Н. Н. Кокушин, И. В. Клюшкин,
В. Е. Головко, П. В. Кауров, Ф. Д. Шишкин

ОСНОВЫ НАДЕЖНОСТИ МАШИН

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2023

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«Санкт-Петербургский государственный университет промышленных технологий и дизайна»
Высшая школа технологии и энергетики

Н. Н. Кокушин, И. В. Клюшкин, В. Е. Головко, П. В. Кауров, Ф. Д. Шишкин

ОСНОВЫ НАДЕЖНОСТИ МАШИН

Учебное пособие

Утверждено Редакционно-издательским советом ВШТЭ СПбГУПТД

Санкт-Петербург
2023

УДК 676.05 (075)
ББК 33.77я7
О 753

Рецензенты:
заслуженный работник высшей школы РФ, доктор технических наук,
профессор кафедры системного анализа Санкт-Петербургского
государственного технологического института (Технического университета)
В. А. Холоднов;
кандидат технических наук, доцент кафедры охраны окружающей среды
и рационального использования природных ресурсов Высшей школы
технологии и энергетики Санкт-Петербургского государственного
университета промышленных технологий и дизайна
И. В. Антонов

О 753 Основы надежности машин: учебное пособие / Н. Н. Кокушин, И. В. Клюшкин, В. Е. Головко, П. В. Кауров, Ф. Д. Шишкин. — СПб.: ВШТЭ СПбГУПТД, 2023. — 76 с.
ISBN 978-5-91646-332-3

Учебное пособие соответствует программам и учебным планам дисциплины «Основы надежности машин» для студентов, обучающихся по направлению подготовки 15.03.02 «Технологические машины и оборудование». В пособии рассмотрены основы теории надежности невосстанавливаемых и восстанавливаемых технических объектов, основы надежности сложных технических систем применительно к машинам, аппаратам и их элементам. Дано представление об основных закономерностях надежности при отказах и восстановлении технических объектов, основных видах технических систем с точки зрения надежности и др.

УДК 676.05 (075)
ББК 33.77я7

ISBN 978-5-91646-332-3

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ КУРСА

Современное развитие техники характеризуется её усложнением, интенсификацией режимов работы (повышением рабочих скоростей, давлений, температур и др.), объединением отдельных машин и аппаратов в единые технологические линии, автоматизацией и т.д. Все это повышает вероятность возникновения различных сбоев в работе техники, её отказов, т.е. ухудшает стабильность, бесперебойность её работы, либо повышает требования к указанной стабильности работы, безотказности техники.

Свойство техники (например, машин и аппаратов) – её надежность, отражает способность техники работать стабильно, безотказно.

На производстве обеспечение надежной, безотказной работы установленной техники является главной задачей таких эксплуатационных служб предприятий, как службы главного механика, главного энергетика, контрольно-измерительных приборов и автоматики.

В отличие от этого на предприятиях целлюлозно-бумажной и химической промышленности в целом службы главного технолога, используя надежно работающую технику (например, установленное оборудование – машины, аппараты), прежде всего, отвечают за качество выпускаемой продукции и производительность выработки.

Поэтому положения науки о надежности техники отвечают запросам инженеров-механиков-эксплуатационников на этих предприятиях. Однако такие положения активно используются и при создании новой техники инженерами-конструкторами и проектировщиками (но здесь обеспечение высокой надежности техники – лишь одна из многих задач, стоящих перед разработчиками промышленного оборудования).

1.1. Надежность как свойство техники

Надежность – это комплексное, сложное свойство техники, т.е. надежная техника должна быть:

1) безотказной;
2) достаточно долговечной;
3) ремонтопригодной (допускать быстрое и нетрудоемкое устранение отказов и их последствий);
4) надежность техники должна сохраняться не только при работе, но также при хранении, транспортировке, дежурстве в качестве резерва и др., т.е. важно свойство «сохраняемость надежности техники». Дополнительно к этому, согласно [1], надежная техника может ещё обладать вспомогательными свойствами.

