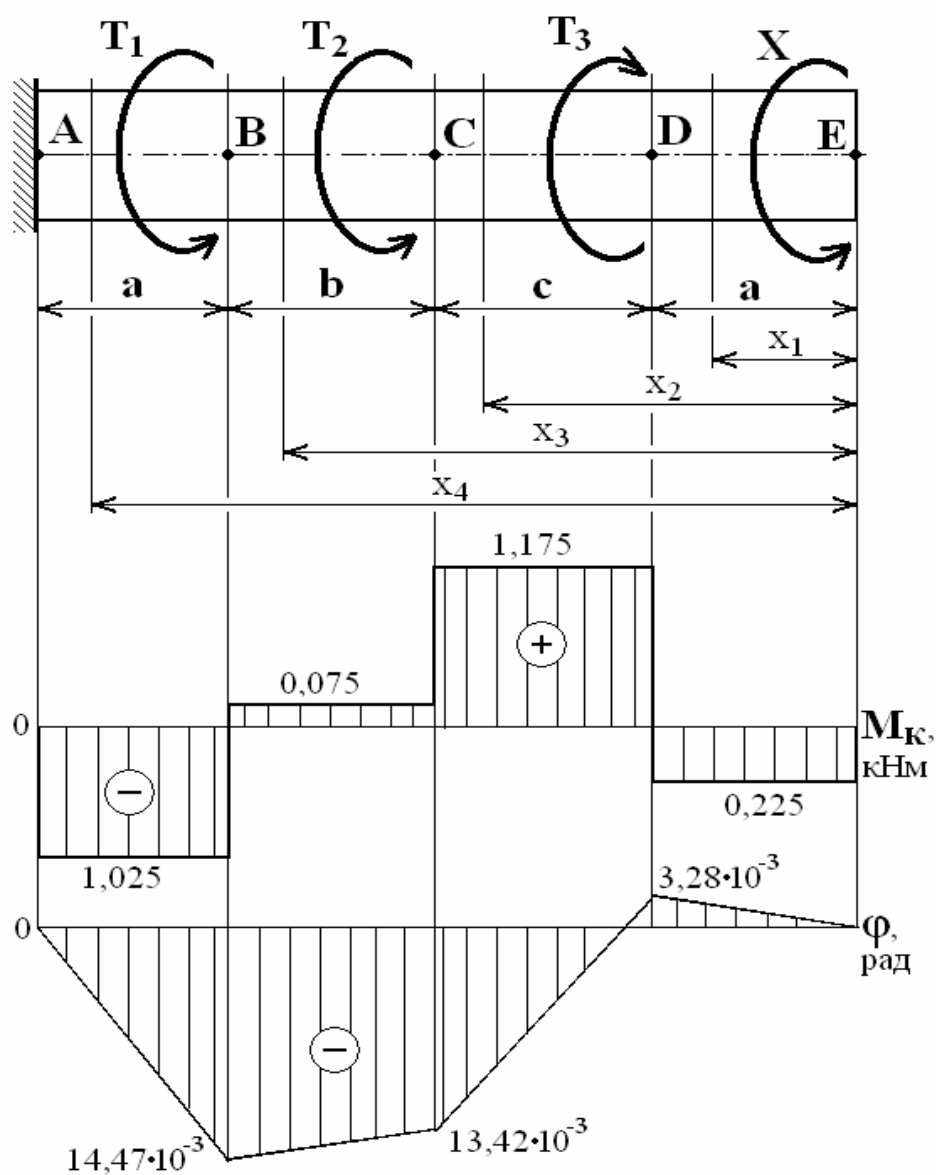


П. В. Кауров, С. Г. Петров

ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Часть I

Учебно-методическое пособие



Санкт-Петербург

2019

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ**

**«САНКТ–ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПРОМЫШЛЕННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ДИЗАЙНА»**

ВЫСШАЯ ШКОЛА ТЕХНОЛОГИИ И ЭНЕРГЕТИКИ

П. В. Кауров, С. Г. Петров

**ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ**

Часть I

Учебно-методическое пособие

Санкт-Петербург

2019

УДК 539.3 (075)
ББК 22.251я7
К 301

Кауров П. В., Петров С. Г. Техническая механика. Сопротивление материалов: учебно-методическое пособие / СПбГУПТД ВШТЭ – СПб., 2019. Часть I. – 38 с.

Учебно-методическое пособие содержит общие требования к выполнению контрольной работы, краткие сведения по теории, варианты заданий и примеры расчета. Целью настоящего учебно-методического пособия является развитие навыков самостоятельного расчета элементов конструкций на прочность и жесткость.

Учебно-методическое пособие предназначается для студентов механических специальностей заочной формы обучения, выполняющих контрольные работы по курсу "Техническая механика".

Рецензенты: зав. кафедрой машин автоматизированных систем ВШТЭ СПбГУПТД, д-р техн. наук, профессор А. В. Александров;

зав. кафедрой инженерной графики и автоматизированного проектирования ВШТЭ СПбГУПТД, канд. техн. наук, доцент А. В. Кишко.

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом университета в качестве учебно-методического пособия.

© Высшая школа технологии и энергетики
СПбГУПТД, 2019

Редактор и корректор В. А. Басова
Техн. редактор Л. Я. Титова

Темплан 2019 г., поз. 62.

Подп. к печати 18.06.19. Формат 60×84/16. Бумага тип. №1. Печать офсетная. Печ. л. 2,5. Уч.- изд. л. 2,5. Тираж 25 экз. Изд № 62. Цена "С". Заказ .

Ризограф ВШТЭ СПбГУПТД, СПб., 198095, ул. Ивана Черных, 4.

Предисловие

В первой части учебно-методического пособия рассмотрены основные сведения по теории, приведены варианты заданий и примеры решения задач для студентов-механиков заочной формы обучения, выполняющих контрольные работы по следующим темам курса:

1. Кручение.
2. Геометрические характеристики плоских сечений.
3. Изгиб.

При решении каждой задачи контрольных работ в начале должны быть указаны исходные данные, т.е. условия задачи, схема и все заданные величины. Расчет следует сопровождать заголовками и краткими пояснениями. В аналитических выкладках вначале записываются формулы, а затем подставляются численные значения символов. В итоговых величинах указывается размерность. В окончательных результатах следует сохранять только оправданное количество значащих цифр.

Для измерения физических и механических величин используется международная система единиц. В качестве основных единиц в СИ приняты: метр (м); секунда (с); килограмм массы (кг); ньютон (Н); паскаль ($1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2$). Также используются кратные единицы: килоньютон ($1 \text{ кН} = 10^3 \text{ Н}$) и мегапаскаль ($1 \text{ МПа} = 1 \text{ Н/мм}^2 = 10^6 \text{ Па}$).

Студент обязан взять из таблицы, прилагаемой к условию задачи, данные в соответствии со своим личным номером (шифром) и первыми шестью буквами русского алфавита, которые следует расположить под шифром, например:

шифр – **2 8 3 0 5 2**;

буквы – **а б в г д е**.

Если личный номер состоит из семи цифр, то вторая цифра шифра не учитывается.

Из каждого вертикального столбца любой таблицы, обозначенного внизу определенной буквой, надо взять только одно число, стоящее в той горизонтальной строке, номер которой совпадает с номером буквы. Например, вертикальные столбцы табл. 2 обозначены буквами: **е**, **г** и **д**. В этом случае, при указанном выше личном номере (шифре) **283052**, студент должен взять из столбца **е** строку номер два (второй тип сечения), из столбца **г** – строку номер ноль (швеллер 36) и из столбца **д** – строку номер пять (равнобокий уголок 90×6).

1. КРУЧЕНИЕ

1.1. Краткие сведения по теории

Стержень подвергается деформации **кручения**, когда в его поперечных сечениях возникают крутящие моменты. Их величина определяется методом сечений по участкам, границами которых являются места приложения внешних крутящих моментов, действующих на стержень. Из условия равновесия следует, что величина крутящего момента в поперечном сечении стержня численно

равна алгебраической сумме внешних крутящих моментов, действующих по одну сторону от рассматриваемого сечения.

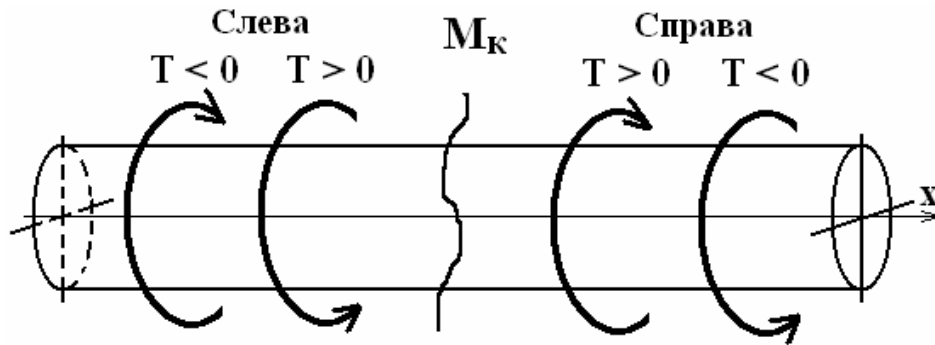


Рис. 1

Крутящий момент M_K в поперечном сечении вала считается положительным, когда внешний крутящий момент T действует по часовой стрелке при взгляде на соответствующий торец вала (рис. 1).

Эюра крутящего момента – это график, показывающий изменение величины внутреннего крутящего момента в поперечных сечениях вала в зависимости от координаты X .

Для цилиндрического стержня круглого поперечного сечения диаметром d величина касательного напряжения τ в точке поперечного сечения, находящейся на расстоянии ρ от центра (рис. 2), определяется по формуле:

$$\tau = \frac{M_K}{I_P} \cdot \rho, \quad (1)$$

где M_K – величина крутящего момента в сечении, I_P – полярный момент инерции сечения. Для круглого сплошного сечения диаметром d полярный момент инерции I_P определяется по формуле:

$$I_P = \frac{\pi \cdot d^4}{32}. \quad (2)$$

Максимальные касательные напряжения τ в поперечном сечении вала действуют в точках, наиболее удаленных от центра, т. е. при $\rho = 0,5 \cdot d$ (см. рис. 2). Их величина определяется по формуле:

$$\tau_{\text{MAX}} = \frac{M_K}{W_P}, \quad (3)$$

где W_P – полярный момент сопротивления. Для круглого сплошного сечения W_P определяется по формуле:

$$W_P = \frac{I_P \cdot 2}{d} = \frac{\pi \cdot d^3}{16}. \quad (4)$$

Условие прочности при кручении имеет вид:

$$\tau_{\text{MAX}} = \frac{|M_K|}{W_P} \leq [\tau], \quad (5)$$

где $[\tau]$ – допускаемое касательное напряжение при кручении.

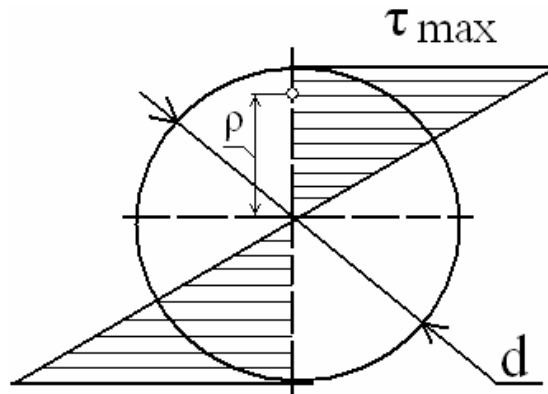


Рис. 2

Угол закручивания φ на участке вала длиной **L** и диаметром **d**, где крутящий момент **M_K** постоянен, определяется по формуле:

$$\varphi = \frac{M_K \cdot L}{G \cdot I_P}, \quad (6)$$

где **G** – модуль сдвига материала вала.

Если стержень имеет несколько участков, то угол закручивания будет определяться как алгебраическая сумма углов закручивания на участках:

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \frac{M_{Ki} \cdot L_i}{G \cdot I_{Pi}}. \quad (7)$$

Величина наибольшего относительного угла закручивания (рад/м) на участке вала длиной **L** определяется по формуле:

$$\Delta\varphi = \frac{|\varphi_{\text{MAX}}|}{L}. \quad (8)$$

1.2. Пример выполнения задачи № 1

К стальному валу приложены три известных момента **T₁**, **T₂**, **T₃** (рис. 3).

Требуется:

1. Установить, при каком значении момента **X** угол поворота правого концевого сечения вала равен нулю.

2. Для найденного значения **X** построить эпюру крутящих моментов.

3. При заданном значении $[\tau]$ определить диаметр вала и округлить его значение до ближайшего, равного: **30, 32, 34, 35, 36, 38, 40, 42, 45, 47, 48, 50, 52, 53, 55, 56, 60, 62, 63, 65, 67, 70, 71, 72, 80, 85, 90, 95, 100** мм.

4. Построить эпюру углов закручивания.
 5. Найти наибольший относительный угол закручивания.
- Данные взять из табл. 1.

