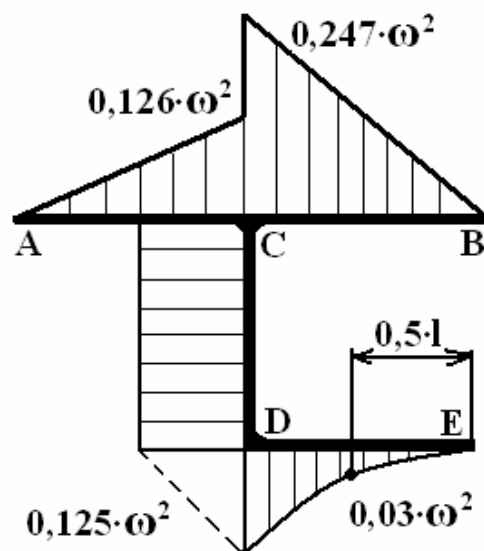
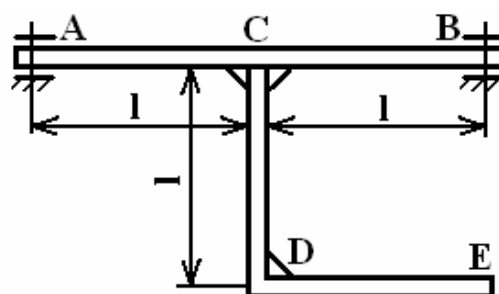


П. В. Кауров, С. Г. Петров

ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Часть II

Учебно-методическое пособие



Санкт-Петербург

2019

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ**

**«САНКТ–ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПРОМЫШЛЕННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ДИЗАЙНА»**

ВЫСШАЯ ШКОЛА ТЕХНОЛОГИИ И ЭНЕРГЕТИКИ

П. В. Кауров, С. Г. Петров

**ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ**

Часть II

Учебно-методическое пособие

Санкт-Петербург

2019

УДК 539.3 (075)
ББК 22.251я7
К 301

Кауров П. В., Петров С. Г. Техническая механика. Сопротивление материалов: учебно-методическое пособие / СПбГУПТД ВШТЭ – СПб., 2019. Часть II. – 60 с.

Учебно-методическое пособие содержит общие требования к выполнению контрольной работы, краткие сведения по теории, варианты заданий и примеры расчета. Целью настоящего учебно-методического пособия является развитие у студентов навыков самостоятельного расчета элементов конструкций на прочность и жесткость.

Учебно-методическое пособие предназначается для студентов механических специальностей заочной формы обучения, выполняющих контрольные работы по курсу "Техническая механика".

Рецензенты: зав. кафедрой машин автоматизированных систем ВШТЭ СПбГУПТД, д-р техн. наук, профессор А. В. Александров;

зав. кафедрой инженерной графики и автоматизированного проектирования ВШТЭ СПбГУПТД, канд. техн. наук, доцент А. В. Кишко.

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом университета в качестве учебно-методического пособия.

© Высшая школа технологии и энергетики
СПбГУПТД, 2019

Редактор и корректор В. А. Басова
Техн. редактор Л. Я. Титова

Темплан 2019 г., поз. 63.

Подп. к печати 18.06.19. Формат 60×84/16. Бумага тип. №1. Печать офсетная. Печ. л. 3,75. Уч.- изд. л. 3,75. Тираж 25 экз. Изд № 63. Цена "С". Заказ .

Ризограф ВШТЭ СПбГУПТД, СПб., 198095, ул. Ивана Черных, 4.

Предисловие

Во второй части учебно-методического пособия рассмотрены основные сведения по теории, приведены варианты заданий и примеры решения задач для студентов-механиков заочной формы обучения, выполняющих контрольные работы по следующим темам курса:

1. Сложное сопротивление.
2. Статически неопределимые системы.
3. Устойчивость равновесия деформируемых систем.
4. Динамическая нагрузка.

При решении каждой задачи контрольных работ вначале должны быть указаны исходные данные, т.е. условия задачи, схема и все заданные величины. Расчет следует сопровождать заголовками и краткими пояснениями. В аналитических выкладках вначале записываются формулы, а затем подставляются численные значения символов. В итоговых величинах указывается размерность. В окончательных результатах следует сохранять только оправданное количество значащих цифр.

Для измерения физических и механических величин используется международная система единиц. В качестве основных единиц в СИ приняты: метр (м); секунда (с); килограмм массы (кг); ньютон (Н); паскаль (1 Па = 1 Н/м²). Также используются кратные единицы: килоньютон (1 кН = 10³ Н) и мегапаскаль (1 МПа = 1 Н/мм² = 10⁶ Па).

Студент обязан взять из таблицы, прилагаемой к условию задачи, данные в соответствии со своим личным номером (шифром) и первыми шестью буквами русского алфавита, которые следует расположить под шифром, например:

шифр – **2 8 3 0 5 2**,
буквы – **а б в г д е**.

В случае личного номера, состоящего из семи цифр, вторая цифра шифра не учитывается.

Из каждого вертикального столбца любой таблицы, обозначенного внизу определенной буквой, надо взять только одно число, стоящее в той горизонтальной строке, номер которой совпадает с номером буквы. Например, вертикальные столбцы табл. 2 обозначены буквами: **е, г, д, е, в**. В этом случае, при указанном выше личном номере (шифре) **283052**, студент должен взять из столбца **е** строку номер 2 (схема II, $q = 20$ кН/м), из столбца **г** – строку номер 0 ($l = 10$ м), из столбца **в** – строку номер 3 ($k = 1,3$ м) и из столбца **д** – строку номер 5 ($h = 6$ м).

1. СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

1.1. Краткие сведения по теории

Деталь находится в состоянии сложного сопротивления тогда, когда она испытывает одновременно несколько простейших видов деформации.

В общем случае нагружения в поперечном сечении стержня действуют шесть усилий (продольная сила N , два изгибающих момента M_y и M_z , две поперечные силы Q_y и Q_z , крутящий момент M_k).

Таким образом, стержень может испытывать следующие виды деформации: поперечные изгибы в горизонтальной и вертикальной плоскостях, продольную деформацию и кручение.

Совместное действие изгиба в главных плоскостях инерции XOY и XOZ называется сложным (косым) изгибом (рис. 1).

Стержень испытывает внецентренное действие нагрузки, когда продольная сила (сжимающая или растягивающая) приложена эксцентрично, т.е. есть направление ее действия не совпадает с продольной осью стержня (рис. 2).

При совместном действии изгибающих моментов и продольных сил стержень испытывает сложный изгиб с продольной деформацией (рис. 3).

Изгиб с кручением также является одним из видов сложного сопротивления.

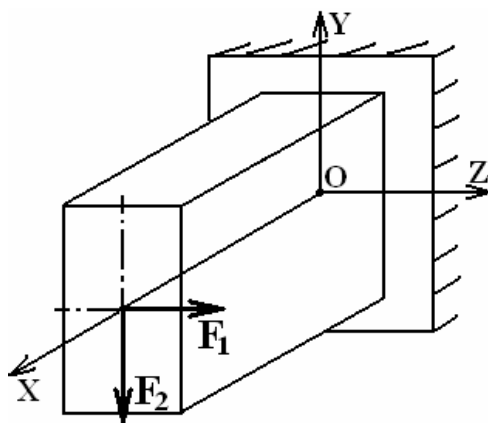


Рис. 1

В машиностроительных конструкциях характерным примером деталей, работающих на изгиб и кручение, являются валы различных машин.

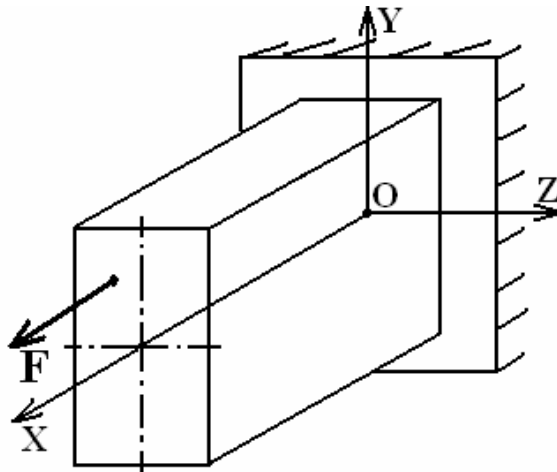


Рис. 2

Если стержень достаточно жесткий, то расчет можно вести по недеформированной схеме и при определении нормальных и касательных напряжений применить принцип суперпозиции:

$$\sigma = \sigma(N) + \sigma(M_z) + \sigma(M_Y) + \sigma(M_K), \quad (1)$$

$$\tau = \tau(Q_Y) + \tau(Q_z) + \tau(M_K). \quad (2)$$

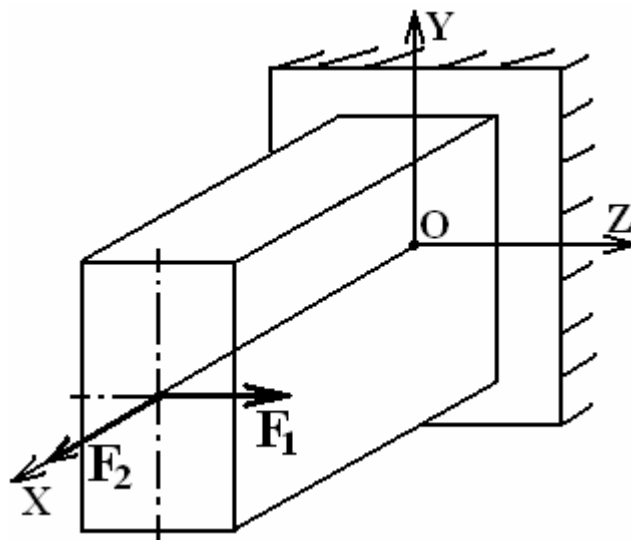


Рис. 3

При работе вала в его поперечных сечениях преобладающими являются нормальные напряжения $\sigma_{И}$ от изгиба (если нет продольной деформации) и касательные напряжения $\tau_{КР}$ от кручения.

Проверку прочности валов, изготовленных из пластичных материалов, следует производить по третьей или четвертой теории прочности, так как они используются для пластичных материалов.

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma_{\text{И}}^2 + 4\tau_{\text{КР}}^2} \leq [\sigma], \quad (3)$$

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma_{\text{И}}^2 + 3\tau_{\text{КР}}^2} \leq [\sigma], \quad (4)$$

где $[\sigma]$ - допускаемое нормальное напряжение.

Эти неравенства являются условиями прочности валов при одновременном их изгибе с кручением. Они должны выполняться во всех сечениях вала.

Для круглых поперечных сечений полярный момент сопротивления равен удвоенному моменту сопротивления относительно любой центральной оси ($W_P = 2 \cdot W_Z = 2 \cdot W_Y$).

Наибольшие значения нормального и касательного напряжений для круглого сплошного вала достигаются в точках на его контуре, и они определяются, соответственно, следующими формулами (рис. 4):

$$\sigma_{\text{И}} = \frac{M_{\text{И}}}{W_Z}, \quad (5)$$

$$\tau_{\text{КР}} = \frac{M_{\text{К}}}{W_P} = \frac{M_{\text{К}}}{2 \cdot W_Z}. \quad (6)$$

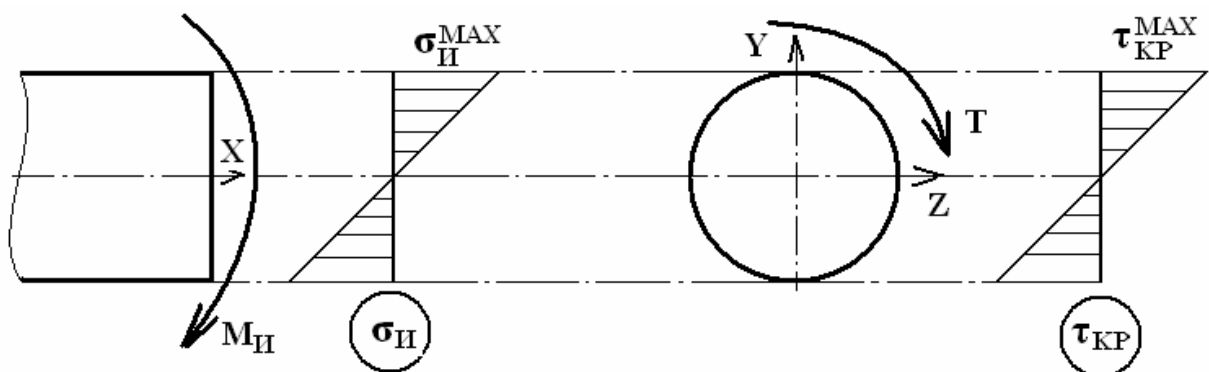


Рис. 4

Т.е. при расчете элементов, работающих одновременно на изгиб и кручение, в первую очередь необходимо выяснять расчетные значения изгибающих $M_{\text{И}}$ и крутящих моментов $M_{\text{К}}$.

Подставив выражения для напряжений в условия прочности, получим:

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = \frac{\sqrt{M_{\text{И}}^2 + M_{\text{К}}^2}}{W_Z} \leq [\sigma], \quad (7)$$

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{IV}} = \frac{\sqrt{M_{\text{И}}^2 + 0,75M_{\text{К}}^2}}{W_Z} \leq [\sigma]. \quad (8)$$

Выражения, стоящие в числителе, назовем эквивалентными моментами:

$$M_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = \sqrt{M_{\text{И}}^2 + M_{\text{К}}^2}, \quad (9)$$

$$M_{\text{ЭКВ}}^{\text{IV}} = \sqrt{M_{\text{И}}^2 + 0,75 \cdot M_{\text{К}}^2}. \quad (10)$$

Вал изгибается в горизонтальной и вертикальной плоскостях, но так как поперечное сечение круглое, то результирующий изгибающий момент определяется по формуле:

$$M_{\text{И}} = \sqrt{M_{\text{Z}}^2 + M_{\text{Y}}^2}, \quad (11)$$

т. е.
$$M_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = \sqrt{M_{\text{Z}}^2 + M_{\text{Y}}^2 + M_{\text{К}}^2}, \quad (12)$$

$$M_{\text{ЭКВ}}^{\text{IV}} = \sqrt{M_{\text{Z}}^2 + M_{\text{Y}}^2 + 0,75 \cdot M_{\text{К}}^2}. \quad (13)$$

В общем случае M_{Y} , M_{Z} и $M_{\text{К}}$, а следовательно, и эквивалентные моменты изменяются по длине вала. Для проверки прочности вала необходимо знать максимальную величину эквивалентного момента $M_{\text{ЭКВ,МАХ}}$.

Часто по виду эпюр M_{Y} , M_{Z} и $M_{\text{К}}$ можно сразу определить наиболее опасное сечение, т.е. сечение, где эквивалентный момент максимален. В некоторых случаях приходится рассматривать два-три сечения, определять в них значение эквивалентного момента и таким образом найти $M_{\text{ЭКВ,МАХ}}$.

Подбор сечения сплошного вала, т.е. определение его диаметра, осуществляется из условия прочности:

$$\frac{M_{\text{ЭКВ,МАХ}}}{W_{\text{Z}}} \leq [\sigma]. \quad (14)$$

Для круглых поперечных сечений:

$$W_{\text{Z}} = \frac{\pi \cdot d^3}{32}, \quad (15)$$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{\text{ЭКВ,МАХ}}}{\pi \cdot [\sigma]}}. \quad (16)$$

Полученное значение диаметра следует округлить до ближайшего большего из нормального ряда чисел.

1.2. Пример выполнения задания

Шкив диаметром D_1 и с углом наклона ветвей ремня к горизонту α_1 делает n оборотов в минуту и передает мощность P кВт. Два других шкива имеют одинаковый диаметр D_2 и одинаковые углы наклона ветвей ремня к горизонту α_2 , и каждый из них передает мощность $0,5 \cdot P$ (рис. 5).

Требуется:

- 1) определить моменты, приложенные к шкивам, по заданным P и n ;
- 2) построить эпюры крутящих моментов M_K ;
- 3) определить окружные усилия F_{t1} и F_{t2} , действующие на шкивы, по заданным диаметрам шкивов D_1 и D_2 ;
- 4) определить давления на вал, принимая их равными трем окружным усилиям;
- 5) определить силы, изгибающие вал в горизонтальной и вертикальной плоскостях (вес шкивов и вала не учитывать);
- 6) построить эпюры изгибающих моментов от горизонтальных сил M_Y и от вертикальных сил M_Z ;
- 7) построить эпюры суммарных изгибающих моментов, пользуясь формулой $M_{\text{И}} = \sqrt{M_Z^2 + M_Y^2}$;
- 8) при помощи эпюр M_K и $M_{\text{И}}$ найти опасное сечение и определить максимальный эквивалентный момент (по третьей теории прочности);
- 9) подобрать диаметр вала d при $[\sigma] = 70 \text{ МПа}$ и округлить его значение до ближайшего большего, равного: **30, 32, 34, 35, 36, 38, 40, 42, 45, 47, 48, 50, 52, 53, 55, 56, 60, 62, 63, 65, 67, 70, 71, 72, 80, 85, 90, 95, 100** мм.

Данные взять из табл. 1.

Таблица 1

№ строки	Схема по рис. 5	P, кВт	n, об/мин	a	b	c	D ₁	D ₂	α ₁ , град	α ₂ , град
1	I	10	100	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	10	10
2	II	20	200	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	20	20
3	III	30	300	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	30	30
4	IV	40	400	1,4	1,4	1,4	1,4	1,4	40	40
5	V	50	500	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	50	50
6	VI	60	600	1,6	1,6	1,6	0,6	0,6	60	60
7	VII	70	700	1,7	1,7	1,7	0,7	0,7	70	70
8	VIII	80	800	1,8	1,8	1,8	0,8	0,8	80	80
9	IX	90	900	1,9	1,9	1,9	0,9	0,9	90	90
0	X	100	1000	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	0	0
	<i>e</i>	<i>δ</i>	<i>e</i>	<i>z</i>	<i>δ</i>	<i>e</i>	<i>δ</i>	<i>e</i>	<i>δ</i>	<i>e</i>

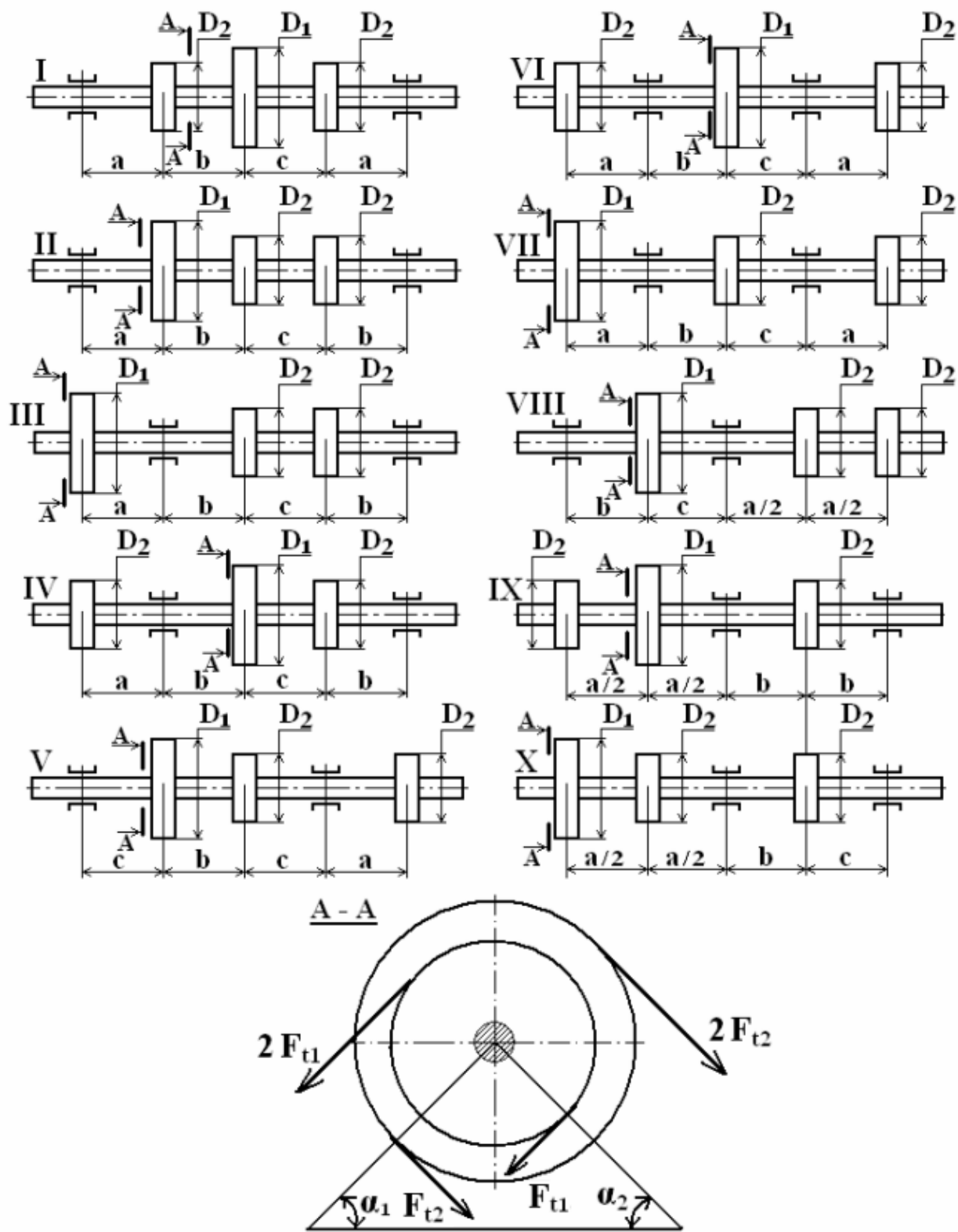


Рис. 5

1.2.1. Исходные данные

$P = 60$ кВт; $n = 100$ об/мин; $a = 1,4$ м; $b = 1,1$ м; $c = 1,1$ м; $D_1 = 0,6$ м;
 $D_2 = 1,1$ м; $\alpha_1 = 60^\circ$; $\alpha_2 = 10^\circ$ (рис. 6а и 6б).