Представления о надежности техники развивались постепенно. Первоначально (в начале развития науки о надежности) считалось, что надежность и безотказность – это одно и то же. Соответственно, при обеспечении надежности заботились лишь о безотказности.

Затем при этом стали заботиться и о достаточной долговечности техники (т.е. расширили представления о надежности, включив в них и долговечность). На сегодня при обеспечении надежности заботятся еще и о ремонтопригодности техники и о сохраняемости её надежности.

Согласно ГОСТ надежность считается комплексным свойством техники, являющимся каждый раз тем или иным сочетанием простых свойств надежности.

Практически это выражается в том, что полная характеристика надежности какого-нибудь конкретного технического объекта (например, машины) дается в виде комплекса показателей надежности, каждый из которых чаще характеризует какое-то одно простое свойство надежности (но иногда одновременно несколько простых свойств).

1.2. Актуальность проблемы надежности

1. Недостаточная надежность техники прежде всего ведет к большим затратам на её ремонт.

Так, в 80-е гг. XX века в СССР в целом в сфере ремонта было занято ~ 6 млн. человек.

Здесь использовалось ~ 25 % всего станочного парка страны (прежде всего, на изготовление используемых при ремонте запчастей), ~ 10 % ежегодного выпуска черных металлов (стали, чугуна) и т.д.

Даже небольшое повышение надежности какого-нибудь широко используемого вида оборудования (например, электродвигателей, насосов и др.) может дать значительный экономический эффект в масштабах данной отрасли и страны в целом.

2. Отказы с тяжелыми последствиями (аварии) часто приводят к полной утрате техники и даже к человеческим жертвам (например, в авиации и в целом на транспорте).

Дополнительно в целлюлозно-бумажной и химической промышленности в целом актуальность обеспечения надежности оборудования вызвана следующим:

3. Наличием развитых технологических линий.

Здесь отказ одного элемента линии (машины, аппарата и даже какого-то их узла) может остановить линию в целом, поэтому внимание к обеспечению надежности каждого элемента линии должно быть повышено по сравнению с отдельной самостоятельной работой этого элемента (машины, аппарата).

Надежность техники в ходе эксплуатации снижается из-за её старения (вследствие износа и др.), поэтому в ходе эксплуатации внимание к обеспечению надежности оборудования должно повышаться.

1.3. Развитие науки о надежности техники

Начало широких исследований по надежности техники относится к периоду конца Второй мировой войны, когда выявилась низкая надежность ряда новых видов оружия (например, ракетное оружие в Германии, радары в США, Англии).

Самое начало работ по надежности было связано с обеспечением надежности подшипников качения. Затем длительное время положения науки о надежности отрабатывались применительно к радио- и электронной технике.

Этапы развития науки о надежности

Этап 1. Первоначально отказы техники воспринимались как неизбежные случайные события. Соответственно, экспериментально изучались, например, распределения отказов во времени в группах одинаковых изделий (невосстанавливаемых или восстанавливаемых, например, подшипников качения и др.). При этом часто выявлялось, что в группах невосстанавливаемых изделий распределения сроков службы до отказа **T**, как случайной величины, подчинялись нормальному закону распределения (то есть в группе одинаковых изделий имелся какой-то средний срок службы до отказа $\mathbf{T_{ср}}$ и некоторое рассеяние сроков службы вокруг $\mathbf{T_{ср}}$, примерно симметричное в обе стороны). Из теории вероятности известно, что особенности нормального распределения хорошо видны по виду функции плотности вероятности **f** случайной величины **T**, когда **f** имеет вид функции Гаусса (см. рис. 1.1).