1.2.1. Исходные данные

$a = 1,1 \text{ м}; b = 1,1 \text{ м}; c = 1,1 \text{ м}; T_1 = 1100 \text{ Нм}; T_2 = 1100 \text{ Нм}; T_3 = 1400 \text{ Нм};$
 $[\tau] = 35 \text{ МПа}; G = 0,4 \cdot E; E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}.$

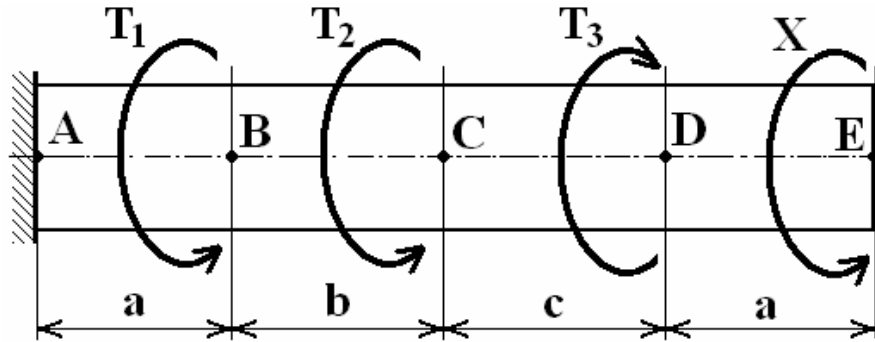


Рис. 3

Таблица 1. Исходные данные к задаче № 1

№ строки	Схема по рис. 4	Расстояния, м			Моменты, Нм			[τ], МПа
		a	b	c	T ₁	T ₂	T ₃	
1	I	1,1	1,1	1,1	1100	1100	1100	35
2	II	1,2	1,2	1,2	1200	1200	1200	40
3	III	1,3	1,3	1,3	1300	1300	1300	45
4	IV	1,4	1,4	1,4	1400	1400	1400	50
5	V	1,5	1,5	1,5	1500	1500	1500	55
6	VI	1,6	1,6	1,6	1600	600	1600	60
7	VII	1,7	1,7	1,7	1700	700	1700	65
8	VIII	1,8	1,8	1,8	1800	800	1800	70
9	IX	1,9	1,9	1,9	1900	900	1900	75
0	X	2,0	2,0	2,0	2000	1000	2000	80
	e	г	д	е	г	д	е	в

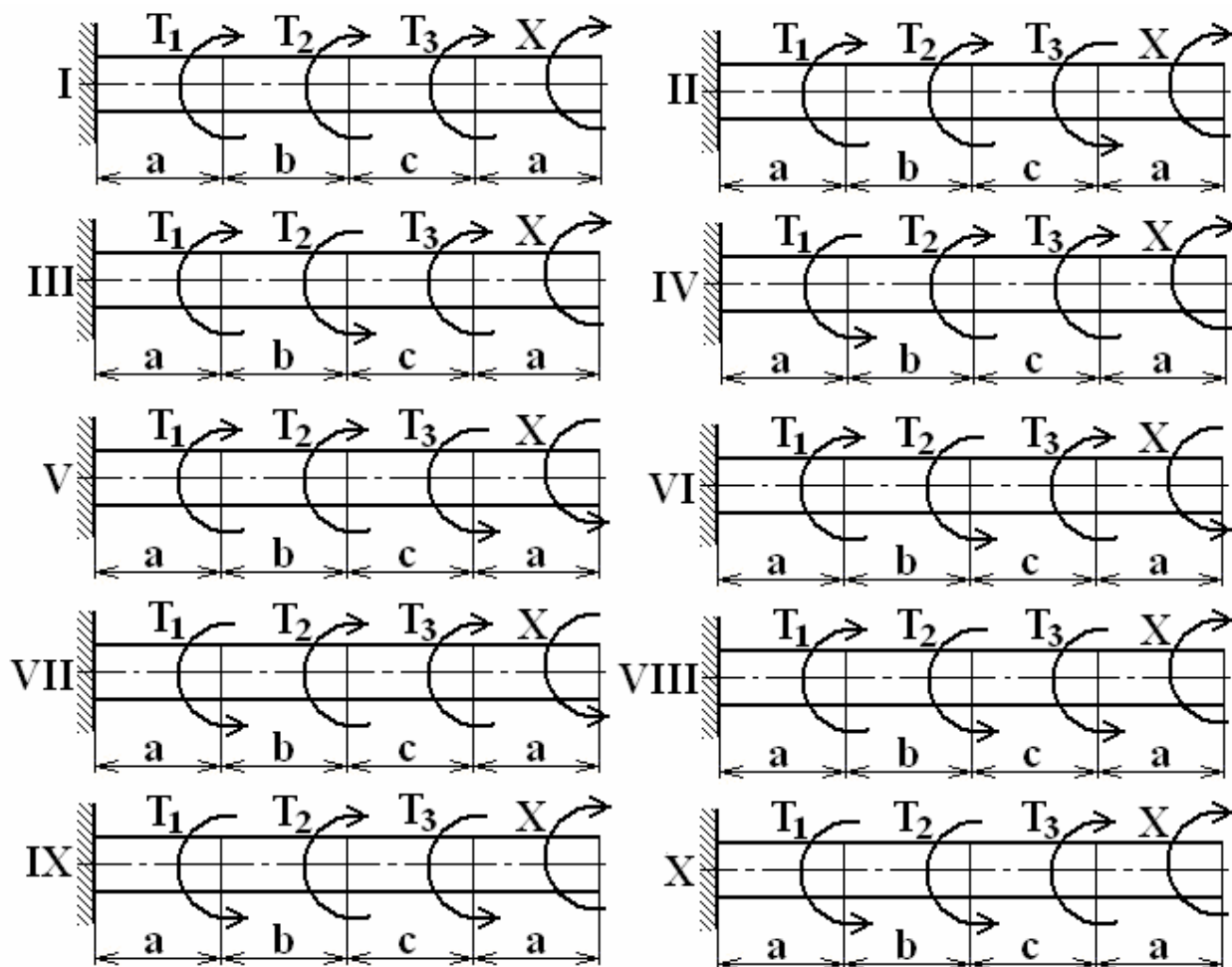


Рис. 4

1.2.2. Определение момента X

Применим принцип независимости действия сил. Определим угол поворота сечения под действием каждого момента, деформирующего вал на определенном участке, по отдельности. Результирующий угол поворота будет равен алгебраической сумме всех углов поворота от действия каждого момента с учетом знака.

Допустим, что действует только момент X на участке вала EA длиной:

$$L_{EA} = a + c + b + a = 1,1 + 1,1 + 1,1 + 1,1 = 4,4 \text{ м.}$$

Согласно рис. 1 знак момента X будет отрицательным, а угол поворота сечения E относительно неподвижной заделки в сечении A будет равен:

$$\varphi_{EA} = \frac{-X \cdot L_{EA}}{G \cdot I_p}.$$

Допустим, что действует только момент T₃ на участке вала DA длиной:

$$L_{DA} = c + b + a = 1,1 + 1,1 + 1,1 = 3,3 \text{ м.}$$

Тогда угол поворота сечения D относительно неподвижной заделки A равен:

$$\varphi_{DA} = \frac{T_3 \cdot L_{DA}}{G \cdot I_p}.$$

Рассуждая аналогичным образом об остальных участках, получим следующие выражения:

$$\varphi_{CA} = \frac{-T_2 \cdot L_{CA}}{G \cdot I_P}, \quad \varphi_{BA} = \frac{-T_1 \cdot L_{BA}}{G \cdot I_P}.$$

По условию задачи угол поворота Φ_{EA} от действия всех крутящих моментов равен нулю, тогда:

$$\varphi_{EA} = \frac{-X \cdot L_{EA}}{G \cdot I_P} + \frac{T_3 \cdot L_{DA}}{G \cdot I_P} - \frac{T_2 \cdot L_{CA}}{G \cdot I_P} - \frac{T_1 \cdot L_{BA}}{G \cdot I_P} = 0,$$

откуда выразим искомый момент:

$$\begin{aligned} X &= \frac{T_3 \cdot L_{DA} - T_2 \cdot L_{CA} - T_1 \cdot L_{BA}}{L_{EA}} = \\ &= \frac{1400 \cdot 3,3 - 1100 \cdot 2,2 - 1100 \cdot 1,1}{4,4} = 225 \text{ Нм}. \end{aligned}$$

Так как значение момента X получилось положительным, то его направление соответствует показанному направлению X на расчетной схеме (см. рис. 3); в противном случае направление следует поменять на обратное.

1.2.3. Построение эпюры крутящих моментов

Не вычисляя по уравнениям равновесия значение реактивного момента в заделке и используя метод сечений, запишем выражения для крутящего момента по участкам вала. Будем двигаться при этом справа налево в сторону заделки, начиная со свободного конца и используя правило знаков согласно рис. 1.

Границы первого участка: $0 \leq x_1 \leq a$.

$$M_{K1} = \Sigma T^{ПП} = -X = -225 \text{ Нм} = -0,225 \text{ кНм}.$$

Границы второго участка: $a \leq x_2 \leq a + c$.

$$M_{K2} = \Sigma T^{ПП} = -X + T_3 = -225 + 1400 = 1175 \text{ Нм} = 1,175 \text{ кНм}.$$

Границы третьего участка: $a + c \leq x_3 \leq a + b + c$.

$$M_{K3} = \Sigma T^{ПП} = -X + T_3 - T_2 = -225 + 1400 - 1100 = 75 \text{ Нм} = 0,075 \text{ кНм}.$$

Границы четвертого участка: $a + b + c \leq x_4 \leq a + b + c + a$.

$$M_{K4} = \Sigma T^{ПП} = -X + T_3 - T_2 - T_1 = -225 + 1400 - 1100 - 1100 = -1025 \text{ Нм} = -1,025 \text{ кНм}.$$

Полученные значения откладываем в масштабе на каждом из соответствующих участков вала (рис. 5). После построения эпюры крутящих моментов делаем ее проверку, используя правило проверки правильности построения эпюры крутящих моментов: в тех сечениях вала, где приложены сосредоточенные крутящие моменты, на эпюре будут скачки на их величину в соответствии с направлением хода построения и выбранным правилом знаков.

1.2.4. Определение диаметра вала

Так как сечение вала по длине не меняется, то по условию прочности определим минимальный диаметр вала круглого сплошного сечения:

$$d_{\text{MIN}} \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot |M_{\text{K MAX}}|}{\pi \cdot [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1,175 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 35 \cdot 10^6}} = 0,0555 \text{ м} = 55,5 \text{ мм.}$$

Полученное значение округлим до ближайшего большего, заданного по условию задачи, **d = 56 мм.**

1.2.5. Построение эпюры углов закручивания

Сначала определим величину полярного момента инерции I_p при кручении вала круглого сплошного сечения. Так как сечение вала по длине постоянно, то для каждого участка имеем:

$$I_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32} = \frac{3,14 \cdot (0,056)^4}{32} = 0,965 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4.$$

Выражения для углов закручивания на каждом участке вала получены в п. 1.2.2, поэтому определим теперь их численные значения, начиная с левого конца вала.

Заделка неподвижна, поэтому угол закручивания сечения в ней $\varphi_A = 0$ рад.

Угол поворота сечения **B** относительно неподвижной заделки **A**:

$$\varphi_{BA} = \frac{M_{K4} \cdot L_{BA}}{G \cdot I_p} = \frac{-1,025 \cdot 10^3 \cdot 1,1}{0,4 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 0,965 \cdot 10^{-6}} = -14,47 \cdot 10^{-3} \text{ рад.}$$

Угол поворота сечения **C** относительно неподвижной заделки **A** складывается из суммы углов поворотов сечения **B** относительно **A** и **C** относительно **B**, то есть $\varphi_{CA} = \varphi_{CB} + \varphi_{BA}$,

где
$$\varphi_{CB} = \frac{M_{K3} \cdot L_{CB}}{G \cdot I_p} = \frac{0,075 \cdot 10^3 \cdot 1,1}{0,4 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 0,965 \cdot 10^{-6}} = 1,05 \cdot 10^{-3} \text{ рад;}$$

тогда $\varphi_{CA} = \varphi_{CB} + \varphi_{BA} = 1,05 \cdot 10^{-3} + (-14,47 \cdot 10^{-3}) = -13,42 \cdot 10^{-3} \text{ рад.}$

Аналогично определим углы закручивания сечений **D** и **E** относительно неподвижной заделки **A**: $\varphi_{DA} = \varphi_{DC} + \varphi_{CA}$,

где
$$\varphi_{DC} = \frac{M_{K2} \cdot L_{DC}}{G \cdot I_p} = \frac{1,175 \cdot 10^3 \cdot 1,1}{0,4 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 0,965 \cdot 10^{-6}} = 16,7 \cdot 10^{-3} \text{ рад;}$$

тогда $\varphi_{DA} = \varphi_{DC} + \varphi_{CA} = 16,7 \cdot 10^{-3} + (-13,42 \cdot 10^{-3}) = 3,28 \cdot 10^{-3} \text{ рад;}$

$$\varphi_{EA} = \varphi_{ED} + \varphi_{DA},$$

где
$$\varphi_{ED} = \frac{M_{K1} \cdot L_{ED}}{G \cdot I_p} = \frac{-0,225 \cdot 10^3 \cdot 1,1}{0,4 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 0,965 \cdot 10^{-6}} = -3,28 \cdot 10^{-3} \text{ рад;}$$

$$\varphi_{EA} = \varphi_{ED} + \varphi_{DA} = 3,28 \cdot 10^{-3} + (-3,28 \cdot 10^{-3}) = 0 \text{ рад.}$$

Полученные значения углов закручивания сечений в соответствии с их знаками откладываем на эпюре в масштабе и соединяем их прямыми линиями (см. рис. 5). Тот факт, что угол поворота правого концевого сечения вала равен нулю, может служить проверкой проведенных вычислений.