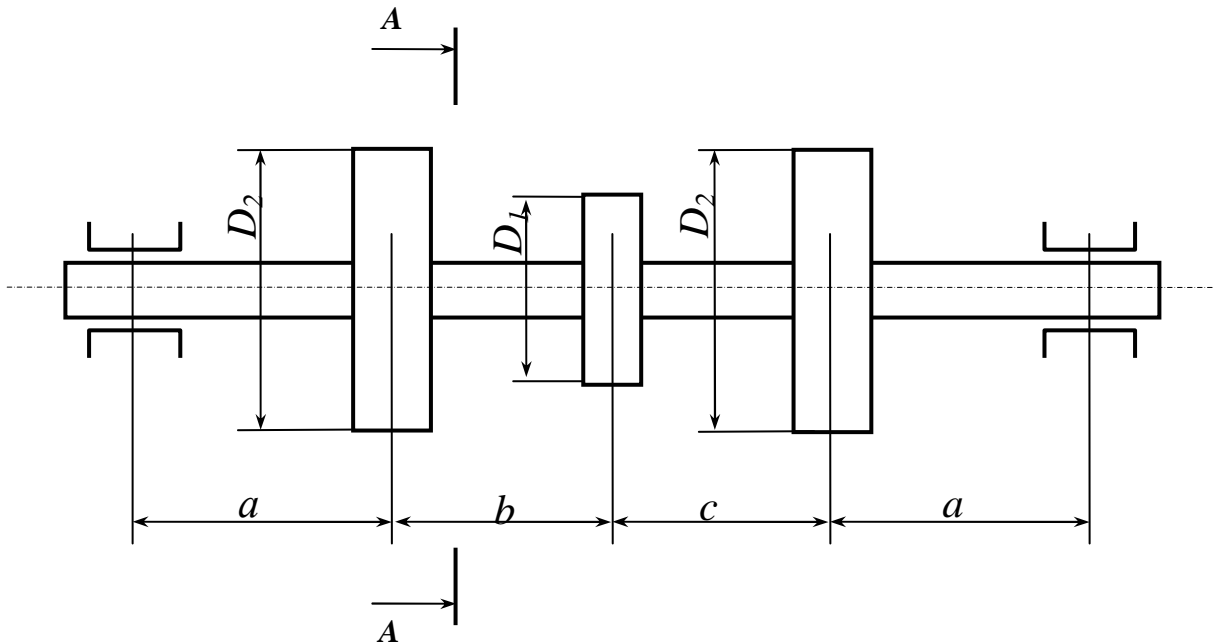


Рис. 6а

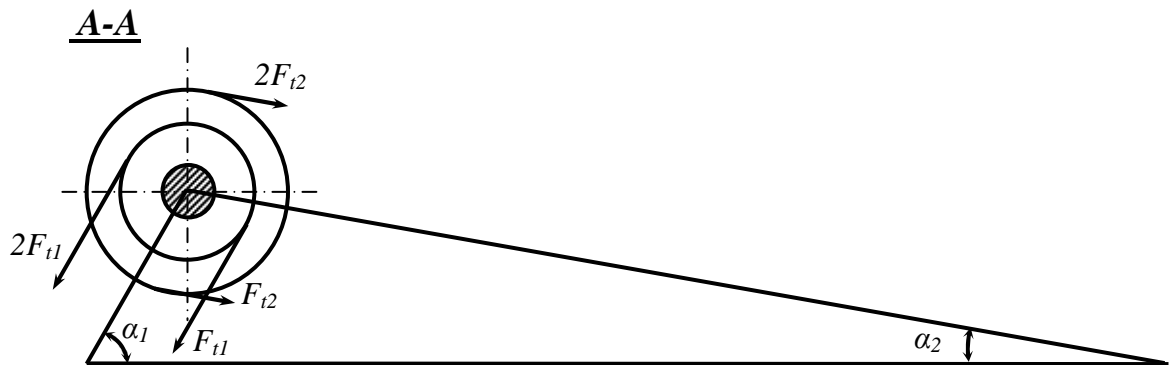


Рис. 6б

1.2.2. Определение моментов, приложенных к шкивам, по заданным мощности и частоте вращения вала

Крутящий момент на ведущем шкиве будет равен

$$T = 9,55 \frac{P}{n}, \text{ кНм},$$

$$T_1 = 9,55 \frac{60}{100} = 5,73 \text{ кНм.}$$

Так как два других шкива диаметром D_2 передают мощность $P/2$, то

$$T_2 = T_3 = \frac{T_1}{2} = 2,865 \text{ кНм.}$$

1.2.3. Построение эпюры крутящих моментов

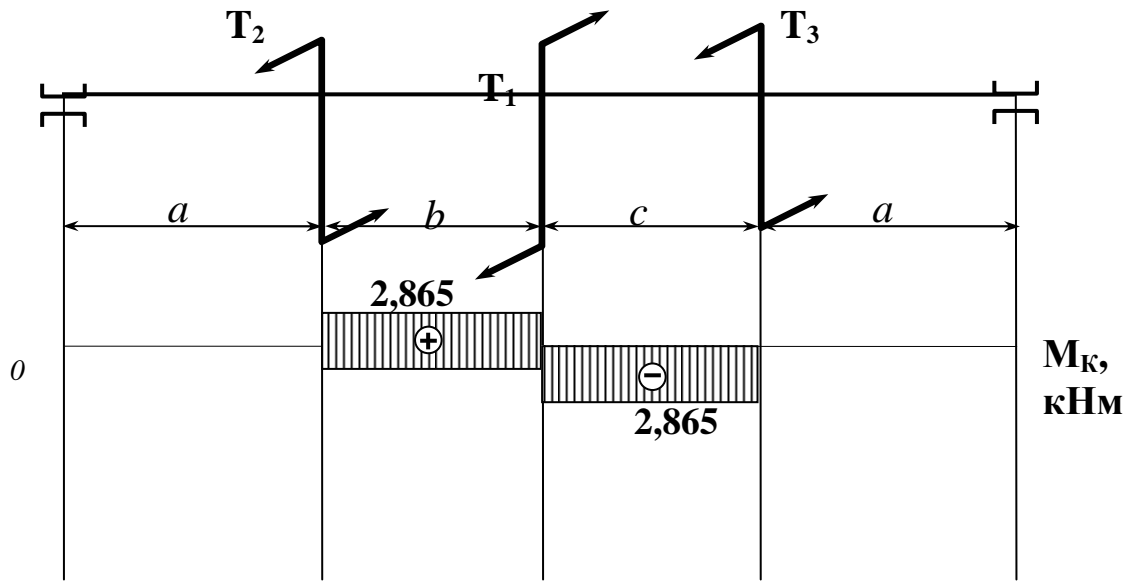


Рис. 7

1.2.4. Определение окружных усилий F_{t1} и F_{t2}

Момент T_1 создается разностью усилий в набегающей и сходящей ветвях ремня. При заданном соотношении между этими усилиями (F_{t1} и F_{t2})

$$T_1 = F_{t1} \frac{D_1}{2},$$

$$F_{t1} = \frac{2 \cdot T_1}{D_1} = \frac{2 \cdot 5,73}{0,6} = 19,1 \text{ кН,}$$

$$F_{t2} = F_{t3} = \frac{2 \cdot T_2}{D_2} = \frac{2 \cdot 2,865}{1,1} = 5,209 \text{ кН.}$$

1.2.5. Определение давления на вал

$$R_1 = 3 F_{t1} = 3 \cdot 19,1 = 57,3 \text{ кН},$$

$$R_2 = R_3 = 3 \cdot F_{t2} = 3 \cdot 5,209 = 15,627 \text{ кН}.$$

1.2.6. Определение сил, изгибающих вал в горизонтальной и вертикальной плоскостях

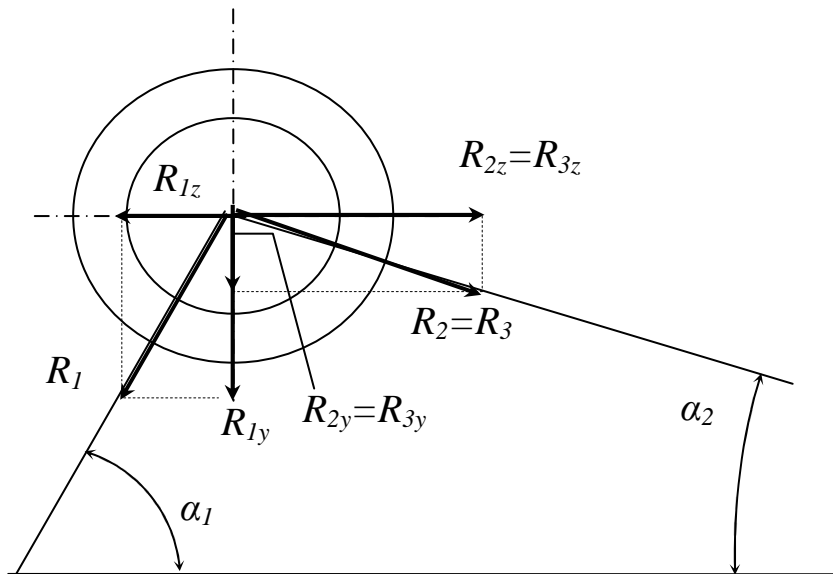


Рис. 8

$$R_{1Z} = R_1 \cdot \cos \alpha_1 = 57,3 \cdot \cos(60^\circ) = 28,65 \text{ кН};$$

$$R_{1Y} = R_1 \cdot \sin \alpha_1 = 57,3 \cdot \sin(60^\circ) = 49,623 \text{ кН};$$

$$R_{2Z} = R_{3Z} = R_2 \cdot \cos \alpha_2 = 15,627 \cdot \cos(10^\circ) = 15,39 \text{ кН};$$

$$R_{2Y} = R_{3Y} = R_2 \cdot \sin \alpha_2 = 15,627 \cdot \sin(10^\circ) = 2,714 \text{ кН}.$$

1.2.7. Построение эпюр изгибающих моментов в горизонтальной и вертикальной плоскостях

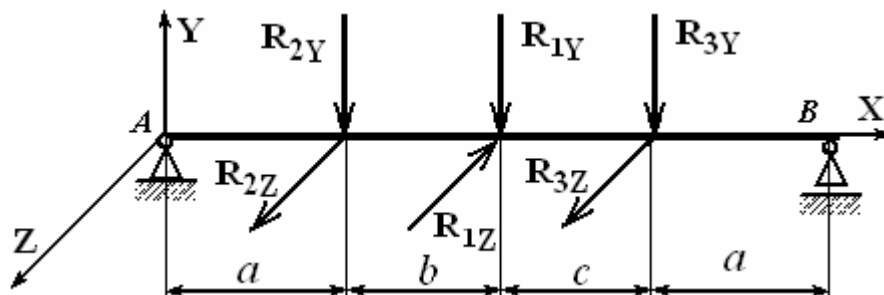


Рис. 9

На рис. 9 показан вал, нагруженный силами, изгибающими его в горизонтальной и вертикальной плоскостях.

На рис. 10а изображен вал, нагруженный в вертикальной плоскости.

Определим опорные реакции:

$$\sum_{i=1}^n X_i = 0;$$

$$X_A = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n M_{iA} = 0;$$

$$- R_{2Y} a - R_{1Y}(a+b) - R_{3Y}(a+b+c) + Y_B(2a+b+c) = 0;$$

$$Y_B = \frac{R_{1Y}(a+b) + R_{2Y}(2a+b+c)}{2a+b+c} = R_{1Y} \cdot \frac{a+b}{2a+b+c} + R_{2Y} =$$

$$= 49,623 \cdot \frac{2,5}{5} + 2,714 = 27,525 \text{ кН.}$$

$$\sum_{i=1}^n Y_i = 0;$$

$$Y_A + Y_B - 2R_{2Y} - R_{1Y} = 0;$$

$$Y_A = 2R_{2Y} + R_{1Y} - Y_B = 2 \cdot 2,714 + 49,623 - 27,525 =$$

$$= 27,525 \text{ кН.}$$

Проверка правильности нахождения опорных реакций:

$$\sum_{i=1}^n M_{iB} = R_{3Y} a + R_{1Y}(a+c) + R_{2Y}(a+b+c) - Y_A(2a+b+c) =$$

$$= 2,714 \cdot 1,4 + 49,623 \cdot 2,5 + 2,714 \cdot 3,6 - 27,525 \cdot 5 = 0.$$

Следовательно, реакции найдены верно.

Разобьем вал на 4 участка.

Границы первого участка: $0 \leq x_1 \leq a$.

$$M_{Z1} = \Sigma M^{\text{ЛЭВ}} = Y_A \cdot x_1 = 27,525 \cdot x_1.$$

При $x_1 = 0$, $M_{Z1} = 0$ кНм.

При $x_1 = a = 1,4$ м, $M_{Z1} = 38,535$ кНм.

Границы второго участка: $a \leq x_2 \leq a+b$.

$$M_{Z2} = \Sigma M^{\text{ЛЭВ}} = Y_A \cdot x_2 - R_{2Y} \cdot (x_2 - a) = 27,525 \cdot x_2 - 2,714 \cdot (x_2 - 1,4).$$

При $x_2 = a = 1,4$ м, $M_{Z2} = 38,535$ кНм.

При $x_2 = a + b = 2,5$ м, $M_{Z2} = 65,827$ кНм.

Границы третьего участка: $0 \leq x_3 \leq a$.

$$M_{Z3} = \Sigma M^{IP} = Y_B \cdot x_3 = 27,525 \cdot x_3.$$

При $x_3 = 0$, $M_{Z1} = 0$ кНм.

При $x_3 = a = 1,4$ м, $M_{Z1} = 38,535$ кНм.

Границы четвертого участка: $a \leq x_4 \leq a + c$.

$$M_{Z4} = \Sigma M^{IP} = Y_B \cdot x_4 - R_{3Y} \cdot (x_4 - a) = 27,525 \cdot x_4 - 2,714 \cdot (x_4 - 1,4).$$

При $x_4 = a = 1,4$ м, $M_{Z4} = 38,535$ кНм.

При $x_4 = a + c = 2,5$ м, $M_{Z4} = 65,827$ кНм.

Эпюра изгибающих моментов в вертикальной плоскости изображена на рис. 10б.

Теперь рассмотрим нагружение вала в горизонтальной плоскости (рис. 10 в).

Определим опорные реакции:

$$\sum_{i=1}^n Z_i = 0; \quad Z_A + Z_B + R_{2Z} - R_{1Z} + R_{3Z} = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n M_{iA} = 0; \quad R_{2Z}a - R_{1Z}(a+b) + R_{3Z}(a+b+c) + Z_B(2a+b+c) = 0;$$

$$Z_B = \frac{-R_{2Z}(2a+b+c) + R_{1Z}(a+b)}{2a+b+c} = -R_{2Z} + R_{1Z} \frac{2,5}{5} =$$

$$= -15,39 + 28,65 \cdot 0,5 = -1,065 \text{ кН}.$$

$$Z_A = R_{1Z} - 2 \cdot R_{2Z} - Z_B = 28,65 - 2 \cdot 15,39 + 1,065 = -1,065 \text{ кН}.$$

Проверка правильности нахождения опорных реакций:

$$\sum_{i=1}^n M_{iB} = 0; \quad -R_{3Z}a + R_{1Z}(a+c) - R_{2Z}(a+b+c) - Z_A(2a+b+c) = 0;$$

$$-15,39 \cdot 1,4 + 28,65 \cdot 2,5 - 15,39 \cdot 3,6 + 1,065 \cdot 5 = 0.$$

Следовательно, реакции найдены верно.

Разобьем вал на 4 участка

Границы первого участка: $0 \leq x_1 \leq a$.

$$M_{Y1} = \Sigma M^{ЛЭВ} = Z_A \cdot x_1 = -1,065 \cdot x_1.$$

При $x_1 = 0$, $M_{Y1} = 0$ кНм.

При $x_1 = a = 1,4$ м, $M_{Y1} = -1,491$ кНм.

Границы второго участка: $a \leq x_2 \leq a + b$.

$$M_{Y2} = \Sigma M^{ЛЭВ} = Z_A \cdot x_2 + R_{2Z} \cdot (x_2 - a) = -1,065 \cdot x_2 + 15,39 \cdot (x_2 - 1,4).$$

При $x_2 = a = 1,4$ м, $M_{Y2} = -1,491$ кНм.

При $x_2 = a + b = 2,5$ м, $M_{Y2} = 14,267$ кНм.

Границы третьего участка: $0 \leq x_3 \leq a$.

$$M_{Y3} = \Sigma M^{IP} = Z_B \cdot x_3 = -1,065 \cdot x_3.$$

При $x_3 = 0$, $M_{Y3} = 0$ кНм.

При $x_3 = a = 1,4$ м, $M_{Y3} = -1,491$ кНм.

Границы четвертого участка: $a \leq x_4 \leq a + c$.

$$M_{Y4} = \Sigma M^{IP} = Z_B \cdot x_4 + R_{3Z} \cdot (x_4 - a) = -1,065 \cdot x_4 + 15,39 \cdot (x_4 - 1,4).$$

При $x_4 = a = 1,4$ м, $M_{Y4} = -1,491$ кНм.

При $x_4 = a + c = 2,5$ м, $M_{Y4} = 14,267$ кНм.

Эпюра изгибающих моментов в горизонтальной плоскости изображена на рис. 10г.

1.2.8. Построение эпюры суммарных изгибающих моментов

Для каждого сечения вала имеется своя плоскость действия изгибающего момента. Но так как вал имеет круглое поперечное сечение, то $W_Z = W_Y = W$, и, следовательно, плоскости действия всех изгибающих моментов можно совместить.

$$M_{II} = \sqrt{M_Z^2 + M_Y^2};$$

$$M_{II1} = \sqrt{38,535^2 + (-1,491)^2} = 38,565 \text{ кНм};$$

$$M_{II2} = \sqrt{65,827^2 + 14,267^2} = 67,357 \text{ кНм}.$$

Эпюра суммарных изгибающих моментов показана на рис. 10д.

1.2.9. Выбор опасного сечения

Как видно по эпюрам M_K и M_{II} (рис. 7 и 10д), опасным является сечение посередине вала, для которого $M_K = 2,865$ кНм, а $M_{II} = 67,357$ кНм.

По третьей теории прочности

$$M^{III}_{ЭKB} = \sqrt{M_{II}^2 + M_K^2} = \sqrt{67,357^2 + 2,865^2} = 67,418 \text{ кНм}.$$

1.2.10. Определение диаметра вала

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{ЭKB, MAX}}{\pi \cdot [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 67,418 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 70 \cdot 10^6}} = 0,214 \text{ м} = 214 \text{ мм}.$$

Окончательно принимаем диаметр вала 215 мм.