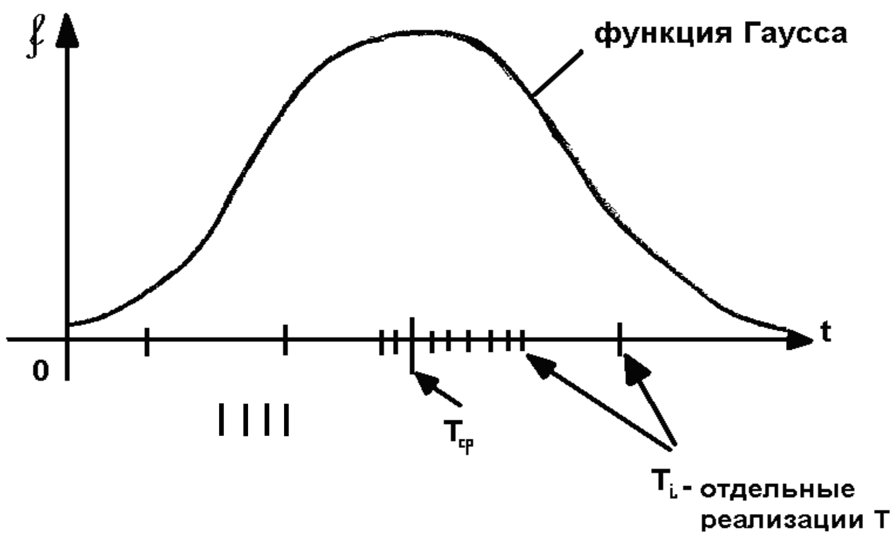

Рис. 1.1. Функция плотности вероятности при нормальном распределении случайной величины $T_{ср}$ – срок службы до отказа

В теории надежности функция **f(t)** часто называется функцией плотности расположения реализаций случайной величины **T** в испытаниях на оси времени. **t.** В испытаниях на надежность встречались и другие законы распределения **T**.

Если экспериментально были изучены особенности надежности элементов каких-либо сложных технических систем, то затем по этим данным математически оценивалась надежность таких систем в целом.

В этот же период определялись и уточнялись основные термины и показатели надежности. Так, первые стандарты по надежности техники, связанные с этим, были изданы в США в 1952 г.

Необходимость стандартизации основных понятий и показателей надежности во многом была вызвана запросами юридической практики по взаимоотношениям промышленных предприятий.

Указанный период продолжался примерно с начала XX в. по 1955 г.

Этап 2. Затем большое внимание стало уделяться изучению причин отказов техники и возможностям предотвращения отказов.

В связи с этим усилились исследования таких причин отказов, как износ, усталостные явления, коррозия и др., и возможностей их предотвращения (замедления). Соответственно, многие отказы перестали восприниматься как неизбежные случайные события.

В СССР в этот период по мере расширения применения методов теории надежности во многих отраслях народного хозяйства также начали издаваться стандарты по надежности.

Данный период имел место в 1955 – 1980 гг.

Этап 3. Указанный этап продолжается с 1980 г. по настоящее время.

Здесь на основании накопленного опыта разрабатываются конкретные рекомендации по обеспечению и повышению надежности техники. При теоретическом описании закономерностей надежности сейчас нередко сочетаются чисто вероятностный и детерминистский подходы.

В настоящее время наиболее общие практические рекомендации по обеспечению надежности техники следующие.

При создании новой техники рекомендуется:

1. Предварительное изучение фактической надежности в работе образцов техники, ближайших к разрабатываемой (т.е. рекомендуется изучение фактической надежности ближайшего прототипа).

2. Выявление «слабых» мест прототипа с точки зрения надежности, их улучшение вплоть до устранения.

3. При разработке принципиально новой техники (например, новых конструкций машин) рекомендуется предварительное экспериментальное и теоретическое изучение их работы (например, на опытных образцах, на опережающих узлах) с обеспечением требуемой надежности.

При эксплуатации техники (например, промышленного оборудования) рекомендуется:

1. Периодический контроль технического состояния оборудования при ревизиях, а также непрерывный косвенный контроль состояния средствами технической диагностики (а также и органолептически, т.е. с использованием органов чувств человека), например, по изменению параметров вибрационного, теплового, акустического режимов работы оборудования.

2. По данным п. 1 должна производиться своевременная замена (т.е. не дожидаясь отказов) изношенных деталей и узлов оборудования (машин и аппаратов) на запасные (новые или восстановленные) и др.

3. При ремонте изношенных и отказавших машин и аппаратов рекомендуется обеспечивать восстановление их надежности и в целом качества по возможности до исходного (проектного) уровня и выше.