1.2.6. Определение наибольшего относительного угла закручивания

По эпюре углов закручивания видно (см. рис. 5), что наибольший угол закручивания по абсолютной величине равен $\varphi_{\text{MAX}} = 14,47 \cdot 10^{-3}$ рад на участке длиной $a = 1,1$ м, тогда величина наибольшего относительного угла закручивания (рад/м) будет равна

$$\Delta\varphi = \frac{|\varphi_{\text{MAX}}|}{L_{\text{BA}}} = \frac{14,47 \cdot 10^{-3}}{1,1} = 13,15 \cdot 10^{-3} \text{ рад/м.}$$

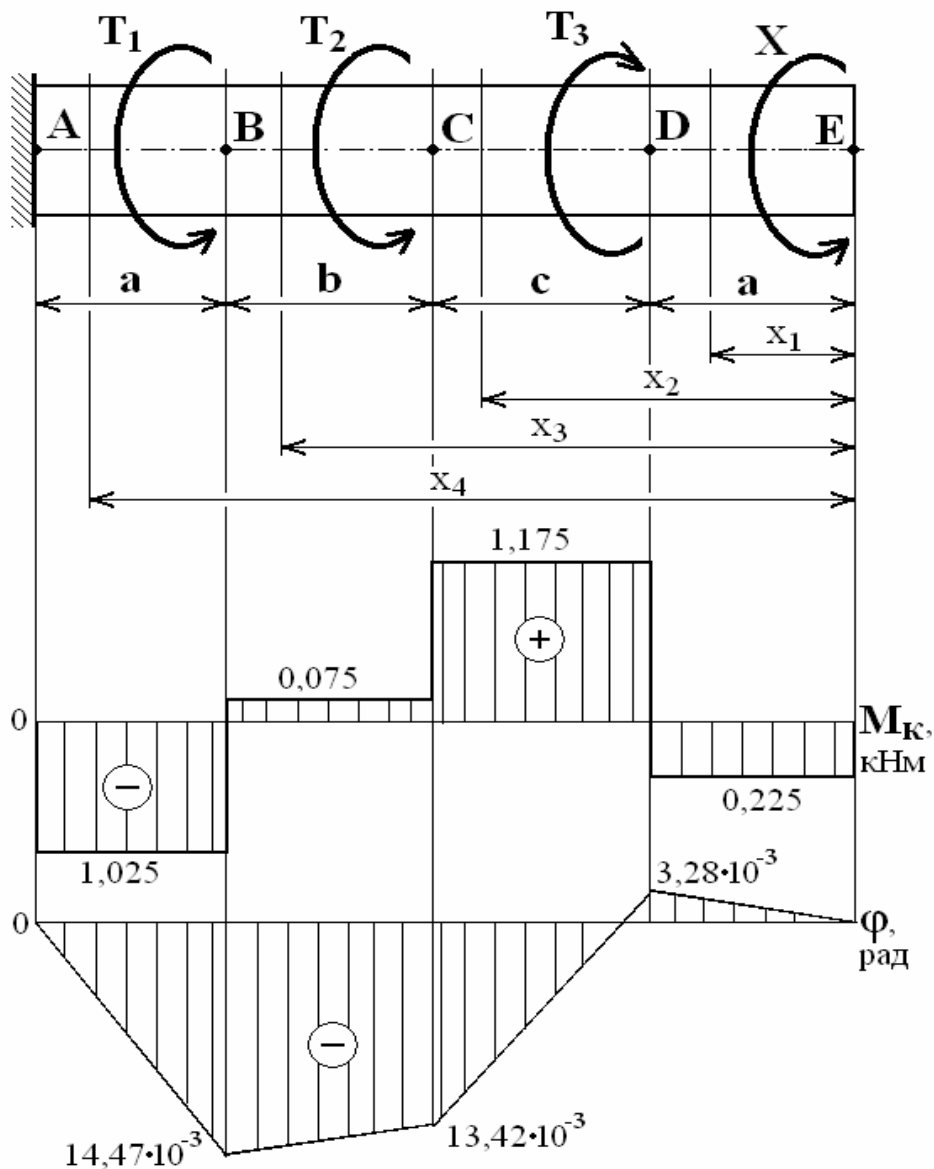


Рис. 5

2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

2.1. Краткие сведения по теории

При изучении вопросов прочности, жесткости и устойчивости стержней важную роль играют геометрические характеристики поперечных сечений стержня, такие как:

- статические моменты площади;
- моменты инерции сечений;
- моменты сопротивления.

Площадь является простейшей геометрической характеристикой и имеет размерность m^2 . Если представить себе, что поперечное сечение состоит из бесчисленного множества элементарных площадок dA (рис. 6), то площадь всего сечения A будет равна:

$$A = \int_0^A dA = \int_A dA. \quad (9)$$

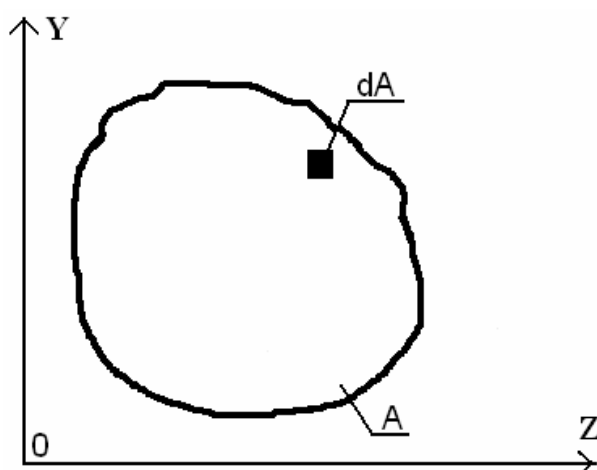


Рис. 6

Отметим два важных свойства площади: она всегда положительна и не зависит от выбора системы координат.

Остальные геометрические характеристики зависят не только от формы и размеров сечений, но также и от положения осей и точек, относительно которых они вычисляются.

Рассмотрим, например, два случая изгиба силой P консольной балки прямоугольного поперечного сечения (рис. 7). Очевидно, что величина прогиба в первом случае будет больше, чем во втором ($f_1 > f_2$). Так как площадь поперечного сечения не изменилась, то она не влияет на прогиб. Малый прогиб во втором случае обусловлен тем, что поперечные сечения балки при изгибе поворачиваются вокруг оси Y , относительно которой момент инерции прямоугольного поперечного сечения I_Y значительно больше (так как $I_Y = b \cdot h^3/12$), чем относительно оси Z , так как $I_Z = h \cdot b^3/12$ (при $h > b$).

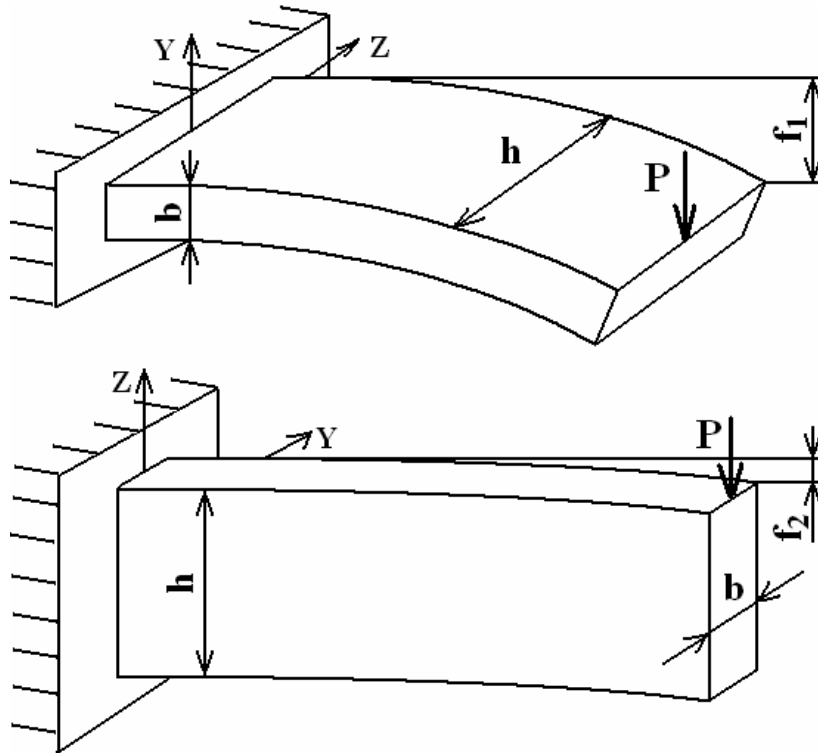


Рис. 7

Статические моменты площади сечения относительно осей **Z** и **Y** (рис. 8) определяются по следующим формулам:

$$S_Z = \int_A y \cdot dA, \quad (10)$$

$$S_Y = \int_A z \cdot dA, \quad (11)$$

где **A** – площадь сечения, **dA** – элементарная площадка, **z** и **y** – координаты элементарной площадки в осях **Z** и **Y** .

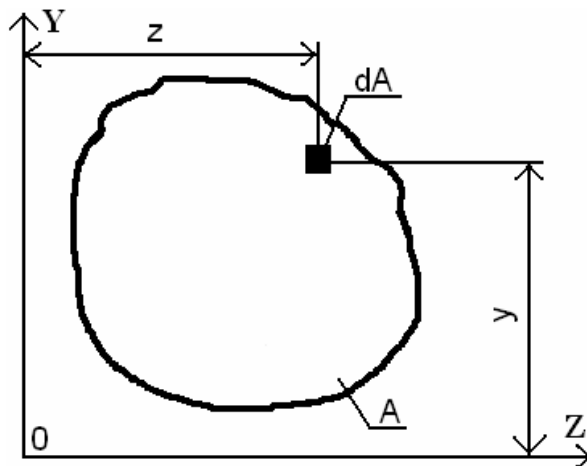


Рис. 8

Координаты центра тяжести y_C и z_C сечения площадью A (рис. 9) определяются из выражений:

$$y_C = \frac{S_Z}{A}, \quad (12)$$

$$z_C = \frac{S_Y}{A}. \quad (13)$$

В случае, если сечение состоит из простейших фигур с площадями A_1 и A_2 (рис. 10), статические моменты площади сечения могут определяться выражениями:

$$S_Z = \sum A_i \cdot y_{Ci} = A_1 \cdot y_{C1} + A_2 \cdot y_{C2}, \quad (14)$$

$$S_Y = \sum A_i \cdot z_{Ci} = A_1 \cdot z_{C1} + A_2 \cdot z_{C2}. \quad (15)$$

где y_{C1} и z_{C1} , y_{C2} и z_{C2} – координаты центров тяжести простейших фигур.

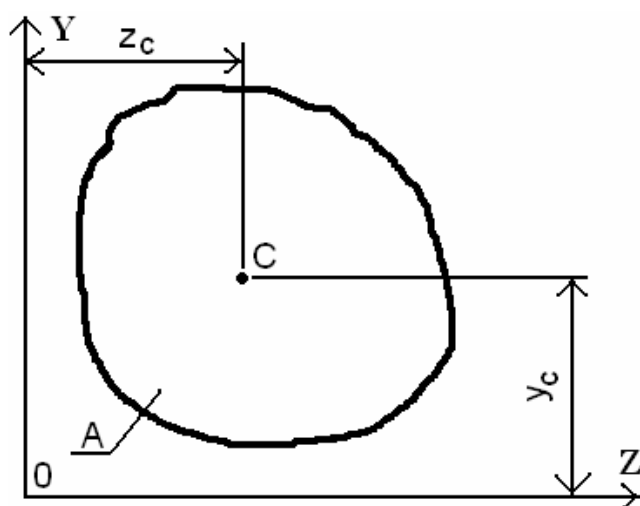


Рис. 9

Координаты центра тяжести y_C и z_C сечения, состоящего из простейших фигур (см. рис. 10), определяются из выражений:

$$z_C = \frac{\sum A_i \cdot z_{Ci}}{\sum A_i} = \frac{A_1 z_{C1} + A_2 z_{C2}}{A}, \quad (16)$$

$$y_C = \frac{\sum A_i \cdot y_{Ci}}{\sum A_i} = \frac{A_1 y_{C1} + A_2 y_{C2}}{A}, \quad (17)$$

где $A = A_1 + A_2$ – площадь всего сечения.

Статические моменты площади сечения относительно **центральных осей** (осей, проходящих через центр тяжести поперечного сечения) равны нулю.

Статические моменты площади могут быть положительными и отрицательными в зависимости от выбора осей, относительно которых они определяются. Статические моменты площади имеют размерность м^3 .

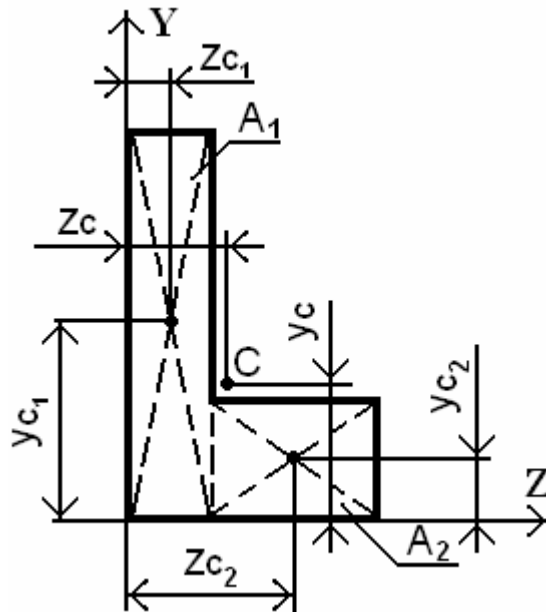


Рис. 10

Осевые моменты инерции сечения относительно осей Z и Y определяются по следующим формулам:

$$I_Z = \int_A y^2 \cdot dA, \quad (18)$$

$$I_Y = \int_A z^2 \cdot dA, \quad (19)$$

где A – площадь сечения, dA – элементарная площадка, z и y – координаты элементарной площадки в осях Z и Y (рис. 11).

Полярный момент инерции сечения относительно данной точки (полюса) определяется по формуле:

$$I_P = \int_A \rho^2 \cdot dA. \quad (20)$$

где ρ – расстояние от элементарной площадки dA до полюса (см. рис. 11).

В случае, когда полярный момент инерции вычисляется относительно начала системы координат, $\rho^2 = y^2 + z^2$ и

$$I_P = I_Z + I_Y. \quad (21)$$

Центробежный момент инерции сечения относительно осей Z и Y определяется по формуле:

$$I_{ZY} = \int_A z \cdot y \cdot dA. \quad (22)$$

Моменты инерции имеют размерность м^4 .

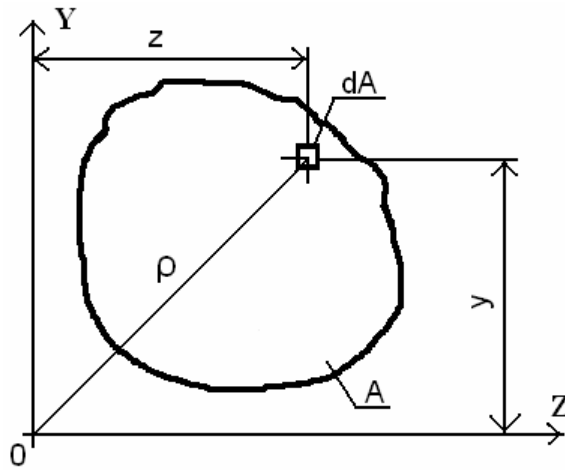


Рис. 11

Величины полярного и осевых моментов инерции всегда больше нуля, центробежный момент может быть положительным, отрицательным и равным нулю. Центробежный момент инерции равен нулю при его вычислении относительно двух перпендикулярных осей, если хотя бы одна из них является осью симметрии. Эти оси называются *главными осями*. Если главные оси проходят через центр тяжести сечения, то они называются *главными центральными осями* инерции сечения. В случае, когда сечение не имеет осей симметрии, всегда можно найти положение таких двух взаимно перпендикулярных осей, относительно которых центробежный момент инерции будет равен нулю.

