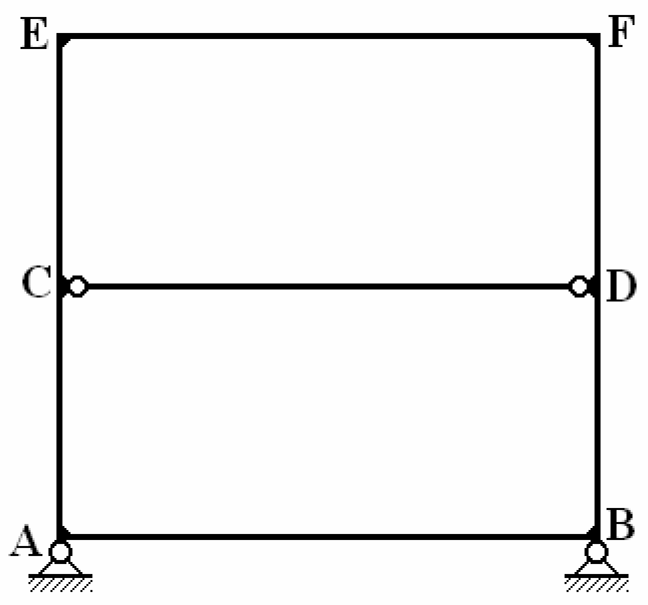


Рис. 5

Вернемся еще раз к раме, изображенной на рис. 3. Для превращения ее в статически определимую мы сделаем разрез горизонтального ригеля **CD** и, таким образом, освободим систему от трех лишних связей, заменив их внутренними усилиями **N**, **Q** и **M** (см. рис. 4).

В таких же условиях в смысле статической неопределимости находится любая система, представляющая замкнутый контур, который, таким образом, всегда трижды статически неопределим.

Контур, состоящий из ряда элементов (прямых или криволинейных), жестко (без шарниров) связанных между собой и образующих замкнутую цепь, будем называть замкнутым контуром.

Примером конструкции с одним замкнутым контуром **CDFE** является система, изображенная на рис. 6.

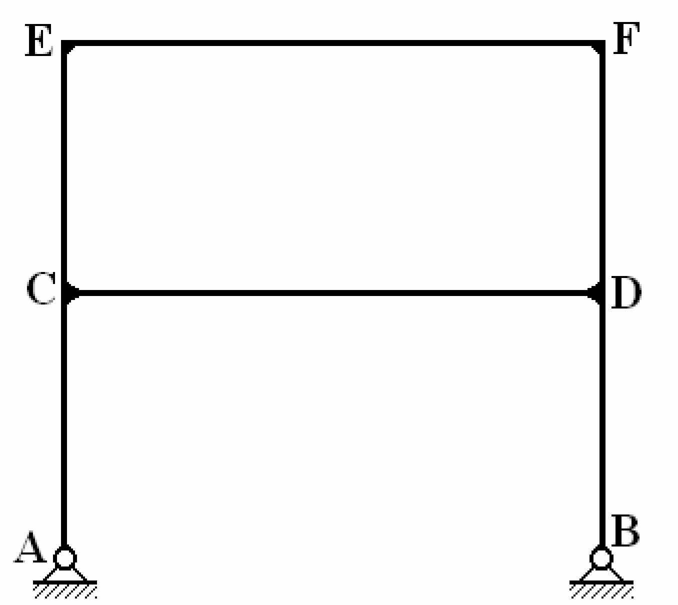


Рис. 6

Степень статической неопределимости плоской рамы:

$$\mathbf{С_Н = О_П - 3 + 3 \cdot К - Ш},$$

где **$О_П$** – число опорных связей; **К** – число замкнутых контуров; **Ш** – число простых шарниров.

Число опорных связей **$О_П$** напрямую зависит от типа опорных закреплений в рассматриваемой системе.

При наличии заделки число опорных связей равно трем (**$О_П$** =3), так как в заделке могут возникать две реакции (вертикальная и горизонтальная) и один реактивный момент.

При наличии шарнирно-неподвижной опоры число опорных связей равно двум ($\mathbf{O_П}$ =2), так как в шарнирно-неподвижной опоре могут возникать две реакции (вертикальная и горизонтальная).

При наличии шарнирно-подвижной опоры число опорных связей равно единице ($\mathbf{O_П}$ =1), так как в шарнирно-подвижной опоре может возникать только одна реакция, направленная перпендикулярно плоскости, по которой может перемещаться подвижный шарнир.

Следовательно, для рамы, изображенной на рис. 7, при любой внешней нагрузке, общее число опорных связей:

$$\mathbf{O_П} = 3 + 2 + 1 = 6,$$

а степень статической неопределимости:

$$\mathbf{C_Н} = \mathbf{O_П} - 3 = 6 - 3 = 3.$$

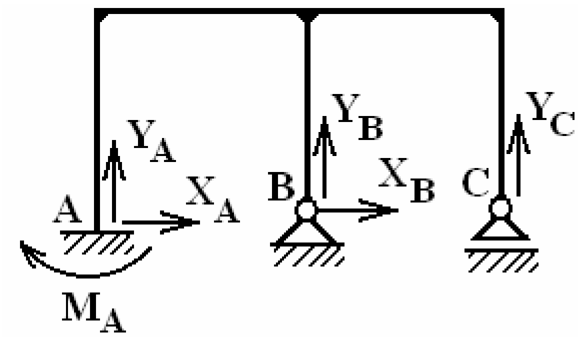


Рис. 7

Наличие одного простого шарнира понижает степень статической неопределимости на единицу, так как в месте шарнирного соединения стержни могут свободно поворачиваться относительно друг друга, при этом не изгибаясь, т.е. ограничения связью нет, и изгибающий момент на шарнире равен нулю.

Таким образом, при наличии простого шарнира в раме определение внешних реакций сводится не только к решению трех уравнений системы статического равновесия тела на плоскости, но и к непосредственному решению составленных уравнений изгибающих моментов на участках, границей которых является простой шарнир, относительно неизвестных реакций, входящих в эти выражения.

Наличие замкнутого контура увеличивает степень статической неопределимости на три, так как при определении в нем внутренних усилий методом сечений необходимо снять дополнительные связи, т. е. позволить сечениям поворачиваться и смещаться в двух направлениях.

Следовательно, для рамы, изображенной на рис. 8, при любой внешней нагрузке, общее число опорных связей:

$$\mathbf{O_П} = 4\ (\mathbf{Y_A}, \mathbf{X_A}, \mathbf{Y_B}, \mathbf{X_B}),$$

число замкнутых контуров **К** = 1 (контур **DEFG**), число простых шарниров **Ш** = 1 (шарнир **С**), степень статической неопределимости:

$$\mathbf{C_Н} = \mathbf{O_П} - 3 + \mathbf{3 \cdot К} - \mathbf{Ш} = 4 - 3 + 3 \cdot 1 - 1 = 3.$$

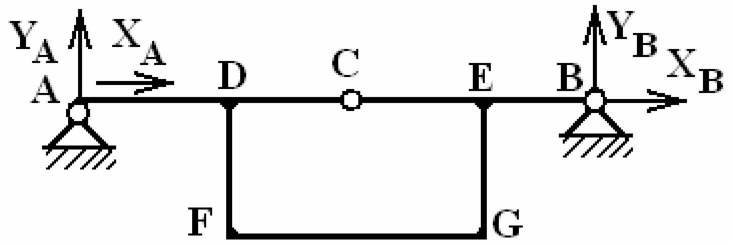


Рис.8

Бесшарнирная рама (рис. 9) представляет собой также замкнутый контур, ограниченный снизу «землей», которую можно условно заменить бесконечно жестким стержнем. Так как очень часто в состав статически неопределимых систем (особенно рам) входят замкнутые контуры, каждый из которых, как уже теперь известно, трижды неопределим, то легко в этих случаях установить и общую степень статической неопределимости всей конструкции в целом.

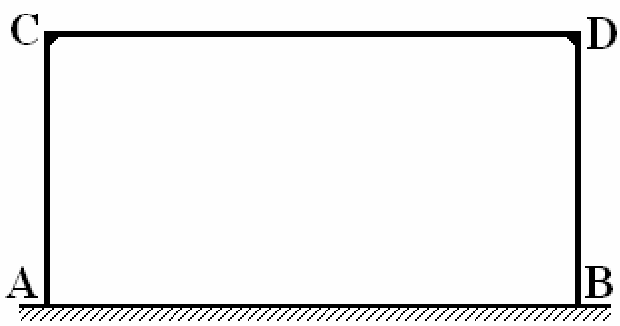


Рис. 9

В рамной конструкции, представленной на рис. 10, верхний контур **CDFE** снабжен шарниром **G**; в разрезе, проведенном по этому шарниру, действуют только два внутренних усилия: **N** и **Q** (рис. 11). Такой контур дважды статически неопределим.