1.4. Основные разделы науки о надежности

1. Математический аппарат надежности.
2. Изучение «физики отказов» техники.
3. Прикладные методы расчета надежности конкретных видов техники.
4. Разработка методов и средств контроля надежности.
5. Теория восстановления утраченной надежности (теория ремонта).
6. Экономика надежности (экономические критерии обычно являются основными при решении конкретных задач надежности в народном хозяйстве).

Данный предмет носит характер введения в проблему надежности.

В нем будут изучены следующие основные вопросы:

- основы математического аппарата надежности;
- ряд основных понятий и показателей надежности.

Изучение данного предмета позволит также воспринимать с позиций надежности материал ряда других предметов, изучаемых в технических вузах, таких как сопротивление материалов, материаловедение, теория механизмов и машин, детали машин, машины и аппараты ЦБП и химической промышленности.

2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ НАДЕЖНОСТИ

В науке о надежности в основном имеют дело с характеристиками техники, отличающимися большим разбросом даже в постоянных условиях работы. Это, например, сроки службы технических объектов (изделий), их наработки на отказ (или до отказа для невосстанавливаемых изделий), ресурсы изделий и др.

Наработка – это объем работы изделия (например, машины), выраженный в единицах времени (тогда это чистое время работы за какой-то срок службы), либо в пройденном километраже (для транспортных машин), в единицах выпущенной продукции (для технологического оборудования, то есть выпускающего какую-либо продукцию) и т.д.

Например, большим разбросом отличаются ресурсы одинаковых подшипников качения.

Ресурс – это суммарная наработка изделия с момента ввода в эксплуатацию (или после капитального ремонта) и до наступления предельного состояния изделия.

Предельное состояние изделия – это такое, при котором его дальнейшая эксплуатация невозможна или нецелесообразна (например, из-за появления неустранимой угрозы безопасности рабочих; недопустимого и неустранимого снижения качества работы изделия, например, у сильно изношенного токарного станка и др.).

По достижении предельного состояния техника подлежит списанию или капитальному ремонту. Признаки (критерии) предельного состояния указываются при разработке изделия в проектной документации на него.

По указанным причинам в науке о надежности работают со случайными величинами, то есть используют методы теории вероятности и математической статистики.

2.1. Случайные величины

Любая случайная величина X характеризуется:

1) диапазоном её значений $[a, b]$;

2) функциями распределения F(x) и f(x) в этом диапазоне.

Функции распределения случайных величин

$F(x)$ – *функция распределения вероятностей значений случайной величины* X.

При каждом x: $F(x) = B_{ер}(X < x) = P(X < x)$.

С точки зрения статистического определения вероятности при достаточно большом числе реализаций X в испытаниях

$$P(X<x) \cong \omega(X<x),$$

где $\omega(X<x)$ - доля тех реализаций случайной величины X в данных испытаниях, в которых X была меньше данного x. Например, если в данных испытаниях X была меньше x в 70 % реализаций, то $\omega(X<x) = 0{,}7$.

При увеличении количества испытаний N величина ω уточняется, при этом она как к пределу стремится к точному значению вероятности $P(X<x)$, т.е.

$$\omega(X<x) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} P(X<x)$$

или, короче,

$$\omega(x) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} P(x).$$

Вид функции F(x) представлен на рис. 2.1.