Если известны моменты инерции сечения относительно собственных центральных осей Z_1 и Y_1 , то *моменты инерции относительно параллельных им осей Z и Y* определяются по формулам:

$$I_Z = I_{Z_1} + A \cdot b^2; \quad (23)$$

$$I_Y = I_{Y_1} + A \cdot c^2; \quad (24)$$

$$I_{ZY} = I_{Z_1Y_1} + A \cdot b \cdot c, \quad (25)$$

где A – площадь сечения, b и c – расстояния между рассматриваемыми осями (рис. 12).

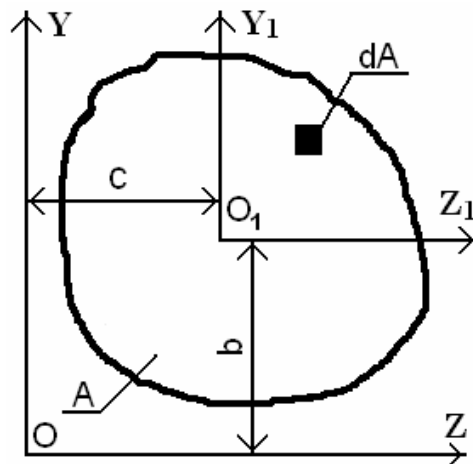


Рис. 12

Моменты инерции относительно осей U и V , повернутых относительно центральных осей Z и Y на угол α (рис. 13), определяются по формулам:

$$I_U = \frac{I_Z + I_Y}{2} + \frac{I_Z - I_Y}{2} \cdot \cos(2\alpha) - I_{ZY} \cdot \sin(2\alpha), \quad (26)$$

$$I_V = \frac{I_Z + I_Y}{2} - \frac{I_Z - I_Y}{2} \cdot \cos(2\alpha) + I_{ZY} \cdot \sin(2\alpha), \quad (27)$$

$$I_{UV} = \frac{I_Z - I_Y}{2} \cdot \sin(2\alpha) + I_{ZY} \cdot \cos(2\alpha). \quad (28)$$

Главные центральные оси инерции поперечного сечения, т.е. две взаимно перпендикулярные оси, относительно которых центробежный момент инерции сечения равен нулю, занимают положение, определяемое выражением

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2 \cdot I_{ZY}}{I_Y - I_Z}. \quad (29)$$

Положительное значение угла α откладывается от оси Z против часовой стрелки (см. рис. 13), а отрицательное – наоборот, по ходу стрелки часов.

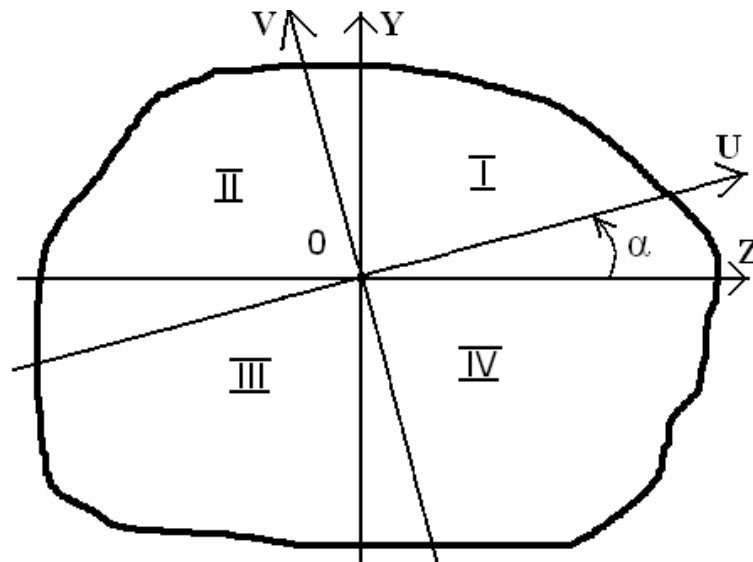


Рис. 13

Главные моменты инерции сечения, вычисленные относительно главных центральных осей сечения, имеют следующие экстремальные значения:

$$I_{\text{MIN}} = \frac{I_Z + I_Y}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(I_Z - I_Y)^2 + 4 \cdot I_{ZY}^2}, \quad (30)$$

$$I_{\text{MAX}} = \frac{I_Z + I_Y}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(I_Z - I_Y)^2 + 4 \cdot I_{ZY}^2}. \quad (31)$$

Если $I_{ZY} < 0$, то главная ось, относительно которой момент инерции максимален, проходит через первый и третий квадранты (**I и III**), если $I_{ZY} > 0$, то главная ось, относительно которой момент инерции максимален, проходит через второй и четвертый квадранты (**II и IV**).

Для проверки правильности вычислений I_{MAX} и I_{MIN} можно использовать равенство:

$$I_Z + I_Y = I_{MAX} + I_{MIN}. \quad (32)$$

Если известны значения моментов инерции относительно собственных центральных осей составных фигур, то *моменты инерции для сложной фигуры* относительно параллельных им осей Z и Y определяются по формулам:

$$I_Z = \sum_{i=1}^n (I_{Zi} + A_i \cdot b_i^2), \quad (33)$$

$$I_Y = \sum_{i=1}^n (I_{Yi} + A_i \cdot c_i^2), \quad (34)$$

$$I_{ZY} = \sum_{i=1}^n (I_{ZiYi} + A_i \cdot b_i \cdot c_i). \quad (35)$$

Осевыми моментами сопротивления сечения относительно осей Z и Y называются величины W_Z и W_Y , определяемые соотношениями:

$$W_Z = \frac{I_Z}{|y_{MAX}|}, \quad (36)$$

$$W_Y = \frac{I_Y}{|z_{MAX}|}, \quad (37)$$

где $|y_{MAX}|$ и $|z_{MAX}|$ – соответственно наибольшие расстояния от осей Z и Y до наиболее удаленных точек сечения.

Полярным моментом сопротивления называется величина, определяемая выражением

$$W_P = \frac{I_P}{\rho_{MAX}}, \quad (38)$$

где ρ_{MAX} – расстояние от полюса до наиболее удаленной точки сечения.

Моменты сопротивления имеют размерность m^3 .

Радиусами инерции поперечного сечения относительно осей Z и Y называются величины, определяемые, соответственно, по выражениям:

$$i_Z = \sqrt{\frac{I_Z}{A}}, \quad (39)$$

$$i_Y = \sqrt{\frac{I_Y}{A}}. \quad (40)$$

Геометрические характеристики стандартных металлических профилей, таких как двутавры, швеллеры и уголки (рис. 14), приводятся в таблицах сортамента прокатной стали (табл. 3 – 5). Зная величину W_Z , например, из расчета на прочность при изгибе, можно по сортаменту подобрать профиль искомой балки.

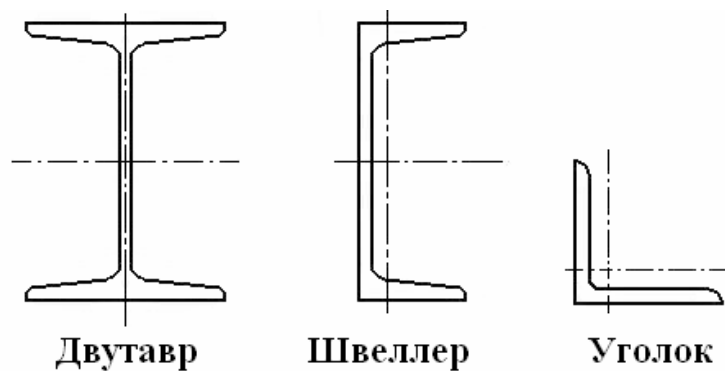


Рис. 14

2.2. Пример выполнения задачи № 2

Для заданного сечения (рис. 19) требуется:

1. Определить положение центра тяжести.
 2. Найти центробежный и осевые моменты инерции относительно центральных осей.
 3. Определить направление главных центральных осей.
 4. Найти моменты инерции относительно главных центральных осей.
 5. Вычертить сечение в масштабе с указанием всех величин и осей.
- Данные взять из табл. 2.

Таблица 2. Исходные данные к задаче № 2

№ строки	Тип сечения (рис. 15)	Швеллер (рис. 17)	Равнобокий уголок (рис. 18)	Двутавр (рис.16)
1	I	14	80×8	12
2	II	16	80×6	14
3	III	18	90×8	16
4	IV	20	90×7	18
5	V	22	90×6	20а
6	VI	24	100×8	20
7	VII	27	100×10	22а
8	VIII	30	100×12	22
9	IX	33	125×10	24а
0	X	36	125×12	24
	е	г	д	е

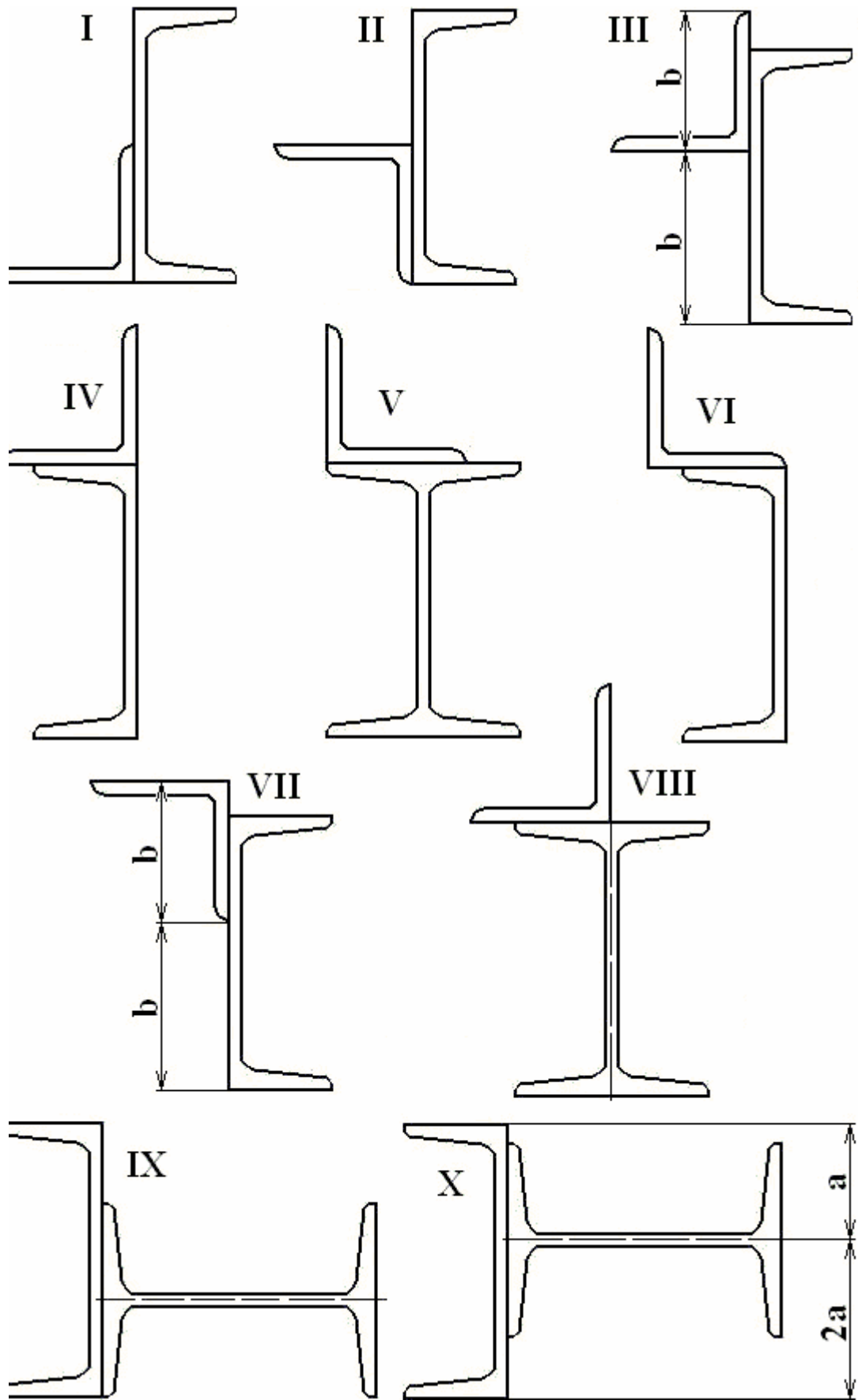


Рис. 15

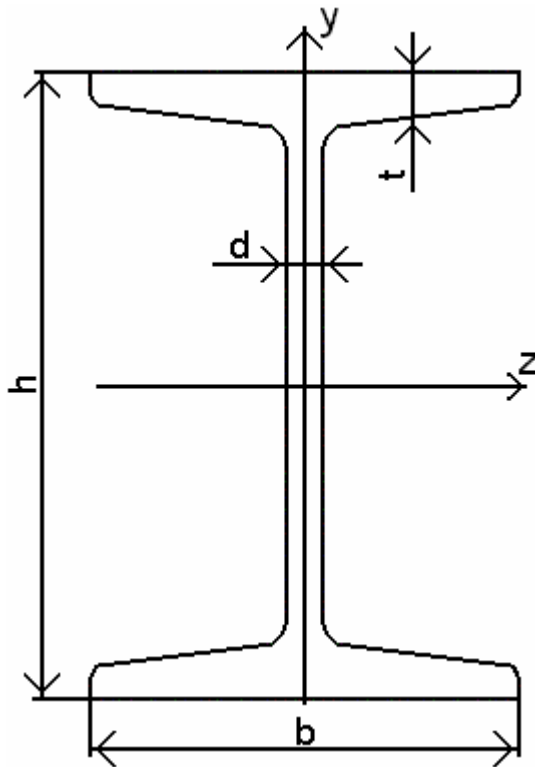


Рис. 16

Таблица 3. Двутавры (в соответствии с ГОСТ 8239 – 93)

№ двутавра	h, см	b, см	t, см	d, см	A, см ²	I _z , см ⁴	W _z , см ³	I _y , см ⁴
12	12	6,4	0,73	0,48	14,7	350	58,4	27,9
14	14	7,3	0,75	0,49	17,4	572	81,7	41,9
16	16	8,1	0,78	0,5	20,2	873	109	58,6
18	18	9	0,81	0,51	23,4	1290	143	82,6
20	20	10	0,84	0,52	26,8	1840	184	115
20а	20	11	0,86	0,52	28,9	2030	203	155
22	22	11	0,87	0,54	30,6	2550	232	157
22а	22	12	0,89	0,54	32,8	2790	254	206
24	24	11,5	0,95	0,56	34,8	3460	289	198
24а	24	12,5	0,98	0,56	37,5	3800	317	260
27	27	12,5	0,98	0,6	40,2	5010	371	260
27а	27	13,5	1,02	0,6	43,2	5500	407	337
30	30	13,5	1,02	0,65	46,5	7080	472	337
30а	30	14,5	1,07	0,65	49,9	7780	518	436
33	33	14	1,12	0,7	53,8	9840	597	419
36	36	14,5	1,23	0,75	61,9	13380	743	516
40	40	15,5	1,3	0,83	72,6	19062	953	667
50	50	17	1,52	1	100	39727	1589	1043
60	60	19	1,78	1,2	138	76806	2560	1725