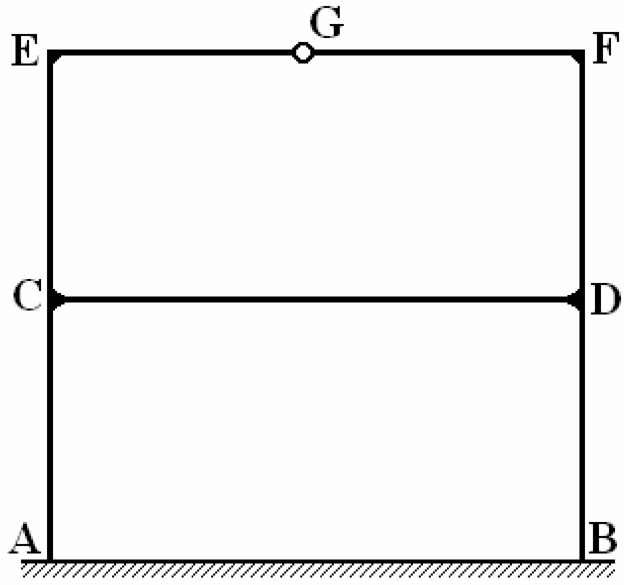


Рис. 10

Если рассматривать всю систему (рис. 10) в целом, то она будет пять раз статически неопределима, так как нижний контур **ABCD** этой рамы замкнутый и, следовательно, неопределим трижды. Система, освобожденная от внутренних лишних связей, в данном случае будет состоять из двух защемленных внизу стержней с горизонтальными консолями (рис. 11).

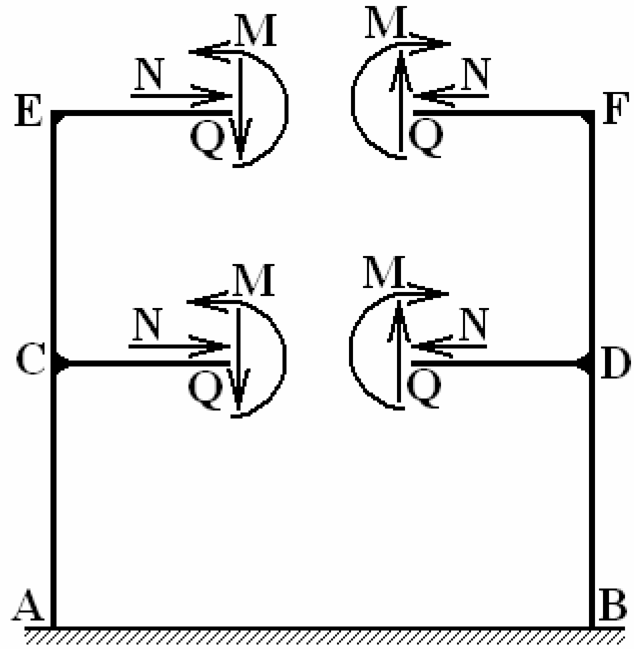


Рис. 11

Необходимо заметить, что исключение лишних связей для превращения одной и той же статически неопределимой конструкции в статически определимую может быть произведено различными способами, однако число отбрасываемых связей всегда будет одним и тем же.

Так, например, раму, изображенную на рис. 10, можно включением в нее пяти шарниров превратить в систему статически определимую, состоящую из двух трехшарнирных арок (рис. 12).

При этом общее число неизвестных, подлежащих определению, уменьшится также на пять, так как в шарнире изгибающий момент равен нулю и включение каждого шарнира в систему сопровождается уничтожением момента в этом сечении. Следовательно, рассмотренная рама статически неопределима пять раз.

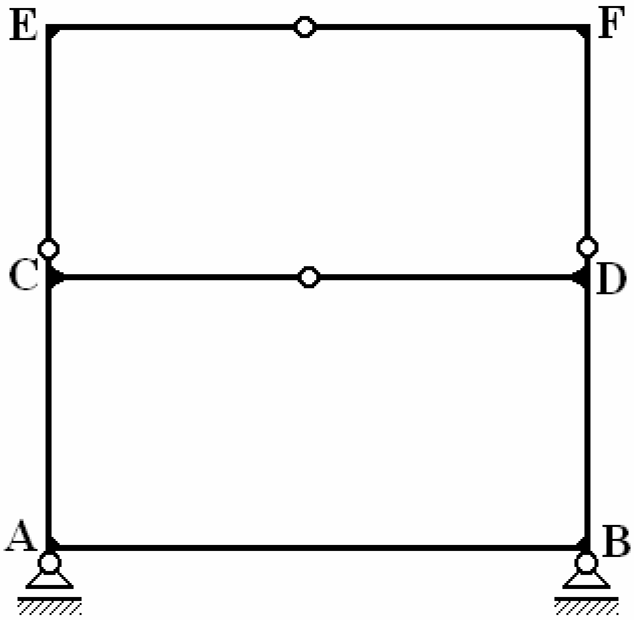


Рис. 12

При удалении связей системы необходимо следить за тем, чтобы получаемая конструкция была геометрически неизменяема. С этой точки зрения в раме, имеющей две шарнирно-неподвижные опоры **A** и **B** (рис. 13) было бы ошибочным заменить опору **B** на шарнирно-подвижную, расположенную вертикально (рис. 14), так как оставшиеся при этом три опорных связи пересекались бы в одной точке **A** и, следовательно, не могли бы препятствовать повороту рамы вокруг этой точки.

Определить реакции в опорах из уравнений статики было бы невозможно, так как для сил, пересекающихся в одной точке, статика дает всего два уравнения. С точки зрения геометрической неизменяемости полученная система является мгновенно изменяемой.

Правильный вариант расположения опор указан на рис. 15.

Рис. 13

Рис. 14

Рис. 15

В заключение дадим геометрическое толкование понятия статической неопределимости системы. Если в статически определимой системе (например, в ферме или трехшарнирной арке) устранить какую-либо внешнюю или внутреннюю связь, то она превратится в геометрически изменяемую систему. Следовательно, статически определимая конструкция содержит в своем составе такое количество связей, которое является минимально необходимым для обеспечения ее геометрической неизменяемости. Связи избыточные (сверх этого количества) порождают статическую неопределимость конструкции. Таким образом, из любой статически неопределимой конструкции можно устранить, по крайней мере, одну связь без нарушения ее изменяемости. Из вышеизложенного видно, что варианты удаления связей могут быть весьма различными. Однако не каждая связь неопределимой конструкции может быть принята за лишнюю, так как удаление некоторых связей может сделать конструкцию изменяемой.

1.3. Основная система метода сил

В заданной системе отбрасываются "лишние" связи, а вместо них прикладываются "лишние" неизвестные X_1, X_2,… X_n. При отбрасывании "лишних" связей нужно следить за тем, чтобы новая система была геометрически неизменяемой и статически определимой.

Геометрически неизменяемой называется такая система, в которой перемещения точек или элементов возможны только за счет деформации стержней. Полученная таким образом статически определимая и геометрически неизменяемая система носит название основной системы метода сил. Для каждой статически неопределимой системы можно получить несколько различных вариантов основной системы.

Для того чтобы обратить заданную статически неопределимую систему в статически определимую, в методе сил используется следующий прием.

Устранение каких-либо связей не изменяет внутренних усилий, возникающих в системе, и ее деформаций, если к ней прикладываются дополнительные силы и моменты, представляющие собой реакции отброшенных связей. Поэтому если к основной системе кроме заданной нагрузки приложить реакции устраненных связей, то основная и заданная системы станут эквивалентными. В заданной системе в направлениях имеющихся жестких связей (в том числе и тех связей, которые отброшены при переходе к основной системе) перемещений быть не может. Поэтому в основной системе перемещения по направлениям отброшенных связей должны быть равны нулю. Следовательно, реакции отброшенных связей должны иметь такие значения, при которых перемещения по их направлениям равнялись бы нулю.

Таким образом, при раскрытии статической неопределимости этим методом искомыми оказываются не деформации, а соответствующие им силы – реакции связей (отсюда и название «метод сил»).

На рис. 16 б, в, г представлены возможные варианты основной системы для статически неопределимой рамы, изображенной на рис. 16а.

Для рам, имеющих жесткие закрепления, можно рекомендовать основную систему в виде консоли, рассматривая остальные опорные закрепления как лишние (рис. 16 б, г).

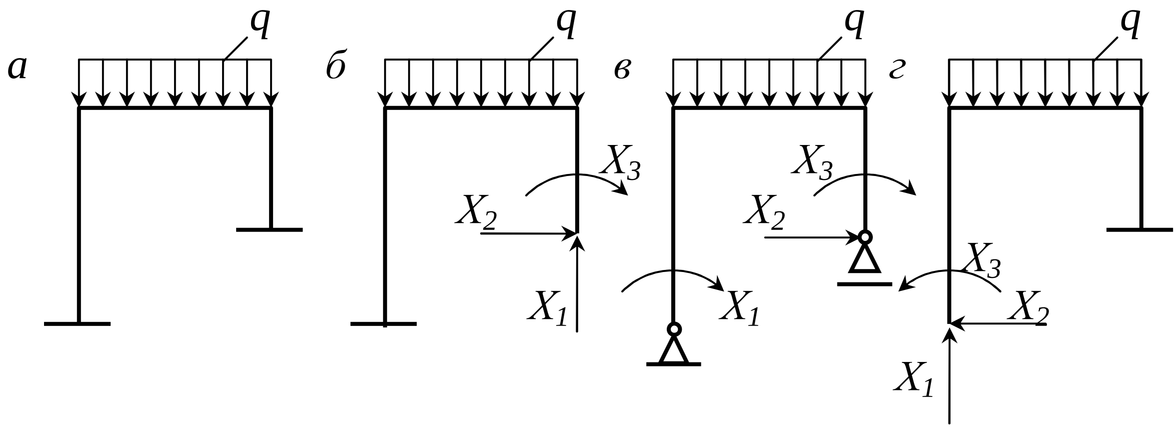


Рис. 16

Исключения составляют симметричные рамы с защемленными концами. Здесь выбор основной системы удобно производить, разрезая раму на две симметричные консоли (рис.17).