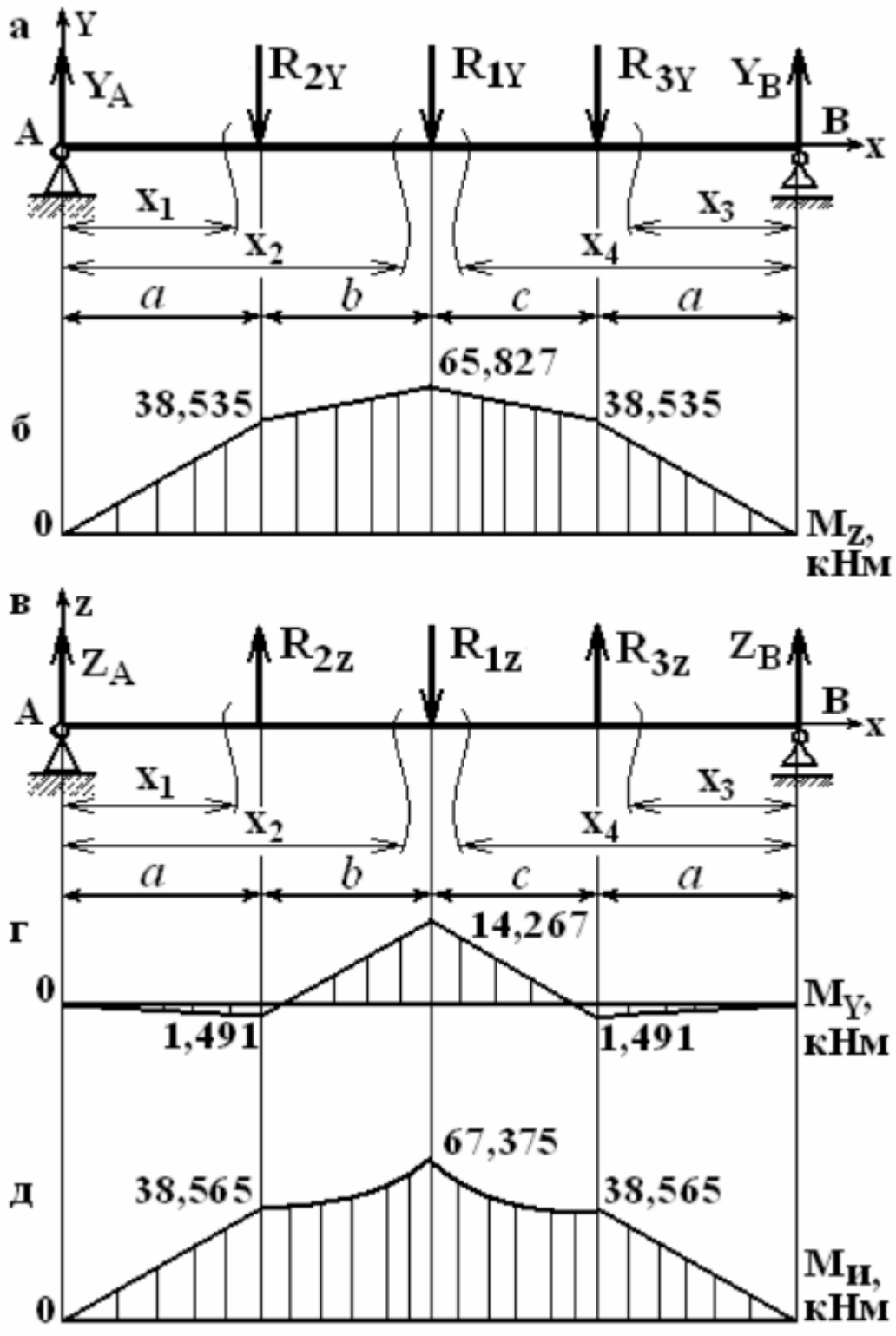


Рис. 10

1.3. Схемы нагружения валов II-X

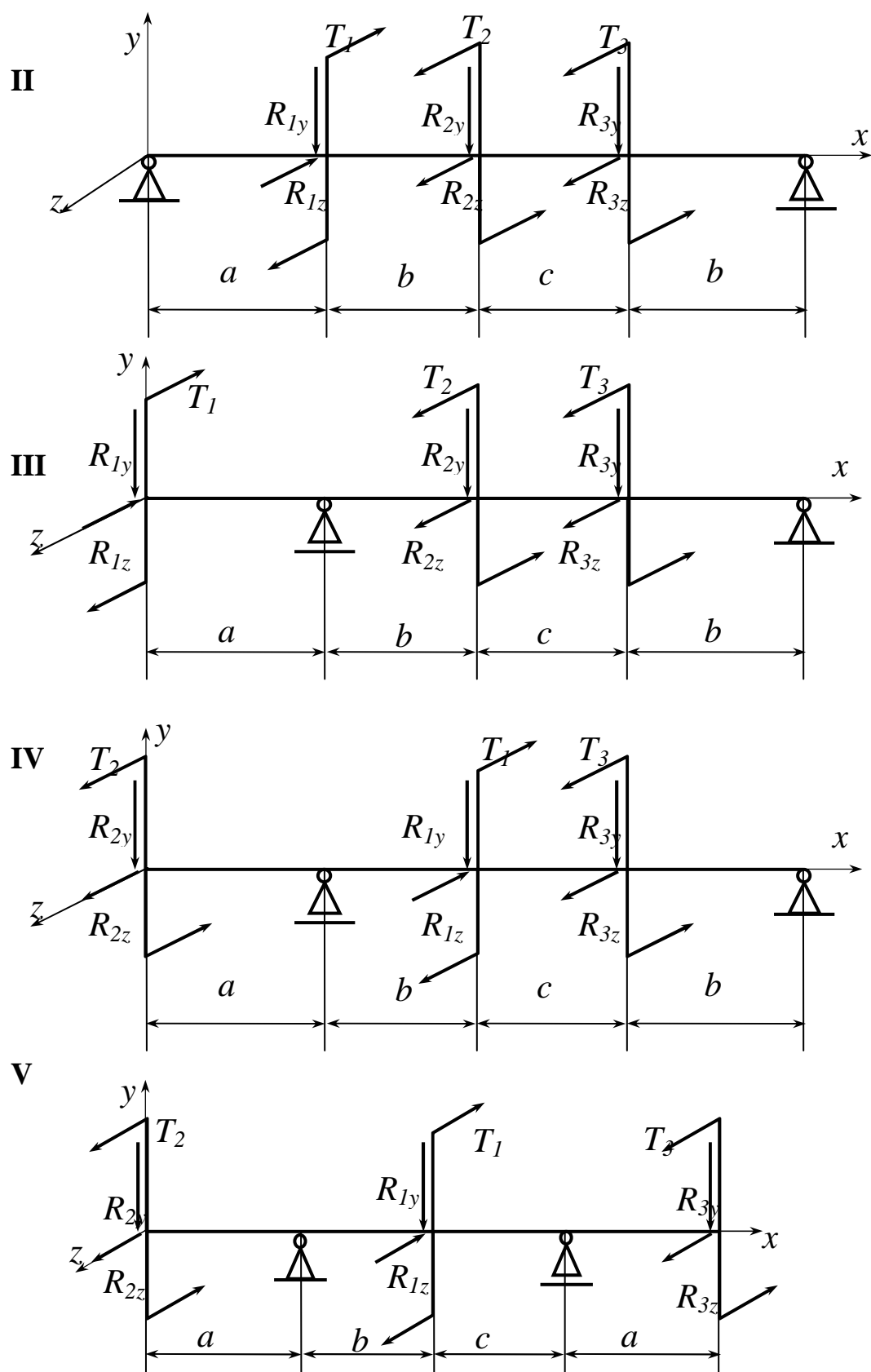


Рис. 11а

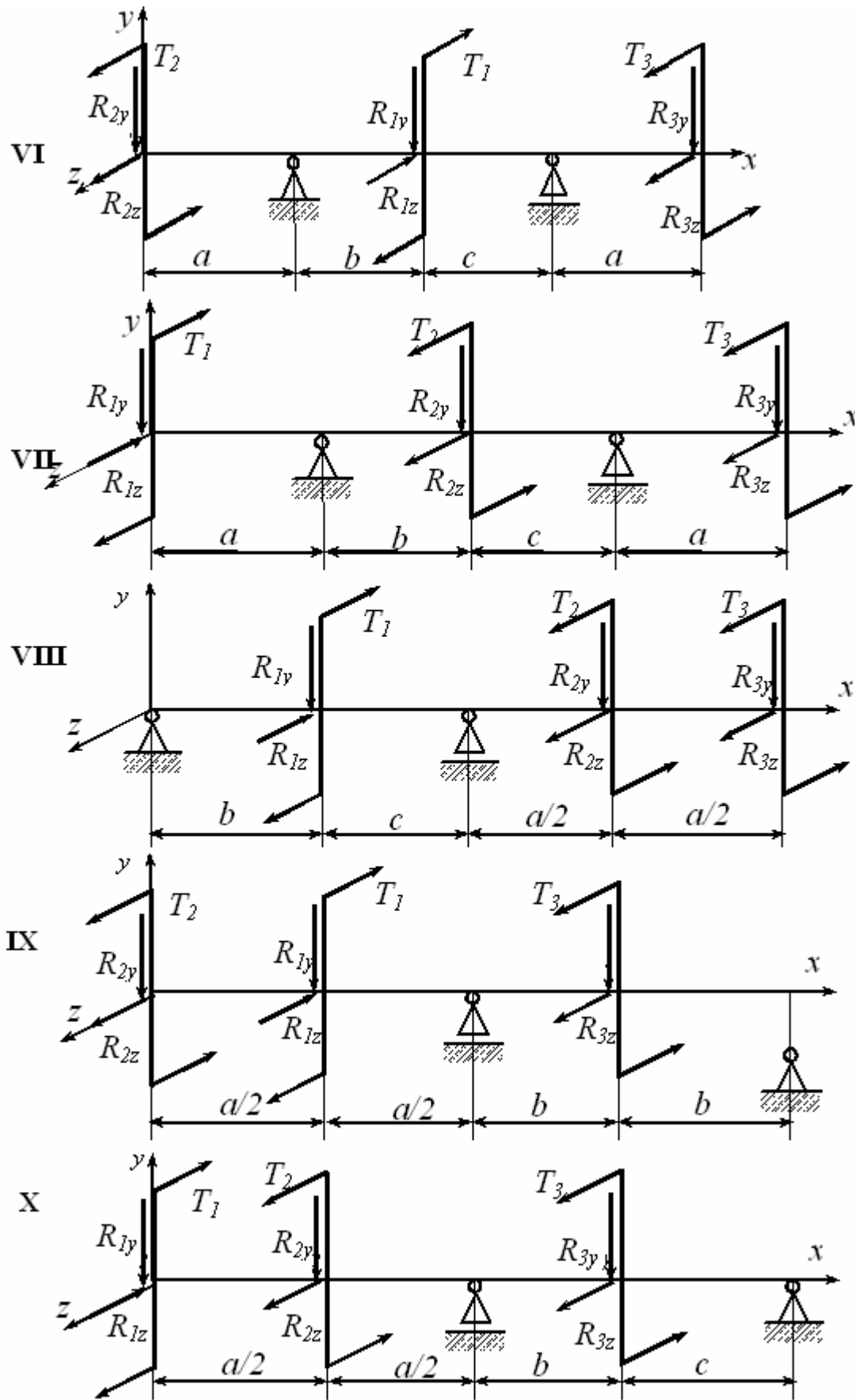


Рис. 116

2. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ

2.1. Краткие сведения по теории

2.1.1. Расчет статически неопределимых рам методом сил

Под статически неопределимой системой понимается та, для которой определение внешних реакций и всех внутренних силовых факторов не может быть произведено при помощи уравнений равновесия статики.

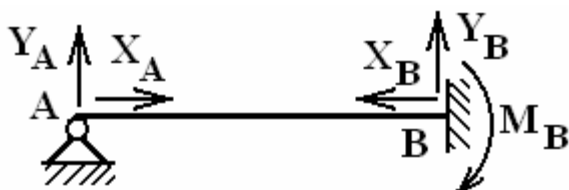


Рис. 12

По сравнению со статически определимыми системами они имеют дополнительные связи, которые называют “лишними” или избыточными. В балке, показанной на рис. 12, две “лишние” связи.

Усилия в “лишних” связях называются “лишними” неизвестными; их число совпадает с числом “лишних” связей, которое определяет степень статической неопределимости системы.

2.1.2. Степень статической неопределимости

Степень статической неопределимости можно найти как разность между числом искомых усилий и числом независимых уравнений равновесия статики, которые можно составить для их нахождения. Для балки, показанной на рис. 12, число неизвестных реакций, возникающих под действием внешних нагрузок, равно пяти (Y_A , X_A , Y_B , X_B , M_B), а число уравнений равновесия статики – трем. Следовательно, балка является дважды статически неопределимой системой.

Степень статической неопределимости C_H плоской рамы:

$$C_H = O_{II} - 3 + 3 \cdot K - III, \quad (17)$$

где O_{II} – число опорных связей; K – число замкнутых контуров; III – число простых шарниров.

Число опорных связей O_{II} напрямую зависит от типа опорных закреплений в рассматриваемой системе.

При наличии заделки число опорных связей равно трем ($O_{\Pi} = 3$), так как в заделке могут возникать две реакции (вертикальная и горизонтальная) и один реактивный момент.

При наличии шарнирно-неподвижной опоры число опорных связей равно двум ($O_{\Pi} = 2$), так как в шарнирно-неподвижной опоре могут возникать две реакции (вертикальная и горизонтальная).

При наличии шарнирно-подвижной опоры число опорных связей равно единице ($O_{\Pi} = 1$), так как в шарнирно-подвижной опоре может возникнуть только одна реакция, направленная перпендикулярно плоскости, по которой может перемещаться подвижный шарнир.

Следовательно, для рамы, изображенной на рис. 13, при любой внешней нагрузке, общее число опорных связей $O_{\Pi} = 3 + 2 + 1 = 6$, а степень статической неопределимости $C_{\Pi} = O_{\Pi} - 3 = 6 - 3 = 3$.

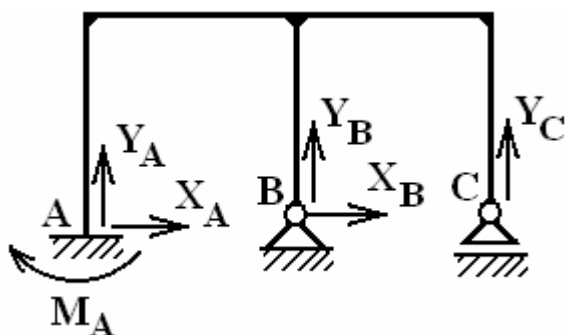


Рис. 13

Наличие одного простого шарнира понижает степень статической неопределимости на единицу, так как в месте шарнирного соединения стержни могут свободно поворачиваться относительно друг друга, при этом не изгибаясь, т.е. ограничения связью нет, и изгибающий момент на шарнире равен нулю.

Таким образом, при наличии простого шарнира в раме (например, схема VIII на рис. 28) определение внешних реакций сводится не только к решению трех уравнений системы статического равновесия тела на плоскости, но и к непосредственному решению составленных уравнений изгибающих моментов на участках, границей которых является простой шарнир, относительно неизвестных реакций, входящих в эти выражения.

Наличие замкнутого контура увеличивает степень статической неопределимости на три, так как при определении в нем внутренних усилий методом сечений необходимо снять дополнительные связи, т.е. позволить сечениям поворачиваться и смещаться в двух направлениях.

Следовательно, для рамы, изображенной на рис. 14, при любой внешней нагрузке, общее число опорных связей $O_{\Pi} = 4$ (Y_A, X_A, Y_B, X_B), число замкнутых контуров $K = 1$ (контур **DEFG**), число простых шарниров $\Pi = 1$ (шар-

нир С), степень статической неопределимости $C_H = O_{II} - 3 + 3 \cdot K - III = 4 - 3 + 3 \cdot 1 - 1 = 3$.

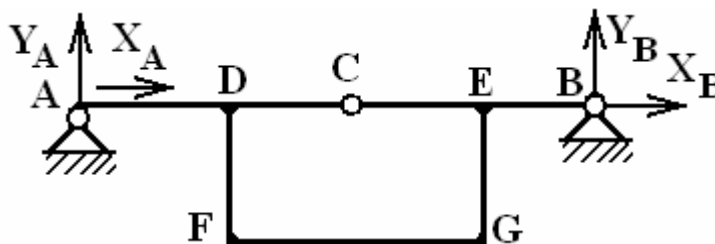


Рис. 14

2.1.3. Основная система метода сил

В заданной системе отбрасываются “лишние” связи, а вместо них прикладываются “лишние” неизвестные X_1, X_2, \dots, X_n . При отбрасывании “лишних” связей нужно следить за тем, чтобы новая система была геометрически неизменяемой и статически определимой. Геометрически неизменяемой называется такая система, в которой перемещения точек или элементов возможны только за счет деформации стержней. Полученная таким образом статически определимая и геометрически неизменяемая система носит название основной системы метода сил. Для каждой статически неопределимой системы можно получить несколько различных вариантов основной системы.

На рис. 15б, в, г представлены возможные варианты основной системы для статически неопределимой рамы, изображенной на рис. 15а.

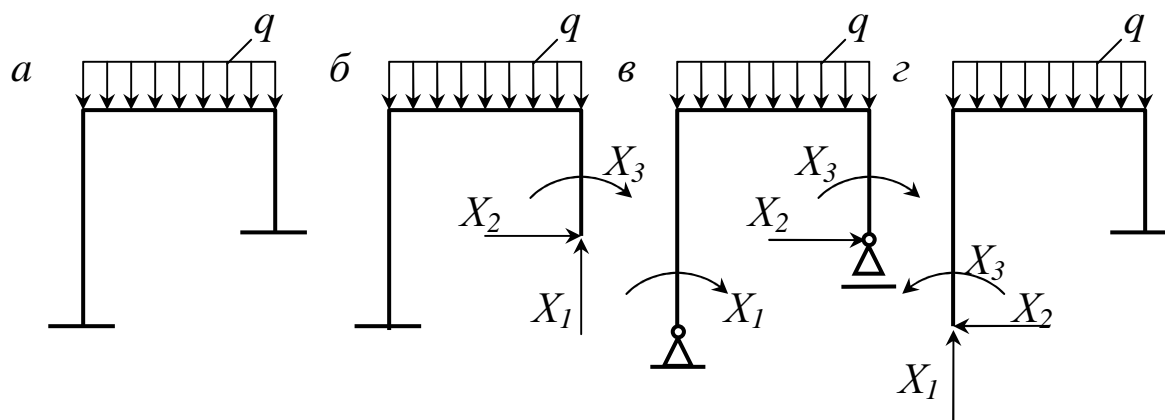


Рис. 15

Для рам, имеющих жесткие закрепления, можно рекомендовать основную систему в виде консоли, рассматривая остальные опорные закрепления как лишние (рис. 15б, г). Исключения составляют симметричные рамы с защемленными концами. Здесь выбор основной системы удобно производить, разрезая раму на две симметричные консоли (рис. 16).

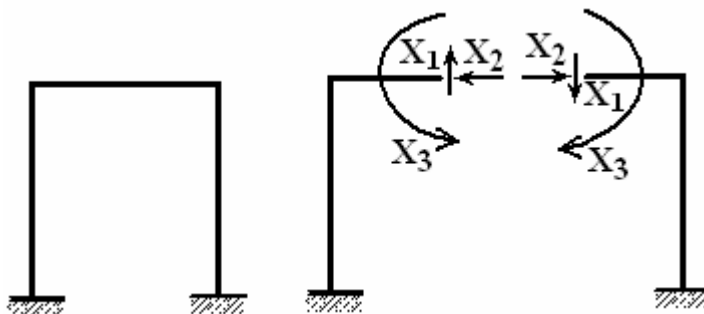


Рис. 16

2.1.4. Канонические уравнения метода сил

Для нахождения “лишних” неизвестных составляются дополнительные уравнения, которые носят название уравнений совместности деформаций. Смысл их заключается в том, что перемещения в основной системе, вызванные внешними нагрузками и “лишними” неизвестными, должны быть такими же, как и в заданной системе.