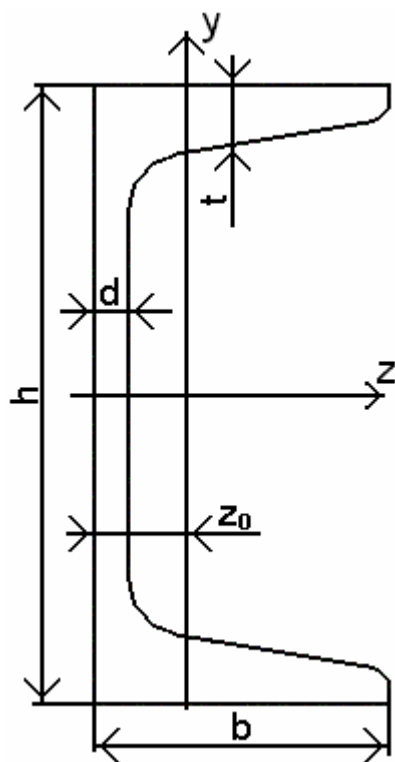


Рис. 17

Таблица 4. Швеллеры (в соответствии с ГОСТ 8240 – 93)

№ швеллера	h, см	b, см	d, см	t, см	A, см ²	I _z , см ⁴	I _y , см ⁴	z ₀ , см
10	10	4,6	0,45	0,76	10,9	175	22,6	1,44
12	12	5,2	0,48	0,78	13,3	305	34,9	1,53
14	14	5,8	0,49	0,81	15,6	493	51,5	1,67
16	16	6,4	0,5	0,84	18,1	747	63,3	1,8
18	18	7	0,51	0,87	20,7	1090	86	1,94
20	20	7,6	0,52	0,9	23,4	1520	113	2,07
24	24	9	0,56	1	30,6	2900	208	2,42
27	27	9,5	0,6	1,05	35,2	4160	262	2,47
30	30	10	0,65	1,1	40,5	5810	327	2,52
33	33	10,5	0,7	1,17	46,5	7980	410	2,59
36	36	11	0,75	1,26	53,4	10820	513	2,68

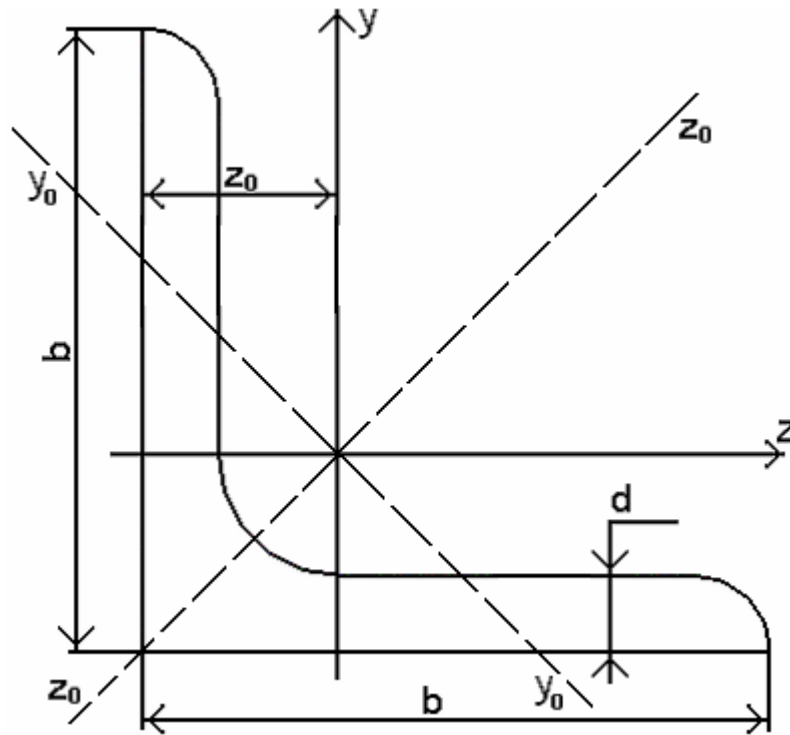


Рис. 18

Таблица 5. Уголки равнобокие (в соответствии с ГОСТ 8509 – 93)

№ уголка	b, см	d, см	A, см ²	$I_z = I_y,$ см ⁴	$I_{MAX},$ см ⁴	$I_{MIN},$ см ⁴	$z_0,$ см
80 × 6	8	0,6	9,38	56,97	90,4	23,54	2,19
80 × 8	8	0,8	12,3	73,36	116,39	30,32	2,27
90 × 6	9	0,6	10,61	82,1	130	33,97	2,43
90 × 7	9	0,7	12,28	94,3	149,67	38,94	2,47
90 × 8	9	0,8	13,9	106	168	43,8	2,51
100 × 8	10	0,8	15,6	147	233	60,9	2,75
100 × 10	10	1	19,2	179	284	74,1	2,83
100 × 12	10	1,2	22,8	208,9	330,95	86,84	2,91
125 × 10	12,5	1	24,33	359,82	571,04	148,59	3,45
125 × 12	12,5	1,2	28,89	422,23	670,02	174,43	3,53

2.2.1. Исходные данные

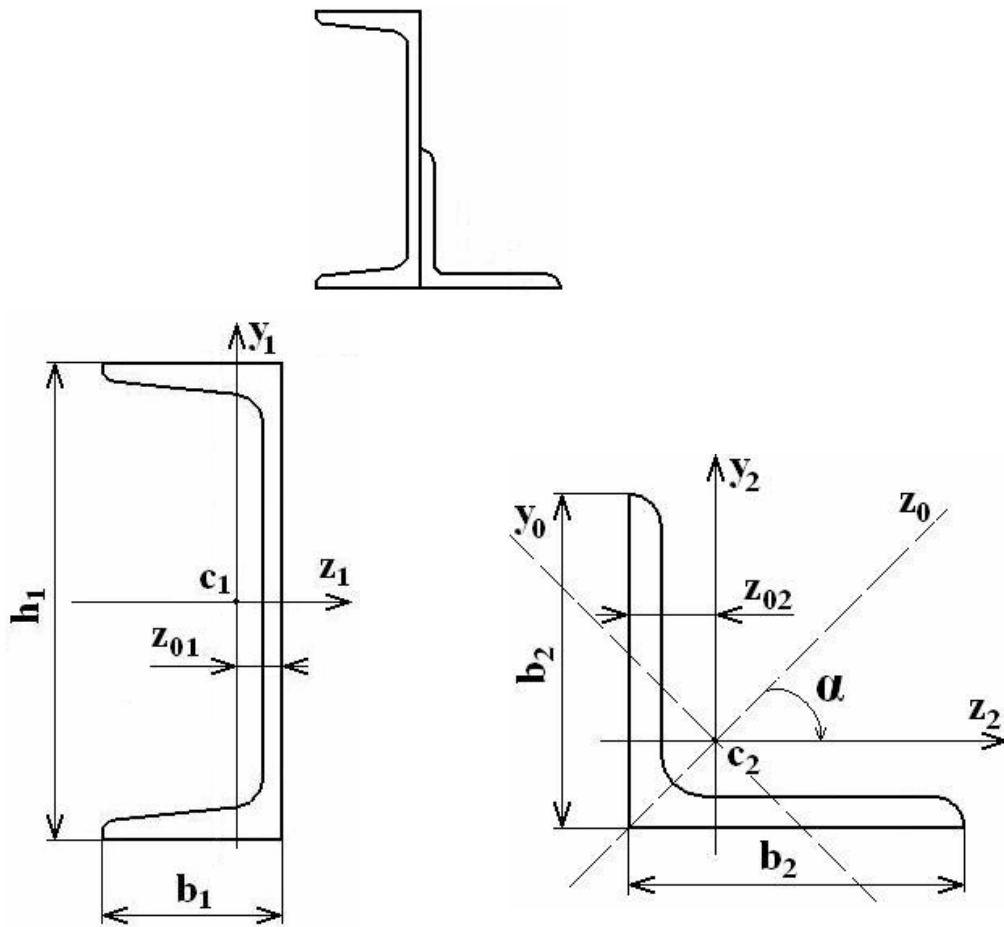


Рис. 19

1. Параметры швеллера № 20: $h_1 = 20$ см; $b_1 = 76$ мм; $z_{01} = 2,07$ см; $A_1 = 23,4$ см²; $I_{z1} = 1520$ см⁴; $I_{y1} = 113$ см⁴; $I_{z1y1} = 0$ см⁴.

2. Параметры уголка 100×10 : $b_2 = 100$ мм; $z_{02} = 2,83$ см; $A_2 = 19,2$ см²; $I_{z2} = I_{y2} = 179$ см⁴; $I_{MAX} = 284$ см⁴; $I_{MIN} = 74,1$ см⁴.

Центробежный момент инерции равнобокого уголка относительно его центральных осей y_2 и z_2 найдем по формуле:

$$I_{z_2y_2} = \frac{I_{MAX} - I_{MIN}}{2} \cdot \text{SIN}(2 \cdot \alpha),$$

где угол $\alpha = -45^\circ$, так как для совмещения оси z_0 с осью z_2 надо повернуть ось z_0 по часовой стрелке (рис. 19), тогда

$$I_{z_2y_2} = \frac{284 - 74,1}{2} \cdot \text{SIN}[2 \cdot (-45^\circ)] = -104,95 \text{ см}^4.$$

2.2.2. Определение положения центра тяжести сечения

Координаты центра тяжести всего сечения найдем по формулам:

$$z_C = \frac{A_1 z_{C1} + A_2 z_{C2}}{A}, \quad y_C = \frac{A_1 y_{C1} + A_2 y_{C2}}{A},$$

где z_{C1} , y_{C1} , z_{C2} , y_{C2} – координаты центров тяжести составных частей сечения (рис. 20), A – площадь всего сечения, $A = A_1 + A_2 = 23,4 + 19,2 = 42,6 \text{ см}^2$.

Координаты центра тяжести всего сечения z_C и y_C наиболее удобно определять, взяв в качестве исходных осей координат центральные оси составных фигур сечения таким образом, чтобы большая часть всего сечения попадала в первый положительный квадрант. В данном случае такими осями являются оси y_1 и z_2 , так как точка их пересечения находится ниже и левее по отношению ко всему сечению.

Координаты центров тяжести швеллера и уголка в осях y_1 и z_2 будут, соответственно, равны:

$$\begin{aligned} y_{C1} &= 0,5 \cdot h_1 - z_{02} = 0,5 \cdot 20 - 2,83 = 7,17 \text{ см}, \\ y_{C2} &= 0 \text{ см}, \\ z_{C1} &= 0 \text{ см}, \\ z_{C2} &= z_{01} + z_{02} = 2,07 + 2,83 = 4,9 \text{ см}. \end{aligned}$$

Координаты центра тяжести всего сечения:

$$\begin{aligned} z_C &= \frac{23,4 \cdot 0 + 19,24 \cdot 4,9}{42,6} = 2,21 \text{ см}, \\ y_C &= \frac{23,4 \cdot 7,17 + 19,24 \cdot 0}{42,6} = 3,93 \text{ см}. \end{aligned}$$

Все найденные величины откладываем на рис. 20 и проводим центральные оси всего сечения Z и Y .

Определение осевых и центробежного моментов инерции относительно центральных осей

Осевые моменты инерции будем определять по формулам

$$I_Z = \sum_{i=1}^n (I_{Zi} + A_i b_i^2), \quad I_Y = \sum_{i=1}^n (I_{Yi} + A_i c_i^2),$$

где расстояния между параллельными осями соответственно равны:

$$\begin{aligned} b_i &= y_{Ci} - y_C, \quad c_i = z_{Ci} - z_C, \\ \text{т.е.} \quad b_1 &= y_{C1} - y_C = 7,17 - 3,93 = 3,24 \text{ см}, \\ b_2 &= - y_C = - 3,93 \text{ см}, \\ c_1 &= - z_C = - 2,21 \text{ см}, \\ c_2 &= z_{C2} - z_C = 4,9 - 2,21 = 2,69 \text{ см}. \end{aligned}$$

Тогда осевые моменты инерции относительно центральных осей **Z** и **Y**:

$$I_Z = I_{Z1} + A_1 \cdot b_1^2 + I_{Z2} + A_2 \cdot b_2^2 = 1520 + 23,4 \cdot (3,24)^2 + 179 + 19,2 \cdot (-3,93)^2 = 2242 \text{ см}^4;$$

$$I_Y = I_{Y1} + A_1 \cdot c_1^2 + I_{Y2} + A_2 \cdot c_2^2 = 113 + 23,4 \cdot (-2,21)^2 + 179 + 19,2 \cdot (2,69)^2 = 545 \text{ см}^4.$$

Центробежный момент инерции

$$I_{ZY} = I_{Z1Y1} + A_1 \cdot b_1 \cdot c_1 + I_{Z2Y2} + A_2 \cdot b_2 \cdot c_2 = 0 + 23,4 \cdot 3,24(-2,21) - 104,95 + 19,2 \cdot (-3,93) \cdot 2,69 = -475,5 \text{ см}^4.$$

2.2.4. Определение направления главных центральных осей

Определим положение главных осей по формуле:

$$\operatorname{tg}(2\alpha_0) = \frac{2 \cdot I_{ZY}}{I_Y - I_Z},$$

где значения величин, входящих в эту формулу, уже были определены ранее.

$$\operatorname{tg}(2\alpha_0) = \frac{2 \cdot (-475,5)}{545 - 2242} = 0,56;$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arctg}(0,56) = 14,6^\circ.$$

Так как $I_{ZY} < 0$, то главная ось, относительно которой момент инерции максимален, проходит через первый и третий квадранты (ось **U**).