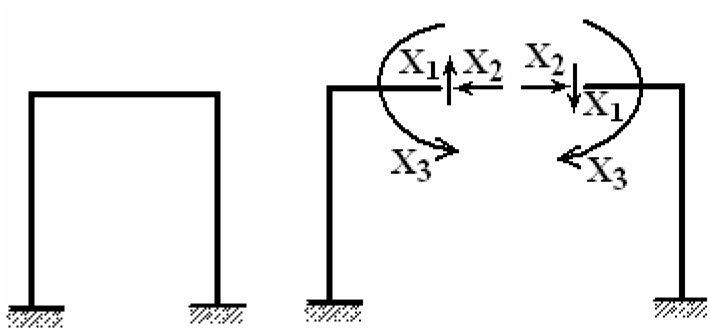


Рис. 17

1.4. Канонические уравнения метода сил

Для нахождения "лишних" неизвестных составляются дополнительные уравнения, которые носят название уравнений совместности деформаций. Смысл их заключается в том, что перемещения в основной системе, вызванные внешними нагрузками и “лишними” неизвестными, должны быть такими же, как и в заданной системе.

Суммарные перемещения в основной системе, вызванные внешней нагрузкой и “лишними” неизвестными, по направлению самих неизвестных должны быть равны нулю.

На основании принципа независимости действия сил, в соответствии с которым перемещение, вызванное несколькими воздействиями, равно алгебраической сумме перемещений от каждого из этих воздействий в отдельности, уравнение деформаций для один раз статически неопределимой системы можно записать следующим образом:

$$\Delta_1 = \Delta_1(X_1) + \Delta_1(P) = 0.$$

Первое слагаемое представляет собой перемещение по направлению неизвестного, вызванное этим же неизвестным, а второе слагаемое $\Delta_1(P) \equiv \Delta_{1P}$ – перемещение по тому же направлению, вызванное внешней нагрузкой. Величину $\Delta_1(X_1)$ удобно представить в следующем виде:

$$\Delta_1(X_1) = \delta_{11} X_1,$$

где δ_{11} - перемещение по направлению неизвестного $\mathbf{X_1}$ от $\mathbf{X_1} = 1$.

Тогда
$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0.$$

Данное выражение, записанное для один раз статически неопределимой системы, легко обобщается для случая более сложных статически неопределимых систем. Например, для **n**-раз статически неопределимой системы уравнения деформаций могут быть записаны в виде следующей системы:

$$\begin{cases} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \ldots + \Delta_{1P} = 0; \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \ldots + \Delta_{2P} = 0; \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ \delta_{n1} X_1 + \delta_{n2} X_2 + \ldots + \Delta_{nP} = 0. \end{cases}$$

Эти уравнения являются теми дополнительными уравнениями деформаций (перемещений), которые позволяют раскрыть статическую неопределимость заданной системы. Первое из этих уравнений выражает мысль о равенстве нулю перемещения в основной системе по направлению первой отброшенной связи (по направлению силы или момента $\mathbf{X_1}$), второе – по направлению второй отброшенной связи и т. д.

Эти уравнения называются каноническими уравнениями метода сил. Такое название указывает, во-первых, на то, что уравнения составляются по определенному правилу (канону), и, во-вторых, на то, что неизвестными в уравнениях являются силы, представляющие собой реакции отброшенных связей. Число уравнений равно числу отброшенных связей, т. е. степени статической неопределимости заданной системы. Следует заметить, что вид канонических уравнений, т. е. количество слагаемых в каждом из них и общее число этих уравнений, определяется лишь степенью статической неопределимости системы и не зависит от ее конкретных особенностей.

В системе канонических уравнений в качестве коэффициентов при неизвестных стоят величины перемещений основной системы, вызываемые единичными силами или моментами, действующими по направлениям отброшенных связей. Числовые значения этих коэффициентов зависят от схемы, размеров и материала конструкции.

Коэффициент δ_{ik} системы канонических уравнений представляет перемещение по направлению **i**, вызванное силой, равной единице, действующей по направлению **k**.

Единичные перемещения δ_{ii}, расположенные на главной диагонали системы канонических уравнений, имеющие два одинаковых индекса, носят наименование главных, в отличие от побочных перемещений δ_{ik}, стоящих вне этой диагонали и имеющих разные индексы.

Симметрично расположенные относительно главной диагонали побочные перемещения в соответствии с теоремой о взаимности перемещений равны друг другу, а именно: $\delta_{ik} = \delta_{ki}$.

Это обстоятельство уменьшает объем вычислений при определении коэффициентов канонических уравнений. Коэффициенты при неизвестных в канонических уравнениях представляют собой единичные перемещения в основной системе по направлениям неизвестных X от действия сил или моментов, равных единице, приложенных по направлениям этих неизвестных.

Единичное линейное перемещение от единичной силы выражается в см/кН (м/кН и т. д.), а от единичного момента — см/(кН · см) = 1 кН; единичное угловое перемещение от единичной силы выражается в 1/кН, а от единичного момента — 1/(кН · см).

Построение расчетных эпюр

Для подсчета перемещений рекомендуется вычертить единичные эпюры M_i изгибающих моментов в основной системе (т. е. эпюры от действия $X_i = 1$), снабдив каждую из них номером соответствующего неизвестного. Отдельно следует вычертить грузовую эпюру (эпюру M_p). Единичное перемещение δ_{ik} вычисляется умножением единичной эпюры M_i на единичную эпюру $\mathbf{M_k}$, а грузовое перемещение Δ_{ip} —умножением единичной эпюры $\mathbf{M_i}$ на грузовую эпюру $\mathbf{M_p}$.

Главные перемещения существенно положительны; побочные перемещения и грузовые перемещения могут быть как положительными, так и отрицательными и, следовательно, равными нулю. После вычисления всех единичных перемещений, являющихся коэффициентами при неизвестных в системе канонических уравнений, а также свободных (грузовых) членов этих уравнений, решают уравнения, в результате чего определяют значения неизвестных. Затем строят для основной системы эпюры изгибающих моментов от каждого из найденных усилий, т. е. от $X_1, X_2, \ldots, X_i, \ldots, X_n$. Для этого могут быть использованы построенные ранее единичные эпюры, все ординаты которых необходимо теперь умножить на найденные значения соответствующих неизвестных. Просуммировав по характерным точкам (на протяжении всей рассчитываемой конструкции) ординаты эпюр от действия всех сил X с ординатами грузовой эпюры, получим окончательную (суммарную) эпюру изгибающих моментов в заданной статически неопределимой системе. Окончательная эпюра изгибающих моментов может быть построена и по-другому. К основной системе прикладываются найденные неизвестные усилия и заданная нагрузка, а затем от их суммарного воздействия строится обычными приемами окончательная эпюра изгибающих моментов.

1.6. Определение перемещений

Перемещения δ_{ij} и Δ_{1P} проще всего определяются по методу Максвелла-Мора с использованием способа Верещагина:

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} = \sum_{k=1}^{n} \int_0^{l_k} \frac{\overline{M}_i \overline{M}_j}{EI} dx = \sum_{k=1}^{n} \int_0^{l_k} \frac{\overline{M}_j \overline{M}_i}{EI} dx,$$

$$\Delta_{ip} = \sum_{k=1}^{n} \int_0^{l_k} \frac{\overline{M}_i M_p}{EI} dx \quad ,$$

где $\overline{M}_i$, $\overline{M}_j$, M_p - алгебраические выражения изгибающих моментов на k-том участке основной системы, вызванных, соответственно, действием только одной единичной силы $\overline{X}_i = 1$ или $\overline{X}_j = 1$ или внешней нагрузкой, EI – изгибная жесткость стержня.

Для стержневых систем интегралы Мора удобно вычислять по способу Верещагина. При этом операция интегрирования аналитических выражений изгибающих моментов заменяется перемножением эпюр.

Способ Верещагина применяется в случае, когда эпюры от единичных силовых факторов на прямолинейных участках оказываются линейными, а грузовая эпюра имеет следующие очертания: прямоугольник, трапеция или парабола. В связи с этим, согласно способу Верещагина, интеграл вида

$$\int \overline{M}_i M_p dx$$

равен произведению площади криволинейной эпюры **Ω** (рис. 18а) на ординату линейной эпюры $\overline{M}_i$, расположенную под центром тяжести криволинейной эпюры (рис. 18б). Следовательно, величины δ_{ij} и Δ_{iP} можно определить по формулам:

$$\delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Omega_i \overline{M}_{cj}}{EJ} ,$$

$$\Delta_{ip} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Omega_p \overline{M}_{ci}}{EJ} ,$$

где $\mathbf{\Omega_P}$ - площадь грузовой эпюры момента на участке; $\overline{M}_{Ci}$ - ордината прямолинейной (единичной) эпюры, взятая под центром тяжести с грузовой эпюры $\mathbf{M_P}$.