Суммарные перемещения в основной системе, вызванные внешней нагрузкой и “лишними” неизвестными, по направлению самих неизвестных должны быть равны нулю.

На основании принципа независимости действия сил, в соответствии с которым перемещение, вызванное несколькими воздействиями, равно алгебраической сумме перемещений от каждого из этих воздействий в отдельности, уравнение деформаций для один раз статически неопределимой системы можно записать следующим образом:

$$\Delta_1 = \Delta_1(X_1) + \Delta_1(P) = 0. \quad (18)$$

Первое слагаемое представляет собой перемещение по направлению неизвестного, вызванное этим же неизвестным, а второе слагаемое $\Delta_1(P) \equiv \Delta_{1P}$ – перемещение по тому же направлению, вызванное внешней нагрузкой. Величину $\Delta_1(X_1)$ удобно представить в следующем виде:

$$\Delta_1(X_1) = \delta_{11} X_1, \quad (19)$$

где δ_{11} - перемещение по направлению неизвестного X_1 от $X_1 = 1$.

Тогда
$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0. \quad (20)$$

Данное выражение, записанное для один раз статически неопределимой системы, легко обобщается для случая более сложных статически неопределимых систем. Например, для n – раз статически неопределимой системы уравнения деформаций могут быть записаны в виде следующей системы:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \Delta_{1P} = 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \Delta_{2P} = 0; \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \Delta_{nP} = 0. \end{array} \right. \quad (21)$$

Система линейных алгебраических уравнений носит название системы канонических уравнений метода сил (уравнения записываются по одному правилу или канону). Число уравнений совпадает со степенью статической неопределимости системы. Каждый член уравнения имеет размерность перемещения (линейного или углового).

2.1.5. Построение расчетных эпюр

Необходимо построить эпюры изгибающих моментов от единичных сил $\bar{X}_i = 1$. Эти эпюры называются единичными и обозначаются \bar{M}_i . Также необходимо построить эпюру изгибающих моментов от заданной нагрузки. Эта эпюра называется грузовой и обозначается M_p .

2.1.6. Определение перемещений

Перемещения δ_{ij} и Δ_{1P} проще всего определяются по методу Максвелла-Мора с использованием способа Верещагина:

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} = \sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \frac{\bar{M}_i \bar{M}_j}{EI} dx = \sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \frac{\bar{M}_j \bar{M}_i}{EI} dx, \quad (22)$$

$$\Delta_{ip} = \sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \frac{\bar{M}_i M_p}{EI} dx, \quad (23)$$

где \bar{M}_i , \bar{M}_j , M_p - алгебраические выражения изгибающих моментов на k -м участке основной системы, вызванных, соответственно, действием только

одной единичной силы $\overline{X}_i = 1$ или $\overline{X}_j = 1$, или внешней нагрузкой, EI – изгибная жесткость стержня.

Для стержневых систем интегралы Мора удобно вычислять по способу Верещагина. При этом операция интегрирования аналитических выражений изгибающих моментов заменяется перемножением эпюр.

Способ Верещагина применяется в случае, когда эпюры от единичных силовых факторов на прямолинейных участках оказываются линейными, а грузовая эпюра имеет следующие очертания: прямоугольник, трапеция или парабола. В связи с этим, согласно способу Верещагина, интеграл вида

$$\int \overline{M}_i M_p dx$$

равен произведению площади криволинейной эпюры Ω (рис. 17а) на ординату линейной эпюры \overline{M}_i , расположенную под центром тяжести криволинейной эпюры (рис. 17б). Следовательно, величины δ_{ij} и Δ_{ip} можно определить по формулам:

$$\delta_{ij} = \sum_{i=1}^n \frac{\Omega_i \overline{M}_{cj}}{EJ}, \quad (24)$$

$$\Delta_{ip} = \sum_{i=1}^n \frac{\Omega_p \overline{M}_{ci}}{EJ}, \quad (25)$$

где Ω_p - площадь грузовой эпюры момента на участке; \overline{M}_{ci} - ордината прямолинейной (единичной) эпюры, взятая под центром тяжести с грузовой эпюры M_p .

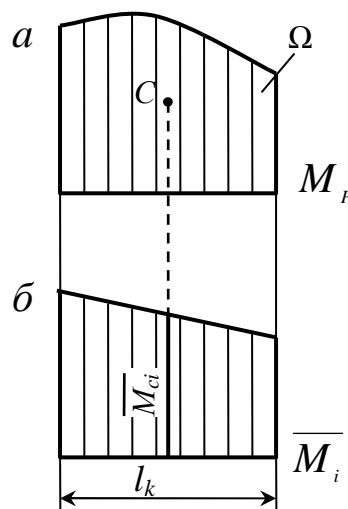


Рис. 17

Если обе эпюры (единичная и грузовая) линейные, то безразлично, площадь какой из эпюр подсчитывается, но ордината момента обязательно берется с другой эпюры.

Далее приведены площади и координаты центров тяжести некоторых фигур (рис. 18).

В тех случаях, когда перемножаются две эпюры, имеющие вид трапеций, или когда одна эпюра имеет вид трапеции, а другая – квадратичной параболы, можно использовать формулу Симпсона. Знаки определяются следующим образом: если эпюры направлены в одну сторону, то ставится знак «+», а если в разные, - то «-». Результатом перемножения будут следующие выражения, приведенные на рис. 19.

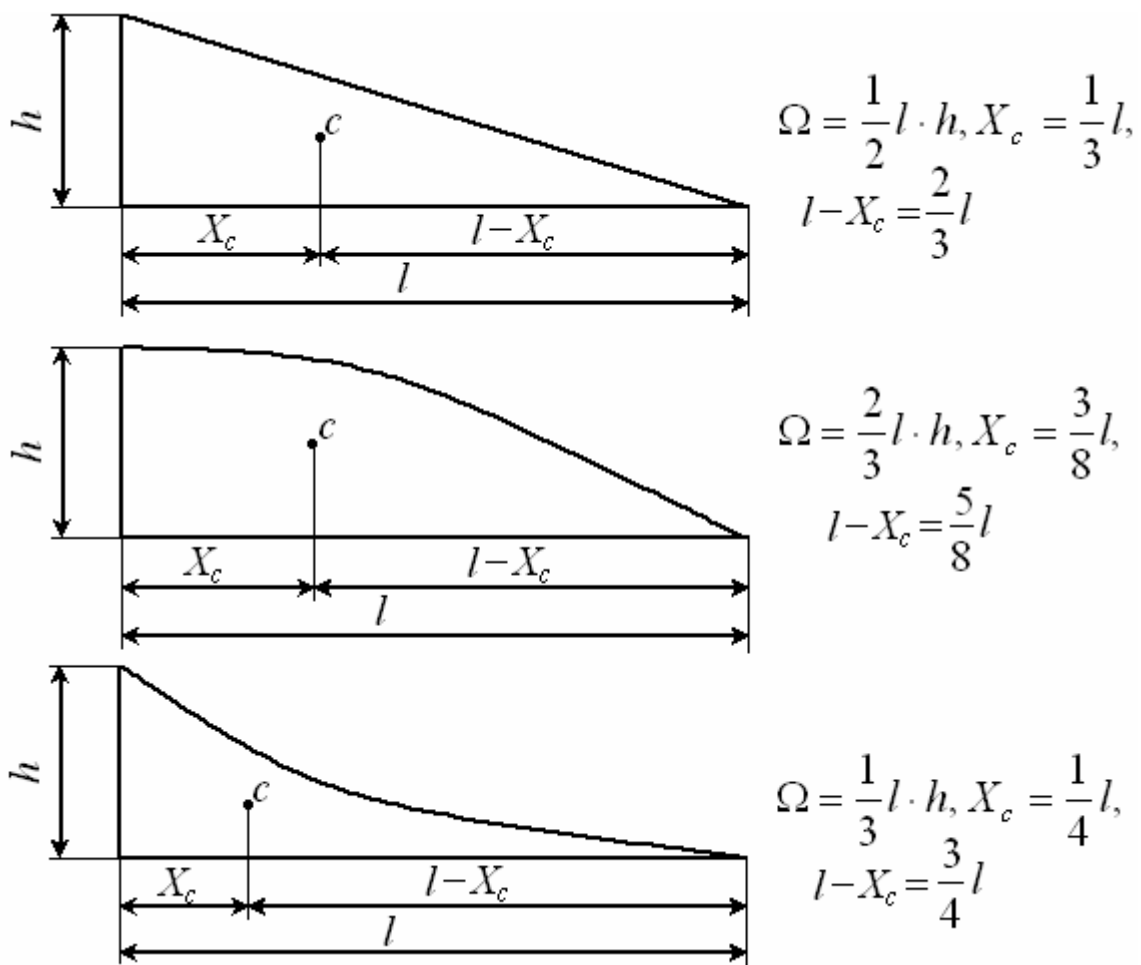


Рис. 18

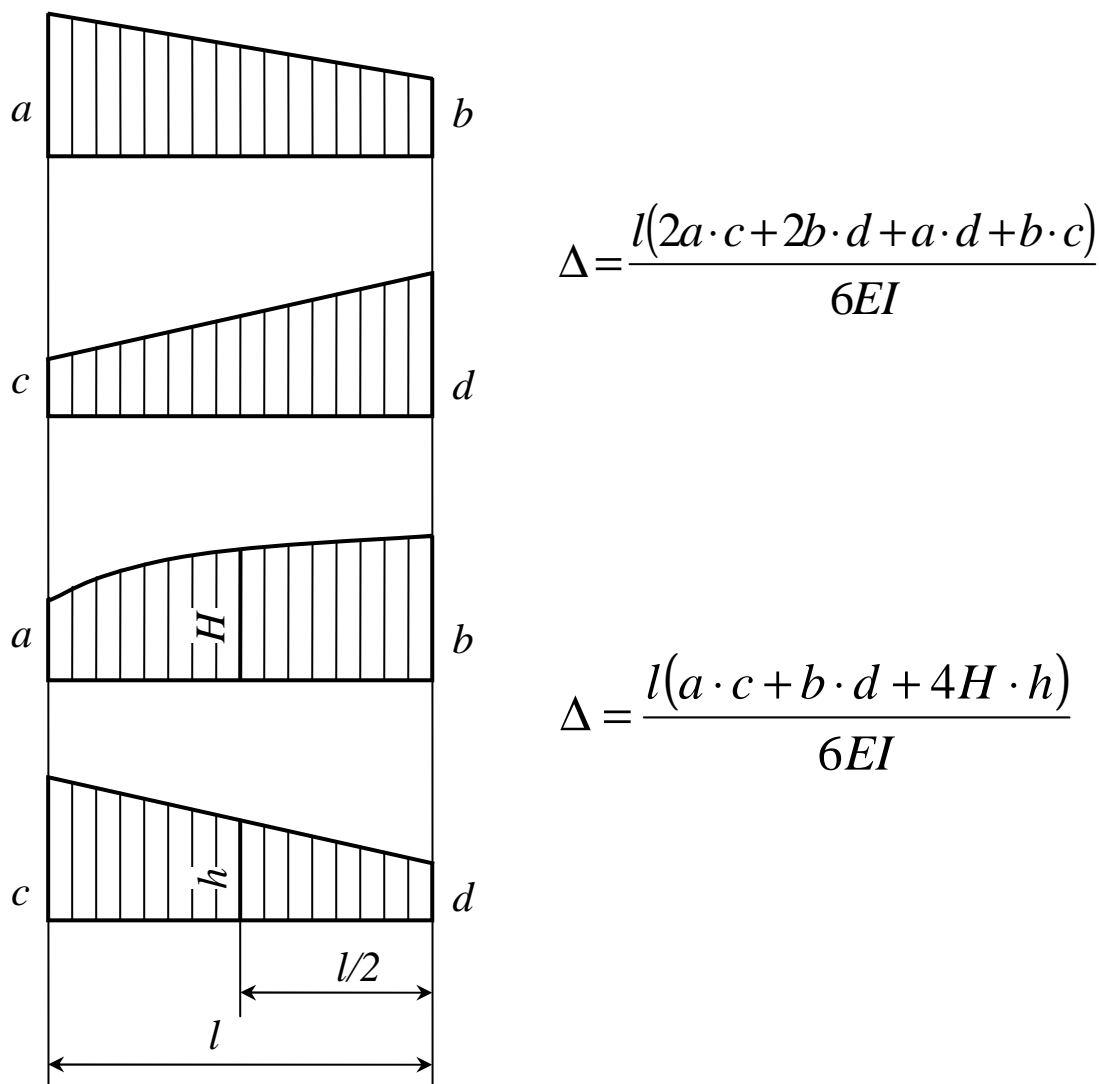


Рис. 19

2.1.7. Определение величин “лишних” неизвестных и построение эпюр внутренних силовых факторов

Подставив величины найденных перемещений в систему канонических уравнений и решив ее, находим значения неизвестных X_i . Положительные значения “лишних” неизвестных X_i свидетельствует о том, что направление реакций совпадает с их направлением, принятым в единичном состоянии. К основной системе прикладываем заданную нагрузку и найденные “лишние” неизвестные X_i , после чего строим эпюры внутренних усилий. В общем случае нагружения в поперечных сечениях элементов рамы будут возникать три внутренних силовых фактора: изгибающий момент M , поперечная сила Q и продольная сила N .

2.1.8. Учет симметрии при расчете статически неопределимых рам

При учете свойства симметрии расчет статически неопределимой рамы существенно упрощается, так как количество “лишних” уменьшается. На рис. 20а изображена геометрически симметричная рама. Геометрически симметричная рама может быть также симметрично нагружена (рис. 20б). Нагрузка на симметричной раме также может иметь свойство так называемой косо-симметрии (рис. 20в). Аналогичным образом свойства симметрии и косо-симметрии относятся к внутренним силовым факторам в поперечных сечениях рамы, которые становятся лишними неизвестными при рассечении рамы по линии симметрии (рис. 20г). Так, поперечные силы X_1 называются косо-симметричными силовыми факторами, а продольные силы X_2 и изгибающие моменты X_3 называются симметричными силовыми факторами. При расчете симметричной рамы можно руководствоваться следующим: при симметричной внешней нагрузке косо-симметричные силовые факторы равны нулю, а при косо-симметричной внешней нагрузке симметричные силовые факторы равны нулю. Это происходит потому, что если перемножить симметричную и косо-симметричную эпюры, то в ответе будет получаться ноль, так как результат перемножения эпюр на левой половине рамы равен результату перемножения эпюр на правой половине, только с обратным знаком, что в сумме дает ноль.

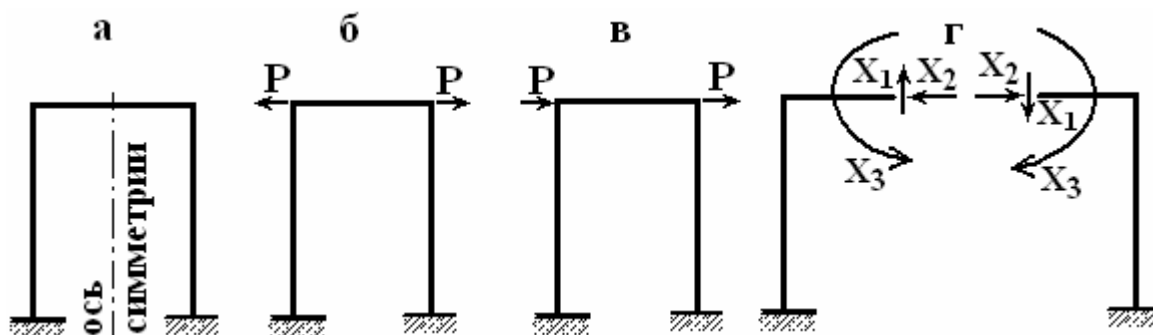


Рис. 20

2.2. Пример выполнения задания

На рис. 21 изображена нагруженная в своей плоскости рама, вертикальные элементы которой имеют моменты инерции I , а горизонтальные элементы – kI .

Требуется:

- 1) установить степень статической неопределимости и выбрать основную систему;
- 2) написать канонические уравнения;

- 3) построить эпюры моментов от единичных сил и заданной нагрузки;
 - 4) найти перемещения;
 - 5) найти величины лишних неизвестных;
 - 6) построить эпюры внутренних силовых факторов M , N и Q .
- Данные взять из табл. 2.

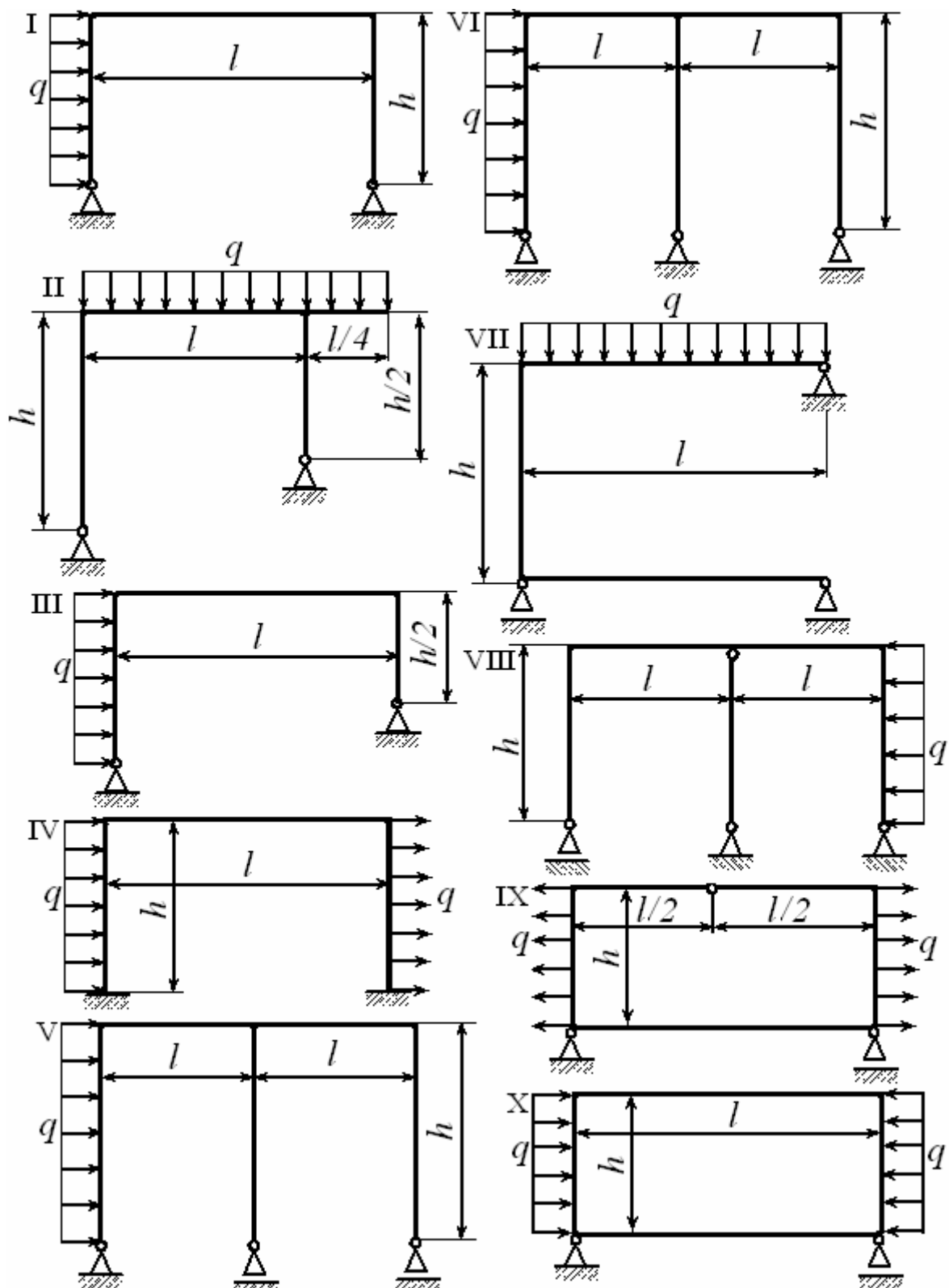
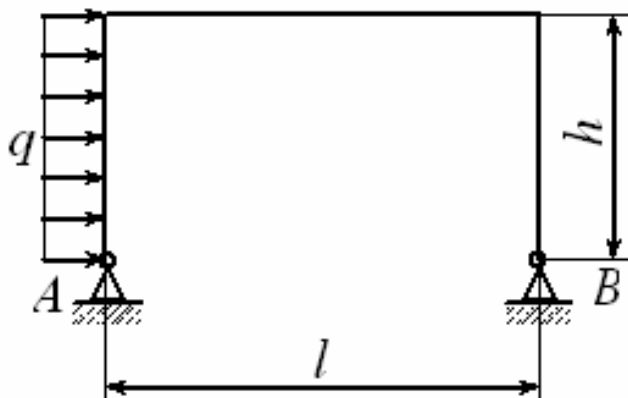


Рис. 21

Таблица 2

№ строки	Схема рамы (рис. 21)	l	h	q, кН/м	k
		M			
1	I	11	2	15	1,1
2	II	12	3	20	1,2
3	III	3	4	30	1,3
4	IV	4	5	4	1,4
5	V	5	6	5	1,5
6	VI	6	2	6	1,6
7	VII	7	3	7	1,7
8	VIII	8	4	8	1,8
9	IX	9	5	9	1,9
0	X	10	6	10	2,0
	<i>e</i>	<i>z</i>	<i>δ</i>	<i>e</i>	<i>в</i>

2.2.1. Исходные данные



q = 15кН/м;
 l = 4 м;
 h = 5 м;
 k = 1,1.