Отложим этот угол против часовой стрелке от оси **Z** и проведем главную центральную ось **U**, ось **V** будет ей перпендикулярна (см. рис. 20).

2.2.5. Определение экстремальных моментов относительно главных центральных осей

Момент инерции относительно главной центральной оси **U**

$$I_{\text{MAX}} = \frac{I_Z + I_Y}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(I_Z - I_Y)^2 + 4 \cdot I_{ZY}^2} = \frac{2242 + 545}{2} + \sqrt{\left(\frac{2242 - 545}{2}\right)^2 + (-475,5)^2} = 2366,2 \text{ см}^4.$$

Момент инерции относительно главной центральной оси V

$$I_{\text{MIN}} = \frac{I_Z + I_Y}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(I_Z + I_Y)^2 + 4 \cdot I_{ZY}^2} = \frac{2242 + 545}{2} - \sqrt{\left(\frac{2242 - 545}{2}\right)^2 + (-475,5)^2} = 420,8 \text{ см}^4.$$

Выполним проверку: $I_Z + I_Y = I_{\text{MAX}} + I_{\text{MIN}} = 2242 + 545 = 2366,2 + 420,8 = 2787 \text{ см}^4.$

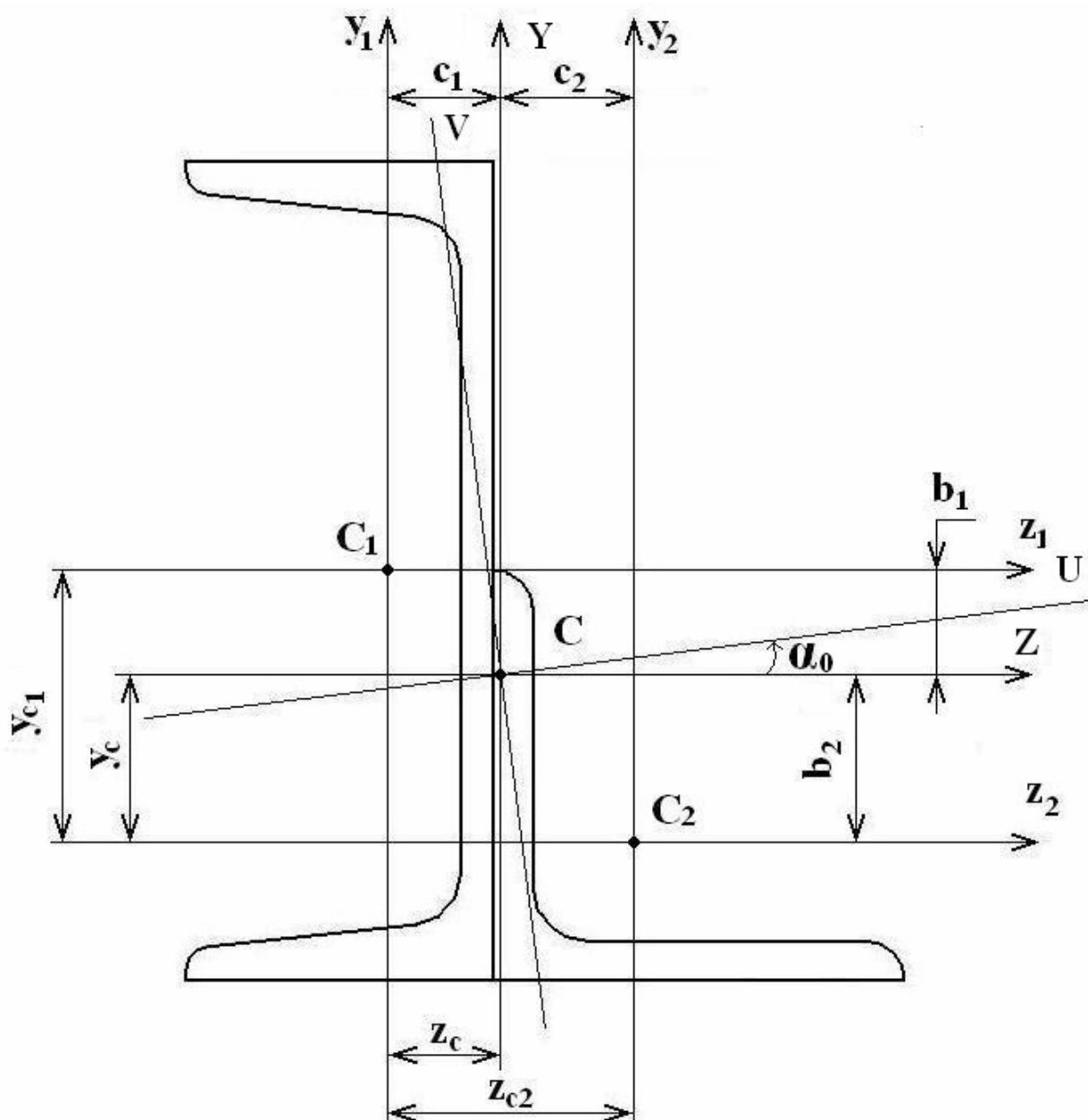


Рис. 20

3. ИЗГИБ

3.1. Краткие сведения по теории

Деформация, при которой меняется кривизна геометрической оси, называется *изгибом*. Стержень при изгибе называется *балкой*.

При изгибе стержня за счет действия на него внешней поперечной нагрузки (сосредоточенных сил, моментов, распределенных нагрузок) в поперечных сечениях стержня возникают следующие внутренние силовые факторы: поперечные силы Q_Y и Q_Z , изгибающие моменты M_Y и M_Z .

Если плоскость, в которой лежат действующие нагрузки, совпадает с одной из главных плоскостей инерции, то такой изгиб называется *прямым*, а если не совпадает, то *косым*. Если величина поперечной силы в сечении не равна нулю, то такой изгиб называется *поперечным*. Если величина поперечной силы в сечении равна нулю и изгибающий момент постоянен, то такой изгиб называется *чистым*.

Далее будет рассмотрена теория прямого поперечного изгиба.

Величина *поперечной силы* Q_Y в поперечном сечении балки численно равна алгебраической сумме проекций на ось Y всех внешних сил, действующих по одну сторону (справа или слева) от рассматриваемого сечения. Поперечная сила считается положительной, если она направлена слева вверх и справа вниз. При противоположных направлениях поперечная сила считается отрицательной (рис. 21а).

Величина *изгибающего момента* M_Z в поперечном сечении балки численно равна алгебраической сумме моментов внешних нагрузок, действующих по одну сторону (справа или слева) от рассматриваемого сечения. Изгибающий момент считается положительным, если он направлен слева от сечения по часовой стрелке, а справа – против часовой стрелки. При противоположных направлениях считается отрицательным (рис. 21б).

Эпюрой поперечных сил Q и изгибающих моментов M называется график, показывающий изменение соответствующих величин в зависимости от координаты X .

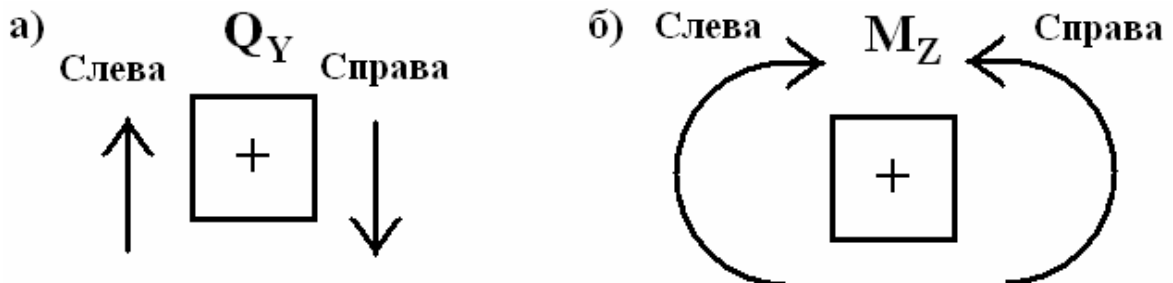


Рис. 21

Условие прочности по нормальным напряжениям при изгибе:

$$\sigma_{\text{MAX}} = \frac{|M_{\text{MAX}}|}{W_Z} \leq [\sigma], \quad (41)$$

где σ_{MAX} – максимальное нормальное напряжение в поперечном сечении балки, $|M_{\text{MAX}}|$ – наибольшее по модулю значение изгибающего момента, взятое с его эпюры, W_Z – момент сопротивления поперечного сечения, $[\sigma]$ – допускаемое нормальное напряжение при изгибе.

При изгибе балки существуют дифференциальные зависимости:

$$\frac{dM(x)}{dx} = Q(x), \quad \frac{dQ(x)}{dx} = q(x). \quad (42)$$

Из них следуют правила проверки построенных эпюр Q и M :

1. В тех сечениях балки, где приложены сосредоточенные силы, включая опорные реакции, на эпюре Q будут скачки на их величину, а на эпюре M – излом эпюры.

2. В тех сечениях балки, где приложены сосредоточенные моменты, включая опорные в заделках, на эпюре M будут скачки на их величину, а на эпюре Q особенностей не будет.

3. На участке, где действует равномерно распределенная нагрузка q , на эпюре Q будет наклонная линия, а на эпюре M – парабола, выпуклостью направленная навстречу нагрузке q .

4. Если эпюра Q проходит через ноль и меняет знак, то в этом сечении эпюра M будет иметь экстремум.

5. На участке, где отсутствует равномерно распределенная нагрузка q , эпюра Q будет представлена горизонтальной линией, а эпюра M – наклонной к оси x прямой.

6. На участке, где поперечная сила Q положительна, изгибающий момент M возрастает, а если сила Q отрицательна, то момент M убывает.

3.2. Пример выполнения задачи № 3

Для заданных двух схем балок (рис. 23) требуется написать выражения Q и M для каждого участка в общем виде, построить эпюры Q и M , найти M_{MAX} и подобрать:

1. Для схемы (а) деревянную балку круглого поперечного сечения при $[\sigma] = 8 \text{ МПа}$.

2. Для схемы (б) стальную балку двутаврового поперечного сечения при $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$. Данные взять из табл. 6.

3.2.1. Исходные данные для деревянной балки

$M_0 = 30 \text{ кНм}$; $q = 10 \text{ кН/м}$; $a = 1 \text{ м}$; $b = 1 \text{ м}$; $c = 1 \text{ м}$; $[\sigma] = 8 \text{ МПа}$ (рис. 22).

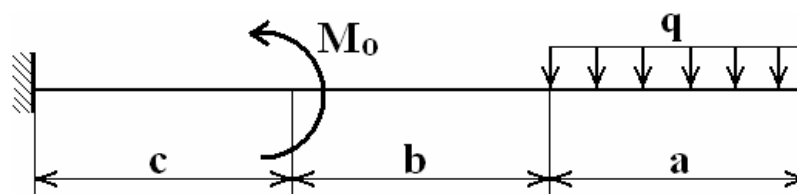


Рис. 22

Таблица 6. Исходные данные к задаче № 3

№ строки	Схема по рис. 23	L ₁	L ₂	Расстояния в долях пролета			M ₀ , кНм	Сосредоточенная сила P, кН	q, кН/м
		м		a ₁ /a	a ₂ /a	a ₃ /a			
1	I	1,1	6	1	9	1	10	10	10
2	II	1,2	7	2	8	2	20	20	20
3	III	1,3	3	3	7	3	3	3	3
4	IV	1,4	4	4	6	4	4	4	4
5	V	1,5	5	5	5	5	5	5	5
6	VI	1,6	6	6	6	1	6	6	6
7	VII	1,7	7	7	7	2	7	7	7
8	VIII	1,8	8	8	8	3	8	8	8
9	IX	1,9	9	9	9	4	9	9	9
0	X	2,0	10	10	10	5	10	10	10
	е	д	е	г	д	е	г	д	е