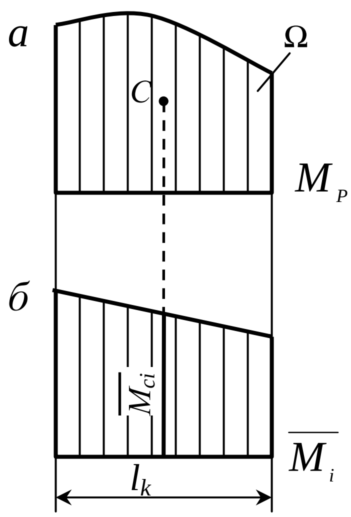


Рис. 18

Если обе эпюры (единичная и грузовая) линейные, то безразлично, площадь какой из эпюр подсчитывается, но ордината момента обязательно берется с другой эпюры.

Далее приведены площади и координаты центров тяжести некоторых фигур (рис. 19).

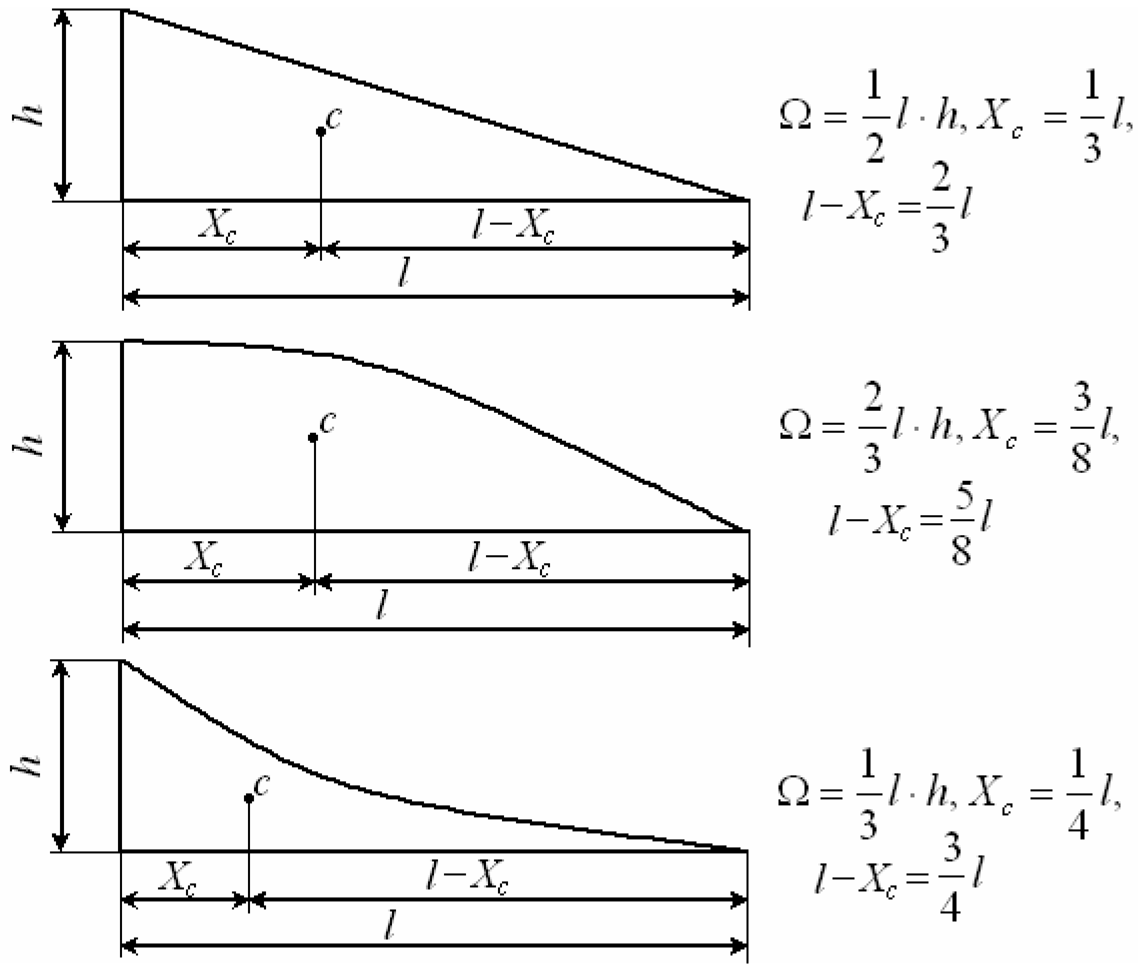
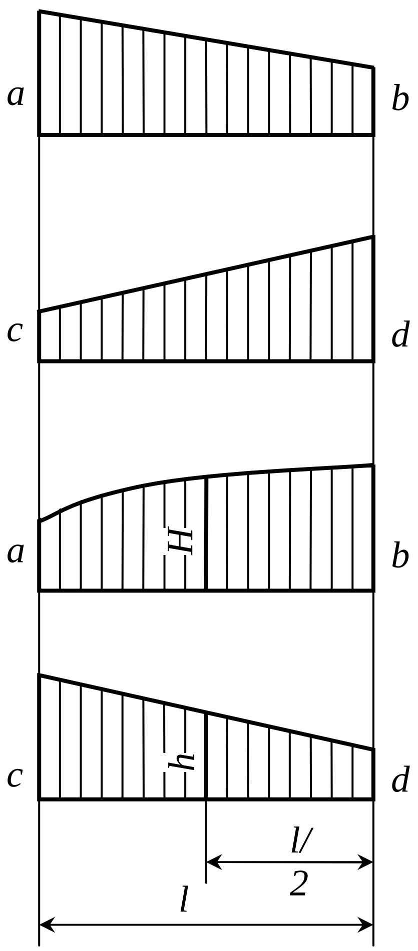


Рис. 19

В тех случаях, когда перемножаются две эпюры, имеющие вид трапеций, или когда одна эпюра имеет вид трапеции, а другая – квадратичной параболы, можно использовать формулу Симпсона. Знаки определяются следующим образом: если эпюры направлены в одну сторону, то ставится знак «+», а если в разные, то «–». Результатом перемножения будут выражения, приведенные на рис. 20.

1.7. Определение величин “лишних” неизвестных и построение эпюр внутренних силовых факторов

Подставив величины найденных перемещений в систему канонических уравнений и решив ее, находим значения неизвестных X_i. Положительные значения “лишних” неизвестных X_i свидетельствует о том, что направление реакций совпадает с их направлением, принятым в единичном состоянии. К основной системе прикладываем заданную нагрузку и найденные “лишние” неизвестные $X_{i.}$, после чего строим эпюры внутренних усилий. В общем случае нагружения в поперечных сечениях элементов рамы будут возникать три внутренних силовых фактора: изгибающий момент **M**, поперечная сила **Q** и продольная сила **N**.



$$\Delta = \frac{l(2a \cdot c + 2b \cdot d + a \cdot d + b \cdot c)}{6EI}$$

$$\Delta = \frac{l(a \cdot c + b \cdot d + 4H \cdot h)}{6EI}$$

Рис. 20

1.8. Учет симметрии при расчете статически неопределимых рам

Можно значительно упростить систему канонических уравнений метода сил, если есть возможность учесть симметрию конструкции и приложенных к ней нагрузок, поскольку при этом некоторые побочные коэффициенты канонических уравнений оказываются равными нулю.

Симметричной называется конструкция, если одна из ее частей является зеркальным отражением второй части относительно плоскости (оси) симметрии. На рис. 21а изображена геометрически симметричная рама.

Усилия (и внешние, и внутренние), действующие на симметричную конструкцию, бывают симметричными и кососимметричными.

Симметричной называется нагрузка, если усилия, приложенные к одной части конструкции, являются зеркальным отображением усилий, приложенных к другой ее части.

Симметрично нагруженная геометрически симметричная рама изображена на рис. 21б.

Кососимметричной называется нагрузка, если усилия, приложенные к одной части конструкции, являются зеркальным отображением усилий, приложенных к другой ее части, но взятых с противоположным знаком.

Кососимметрично нагруженная геометрически симметричная рама изображена на рис. 21в.

Любую несимметричную нагрузку, приложенную к симметричной конструкции, можно разложить на две составляющие, одна из которых будет симметричной, а другая – кососимметричной. Полученные две задачи решаются затем с учетом симметрии, а результаты суммируются.

Особенностью, упрощающей решение статически неопределимых задач с учетом симметрии, является тот факт, что в качестве лишних неизвестных здесь целесообразно выбирать не реакции опор, а внутренние усилия, расположенные в плоскости симметрии конструкции.

Аналогичным образом свойства симметрии и кососимметрии относятся к внутренним силовым факторам в поперечных сечениях рамы, которые становятся лишними неизвестными при рассекании рамы по линии симметрии (рис. 21г). Так, поперечные силы $\mathbf{X_1}$ называются кососимметричными силовыми факторами, а продольные силы $\mathbf{X_2}$ и изгибающие моменты $\mathbf{X_3}$ называются симметричными силовыми факторами.