Рис. 22

2.2.2. Определение степени статической неопределимости и выбор основной системы

Данная рама является один раз статически неопределимой:

$$C_H = O_{II} - 3 = 4 - 3 = 1.$$

Возможные варианты основной системы показаны на рис. 23.

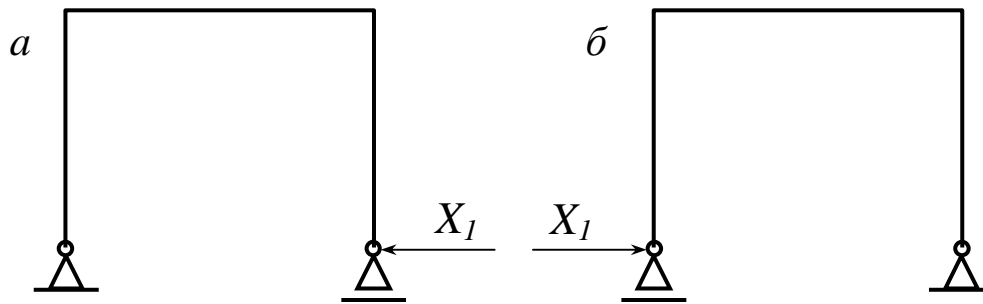


Рис. 23

Выбираем для расчета вариант, показанный на рис. 23а.

2.2.3. Составление системы канонических уравнений

Так как число канонических уравнений всегда равно степени статической неопределимости, то для один раз статически неопределимой системы записывается только одно уравнение:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0.$$

2.2.4. Построение эпюр изгибающих моментов от единичных сил и от заданной нагрузки

На рис. 24 построена эпюра изгибающих моментов \bar{M}_1 от единичной нагрузки $X_1 = 1$.

Определим опорные реакции.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n X_i &= 0; & \bar{X}_A - 1 &= 0; & \bar{X}_A &= 1; \\ \sum_{i=1}^n M_A &= 0; & \bar{Y}_B \cdot l &= 0; & \bar{Y}_B &= 0; \\ \sum_{i=1}^n Y_i &= 0; & \bar{Y}_A + \bar{Y}_B &= 0; & \bar{Y}_A &= 0. \end{aligned}$$

Разобьем раму на три участка.

Границы первого участка: $0 \leq x_1 \leq h$.

$$\bar{M}_1 = -X_1 \cdot x_1 = -x_1;$$

При $x_1 = 0$, $\bar{M}_1 = 0$.

При $x_1 = h = 5\text{ м}$, $\bar{M}_1 = -5\text{ м}$.

Границы второго участка: $0 \leq x_2 \leq l$.

$\bar{M}_1 = -X_1 \cdot h = -5\text{ м}$.

Границы третьего участка: $0 \leq x_3 \leq h$.

$\bar{M}_1 = -X_A \cdot x_3 = -x_3$.

При $x_3 = 0$, $\bar{M}_1 = 0$.

При $x_3 = h = 5\text{ м}$, $\bar{M}_1 = -5\text{ м}$.

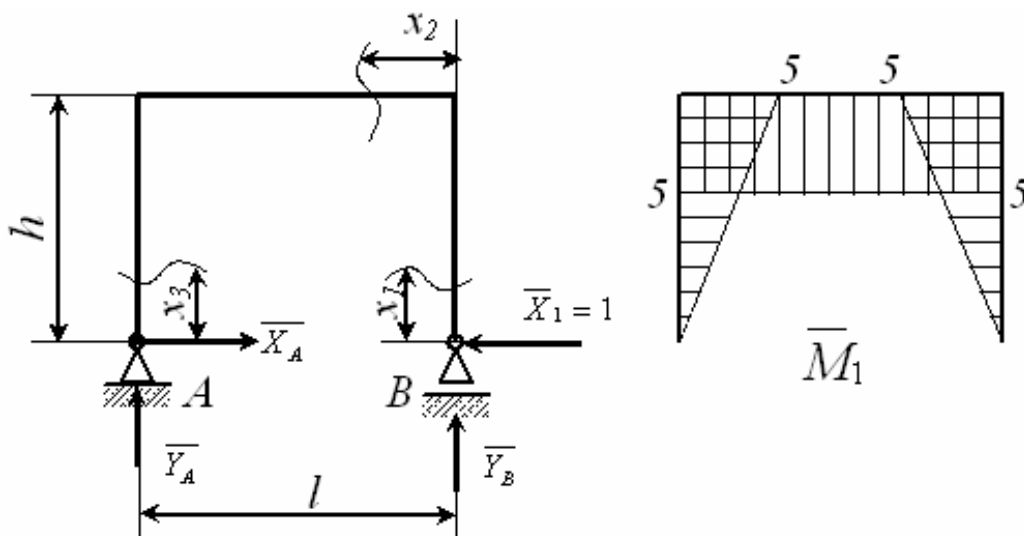


Рис. 24

На рис. 25 показана эпюра изгибающих моментов M_P от действия заданной нагрузки.

Определим опорные реакции.

$$\sum_{i=1}^n X_i = 0; \quad qh + X_A = 0; \quad X_A = -qh = -15 \cdot 5 = -75 \text{ кН};$$

$$\sum_{i=1}^n M_A = 0; \quad -\frac{qh^2}{2} + Y_B \cdot l = 0; \quad Y_B = \frac{qh^2}{2l} = \frac{15 \cdot 25}{2 \cdot 4} = 46,875 \text{ кН};$$

$$\sum_{i=1}^n Y_i = 0; \quad Y_A + Y_B = 0; \quad Y_A = -Y_B = -46,875 \text{ кН}.$$

Разобьем раму на три участка.

Границы первого участка: $0 \leq x_1 \leq h$. $M_P = 0$.

Границы второго участка: $0 \leq x_2 \leq l$. $M_P = Y_B \cdot x_2 = 46,875 \cdot x_2$.

При $x_2 = 0$, $M_P = 0$. При $x_2 = l = 4\text{ м}$, $M_P = 46,875 \cdot 4 = 187,5 \text{ кНм}$.

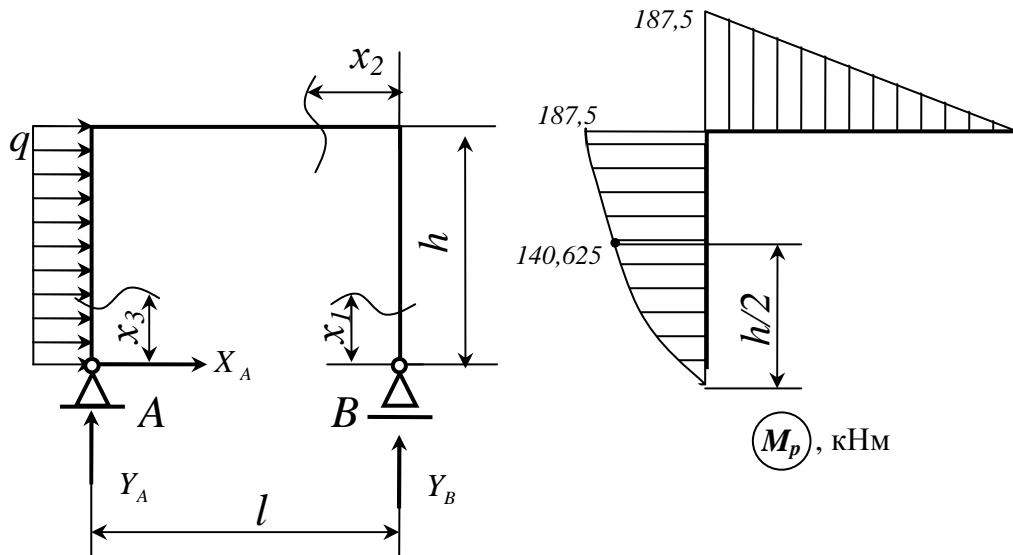


Рис. 25

Границы третьего участка: $0 \leq x_3 \leq h$.

$$Q = -X_A - qx_3; \quad -X_A - qx_0 = 0; \quad x_0 = -\frac{X_A}{q} = \frac{75}{15} = 5 \text{ м}.$$

Так как x_0 не превышает длину участка $h = 5$ м, то момент на этом участке не принимает экстремальное значение.

$$M_p = -X_A \cdot x_3 - \frac{qx_3^2}{2} = 75x_3 - 7,5x_3^2.$$

При $x_3 = 0$, $M_p = 0$.

При $x_3 = h = 5$ м, $M_p = 75 \cdot 5 - 7,5 \cdot 5^2 = 187,5$ кНм.

При $x_3 = \frac{h}{2} = 2,5$ м, $M_p = 75 \cdot 2,5 - 7,5 \cdot 2,5^2 = 140,625$ кНм.

2.2.5. Определение перемещений

$$\delta_{11} = \sum_{i=1}^3 \int_0^{l_i} \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1}{EI} dx = \sum_{i=1}^3 \frac{\Omega_i \bar{M}_{ci}}{EI} = \frac{\frac{1}{2}h \cdot h \cdot \frac{2}{3}h}{EI} + \frac{h \cdot l \cdot h}{1,1EI} + \frac{\frac{1}{2}h \cdot h \cdot \frac{2}{3}h}{EI} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5}{EI} + \frac{5 \cdot 4 \cdot 5}{1,1EI} + \frac{\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5}{EI} = \frac{174,24}{EI} \cdot \\
\Delta_{1p} &= \sum_{i=1}^3 \int_0^{l_i} \frac{\overline{M}_1 M_p}{EI} dx = \sum_{i=1}^3 \frac{\Omega_p \overline{M}_{c1}}{EI} = = \\
&= \frac{5 \cdot \left(0 - 187,5 \cdot 5 - 4 \cdot 140,625 \cdot \frac{5}{2} \right)}{6EI} - \frac{\frac{1}{2} \cdot 187,5 \cdot 4 \cdot 5}{1,1EI} = -\frac{3657,67}{EI} \cdot
\end{aligned}$$

2.2.6. Определение величин “лишних” неизвестных

Подставив вычисленные величины перемещений в систему канонических уравнений, получим:

$$\frac{174,27}{EI} X_1 - \frac{3657,67}{EI} = 0; \quad X_1 = 20,99 \text{ кН}.$$

2.2.7. Построение эпюр внутренних силовых факторов M, N и Q

Нагруженная рама показана на рис. 26. Определим опорные реакции.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n X_i &= 0; \\
qh + X_A - X_1 &= 0; \\
X_A = X_1 - qh &= 20,99 - 15 \cdot 5 = -54,01 \text{ кН}; \\
\sum_{i=1}^n M_A &= 0; \\
-\frac{qh^2}{2} + Y_B \cdot l &= 0; \\
Y_B = \frac{qh^2}{2l} &= \frac{15 \cdot 25}{2 \cdot 4} = 46,875 \text{ кН};
\end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^n Y_i = 0;$$

$$Y_A + Y_B = 0;$$

$$Y_A = -Y_B = -46,875 \text{ кН} .$$

Разобьем раму на три участка.

Границы первого участка: $0 \leq x_1 \leq h$.

$$N = -Y_B = -46,875 \text{ кН} ; Q = X_1 = 20,99 \text{ кН} ;$$

$$M = -X_1 \cdot x_1 = -20,99x_1 .$$

При $x_1 = 0$, $\bar{M}_1 = 0$.

При $x_1 = h = 5 \text{ м}$, $M = -20,99 \cdot 5 = -104,95 \text{ кНм}$.

Границы второго участка: $0 \leq x_2 \leq l$.

$$N = -X_1 = -20,99 \text{ кН} ; Q = -Y_B = -46,875 \text{ кН} ;$$

$$M = Y_B \cdot x_2 - X_1 \cdot h = 46,875 \cdot x_2 - 104,95 .$$

При $x_2 = 0$, $M = -104,95 \text{ кНм}$.

При $x_2 = l = 4 \text{ м}$, $M_p = 46,875 \cdot 4 - 104,95 = 82,55 \text{ кНм}$.

Границы третьего участка: $0 \leq x_3 \leq h$.

$$N = -Y_A = 46,875 \text{ кН} ; Q = -X_A - qx_3 = 54,01 - 15x_3 .$$

При $x_3 = 0$, $Q = 54,01 \text{ кН}$.

При $x_3 = h = 5 \text{ м}$, $Q = 54,01 - 15 \cdot 5 = -20,99 \text{ кН}$;

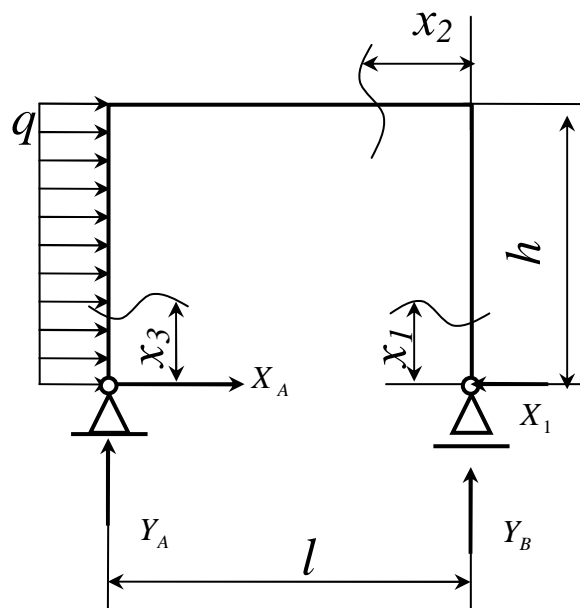


Рис. 26

$$Q = -54,01 - 15x_0 = 0; x_0 = 3,6 \text{ м};$$

$$M = -X_A \cdot x_3 - \frac{qx_3^2}{2} = 54,01x_3 - 7,5x_3^2.$$

При $x_3 = 0$, $M = 0$.

При $x_3 = h = 5 \text{ м}$, $M = 54,01 \cdot 5 - 7,5 \cdot 5^2 = 82,55 \text{ кНм}$.

При $x_3 = x_0 = 3,6 \text{ м}$, $M = 54,01 \cdot 3,6 - 7,5 \cdot 3,6^2 = 97,236 \text{ кНм}$.

Эпюры **M**, **N** и **Q** показаны на рис. 27.

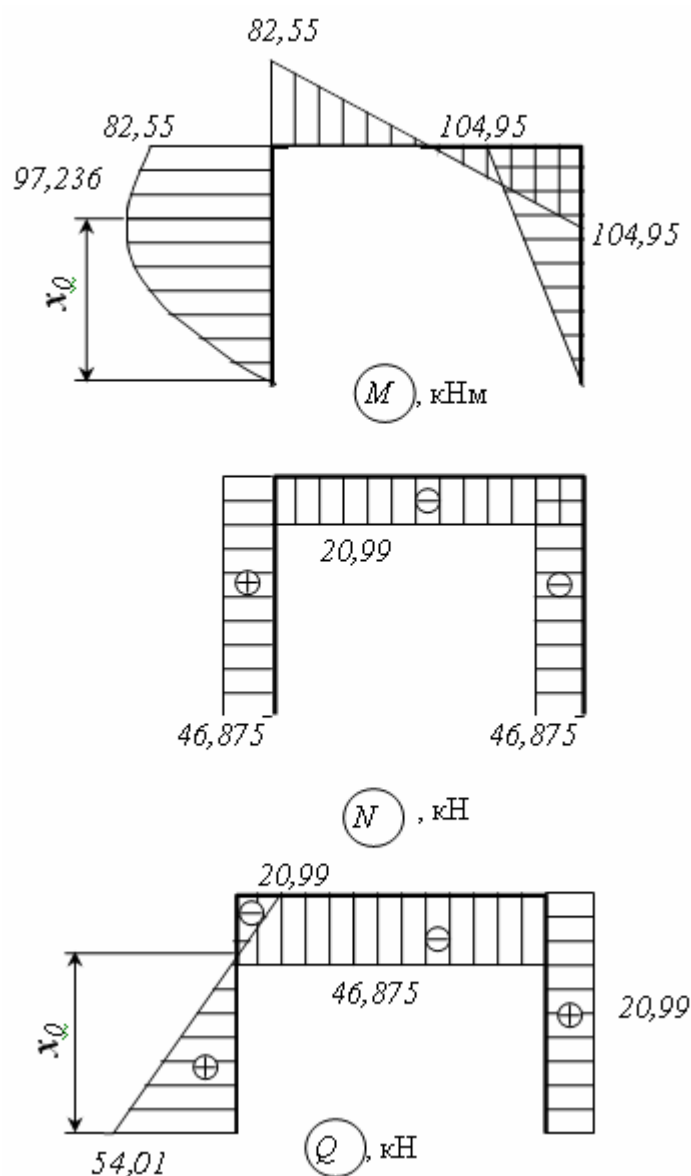


Рис. 27

2.3. Основные системы для схем II – X

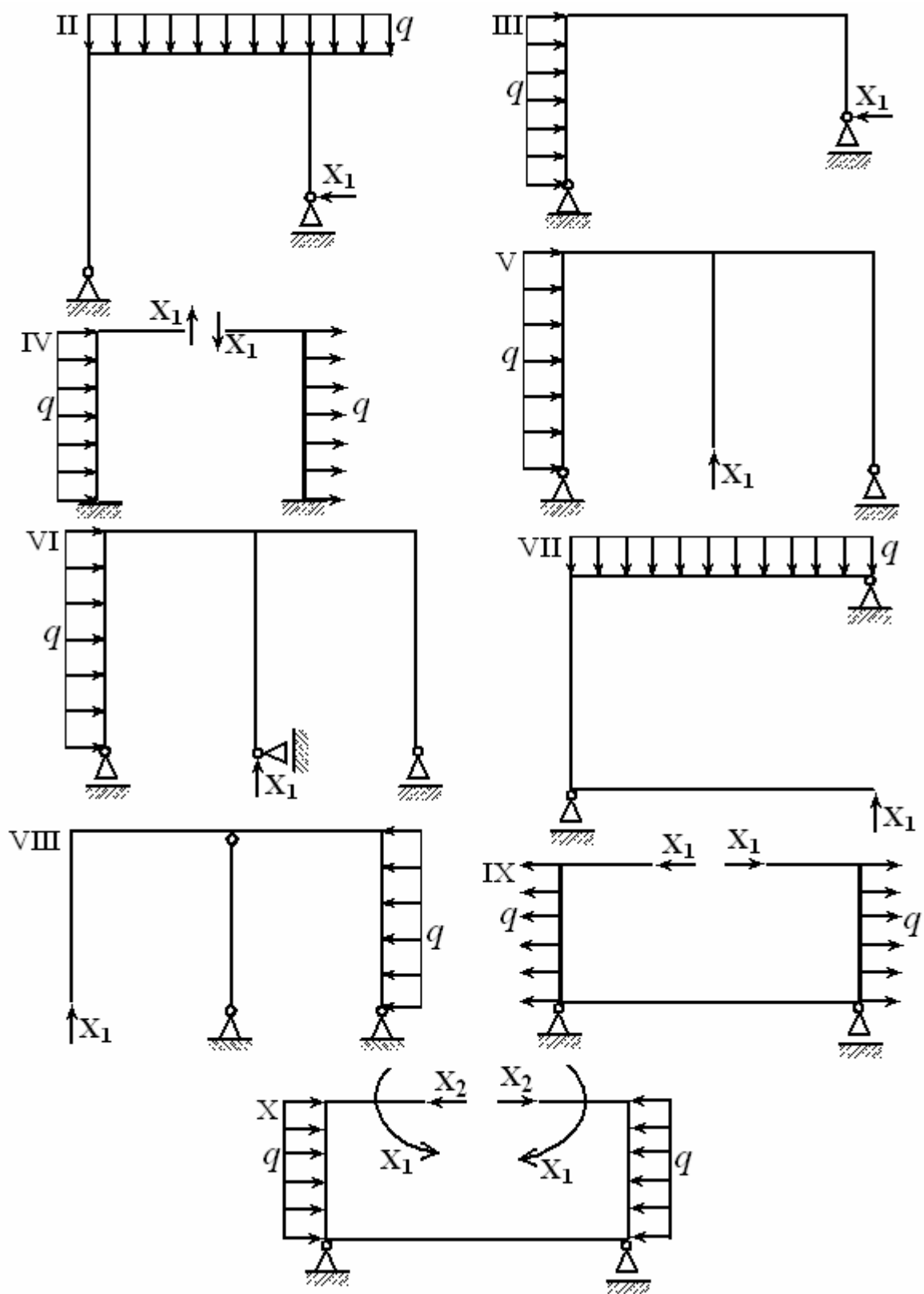


Рис. 28

3. УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ ДЕФОРМИРУЕМЫХ СИСТЕМ

3.1. Краткие сведения по теории

3.1.1. Понятие об устойчивости

Под устойчивостью понимается свойство системы сохранять свое состояние равновесия при внешних воздействиях. Если система таким свойством не обладает, то она является неустойчивой.