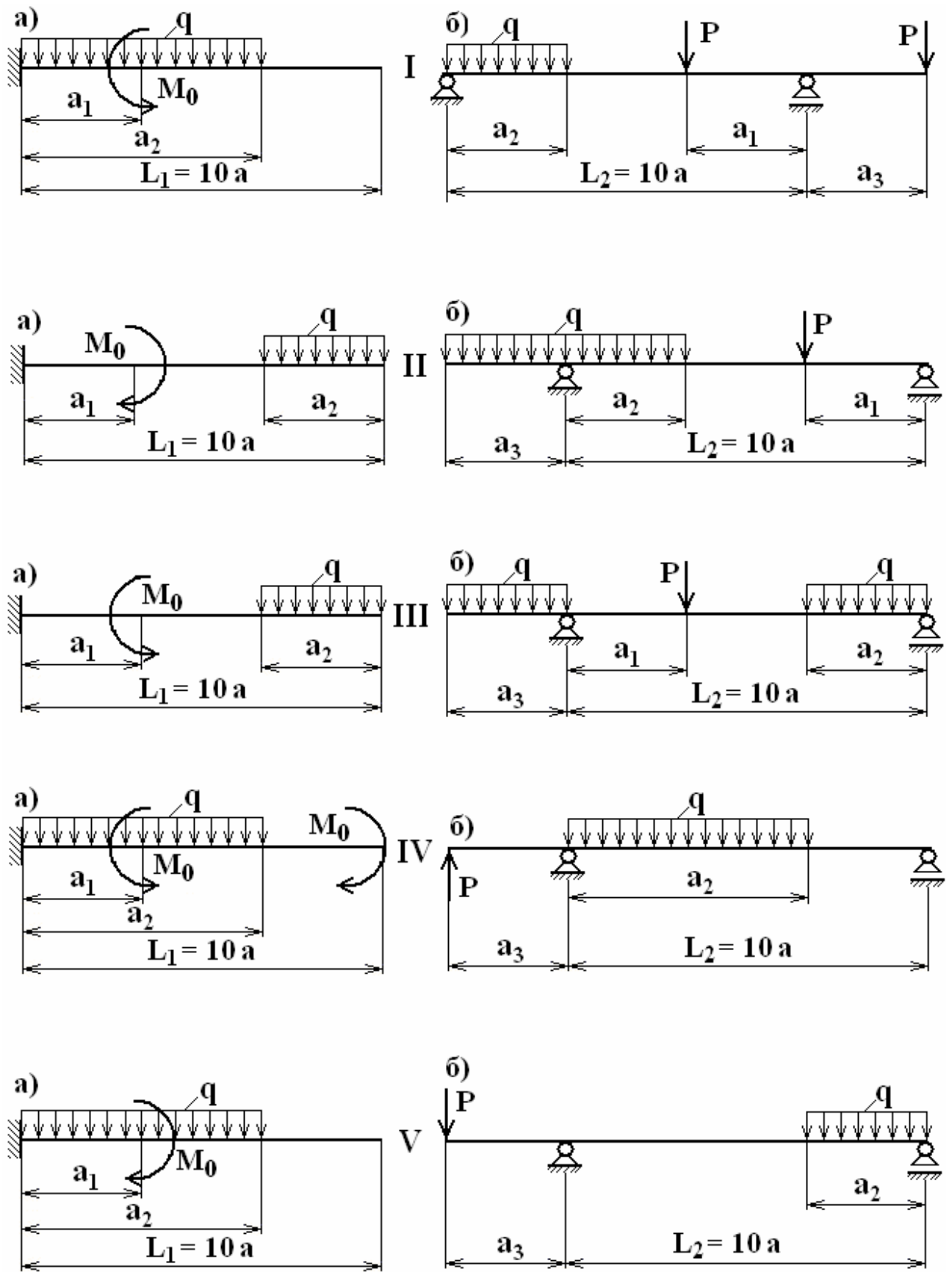


Рис. 23

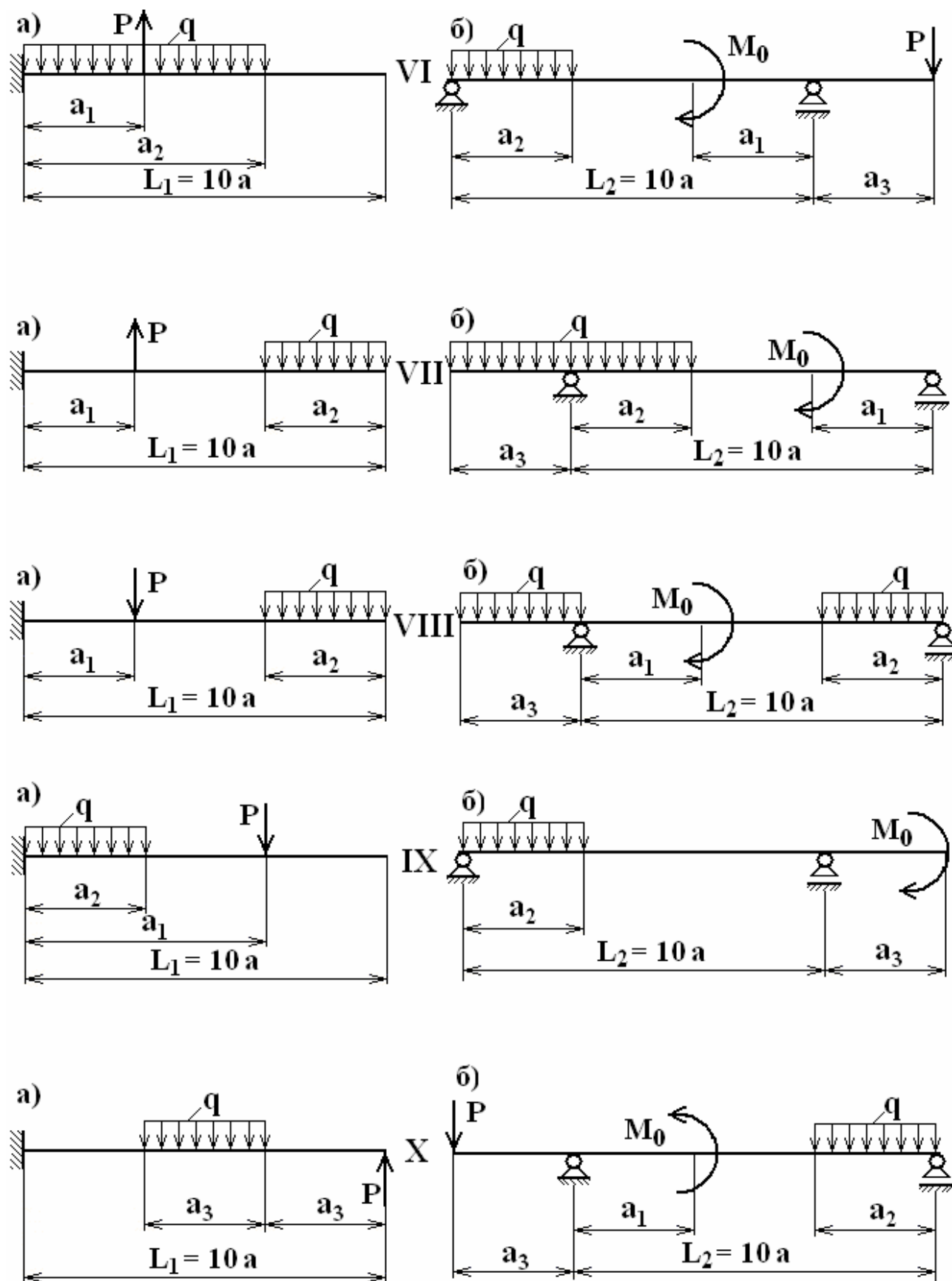


Рис. 23а

3.2.2. Построение эпюр поперечной силы и изгибающего момента

Не вычисляя из уравнений равновесия значения реакций в заделке, используя метод сечений, запишем выражения для поперечной силы и изгибающего момента по участкам балки. Будем двигаться при этом справа налево в сторону заделки, начиная со свободного конца и используя правило знаков согласно рис. 21.

Границы первого участка: $0 \leq x_1 \leq a$ (рис. 24).

$$Q_1 = \Sigma Q^{PP} = q \cdot x_1 = 10 \cdot x_1.$$

$$M_1 = \Sigma M^{PP} = -0,5 \cdot q \cdot x_1 \cdot x_1 = -5 \cdot x_1^2.$$

При $x_1 = 0$ м, $Q_1 = 0$ кН, $M_1 = 0$ кНм.

При $x_1 = a = 1$ м, $Q_1 = 10$ кН, $M_1 = -5$ кНм.

Так как эпюра Q на первом участке не меняет свой знак, то на эпюре M не будет экстремального значения. Поэтому для построения параболы на эпюре M возьмем точку посередине первого участка и определим значение изгибающего момента в ней: $x_1 = 0,5 \cdot a = 0,5$ м, $M_1 = -1,25$ кНм.

Границы второго участка: $a \leq x_2 \leq a + b$.

$$Q_2 = \Sigma Q^{PP} = q \cdot a = 10 \text{ кН.}$$

$$M_2 = \Sigma M^{PP} = -q \cdot a \cdot (x_2 - 0,5 \cdot a) = -10 \cdot (x_2 - 0,5).$$

При $x_2 = a = 1$ м, $M_2 = -5$ кНм.

При $x_2 = a + b = 2$ м, $M_2 = -15$ кНм.

Границы третьего участка: $a + b \leq x_3 \leq a + b + c$.

$$Q_3 = \Sigma Q^{PP} = q \cdot a = 10 \text{ кН.}$$

$$M_3 = \Sigma M^{PP} = -q \cdot a \cdot (x_3 - 0,5 \cdot a) + M_0 = -10 \cdot (x_3 - 0,5) + 30.$$

При $x_3 = a + b = 2$ м, $M_3 = 15$ кНм.

При $x_3 = a + b + c = 3$ м, $M_3 = 5$ кНм.

Полученные значения откладываем в масштабе на каждом из соответствующих участков балки (см. рис. 24) и делаем проверку эпюр.

3.2.3. Подбор поперечного сечения деревянной балки

Для подбора деревянной балки круглого поперечного сечения используем условие прочности по нормальным напряжениям при изгибе:

$$\sigma_{\text{MAX}} = \frac{|M_{\text{MAX}}|}{W_Z} \leq [\sigma],$$

где σ_{MAX} – максимальное нормальное напряжение в поперечном сечении балки;

$|M_{\text{MAX}}| = 15$ кНм – наибольшее по модулю значение изгибающего момента;

$[\sigma]$ – допускаемое нормальное напряжение при изгибе, $[\sigma] = 8$ МПа;

W_Z – момент сопротивления площади поперечного сечения балки.

Для круга диаметром d момент сопротивления

$$W_Z = \frac{\pi \cdot d^3}{32}.$$

Найдем минимальный диаметр балки круглого поперечного сечения:

$$d_{\text{MIN}} \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot |M_{\text{MAX}}|}{\pi \cdot [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 15 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 8 \cdot 10^6}} = 0,267 \text{ м.}$$

Полученное значение округлим до ближайшего большего, получим $d = 0,28 \text{ м}$.

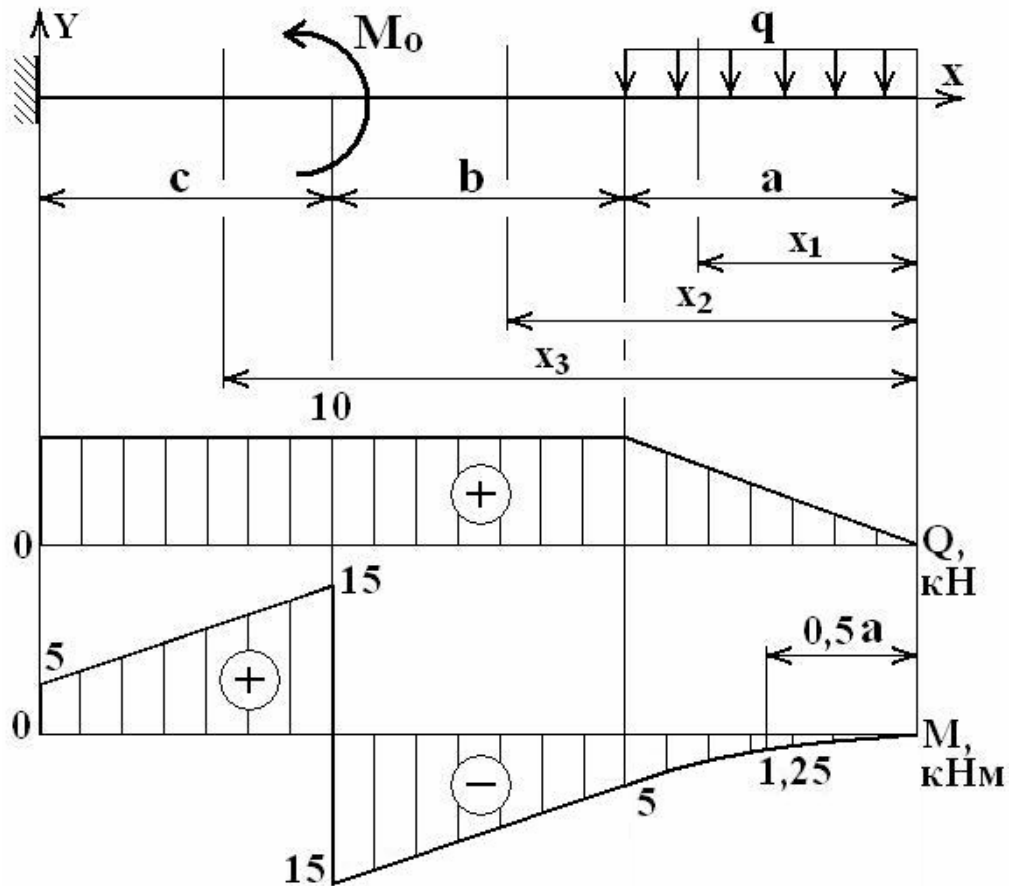


Рис. 24

3.2.4. Исходные данные для стальной балки

$q = 20 \text{ кН/м}$; $a = 1 \text{ м}$; $b = 2 \text{ м}$; $c = 1 \text{ м}$; $d = 3 \text{ м}$; $P = 25 \text{ кН}$; $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$
(рис. 25).

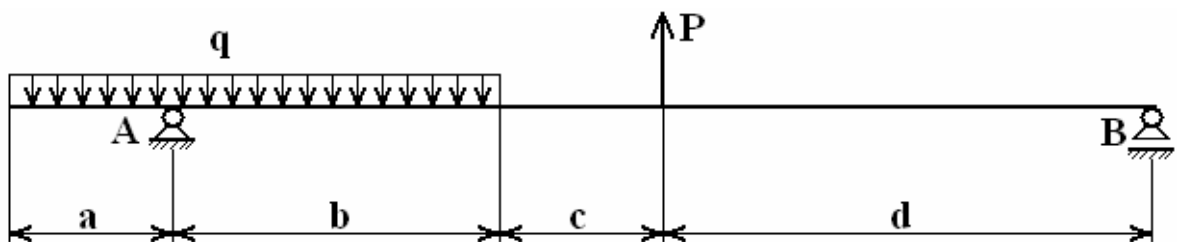


Рис. 25

3.2.5. Построение эпюр поперечной силы и изгибающего момента

Перед построением эпюр в случае шарнирных балок следует определить реакции в опорных закреплениях, используя уравнения равновесия статики. Для этого отбросим опоры **A** и **B** и заменим их действие реакциями Y_A и Y_B , направив их предварительно вертикально вверх. Так как горизонтальных сил к балке не приложено, то $X_A=0$. Распределенную нагрузку интенсивностью q на участках **a** и **b** приведем к соответствующим равнодействующим в виде сосредоточенных сил $q \cdot a$ и $q \cdot b$, направленных вертикально вниз из середины каждого участка **a** и **b** (рис. 26).

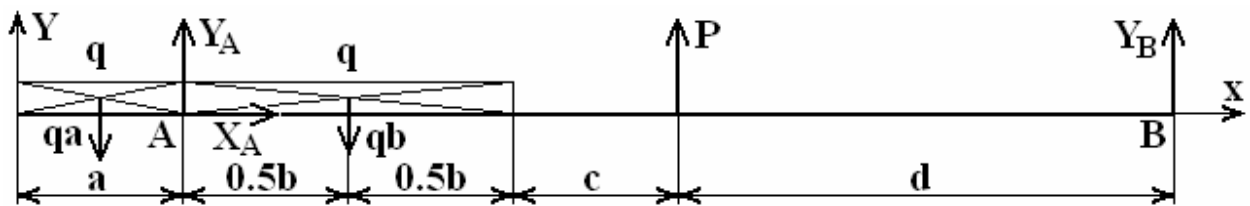


Рис. 26

Для нахождения реакции Y_B составим сумму моментов всех действующих сил относительно точки **A**:

$$\sum_{i=1}^n M_{Ai} = 0, \quad q \cdot a \cdot \frac{a}{2} - q \cdot b \cdot \frac{b}{2} + P \cdot (b + c) + Y_B \cdot (b + c + d) = 0.$$

$$20 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} - 20 \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} + 25 \cdot (2 + 1) + Y_B \cdot (2 + 1 + 3) = 0, \quad Y_B = -7,5 \text{ кН.}$$

Так как значение реакции Y_B при выбранном направлении оказалось отрицательным, то действие реакции Y_B следует изменить на расчетной схеме на противоположное, т.е. вниз, и считать ее положительной величиной (рис. 27).