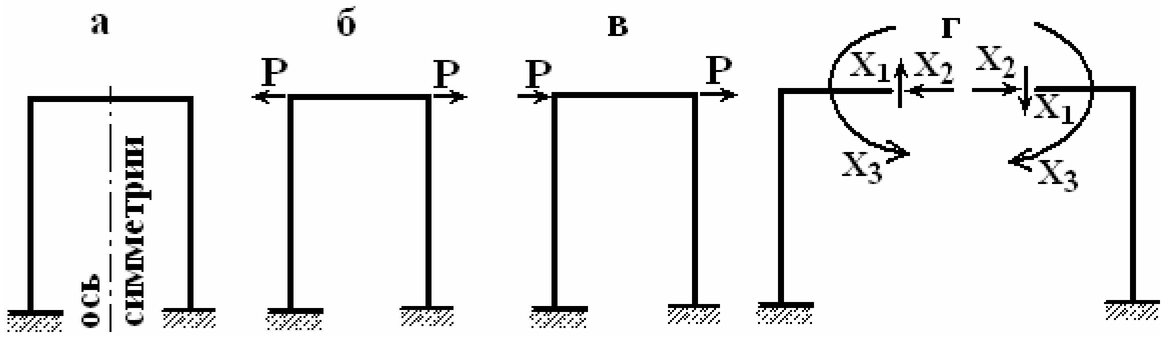


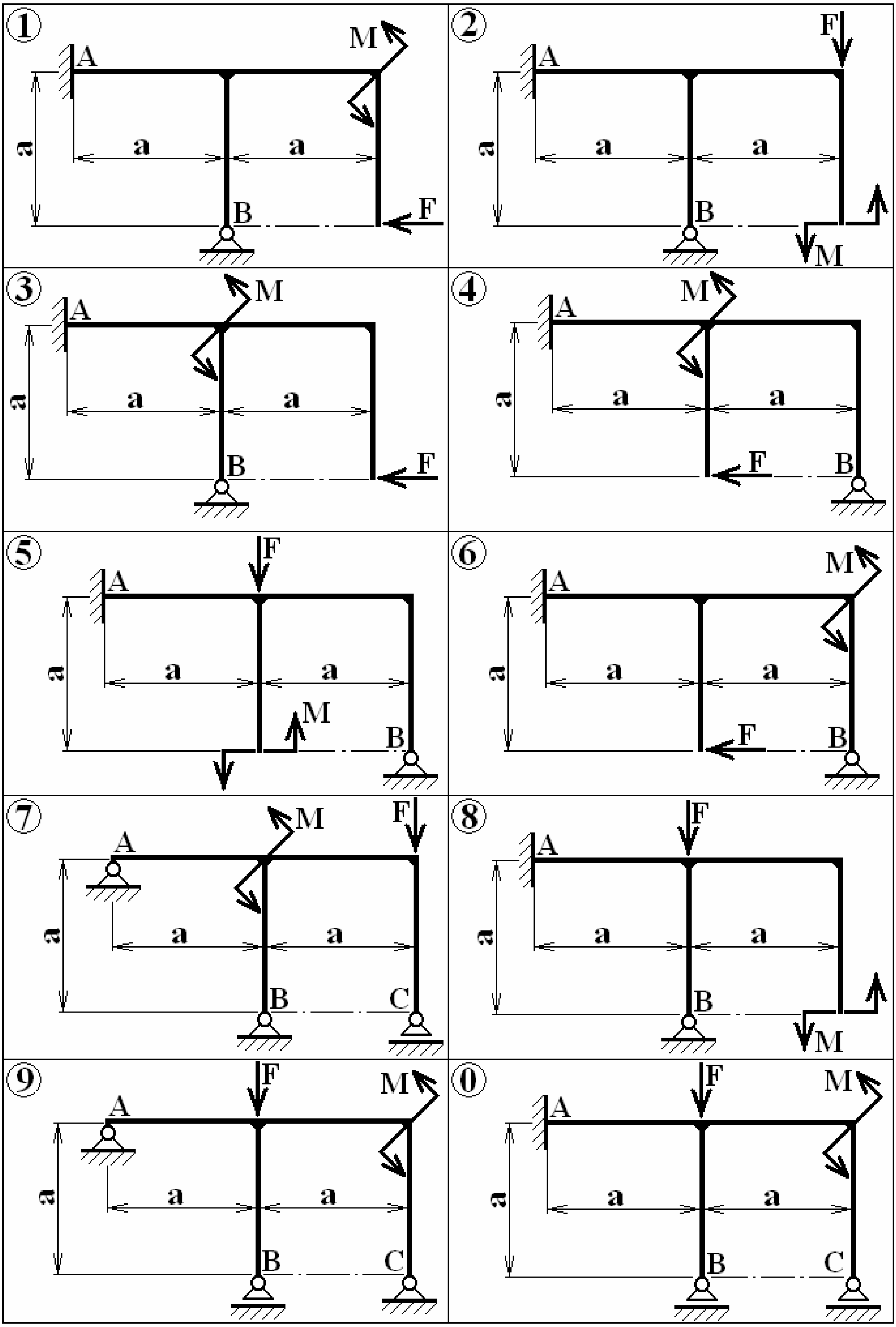
Рис. 21

При расчете симметричной рамы можно руководствоваться следующим: при симметричной внешней нагрузке кососимметричные силовые факторы равны нулю, а при кососимметричной внешней нагрузке симметричные силовые факторы равны нулю. Это происходит потому, что если перемножать симметричную и кососимметричную эпюры, то в ответе будет получаться ноль, так как результат перемножения эпюр на левой половине рамы равен результату перемножения эпюр на правой половине, но с обратным знаком, что в сумме дает ноль.

2. ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

Таблица 1

Первая цифра шифра, № схемы по рис. 10	Вторая цифра шифра, сила **F**	Третья цифра шифра, момент **M**
1	2 P	3 P a
2	4 P	2 P a
3	3 P	2 P a
4	3 P	4 P a
5	2 P	4 P a
6	5 P	2 P a
7	4 P	3 P a
8	1 P	3 P a
9	2 P	1 P a
0	3 P	5 P a



1
A
M
a
a
a
B
F
2
F
A
a
a
a
B
M
3
M
A
a
a
a
B
F
4
M
A
a
a
a
F
B
5
F
A
a
a
a
M
B
6
M
A
a
a
a
F
B
7
M
F
A
a
a
a
B
C
8
F
A
a
a
a
B
M
9
F
M
A
a
a
a
B
C
0
F
M
A
a
a
a
B
C

Рис. 22

3. ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

3.1. Исходные данные

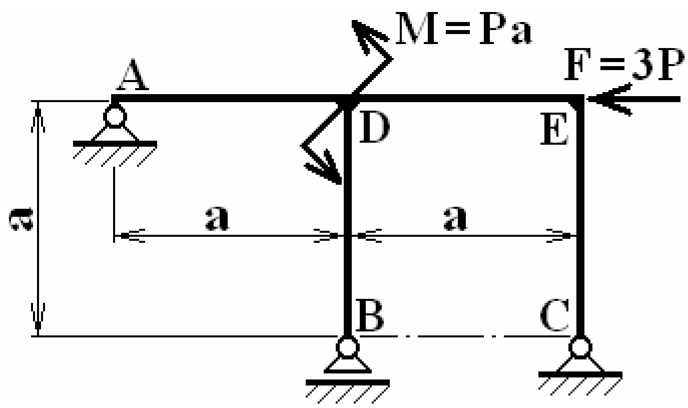


Рис. 23

3.2. Определение степени статической неопределимости и выбор основной системы

Данная рама является два раза статически неопределимой:

$$\mathbf{C_H = O_П = 5 - 3 = 2}.$$

Основная система показана на рис. 24.

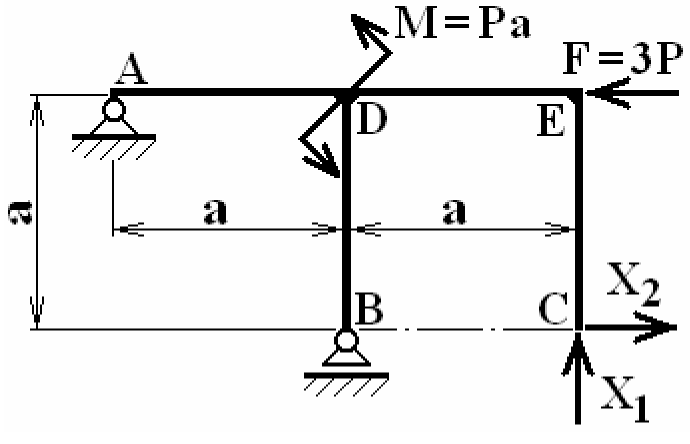


Рис. 24

3.3. Составление системы канонических уравнений

Так как число канонических уравнений всегда равно степени статической неопределимости, то для дважды статически неопределимой системы записываются два канонических уравнения:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} = 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0. \end{cases}$$

3.4. Построение эпюр изгибающих моментов от внешней нагрузки и от единичных сил

На рис. 25 построена эпюра изгибающих моментов $\mathbf{M_P}$ от внешней нагрузки $\mathbf{F = 3P}$ и $\mathbf{M = Pa}$.