Система при потере устойчивости может вести себя по-разному. Обычно происходит переход к некоторому новому положению равновесия, что в подавляющем большинстве случаев сопровождается большими перемещениями, возникновением пластических деформаций или разрушением.

Приложим к прямолинейному стержню сжимающую силу (рис. 29). Если значение сжимающей силы невелико, то стержень после горизонтального перемещения с колебаниями будет возвращаться к первоначальному прямолинейному состоянию равновесия. Такое положение равновесия считается устойчивым (рис. 29а). Если увеличить значение сжимающей силы, то при определенном ее значении стержень не вернется в первоначальное положение равновесия и такое равновесие считается неустойчивым (рис. 29б).

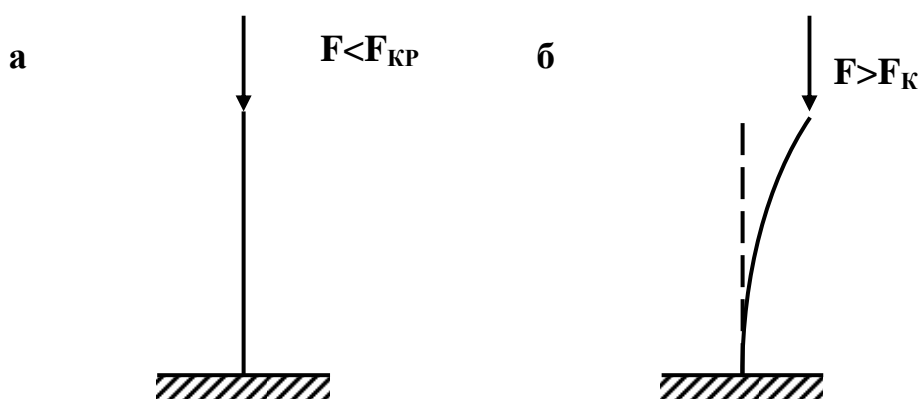


Рис. 29

3.1.2. Критическая сила

Наименьшее значение сжимающей силы, при котором стержень теряет способность сохранять прямолинейную форму равновесия, называют критической силой.

Формула Эйлера для определения критической силы для сжатого стержня при величинах напряжений, меньших предела пропорциональности, имеет вид:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{MIN}}{(\mu l)^2}, \quad (26)$$

где E – модуль Юнга материала стержня (для стали $E = 2 \cdot 10^5$ Па); I_{MIN} –

минимальный момент инерции поперечного сечения; μ – коэффициент приведения длины стержня (зависимость коэффициента μ от способа закрепления концов стержня показана на рис. 30); L – длина стержня.

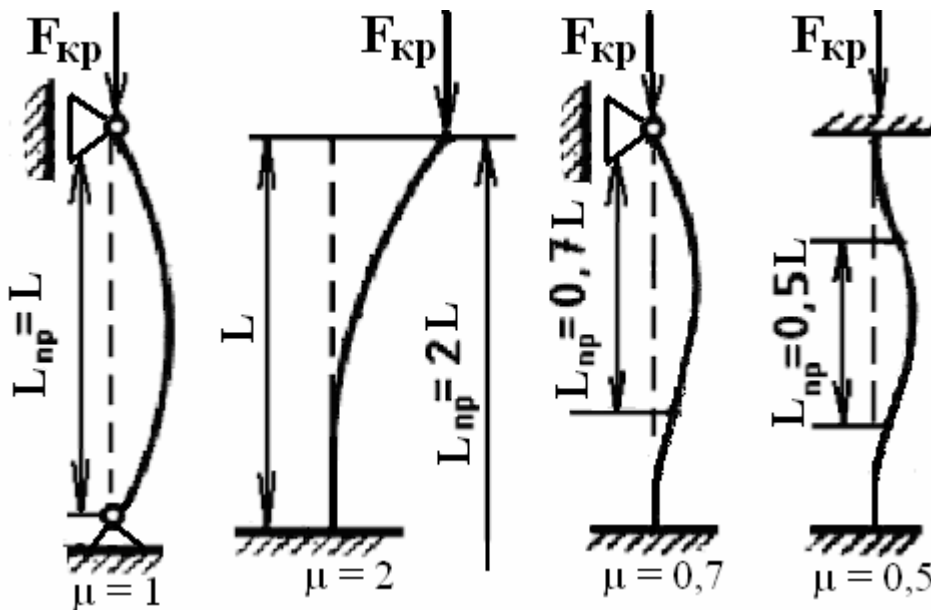


Рис. 30

3.1.3. Границы применимости формулы Эйлера

Величина λ называется гибкостью стержня и определяется по формуле:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{MIN}}, \quad (27)$$

где i_{MIN} – минимальный радиус инерции сечения.

Различают стержни большой, средней и малой гибкости.

Стержни большой гибкости ($\lambda \geq \lambda_{ПРЕД}$) рассчитываются на устойчивость по формуле Эйлера (26).

Стержни средней гибкости ($\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_{ПРЕД}$) рассчитываются на устойчивость по формуле Ясинского:

$$F_{КР} = \sigma_{КР} \cdot A = (a - b\lambda) \cdot A, \quad (28)$$

где $\sigma_{КР}$ – критическое напряжение; A – площадь поперечного сечения стержня; a, b – коэффициенты, зависящие от свойств материала (для малоуглеродистой стали $a=310$ МПа, $b=1,14$ МПа).

Стержни малой гибкости ($\lambda \leq \lambda_0$) рассчитывают не на устойчивость, а на прочность.

$\lambda_{\text{ПРЕД}}$, λ_0 – показатели гибкости, при которых критические напряжения, соответственно, равны пределу пропорциональности и пределу текучести материала стержня.

3.1.4. Коэффициент запаса устойчивости

При расчете конструкции эксплуатационная нагрузка F не должна быть больше критической $F_{\text{КР}}$. Отношение критической силы к эксплуатационной называется коэффициентом запаса устойчивости S_y , и он не должен быть меньше допускаемого значения (для стали $[S_y] = 1,8 \div 3$).

$$S_y = \frac{F_{\text{КР}}}{F} \geq [S_y]. \quad (29)$$

3.1.5. Практические расчеты на устойчивость

Необходимо выполнение условия устойчивости

$$\sigma_y = \frac{F}{A} \leq [\sigma_y], \quad (30)$$

где σ_y - напряжение устойчивости, определяется точно так же, как напряжение сжатия; $[\sigma_y]$ - допускаемое напряжение на устойчивость,

$$[\sigma_y] = \varphi \cdot [\sigma_{\text{СЖ}}], \quad (31)$$

где φ – коэффициент уменьшения основного допускаемого напряжения, ($0 \leq \varphi \leq 1$); $[\sigma_{\text{СЖ}}]$ – допускаемое напряжение на сжатие материала стержня.

Окончательно условие устойчивости имеет вид:

$$\sigma_y = \frac{F}{A} \leq \varphi \cdot [\sigma_{\text{СЖ}}]. \quad (32)$$

Зависимость коэффициента φ от гибкости λ для стали Ст3 приведена в табл. 3.

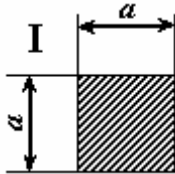
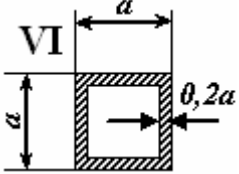
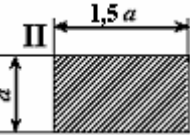
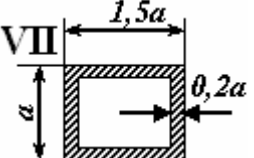
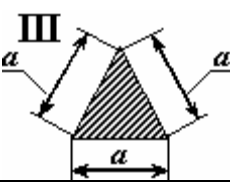
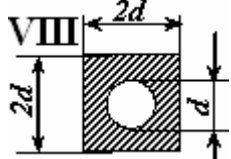
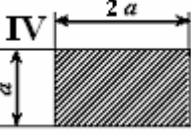
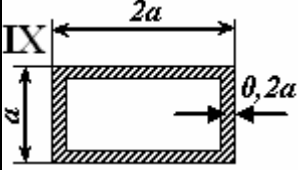
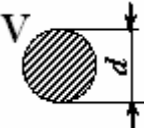
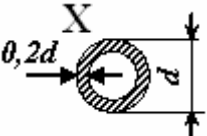
Таблица 3

λ	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	
φ	1,00	0,99	0,96	0,94	0,92	0,89	0,86	0,81	0,75	0,69	
λ	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200
φ	0,60	0,52	0,45	0,40	0,36	0,32	0,29	0,26	0,23	0,21	0,19

3.2. Пример выполнения задания

Стальной стержень длиной L сжимается силой F . Требуется: 1) найти размеры поперечного сечения при допуске напряжении на сжатие $[\sigma] = 160$ МПа (расчет производить последовательными приближениями, предварительно задавшись коэффициентом $\varphi = 0,5$); 2) найти критическую силу и коэффициент запаса устойчивости. Данные взять из табл. 4.

Таблица 4

№ строки	F , кН	L , м	Схема по рис. 31	Форма сечения стержня	
1	100	2,1	I		
2	200	2,2			
3	300	2,3	II		
4	400	2,4			
5	500	2,5	III		
6	600	2,6			
7	700	2,7	IV		
8	800	2,8			
9	900	2,9	V		
0	1000	3,0			
	e	ϑ	ϑ	e	

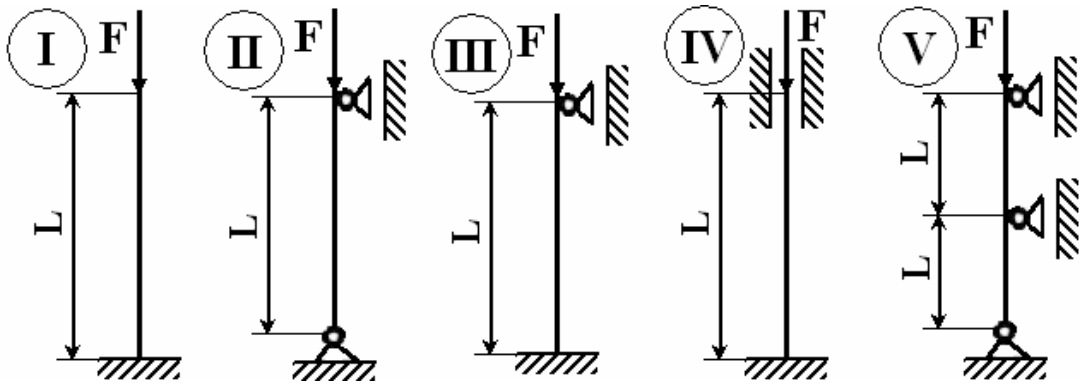


Рис. 31

3.2.1. Исходные данные

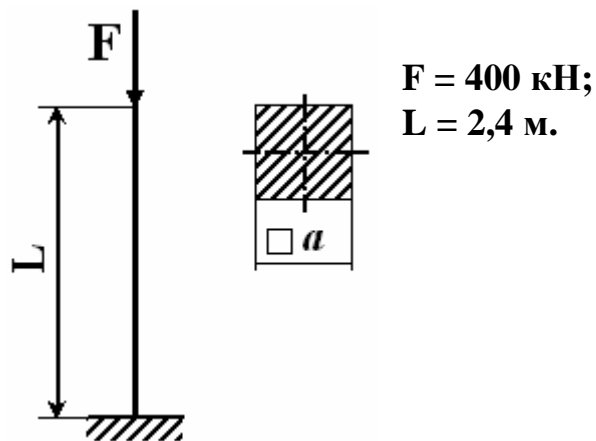


Рис. 32

3.2.2. Определение размеров поперечного сечения из условия устойчивости стержня

Из условия устойчивости выразим размер поперечного сечения

$$A = a^2 \geq \frac{F}{\varphi \cdot [\sigma_{СЖ}]};$$

$$a \geq \sqrt{\frac{F}{\varphi \cdot [\sigma_{СЖ}]} } = \sqrt{\frac{400 \cdot 10^3}{\varphi \cdot 160 \cdot 10^6}} = \frac{0,05}{\sqrt{\varphi}}.$$

Минимальный момент инерции поперечного сечения с размерами сторон, равными a , будет:

$$I_{MIN} = \frac{a^4}{12}.$$

Минимальный радиус инерции поперечного сечения:

$$i_{MIN} = \frac{a}{\sqrt{12}}.$$

Гибкость стержня:

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{MIN}} = \frac{2 \cdot 2,4 \cdot \sqrt{12}}{a} = \frac{16,63}{a}.$$

Первое приближение: $\varphi = 0,5$; $a \geq \frac{0,05}{\sqrt{0,5}} = 0,071 \text{ м}$; $\lambda = \frac{16,63}{0,071} = 234$.

Далее необходимо, пользуясь табл. 3, вычислить значение коэффициента Φ , которое соответствует гибкости $\lambda = 234$.

При $\lambda = 190$, $\Phi = 0,21$.

При $\lambda = 200$, $\Phi = 0,19$.

$$\varphi' = 0,21 - \frac{0,21 - 0,19}{10} \cdot 34 = 0,122.$$

Разница между Φ и Φ' превышает 5 %, следовательно, делаем второе приближение.

Второе приближение: $\varphi_2 = \frac{0,5 + 0,122}{2} = 0,311$;

$$a \geq \frac{0,05}{\sqrt{0,311}} = 0,089 \text{ м}; \quad \lambda = \frac{16,63}{0,089} = 183.$$

При $\lambda = 180$, $\Phi = 0,23$.

При $\lambda = 190$, $\Phi = 0,21$.

$$\varphi_2' = 0,23 - \frac{0,23 - 0,21}{10} \cdot 3 = 0,224.$$

Разница между Φ_2 и Φ_2' превышает 5 %, следовательно, делаем третье приближение.

Третье приближение: $\varphi_3 = \frac{0,311 + 0,224}{2} = 0,268$;

$$a \geq \frac{0,05}{\sqrt{0,268}} = 0,097 \text{ м}; \quad \lambda = \frac{16,63}{0,097} = 171.$$

При $\lambda = 170$, $\Phi = 0,26$.

При $\lambda = 180$, $\varphi = 0,23$.

$$\varphi_3' = 0,26 - \frac{0,26 - 0,23}{10} \cdot 1 = 0,257.$$

Разница между φ_3 и φ_3' не превышает 5 %, следовательно, решение выполнено с допустимой точностью.

Принимаем $a = 100$ мм, тогда $\lambda = \frac{16,63}{0,1} = 166$.

При $\lambda = 160$, $\varphi = 0,29$.

При $\lambda = 170$, $\varphi = 0,26$.

$$\varphi = 0,29 - \frac{0,29 - 0,26}{10} \cdot 6 = 0,272.$$

Определим допускаемое напряжение, при котором устойчивость стержня будет обеспечена:

$$[\sigma_y] = \varphi \cdot [\sigma_{сж}] = 0,272 \cdot 160 = 43,52 \text{ МПа}.$$

$$\sigma_y = \frac{F}{A} \leq \frac{400 \cdot 10^3}{0,1^2} = 40 \cdot 10^6 \text{ Па} = 40 \text{ МПа} \leq 43,52 \text{ МПа} = [\sigma_y].$$

Условие устойчивости выполняется.

3.2.3. Определение критической силы и коэффициента запаса устойчивости

Так как для данного стержня $\lambda > 100$, то он относится к стержням большой гибкости, и критическую силу вычисляем по формуле Эйлера:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{MIN}}{(\mu l)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 0,1^4}{12 \cdot (2 \cdot 2,4)^2} = 713 \cdot 10^3 \text{ Н} = 713 \text{ кН}.$$

Коэффициент запаса устойчивости:

$$S_y = \frac{F_{кр}}{F} = \frac{713}{400} = 1,8.$$

Для остальных схем расчет производится аналогичным образом. При выполнении задания для тех вариантов, где поперечное сечение имеет менее двух осей симметрии, следует обратить внимание на то, что моменты инерции относительно осей **Y** и **Z** будут различны. Необходимо (в п. 3.2.2) выбрать наименьший.

4. ДИНАМИЧЕСКАЯ НАГРУЗКА

4.1. Напряжения при ударе

4.1.1. Краткие сведения по теории

Под ударной понимается нагрузка, действующая в течение короткого времени. Продолжительность действия ударной нагрузки должна быть значительно меньше периода собственных колебаний системы. За время действия такой нагрузки не произойдет сколько-нибудь заметных перемещений масс системы, но массы приобретут за это время конечные скорости.

Отношение динамического значения некоторого фактора к соответствующему статическому значению этого фактора называется динамическим коэффициентом. Например, если речь идет о напряжении, то

$$K_{\text{дин}} = \frac{\sigma_{\text{дин}}}{\sigma_{\text{ст}}} . \quad (33)$$

Все факторы в рассматриваемой системе при ударе возрастают в одно и то же число раз по сравнению со статическим нагружением. Это число и есть динамический коэффициент.

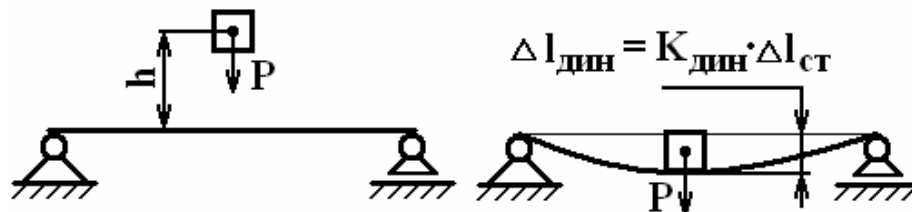


Рис. 33

При поперечном ударе (рис. 33) динамический коэффициент можно вычислить по следующей формуле

$$K_{\text{дин}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta l_{\text{ст}}} \cdot \frac{1}{1 + m/M}} , \quad (34)$$

где h – высота падения груза; $\Delta l_{\text{ст}}$ – перемещение, вызванное падающим грузом, но приложенным статически; m – масса ударяемого тела; M – масса ударяющего тела.

Формула (34) выведена на основании закона сохранения энергии при следующих допущениях:

1) тела после удара движутся совместно и друг от друга не отделяются;

- 2) выполняется закон Гука, т. е. напряжение при ударе меньше, чем предел пропорциональности;
- 3) та часть энергии, которая переходит в теплоту и в энергию колебательного движения, считается пренебрежимо малой.

Если масса балки, подвергающейся удару, значительно меньше массы падающего на нее груза, то динамический коэффициент можно вычислить по следующей формуле:

$$K_{\text{дин}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta l_{\text{ст}}}} \quad (35)$$

Динамическое значение напряжения при ударном действии нагрузки можно вычислить по формуле:

$$\sigma_{\text{дин}} = \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta l_{\text{ст}}}} \right) \cdot \sigma_{\text{ст}} \quad (36)$$

Значение динамического напряжения зависит от величины статического перемещения ударяемого тела, т. е. не только от формы и размеров поперечного сечения стержня, но и от его длины и модуля упругости материала.