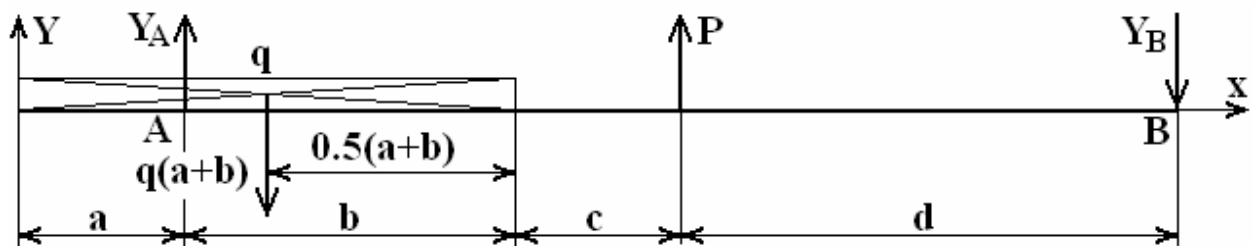


Рис. 27

При составлении суммы моментов всех действующих сил относительно точки **B** (для нахождения реакции Y_A) распределенную нагрузку q удобнее привести к одной сосредоточенной силе $q \cdot (a+b)$, направленной вертикально вниз и действующей по середине участка $(a + b)$, тогда

$$\sum_{i=1}^n M_{Bi} = 0, \quad -P \cdot d - Y_A \cdot (b + c + d) + q \cdot (a + b) \cdot (d + c + \frac{a + b}{2}) = 0,$$

$$- 25 \cdot 3 - Y_A \cdot (2 + 1 + 3) + 20 \cdot (1 + 2) \cdot (3 + 1 + \frac{1 + 2}{2}) = 0, \quad Y_A = 42,5 \text{ кН.}$$

Так как значение реакции Y_A при выбранном направлении оказалось положительным, то действие реакции Y_A направлено вверх (см. рис. 27).

Сделаем проверку найденных реакций:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n Y_i &= 0, \quad P + Y_A - Y_B - q \cdot (a + b) = 25 + 42,5 - 7,5 - 20 \cdot (1 + 2) = \\ &= 67,5 - 67,5 = 0. \end{aligned}$$

Проверка сошлась, теперь на расчетной схеме все известно и можно приступать к построению эпюр поперечной силы и изгибающего момента.

Заданная балка состоит из четырех участков. Рассечем ее последовательно на каждом из них и запишем выражения для поперечной силы и изгибающего момента, действующих по одну сторону от рассматриваемого сечения, используя правило знаков согласно рис. 21.

Границы первого участка: $0 \leq x_1 \leq d$ (рис. 28).

$$Q_1 = \Sigma Q^{PP} = Y_B = 7,5 \text{ кН.}$$

$$M_1 = \Sigma M^{PP} = - Y_B \cdot x_1 = - 7,5 \cdot x_1.$$

При $x_1 = 0$ м, $M_1 = 0$ кНм.

При $x_1 = d = 3$ м, $M_1 = - 22,5$ кНм.

Границы второго участка: $d \leq x_2 \leq d + c$.

$$Q_2 = \Sigma Q^{PP} = Y_B - P = 7,5 - 25 = - 17,5 \text{ кН.}$$

$$M_2 = \Sigma M^{PP} = - Y_B \cdot x_2 + P \cdot (x_2 - d) = - 7,5 \cdot x_2 + 25 \cdot (x_2 - 3).$$

При $x_2 = d = 3$ м, $M_2 = 22,5$ кНм.

При $x_2 = d + c = 4$ м, $M_2 = - 5$ кНм.

Границы третьего участка: $0 \leq x_3 \leq a$.

$$Q_3 = \Sigma Q^{ЛЭВ} = - q \cdot x_3 = - 20 \cdot x_3.$$

$$M_3 = \Sigma M^{ЛЭВ} = - 0,5 \cdot q \cdot x_3 \cdot x_3 = - 10 \cdot x_3^2.$$

При $x_3 = 0$ м, $Q_3 = 0$ кН, $M_3 = 0$ кНм.

При $x_3 = a = 1$ м, $Q_3 = - 20$ кН, $M_3 = - 10$ кНм.

Так как эпюра Q на третьем участке не меняет свой знак, то на эпюре M не будет экстремального значения. Поэтому для построения параболы на эпюре M возьмем третью точку посередине рассматриваемого участка и определим значение изгибающего момента в ней:

$$x_3 = 0,5 \cdot a = 0,5 \text{ м; } M_3 = - 2,5 \text{ кНм.}$$

Границы четвертого участка: $a \leq x_4 \leq a + b$.

$$Q_4 = \Sigma Q^{ЛЭВ} = - q \cdot x_4 + Y_A = - 20 x_4 + 42,5.$$

$$M_4 = \Sigma M^{ЛЭВ} = - 0,5 \cdot q \cdot x_4 \cdot x_4 + Y_A \cdot (x_4 - a) = - 10 \cdot x_4^2 + 42,5 \cdot (x_4 - 1).$$

При $x_4 = a = 1$ м, $Q_4 = 22,5$ кН, $M_4 = - 10$ кНм.

При $x_4 = a + b = 3$ м, $Q_4 = - 17,5$ кН, $M_4 = - 5$ кНм.

Так как на данном участке эпюра Q меняет знак, то, приравняв выражение Q_4 к нулю, найдем координату, при которой на эпюре M будет экстремум $Q_4 = -q \cdot x_{04} + Y_A = -20 \cdot x_{04} + 42,5 = 0$, откуда $x_{04} = Y_A / q = 42,5 / 20 = 2,125$ м.

Экстремальное значение изгибающего момента:
 $M^{EXT} = -0,5 \cdot q \cdot x_{04} \cdot x_{04} + Y_A \cdot (x_{04} - a) = -10 \cdot x_{04}^2 + 42,5 \cdot (x_{04} - 1) = -10 \cdot (2,125)^2 + 42,5 \cdot (2,125 - 1) = 2,66$ кНм.

В качестве дальнейшего обсуждения рассматриваемого вопроса можно показать, что значения эпюр не изменятся, если делать сечения, идя при этом с другой стороны. Так, например, сделаем сечение на участке b и рассмотрим оставшуюся часть балки с правой стороны.

Границы пятого участка: $d + c \leq x_5 \leq d + c + b$.
 $Q_5 = \Sigma Q^{PP} = Y_B - P + q \cdot (x_5 - (d + c)) = -17,5 + 25 \cdot (x_5 - 4)$.
 $M_5 = \Sigma M^{PP} = -Y_B \cdot x_5 + P \cdot (x_5 - d) - 0,5 \cdot q \cdot (x_5 - (d + c))^2 = -7,5 \cdot x_5 + 25 \cdot (x_5 - 3) - 10 \cdot (x_5 - 4)^2$.

При $x_5 = d + c = 4$ м, $Q_5 = -17,5$ кН, $M_5 = -5$ кНм.

При $x_5 = d + c + b = 6$ м, $Q_5 = 22,5$ кН, $M_5 = -10$ кНм.

Определим экстремальное значение изгибающего момента на этом участке:

$Q_5 = Y_B - P + q \cdot (x_{05} - (d + c)) = -17,5 + 25 \cdot (x_{05} - 4) = 0$,

откуда $x_{05} = 17,5 / 20 + 4 = 4,875$ м.

$M^{EXT} = -Y_B \cdot x_{05} + P \cdot (x_{05} - d) - 0,5 \cdot q \cdot (x_{05} - (d + c))^2 = -7,5 \cdot x_{05} + 25 \cdot (x_{05} - 3) - 10 \cdot (x_{05} - 4)^2 = -7,5 \cdot 4,875 + 25 \cdot (4,875 - 3) - 10 \cdot (4,875 - 4)^2 = 2,66$ кНм.

Полученные значения откладываем в масштабе на каждом из соответствующих участков балки (см. рис. 28). После построения эпюры делаем ее проверку, используя правила проверки правильности построения эпюр для поперечной силы и изгибающего момента.

3.2.6. Подбор поперечного сечения стальной балки

Для подбора стальной балки двутаврового поперечного сечения используем условие прочности по нормальным напряжениям при изгибе:

$$\sigma_{MAX} = \frac{|M_{MAX}|}{W_Z} \leq [\sigma],$$

где σ_{MAX} – максимальное нормальное напряжение в поперечном сечении балки;
 $|M_{MAX}|$ – наибольшее по модулю значение изгибающего момента,
 $|M_{MAX}| = 22,5$ кНм; $[\sigma]$ – допустимое нормальное напряжение при изгибе,
 $[\sigma] = 160$ МПа; W_Z – момент сопротивления площади поперечного сечения балки.

Выразим момент сопротивления из условия прочности:

$$W_Z \geq \frac{|M_{MAX}|}{[\sigma]} = \frac{22,5 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0,1406 \text{ м}^3 = 140,6 \text{ см}^3.$$

По табл. 3 принимаем двутавр № 18, у которого момент сопротивления $W_Z = 143 \text{ см}^3$.

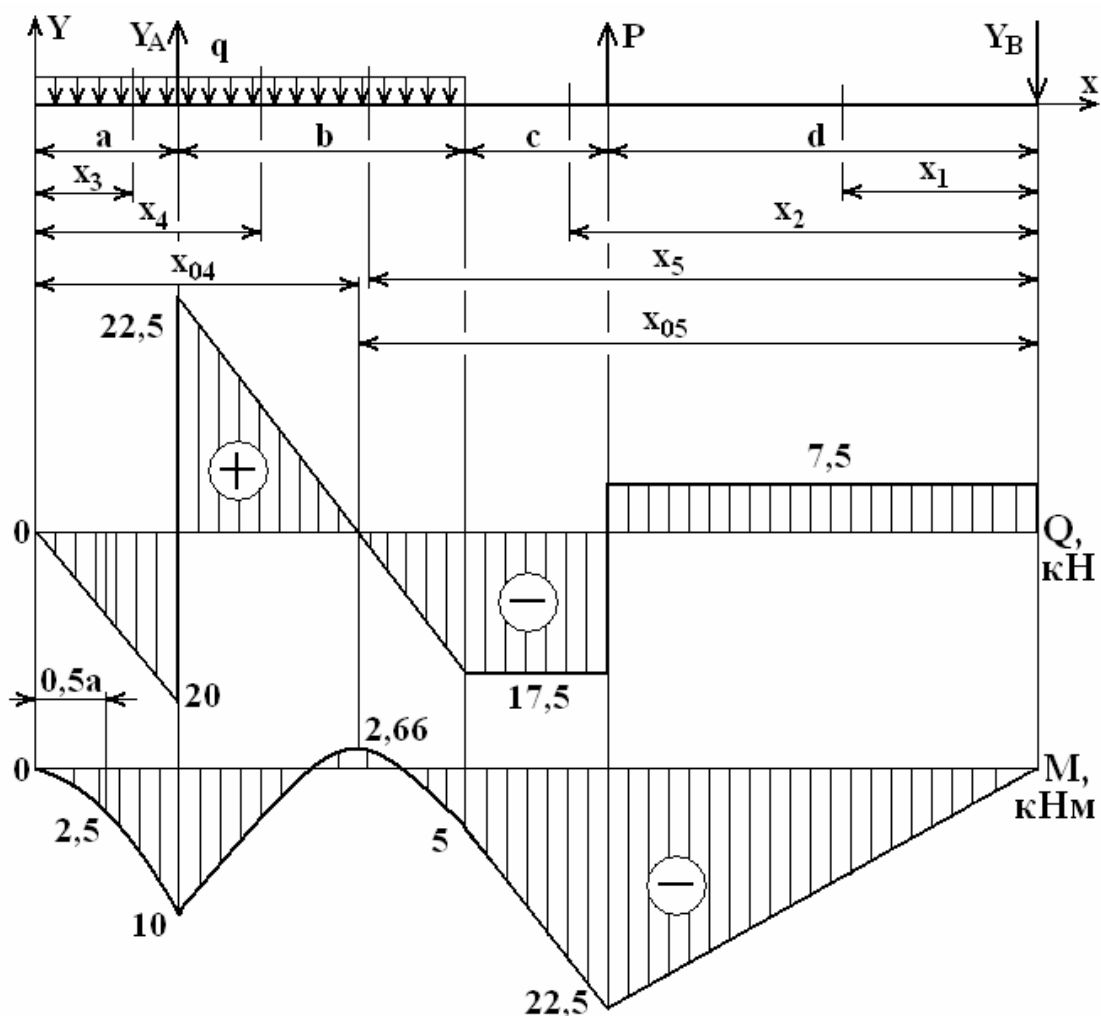


Рис. 28

Библиографический список

Агаханов М.К. Сопротивление материалов: учебное пособие/ М.К. Агаханов, В.Г. Богопольский – М.: МГСУ, 2016. – 268 с.

Агапов В.П. Сопротивление материалов: учебник / В.П. Агапов – М.: МГСУ, ЭБС АСВ, 2014.— 336 с.

ГОСТ 8239 – 93. Сталь горячекатаная. Балки двутавровые.

ГОСТ 8240 – 93. Сталь горячекатаная. Швеллеры.

ГОСТ 8509 – 93. Сталь горячекатаная. Уголки равнобокие.

Оглавление

Предисловие.....	3
1. Кручение.....	3
1.1. Краткие сведения по теории.....	3
1.2. Пример выполнения задачи № 1.....	5
2. Геометрические характеристики плоских сечений.....	11
2.1. Краткие сведения по теории.....	11
2.2. Пример выполнения задачи № 2.....	18
3. Изгиб.....	27
3.1. Краткие сведения по теории.....	27
3.2. Пример выполнения задачи № 3.....	28
Библиографический список.....	37