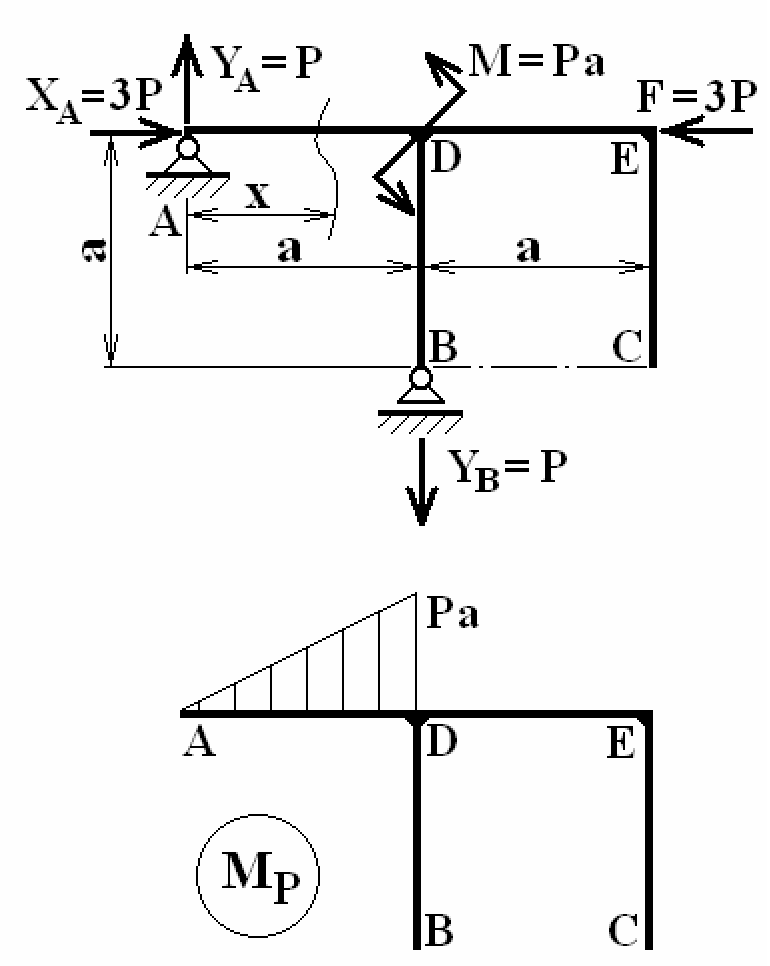


Рис. 25

Определим опорные реакции:

$\Sigma X = 0;\ X_A - 3P = 0;\ X_A = 3P;$

$\Sigma M_A = 0;\ M_A - Y_B a = Pa - Y_B a = 0;\ Y_B = P;$

$\Sigma Y = 0;\ Y_A - Y_B = Y_A - P = 0;\ Y_A = P.$

Границы участка: $0 \le x \le a.$

$M_P = Y_A x = Px;$

$x = 0;\ M_P = 0;$

$x = a;\ M_P = Pa.$

На рис. 26 построена эпюра изгибающих моментов M_1 от единичной нагрузки $X_1 = 1$.

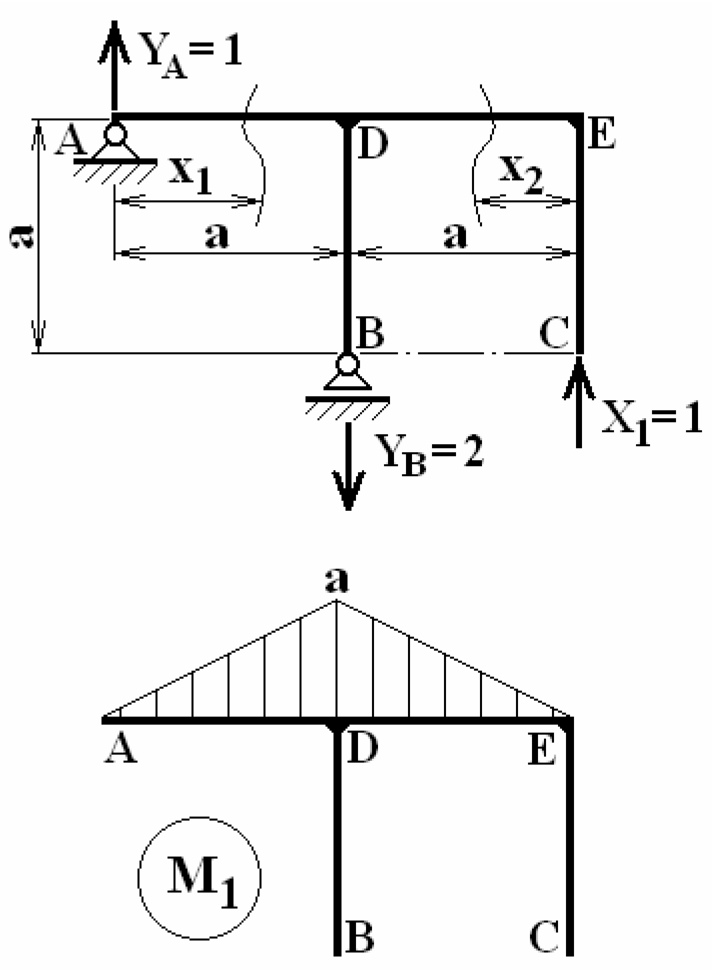


Рис. 26

Определим опорные реакции:

$\Sigma X = 0;\ X_A = 0;$

$\Sigma M_A = 0;\ X_1 2a - Y_B a = 0;\ Y_B = 2;$

$\Sigma Y = 0;\ Y_A - Y_B + X_1 = 0;\ Y_A = 1.$

Границы первого участка: $\mathbf{0 \le x_1 \le a.}$
$\mathbf{M_{11} = Y_A x_1 = 1\ x_1;}$
$\mathbf{x_1 = 0;\ M_{11} = 0;}$
$\mathbf{x_1 = a;\ \ M_{11} = a.}$

Границы второго участка: $\mathbf{0 \le x_2 \le a.}$
$\mathbf{M_{12} = X_1 x_2 = 1\ x_2;}$
$\mathbf{x_2 = 0;\ M_{12} = 0;}$
$\mathbf{x_2 = a;\ \ M_{12} = a.}$

На рис. 27 построена эпюра изгибающих моментов $\mathbf{M_2}$ от единичной нагрузки $\mathbf{X_2 = 1}$.

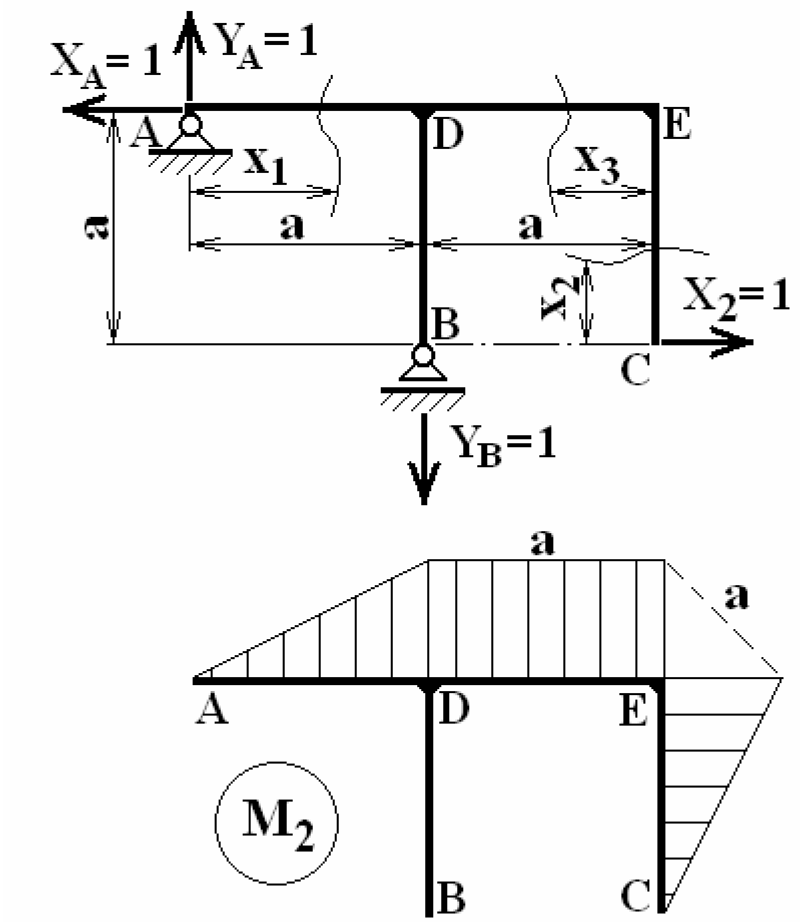


Рис. 27

Определим опорные реакции:
$\mathbf{\Sigma X = 0;\ X_A - X_2 = X_A - 1 = 0;\ \ X_A = 1;}$
$\mathbf{\Sigma\ M_A = 0;\ X_2\, a - Y_B\, a = 0;\ Y_B = 1;}$
$\mathbf{\Sigma Y = 0;\ \ Y_A - Y_B = Y_A - 1 = 0;\ \ Y_A = 1.}$

Границы первого участка: $\mathbf{0 \le x_1 \le a.}$
$\mathbf{M_{21} = Y_A x_1 = 1\ x_1;}$
$\mathbf{x_1 = 0;\ M_{21} = 0;}$
$\mathbf{x_1 = a;\ M_{21} = a.}$

Границы второго участка: $\mathbf{0 \le x_2 \le a.}$
$\mathbf{M_{22} = X_2\, x_2 = 1\ x_2;}$
$\mathbf{x_2 = 0;\ M_{22} = 0;}$
$\mathbf{x_2 = a;\ M_{22} = a.}$

Границы третьего участка: $\mathbf{0 \le x_3 \le a.}$
$\mathbf{M_{23} = X_2\ a = a.}$

На рис. 28 построена суммарная эпюра $\mathbf{M_S}$ от единичных нагрузок $\mathbf{X_1=1}$ и $\mathbf{X_2=1}$.