При горизонтальном ударе формула для динамического коэффициента будет выглядеть так:

$$K_{\text{дин}} = \sqrt{\frac{V^2}{g \cdot \Delta l_{\text{ст}}} \cdot \frac{1}{1 + m/M}} \quad (37)$$

где V – скорость движения груза: g — ускорение силы тяжести: m – масса ударяемого тела: M - масса ударяющего тела: $\Delta l_{\text{ст}}$ – перемещение, вызванное силой, равной весу ударяющего тела, приложенной статически.

4.1.2. Пример выполнения задания

На двутавровую балку ГОСТ 8239 – 93, свободно лежащую на двух жестких опорах (рис. 34), с высоты h падает груз P . Требуется:

- 1) найти наибольшее нормальное напряжение в балке;

- 2) решить аналогичную задачу при условии, что правая опора заменена пружиной, податливость которой (т.е. осадка от груза весом **1 кН**) равна **α** ;
- 3) сравнить полученные результаты.
Данные взять из табл. 5.

Таблица 5

№ строки	Схема по рис. 34	№ двутавра	$I_{z,4}$ см⁴	$W_{z,3}$ см³	ℓ, м	P, Н	h, см	$10^3 \cdot \alpha$, м/кН
1	I	20	1840	184	2,1	1100	11	21
2	II	20a	2030	203	2,2	1200	12	22
3	III	24	3460	289	2,3	300	3	23
4	IV	24a	3800	317	2,4	400	4	24
5	V	27	5010	371	2,5	500	5	25
6	VI	27a	5500	407	2,6	600	6	26
7	VII	30	7080	472	2,7	700	7	27
8	VIII	30a	7780	518	2,8	800	8	28
9	IX	33	9840	597	2,9	900	9	29
0	X	36	13380	743	3,0	1000	10	30
	<i>e</i>		<i>\vartheta</i>		<i>e</i>	<i>z</i>	<i>\vartheta</i>	<i>e</i>

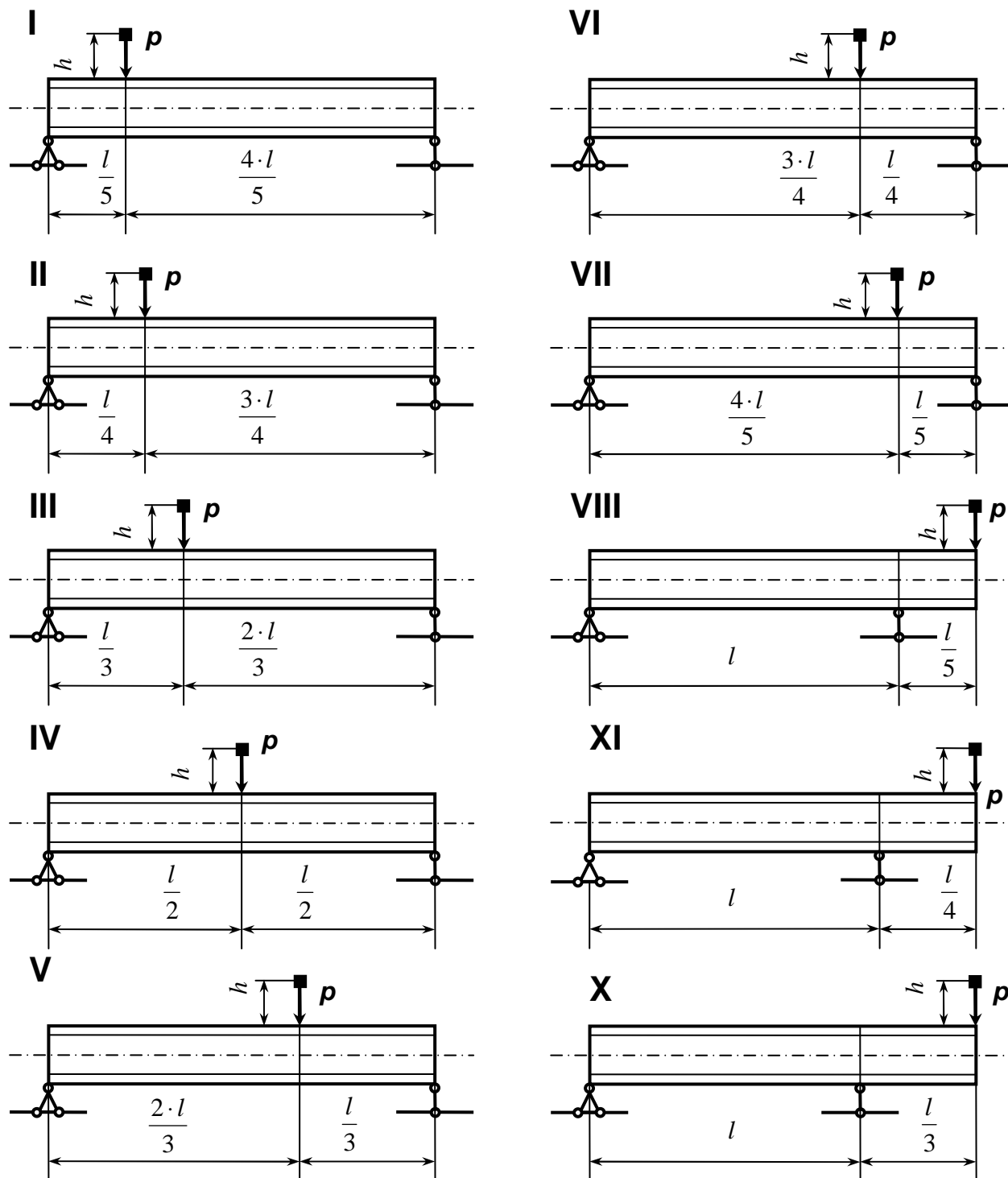


Рис. 34

Исходные данные

Двутавр № 20а; $I_Z = 2030 \text{ см}^4$; $W_Z = 203 \text{ см}^3$; $l = 2,8 \text{ м}$; $P = 500 \text{ Н}$;
 $h = 12 \text{ см}$; $\alpha = 28 \cdot 10^{-3} \text{ м/кН}$; $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$.

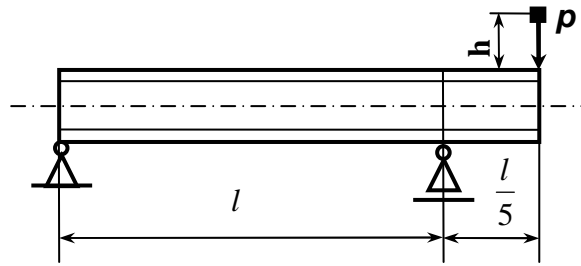


Рис. 35

Расчет динамического напряжения

Для определения статического напряжения необходимо вычислить максимальный изгибающий момент, для чего строим эпюру изгибающих моментов (рис. 36). Собственным весом балки пренебрегаем.

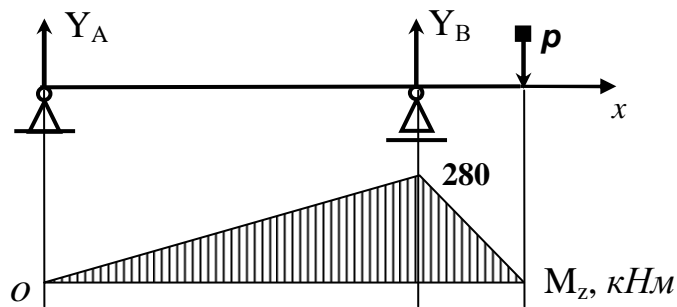


Рис. 36

Определяем опорные реакции:

$$\sum_{i=1}^n Y_i = 0; \quad Y_A + Y_B - P = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n M_{iA} = 0; \quad -P \cdot \frac{6}{5}l + Y_B \cdot l = 0;$$

$$Y_B = P \cdot \frac{6}{5} = \frac{500 \cdot 6}{5} = 600 \text{ H};$$

$$Y_A = -Y_B + P = -600 + 500 = -100 \text{ H}.$$

Проверка правильности нахождения опорных реакций:

$$\sum_{i=1}^n M_{iB} = 0; \quad -P \cdot \frac{l}{5} - Y_A \cdot l = -\frac{500 \cdot 2,8}{5} + 100 \cdot 2,8 = 0.$$

Следовательно, реакции найдены верно.
Разобьем балку на 2 участка.

Границы первого участка: $0 \leq x_1 \leq 1$.

$$M_1 = Y_A \cdot x_1 = -100 \cdot x_1.$$

При $x_1 = 0$ м, $M_1 = 0$ Нм.

При $x_1 = 1 = 2,8$ м, $M_1 = -280$ Нм.

Границы второго участка: $0 \leq x_2 \leq 1/5$.

$$M_2 = -P \cdot x_2 = -500 \cdot x_2.$$

При $x_2 = 0$ м, $M_2 = 0$ Нм.

При $x_2 = 1/5 = 0,56$ м, $M_2 = -280$ Нм.

$$\sigma_{CT} = \frac{|M_{MAX}|}{W_Z} = \frac{280}{203 \cdot 10^{-6}} = 1,4 \cdot 10^6 \text{ Па} = 1,4 \text{ МПа}.$$

Для определения статического прогиба необходимо построить эпюру единичных моментов. Схема балки, нагруженной единичной силой, и эпюра единичных моментов изображены на рис. 37.

Определяем опорные реакции:

$$\sum_{i=1}^n Y_i = 0; \quad \bar{Y}_A + \bar{Y}_B - 1 = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_{iA} = 0; \quad -1 \cdot \frac{6}{5} l + \bar{Y}_B \cdot l = 0;$$

$$\bar{Y}_B = P \cdot \frac{6}{5} = \frac{1 \cdot 6}{5} = 1,2; \quad \bar{Y}_A = -\bar{Y}_B + 1 = -1,2 + 1 = -0,2.$$

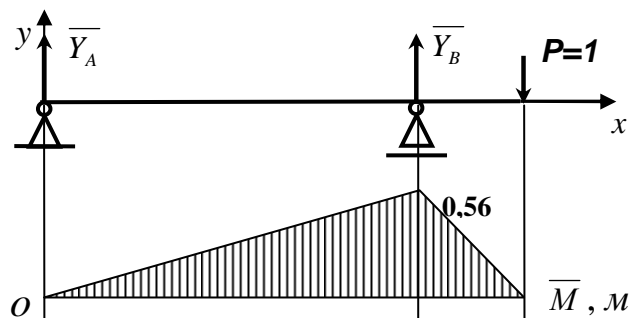


Рис. 37

Проверка правильности нахождения опорных реакций:

$$\sum_{i=1}^n M_{iB} = 0; \quad -1 \cdot \frac{l}{5} - Y_A \cdot l = -\frac{1 \cdot 2,8}{5} + 0,2 \cdot 2,8 = 0.$$

Следовательно, реакции найдены верно.

Разобьем балку на 2 участка.

Границы первого участка: $0 \leq x_1 \leq 1$.

$$M_1 = Y_A \cdot x_1 = -0,2 \cdot x_1.$$

При $x_1 = 0$ м, $M_1 = 0$ Нм.

При $x_1 = 1 = 2,8$ м, $M_1 = -0,56$ Нм.

Границы второго участка: $0 \leq x_2 \leq 1/5$.

$$M_2 = -P \cdot x_2 = -1 \cdot x_2.$$

При $x_2 = 0$ м, $M_2 = 0$ Нм.

При $x_2 = 1/5 = 0,56$ м, $M_2 = -0,56$ Нм.

Чтобы вычислить величину статического прогиба, воспользуемся способом Верещагина для вычисления интеграла Максвелла-Мора (см. п. 2.1.6).

$$\Delta l_{CT} = \frac{1}{2} \cdot 280 \cdot \frac{6}{5} \cdot 2,8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,56 = 0,0432 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,0432 \text{ мм};$$

$$\sigma_{ДИН} = \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 120}{0,0432}} \right) \cdot 1,4 = 104,2 \text{ МПа}.$$

Расчет динамического напряжения при условии, что правая опора заменена пружиной

Перемещение в правой опоре:

$$a = \alpha \cdot Y_B = 28 \cdot 10^{-3} \cdot 600 = 16,8 \text{ мм}.$$

Из подобия треугольников находим (рис. 38):

$$\frac{a}{a_1} = \frac{l}{\frac{6}{5} \cdot l} = \frac{5}{6}; \quad a_1 = \frac{6 \cdot a}{5} = \frac{6 \cdot 16,8}{5} = 20,16 \text{ мм};$$

$$\Delta l_{CT1} = \Delta l_{CT} + a_1 = 0,0432 + 20,16 = 20,2032 \text{ мм};$$

$$\sigma_{ДИН1} = \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 120}{20,2032}} \right) \cdot 1,4 = 6,4 \text{ МПа}.$$

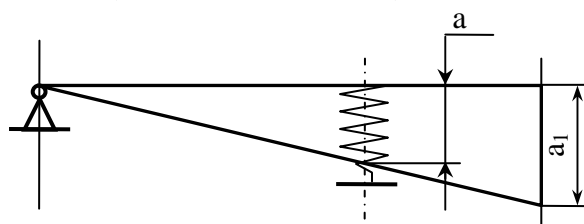


Рис. 38

Сравнение результатов

$$\frac{\sigma_{ДИН}}{\sigma_{ДИН1}} = \frac{104,2}{6,4} = 16,3.$$

Для остальных схем расчет производится аналогичным образом.

4.2. Напряжения в движущихся деталях

4.2.1. Краткие сведения по теории

Нагрузка, приложенная к системе, называется динамической, если при расчете нельзя пренебречь силами инерции, возникающими в элементах системы. Силы инерции выступают как дополнительная внешняя нагрузка. Их взаимодействие с силами упругости часто порождает возникновение колебаний, которые могут привести к многократному росту внутренних усилий и напряжений.

Известно, что элементарная сила инерции dF , действующая на бесконечно малый объем тела dV , определяется как произведение ускорения a этого объема на его массу dm :

$$dF = a \cdot dm = a \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot dV, \quad (38)$$

где γ — удельный вес материала; g — ускорение силы тяжести.

Сила инерции всегда направлена противоположно ускорению.

Пусть однородный стержень AB вращается вокруг оси с постоянной угловой скоростью ω , причем вектор угловой скорости параллелен оси стержня (рис. 39а).

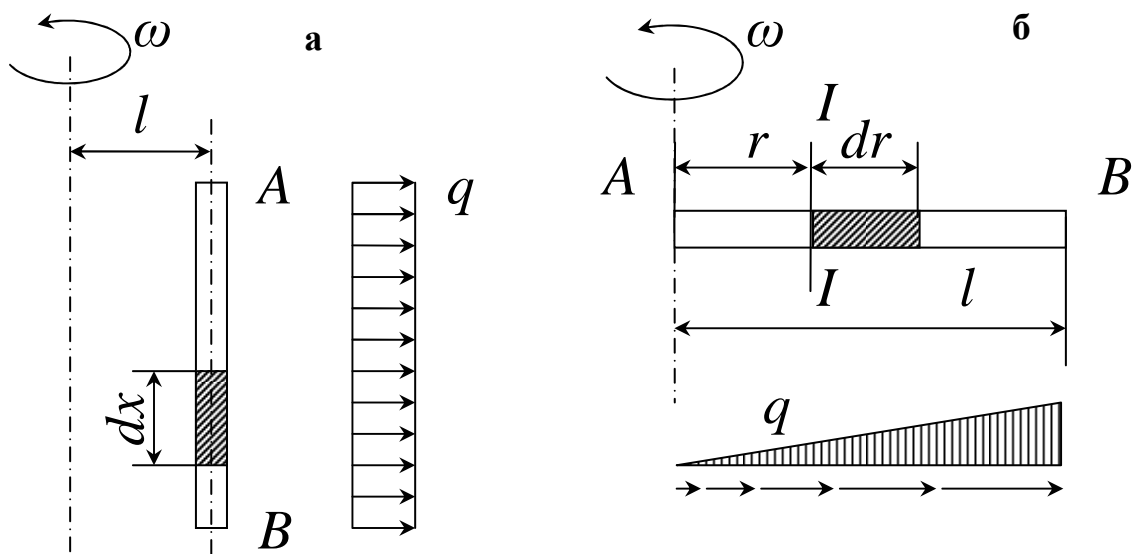


Рис. 39

Все точки на оси стержня имеют одинаковые ускорения a , равные центростремительному ускорению a_n :

$$a = a_n = \omega^2 \cdot l, \quad (39)$$

где l — расстояние между осями.

Согласно формуле (38) элементарная сила инерции:

$$dF = \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \cdot l \cdot dV = \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \cdot l \cdot A \cdot dx, \quad (40)$$

где A — площадь поперечного сечения стержня. Отсюда найдем интенсивность сил инерции, распределенных по длине стержня:

$$q = \frac{dF}{dx} = \frac{\gamma A}{g} \omega^2 l. \quad (41)$$

Эпюра сил инерции изображена справа на рис. 39а.

Пусть теперь ось стержня перпендикулярна оси вращения (рис. 39б), и торцевое сечение A касается оси. Выберем произвольное сечение I–I, удаленное от оси вращения на расстояние r . На элемент dr , расположенный правее этого сечения, действует элементарная сила инерции:

$$dF = \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \cdot r \cdot A \cdot dr. \quad (42)$$

Тогда интенсивность сил инерции в сечении с координатой r будет:

$$q_r = \frac{dF}{dr} = \frac{\gamma A}{g} \omega^2 r. \quad (43)$$

При $r = 0$, $q_r = 0$.

При $r = l$, $q_r = \gamma \cdot A \cdot \omega^2 \cdot l / g$.

На рис. 39б внизу изображена эпюра сил инерции, где стрелками указаны их направления.

4.2.2. Пример выполнения задания

Валик и жестко соединенный с ним ломаный стержень того же поперечного сечения вращаются с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси AB (рис. 40). Требуется: 1) построить эпюру изгибающих моментов от сил инерции, возникающих на вертикальном CD и горизонтальном DEF участках ломаного стержня; силы инерции самого валика можно не учитывать (при изображенном на рис. 40 положении ломаного стержня силы инерции складываются с силами собственного веса, но последними, ввиду их незначительности, при построении эпюры M можно пренебречь); 2) найти допустимое число оборотов валика в минуту при допустимом напряжении $[\sigma] = 100$ МПа и $\gamma = 78$ кН/м³. Данные взять из табл. 6.

Указания. Для упрощения вычислений рекомендуется производить их сначала в общем виде, обозначив интенсивность сил инерции на горизонтальном участке через q . Равнодействующие сил инерции на горизонтальном и вертикальном участках, опорные реакции, ординаты эпюры M надо выразить через q и l .

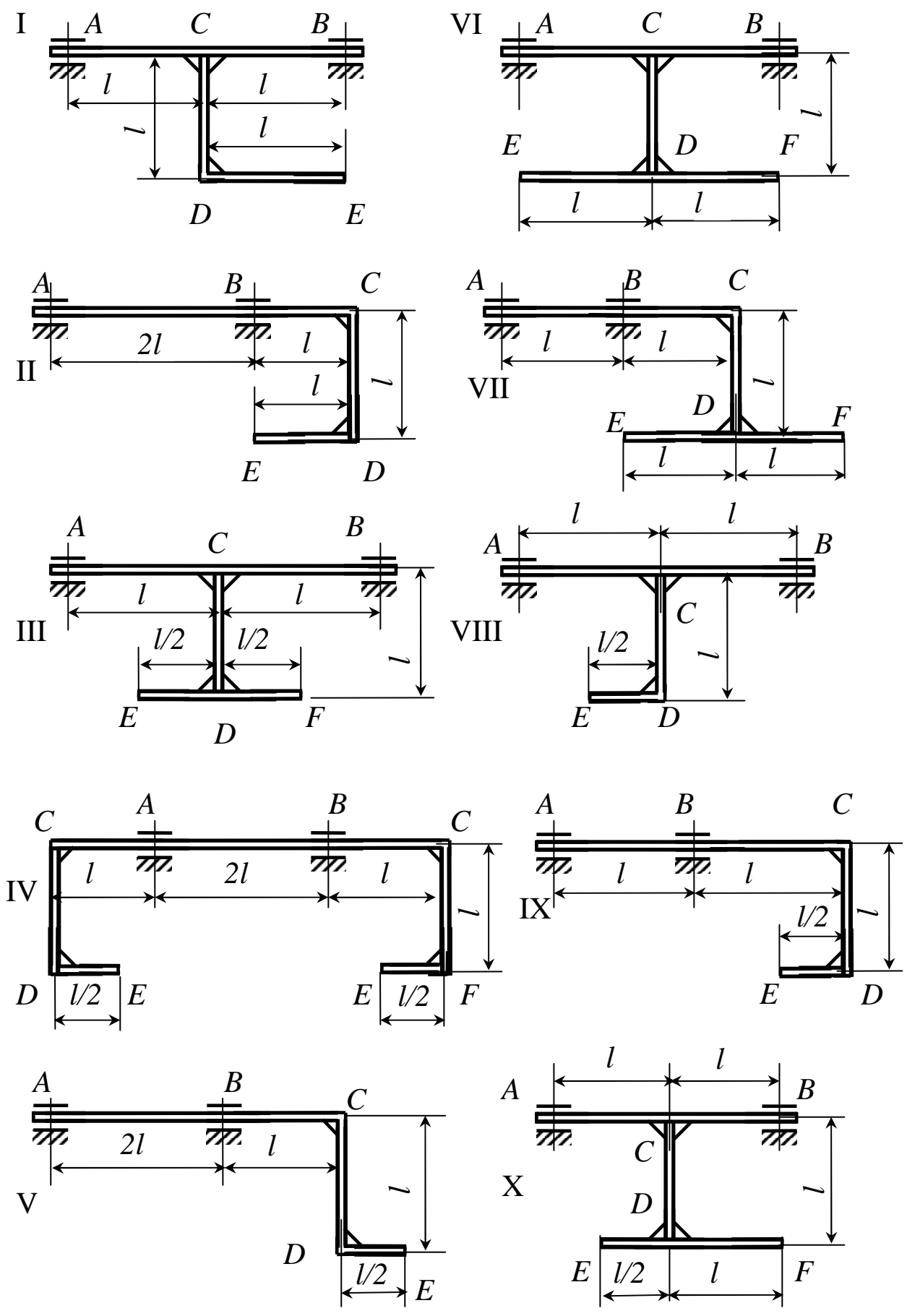


Рис. 40

Таблица 6

№ строки	Схема по рис. 40	l, см	Диаметр валика d, мм
1	I	15	21
2	II	20	22
3	III	25	23
4	IV	30	24
5	V	35	25
6	VI	40	16
7	VII	45	17
8	VIII	50	18
9	IX	55	19
0	X	60	20
	<i>e</i>	<i>д</i>	<i>z</i>

Исходные данные

$d = 25 \text{ мм} = 25 \cdot 10^{-3} \text{ м}$; $l = 40 \text{ см} = 0,4 \text{ м}$; $[\sigma] = 100 \text{ МПа} = 100 \cdot 10^6 \text{ Па}$;
 $\gamma = 78 \text{ кН/м}^3 = 78 \cdot 10^3 \text{ Н/м}^3$.

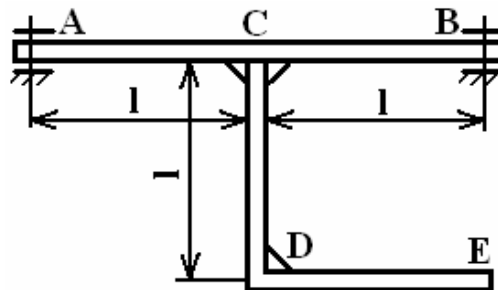


Рис. 41

Построение эпюры изгибающих моментов

Расчетная схема показана на рис. 42.

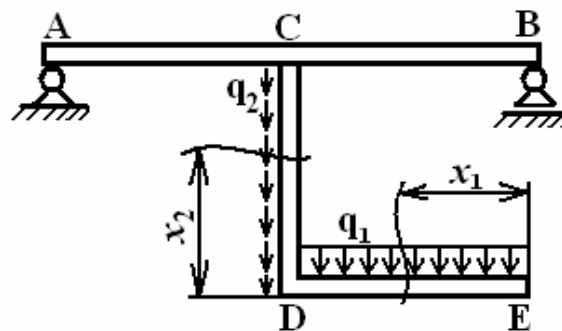


Рис. 42

Определим величины действующих нагрузок.

Участок **DE**:

$$q_1 = \frac{\gamma \cdot A}{g} \cdot l \cdot \omega^2,$$

где A — площадь поперечного сечения стержня:

$$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot (25 \cdot 10^{-3})^2}{4} = 0,49 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

Тогда:

$$q_1 = \frac{78 \cdot 10^3 \cdot 0,49 \cdot 10^{-3} \cdot 0,4}{9,816} \cdot \omega^2 = 1,56 \cdot \omega^2.$$

Участок **CD**:

$$q_2 = \frac{\gamma \cdot A}{g} \cdot x \cdot \omega^2 = \frac{78 \cdot 10^3 \cdot 0,49 \cdot 10^{-3}}{9,816} \cdot x \cdot \omega^2 = 3,89 \cdot x \cdot \omega^2.$$

Построим эпюру изгибающего момента на участках **DE** и **CD** стержня.

Границы первого участка: $0 \leq x_1 \leq l$.

$$M_1 = 0,5 \cdot q_1 \cdot x_1^2 = 0,78 \cdot x_1^2 \cdot \omega^2.$$

При $x_1 = 0 \text{ м}$, $M_1 = 0$.

При $x_1 = l = 0,4 \text{ м}$, $M_1 = 0,125 \cdot \omega^2$.

При $x_1 = 0,5 \cdot l = 0,2 \text{ м}$, $M_1 = 0,03 \cdot \omega^2$.

Границы второго участка: $0 \leq x_2 \leq l$.

$$M_2 = 0,5 \cdot q_1 \cdot x_2^2 = 0,125 \cdot \omega^2.$$

Эпюра изгибающего момента на этих участках показана на рис. 43.

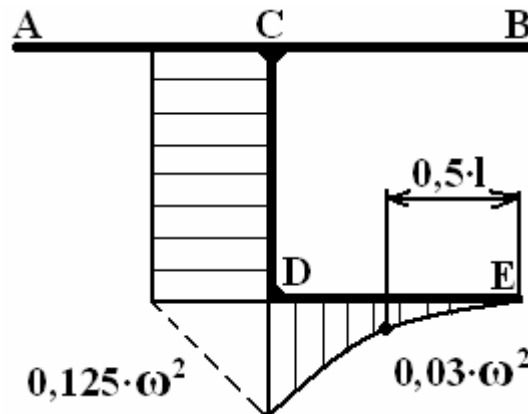


Рис. 43

Рассмотрим теперь участки **AC** и **BC** валика (рис. 44). В точке **C** со стороны отброшенного ломаного стержня **CDE** действуют следующие сило-

вые факторы, вызывающие изгиб стержня **AB**: изгибающий момент $M = 0,125 \cdot \omega^2$ и поперечная сила:

$$Q = N_{CD} + Q_{DE},$$

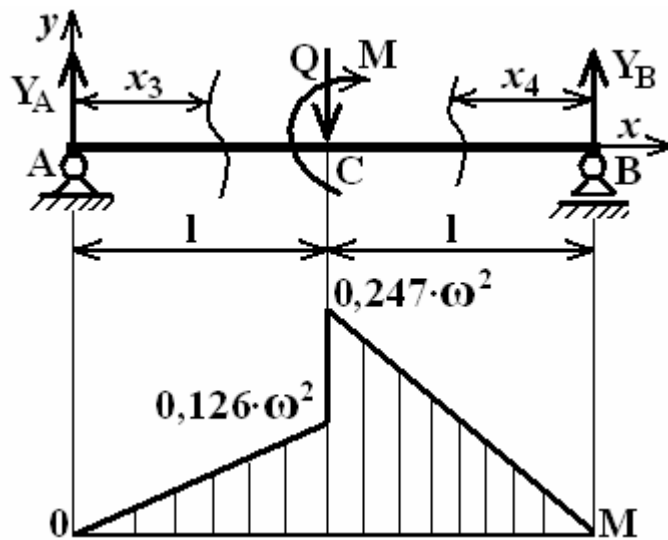


Рис. 44

где N_{CD} — продольная растягивающая сила от нагрузки q_2 на участке **CD**:

$$N_{CD} = \int_0^{x_2} q_2 dx_2 = \frac{\gamma \cdot A \cdot \omega^2}{g} \cdot \int_0^{x_2} x_2 dx_2 = \frac{\gamma \cdot A \cdot \omega^2}{g} \cdot \frac{x_2^2}{2}.$$

В точке **C**, т.е. при $x_2 = l = 0,4$ м, будет:

$$N_{CD} = \frac{\gamma \cdot A}{2 \cdot g} \cdot l^2 \cdot \omega^2 = \frac{78 \cdot 10^3 \cdot 0,49 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 9,816} (0,4)^2 \omega^2 = 0,312 \omega^2.$$

Q_{DE} — поперечная сила от нагрузки q_1 на участке **DE**, она будет вызывать растяжение участка **CD**.

$$Q_{DE} = q_1 \cdot l = 1,56 \cdot \omega^2 \cdot 0,4 = 0,624 \cdot \omega^2.$$

Тогда $Q = 0,312 \cdot \omega^2 + 0,624 \cdot \omega^2 = 0,936 \cdot \omega^2$.

Определим опорные реакции (рис. 44):

$$\Sigma X = 0; \quad X_A = 0; \quad \Sigma M_A = 0; \quad -M - Q \cdot l + Y_B \cdot 2 \cdot l = 0;$$

$$Y_B = \frac{M + Q \cdot l}{2 \cdot l} = \frac{0,121 \cdot \omega^2 + 0,936 \cdot 0,4 \cdot \omega^2}{2 \cdot 0,4} = 0,624 \cdot \omega^2.$$

$$\Sigma M_B = 0; \quad -M + Q \cdot l - Y_A \cdot 2 \cdot l = 0;$$

$$Y_A = \frac{-M + Q \cdot l}{2 \cdot l} = \frac{-0,125 \cdot \omega^2 + 0,936 \cdot 0,4 \cdot \omega^2}{2 \cdot 0,4} = 0,316 \cdot \omega^2.$$

$$\Sigma Y = 0; \quad Y_A + Y_B - Q = 0,316 \cdot \omega^2 + 0,624 \cdot \omega^2 - 0,936 \cdot \omega^2 = 0.$$

Построим эпюру изгибающего момента на участках **АС** и **ВС** валика.

Границы третьего участка: $0 \leq x_3 \leq 1$.

$$M_3 = Y_A \cdot x_3 = 0,316 \cdot x_3 \cdot \omega^2.$$

При $x_3 = 0$ м, $M_3 = 0$. При $x_3 = 1 = 0,4$ м, $M_3 = 0,126 \cdot \omega^2$.

Границы четвертого участка: $0 \leq x_4 \leq 1$.

$$M_4 = Y_B \cdot x_4 = 0,624 \cdot x_4 \cdot \omega^2.$$

При $x_4 = 0$ м, $M_4 = 0$. При $x_4 = 1 = 0,4$ м, $M_4 = 0,247 \cdot \omega^2$.

В сечении **С**, где приложен изгибающий момент $M = 0,121 \cdot \omega^2$, на полученной эпюре (рис. 44) видим скачок на такую же величину:

$$0,247 \cdot \omega^2 - 0,126 \cdot \omega^2 = 0,121 \cdot \omega^2.$$

Окончательное распределение изгибающего момента по валику **АСВ** и стержню **СДЕ** показано на рис. 45. На эпюре видно, что максимальное значение изгибающего момента находится в сечении **С** справа и оно равно $M_{MAX} = 0,247 \cdot \omega^2$.

Определение допускаемого числа оборотов валика

Условие прочности по нормальным напряжениям при изгибе:

$$\sigma_{MAX} = \frac{M_{MAX}}{W_Z} \leq [\sigma],$$

где W_Z — осевой момент сопротивления поперечного сечения:

$$W_Z = \frac{\pi \cdot d^3}{32} = \frac{3,142 \cdot (25 \cdot 10^{-3})^3}{32} = 1,533 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

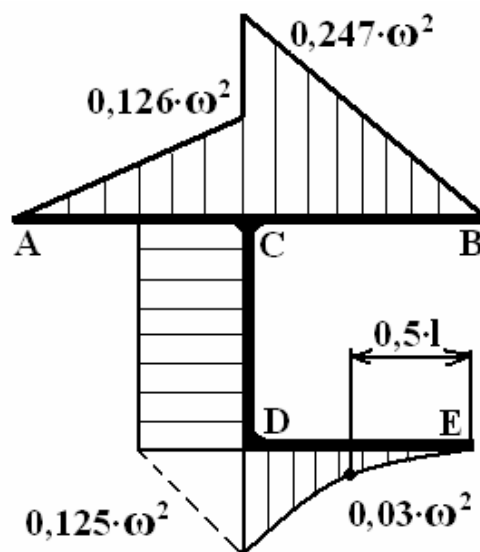


Рис. 45

Из условия прочности имеем:

$$M_{MAX} = [\sigma] \cdot W_Z = 0,247 \cdot \omega^2,$$

откуда
$$\omega = \sqrt{\frac{[\sigma] \cdot W_Z}{0,247}} = \sqrt{\frac{100 \cdot 10^6 \cdot 1,533 \cdot 10^{-6}}{0,247}} = 24,8 \text{ с}^{-1}.$$

Величина угловой скорости также определяется по формуле:

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{60},$$

откуда допускаемое число оборотов:

$$n = \frac{30 \cdot \omega}{\pi} = \frac{30 \cdot 24,8}{3,142} = 234,5 \text{ об / мин}.$$

4.2.3. Расчетные схемы нагружения II – X

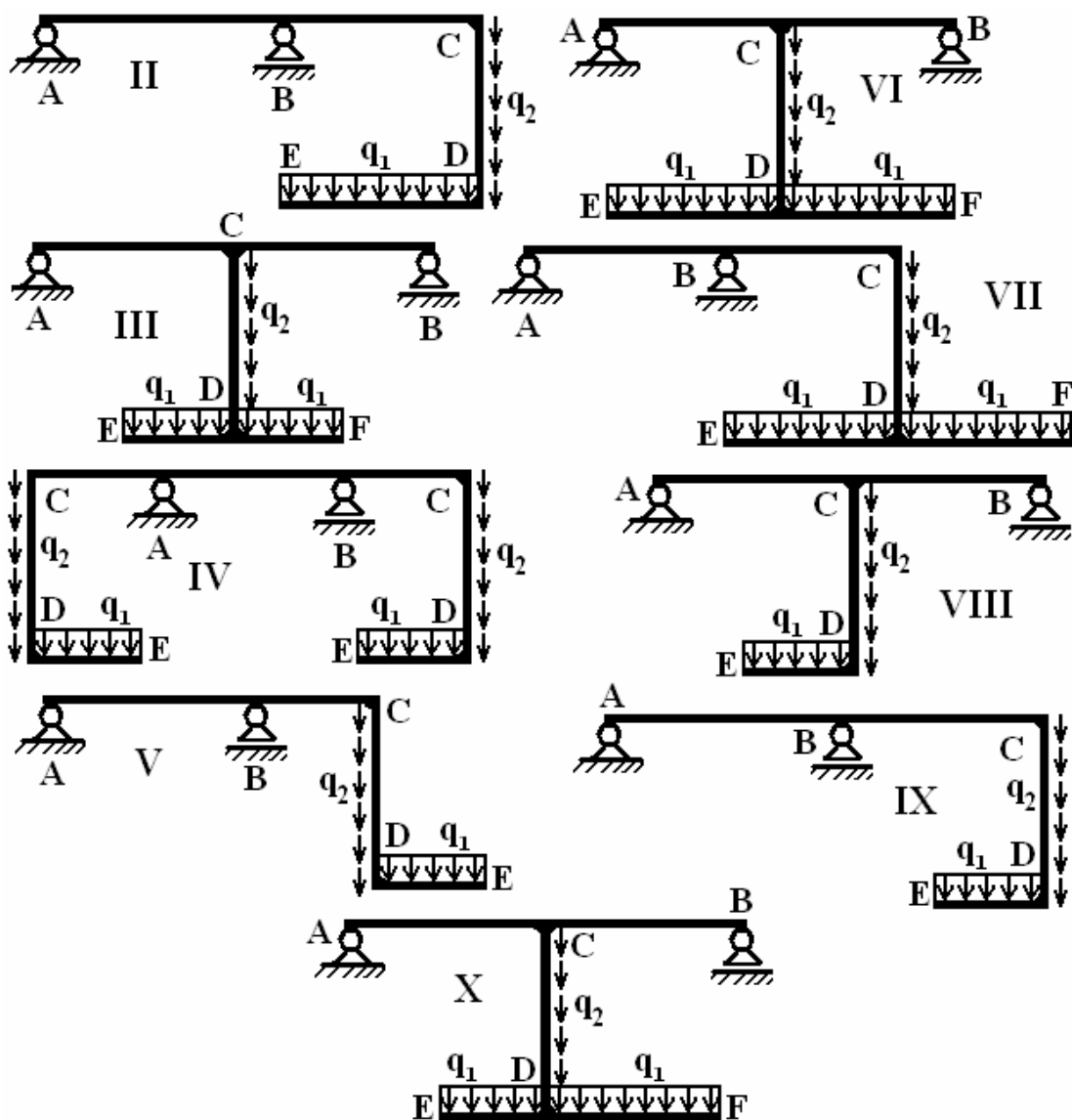


Рис. 46

5. Контрольные вопросы для самопроверки

1. Какие напряжения возникают в поперечном сечении стержня при изгибе с кручением?
2. Как находят опасные сечения стержня при изгибе с кручением?
3. В каких точках круглого поперечного сечения возникают наибольшие напряжения при изгибе с кручением?
4. Почему обычно не учитывают касательные напряжения от изгиба при совместном действии изгиба и кручения?
5. Как находят расчетный момент при изгибе с кручением стержня круглого поперечного сечения?
6. В чем сущность способа Верещагина?
7. Что называется «основной системой»?
8. Что означают величины δ_{11} и Δ_{1P} ?
9. Каков физический смысл произведений $X_1 \cdot \delta_{11}$ и $X_2 \cdot \delta_{12}$?
10. Какая мысль выражается при помощи уравнения $X_1 \cdot \delta_{11} + X_2 \cdot \delta_{12} + \Delta_{1P} = 0$?
11. В чем заключается явление потери устойчивости сжатого стержня?
12. Какая сила называется критической?
13. Как изменится критическая сила для стойки круглого сечения при уменьшении диаметра в два раза?
14. Как изменится критическая сила при увеличении длины стойки в два раза?
15. В каких пределах применима формула Эйлера?
16. Что называется гибкостью стержня?
17. Как учитывается влияние способа закрепления концов стержня?
18. Чему равен коэффициент длины для различных случаев закрепления концов стержня?
19. Как находят критическое напряжение для стержней малой и средней гибкости?
20. Как производят проверку стержней на устойчивость при помощи коэффициента φ ?
21. Как подбирают сечение стержня при расчете на устойчивость?
22. Что называется динамическим коэффициентом?
23. Зависит ли напряжение при изгибающем ударе от материала балки?

Библиографический список

- Агаханов М.К. Сопротивление материалов: учебное пособие / М.К. Агаханов, В.Г. Богопольский – М.: МГСУ, 2016. – 268 с.
- Агапов В.П. Сопротивление материалов: учебник / В.П. Агапов – М.: МГСУ, ЭБС АСВ, 2014.— 336 с.
- ГОСТ 8239 – 93. Сталь горячекатаная. Балки двутавровые.

Оглавление

Предисловие.....	3
1. Сложное сопротивление.....	3
1.1. Краткие сведения по теории.....	3
1.2. Пример выполнения задания.....	7
1.3. Схемы нагружения валов II – X.....	17
2. Статически неопределимые системы	19
2.1. Краткие сведения по теории.....	19
2.2. Пример выполнения задания.....	27
2.3. Основные системы для схем II – X.....	36
3. Устойчивость равновесия деформируемых систем.....	37
3.1. Краткие сведения по теории.....	37
3.2. Пример выполнения задания.....	40
4. Динамическая нагрузка.....	44
4.1. Напряжения при ударе.....	44
4.2. Напряжения в движущихся деталях.....	51
5. Контрольные вопросы для самопроверки.....	59
Библиографический список.....	59