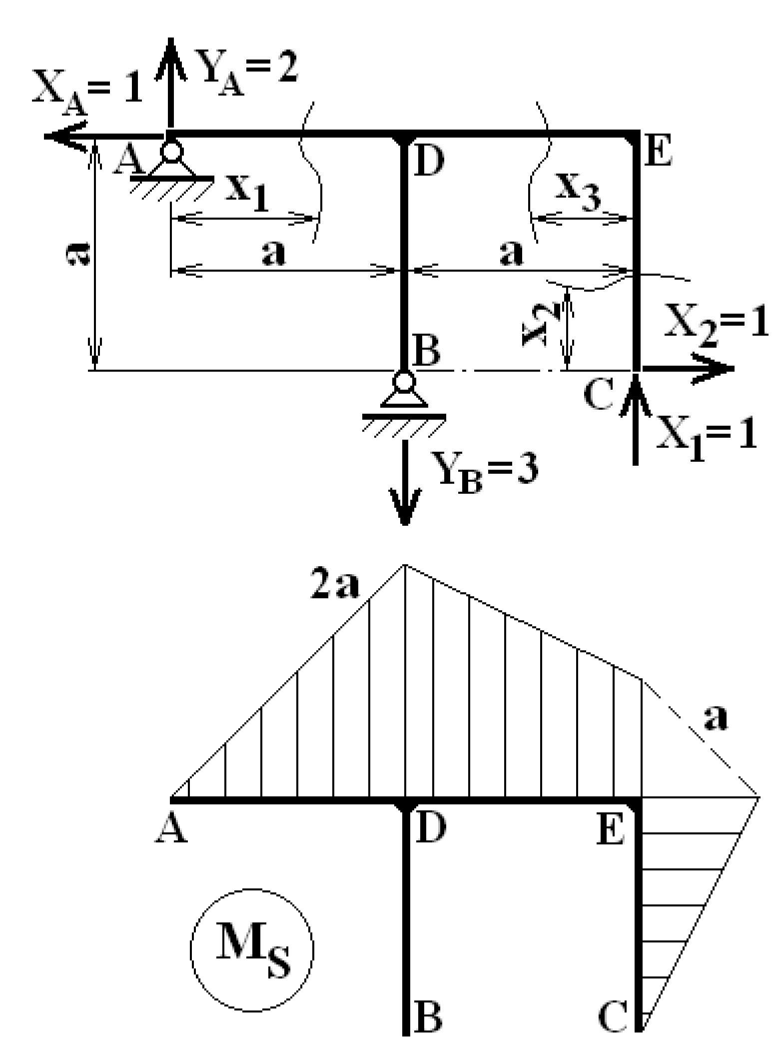


Рис. 28

Определим опорные реакции:

$\Sigma X = 0;\ X_A - X_2 = X_A - 1 = 0;\ \ X_A = 1;$
$\Sigma M_A = 0;\ X_2\,a + X_1\,2a - Y_B\,a = 0;\ Y_B = 3;$
$\Sigma Y = 0;\ \ Y_A - Y_B + X_1 = 0;\ \ Y_A = 2.$

Границы первого участка: **$0 \le x_1 \le a.$**
$M_{S1} = Y_A x_1 = 2\,x_1;$
$x_1 = 0;\ M_{S1} = 0;$
$x_1 = a;\ \ M_{S1} = 2a.$

Границы второго участка: **$0 \le x_2 \le a.$**
$M_{S2} = X_2\,x_2 = 1\,x_2;$
$x_2 = 0;\ M_{S2} = 0;$
$x_2 = a;\ \ M_{S2} = a.$

Границы третьего участка: **$0 \le x_3 \le a.$**
$M_{S3} = X_1\,x_3 + X_2\,a = x_3 + a;$
$x_3 = 0;\ M_{S3} = a;$
$x_3 = a;\ \ M_{S3} = 2a.$

3.5. Определение перемещений

Величины перемещений определим, используя способ Верещагина:

$$\delta_{11} = \frac{a^2}{2}\frac{2}{3}\frac{a}{EJ} + \frac{a^2}{2}\frac{2}{3}\frac{a}{EJ} = \frac{2}{3}\frac{a^3}{EJ};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{a^2}{2}\frac{2}{3}\frac{a}{EJ} + \frac{a^2}{2}\frac{a}{EJ} = \frac{5}{6}\frac{a^3}{EJ};$$

$$\delta_{22} = \frac{2}{3}\frac{a^3}{EJ} + \frac{a^3}{EJ} = \frac{5}{3}\frac{a^3}{EJ};$$

$$\Delta_{1P} = \frac{a^2}{2}\frac{2}{3}\frac{Pa}{EJ} = \frac{P}{3}\frac{a^3}{EJ};$$

$$\Delta_{2P} = \frac{P}{3}\frac{a^3}{EJ}.$$

Выполним проверку найденных перемещений:

$$\Delta_{SS}=\frac{2a^2}{2}\frac{2}{3}\frac{2a}{EJ}+\frac{a}{6EJ}\left(2\cdot 2a2a+2aa+a2a+a2a\right)+\frac{a^2}{2}\frac{2}{3}\frac{a}{EJ}=4\frac{a^3}{EJ};$$

$$\delta_{11}+\delta_{22}+2\delta_{12}=\frac{2}{3}\frac{a^3}{EJ}+\frac{5}{3}\frac{a^3}{EJ}+2\frac{5}{6}\frac{a^3}{EJ}=4\frac{a^3}{EJ}=\Delta_{SS};$$

$$\Delta_{SP}=2a\frac{a}{2}\frac{2}{3}\frac{Pa}{EJ}=\frac{2}{3}\frac{Pa^3}{EJ}=\Delta_{1P}+\Delta_{2P}.$$

3.6. Определение величин лишних неизвестных

Подставив вычисленные величины перемещений в систему канонических уравнений, получим:

$$\begin{cases}\dfrac{2}{3}\dfrac{a^3}{EJ}X_1+\dfrac{5}{6}\dfrac{a^3}{EJ}X_2+\dfrac{P}{3}\dfrac{a^3}{EJ}=0;\\[2ex]\dfrac{5}{6}\dfrac{a^3}{EJ}X_1+\dfrac{5}{3}\dfrac{a^3}{EJ}X_2+\dfrac{P}{3}\dfrac{a^3}{EJ}=0.\end{cases}$$

Домножив оба уравнения на **6 EJ** и поделив на $\mathbf{a^3}$, получим:

$$\begin{cases}4X_1+5X_2+2P=0;\\5X_1+10X_2+2P=0.\end{cases}$$

Вычтя из второго уравнения системы первое, получим:

$$\mathbf{X_1+5X_2=0,}$$

$$\mathbf{X_1=-5X_2},$$

подставив в первое уравнение, имеем:

$$\mathbf{-20X_2+5X_2+2P=0,}$$

$$\mathbf{X_2 = 2P/15 > 0,}$$

следовательно $\mathbf{X_2}$ направлен вправо;

$$\mathbf{X_1 = -10P/15 < 0,}$$

следовательно $\mathbf{X_1}$ направлен вниз и равен $\mathbf{X_1 = 10\ P/15}$.

3.7. Построение эпюр внутренних силовых факторов M, N и Q

Нагруженная рама показана на рис. 29.

Определим опорные реакции:

$\mathbf{\Sigma X = 0;\ X_A - F + X_2 = 0;\ \ X_A = 43/15\ P;}$

$\mathbf{\Sigma\ M_A = 0;\ X_2\, a - X_1\, 2a + Y_B\, a + M = 0;\ Y_B = 3/15\ P;}$

$\mathbf{\Sigma Y = 0;\ \ Y_A + Y_B - X_1 = 0;\ \ Y_A = 7/15\ P.}$

Границы первого участка: $\mathbf{0 \le x_1 \le a.}$

$\mathbf{N_1 = -\ X_A = -\ 43/15\ P;}$

$\mathbf{Q_1 = Y_A = 7/15\ P;}$

$\mathbf{M_1 = Y_A x_1 = 7/15\ Px_1;}$

$\mathbf{x_1 = 0;\ M_1 = 0;}$

$\mathbf{x_1 = a;\ \ M_1 = 7/15\ Pa.}$

Границы второго участка: $\mathbf{0 \le x_2 \le a.}$

$\mathbf{N_2 = X_1 = 10/15\ P;}$

$\mathbf{Q_2 = -X_2 = -2/15\ P\ ;}$

$\mathbf{M_2 = X_2\, x_2 = 2/15\ Px_2;}$

$\mathbf{x_2 = 0;\ M_2 = 0;}$

$\mathbf{x_2 = a;\ \ M_2 = 2/15\ Pa.}$

Границы третьего участка: $\mathbf{0 \le x_3 \le a.}$

$\mathbf{N_3 = -\ F_A + X_2 = -\ 43/15\ P;}$

$\mathbf{Q_3 = X_1 = 10/15\ P;}$

$\mathbf{M_3 = -\ X_1\, x_3 + X_2\, a = -\ 10/15\ Px_3 + 2/15\ Pa;}$

$\mathbf{x_3 = 0;\ M_3 = 2/15\ Pa;}$

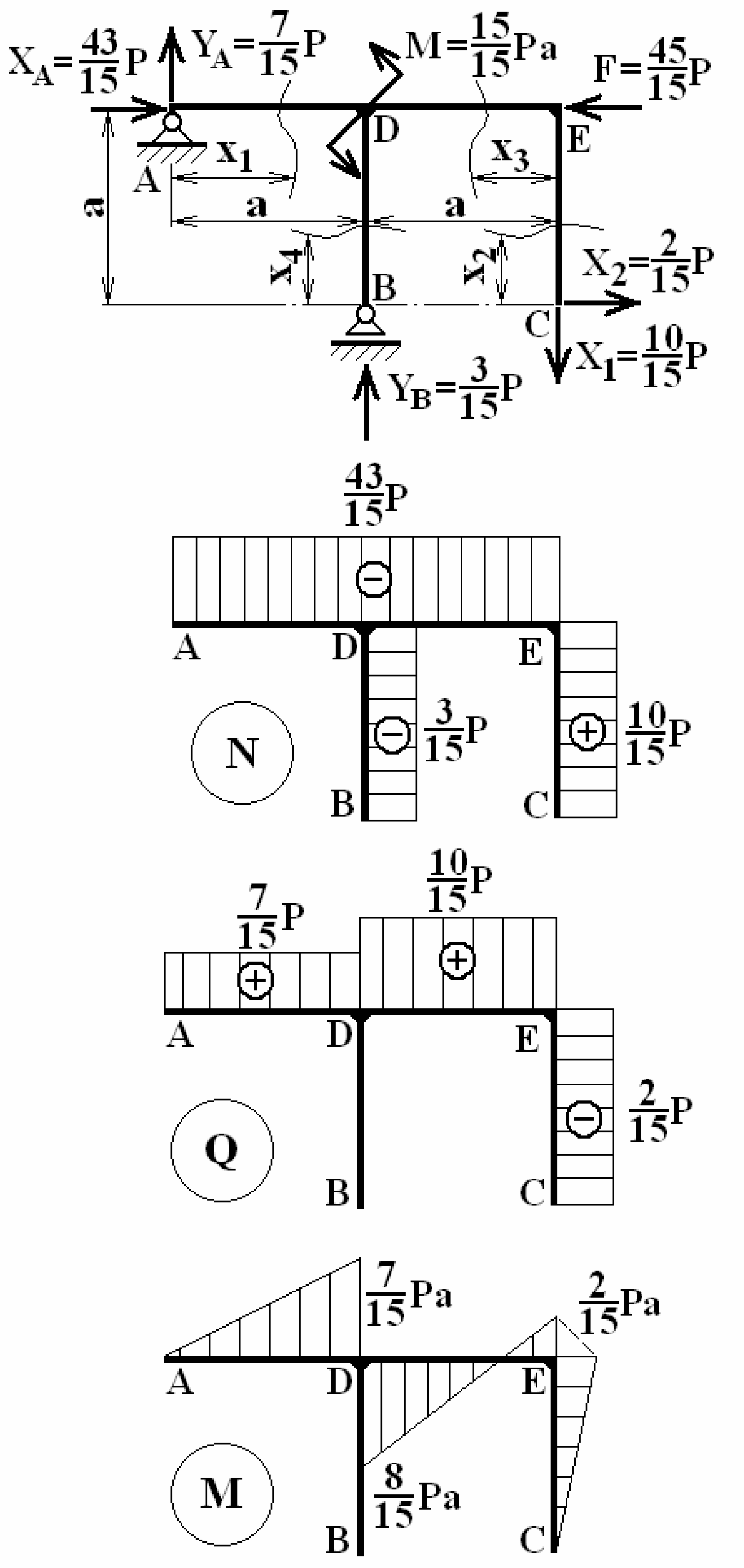
$\mathbf{x_3 = a;\ \ M_3 = -\ 8/15\ Pa.}$

Границы четвертого участка: $\mathbf{0 \le x_4 \le a.}$

$\mathbf{N_4 = -\ Y_B = -3/15\ P\ ;}$

$\mathbf{Q_4 = 0;}$

$\mathbf{M_4 = 0.}$



$X_A=\frac{43}{15}P$
$Y_A=\frac{7}{15}P$
$M=\frac{15}{15}Pa$
$F=\frac{45}{15}P$
D
E
A
x_1
x_3
a
a
a
x_4
x_2
B
C
$X_2=\frac{2}{15}P$
$X_1=\frac{10}{15}P$
$Y_B=\frac{3}{15}P$
$\frac{43}{15}P$
A
D
E
$\frac{3}{15}P$
$\frac{10}{15}P$
N
B
C
$\frac{10}{15}P$
$\frac{7}{15}P$
A
D
E
$\frac{2}{15}P$
Q
B
C
$\frac{7}{15}Pa$
$\frac{2}{15}Pa$
A
D
E
M
$\frac{8}{15}Pa$
B
C

Рис. 29

Показанные на рис. 30 узлы **D** и **E** рамы находится в равновесии при действии внешней нагрузки и внутренних усилий.

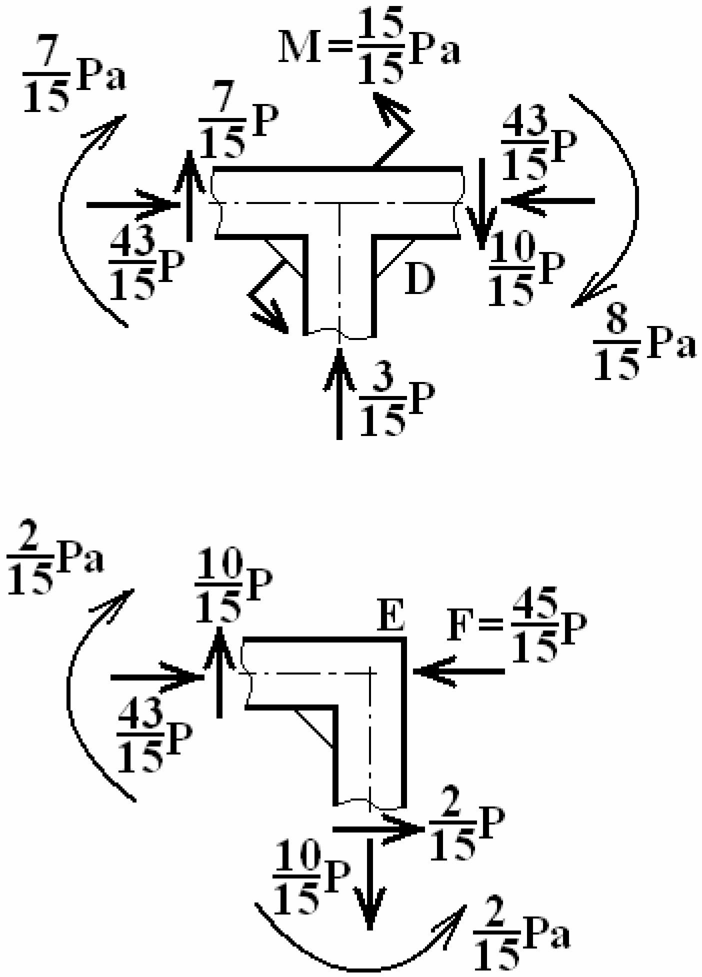


Рис. 30

Так как перемещений по направлению лишних связей нет, то:

$$\mathbf{M\,M_S = M\,M_1 + M\,M_2 = 0;}$$

$$\mathrm{M\,M_1} = \frac{a^2}{2}\frac{2}{3}\frac{7}{15}\frac{Pa}{EJ} + \frac{a}{6EJ}\left[2a\left(-\frac{8}{15}Pa\right) + a\frac{2}{15}Pa\right] = 0;$$

$$\mathrm{M\,M_2} = \frac{7}{3\cdot 15}\frac{Pa^3}{EJ} + \frac{a^2}{2EJ}\left[-\frac{8}{15} + \frac{2}{15}\right]Pa + \frac{a^2}{2}\frac{2}{3}\frac{2}{15}\frac{Pa}{EJ} = 0.$$

4. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. В чем сущность способа Верещагина?
2. Что называется «основной системой»?
3. Что означают величины $\boldsymbol{\delta_{11}}$ и $\boldsymbol{\Delta_{1P}}$?
4. Каков физический смысл произведений $\mathbf{X_1 \cdot \delta_{11}}$ и $\mathbf{X_2 \cdot \delta_{12}}$?
5. Какая мысль выражается при помощи уравнения $\mathbf{X_1\ \delta_{11} + X_2\ \delta_{12} + \Delta_{1P} = 0}$?
6. Что означает термин “лишние связи”?
7. Как определить степень статической неопределимости?
8. Что такое основная система?
9. Что устанавливает каноническое уравнение метода сил?
10. Какие существуют проверки правильности выполнения этапов расчета рам методом сил?

Библиографический список

Агаханов М.К. Сопротивление материалов: учебное пособие / М.К. Агаханов, В.Г. Богопольский – М.: МГСУ, 2016. – 268 с.

Агапов В.П. Сопротивление материалов: учебник / В.П. Агапов – М.: МГСУ, ЭБС АСВ, 2014.— 336 с.

Дарков А.В. Строительная механика: учебник для вузов / А.В. Дарков – СПб.: Лань, 2018. – 400 с.

Оглавление