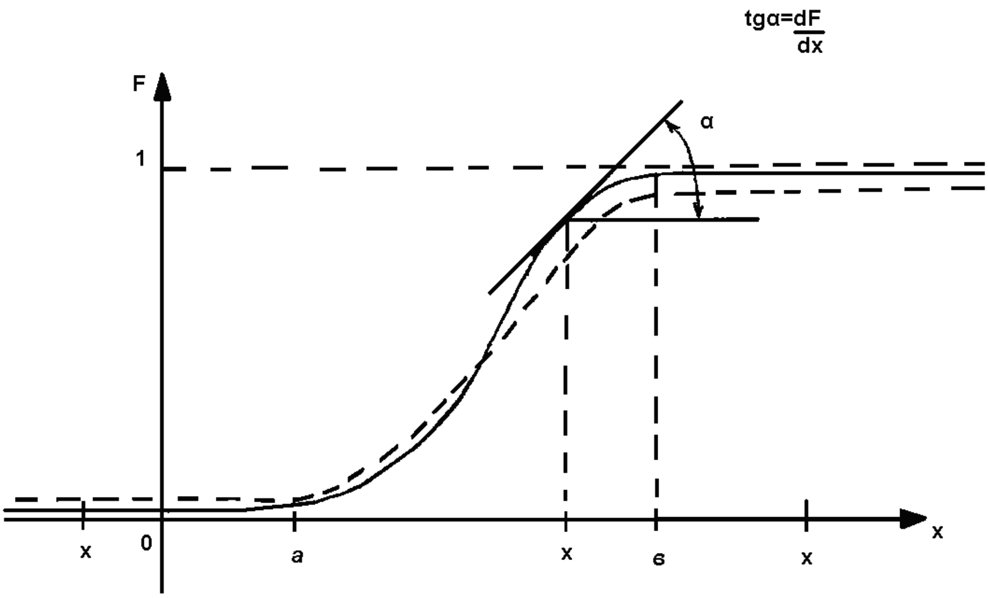

Рис. 2.1. Вид функции распределения вероятности F(x) случайной величины X

При рассмотрении значений F по участкам изменения аргумента x видим, что при:

1) $x<a \quad F(x)=0$, т.к. число реализаций X, в которых $X<x$, равно 0 (все реализации X находятся в диапазоне её значений [a,b]);

2) $x>b \quad F(x)=1$ (т.к. здесь во всех реализациях $X<x$);

3) $a<x<b \quad 0<F(x)<1$ (при x, находящемся в интервале [a,b], доля реализаций X, в которых $X<x$, нарастает с увеличением x по какому-то закону).

Видим, что функция $F(x)$ (строго по её определению) – составная, что часто неудобно при использовании F.

Поэтому в теории вероятности её обычно приближенно заменяют какой-нибудь единой формулой по всей оси x (см. на рис. 2.1. штриховую линию).

$f(x)$ - *функция плотности вероятности случайной величины* X.

В теории надежности её также называют функцией плотности расположения реализаций X на оси x.

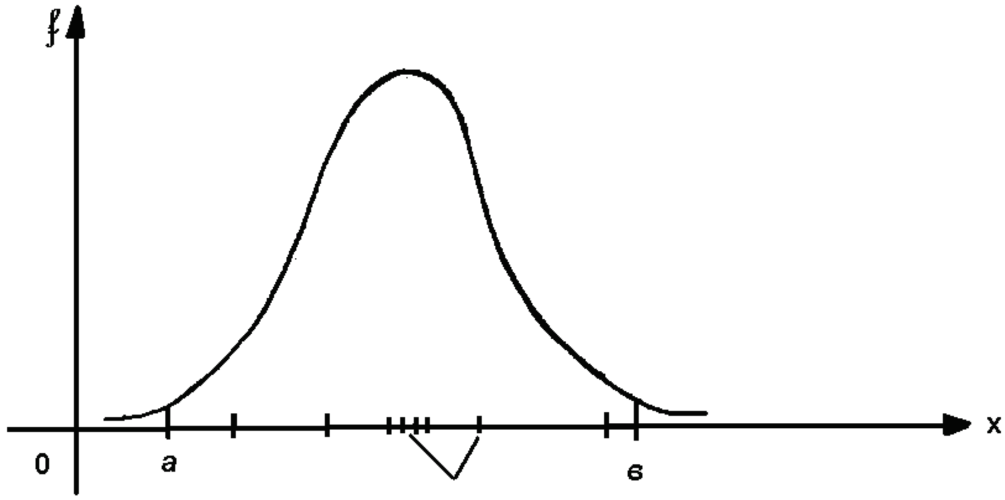

Рис. 2.2. Вид функции плотности вероятности f(x) случайной величины X

Там, где на оси x реализации X в испытаниях располагаются плотнее, там значения функции f выше.

Вид функции $f(x)$

По определению при каждом значении аргумента x

$$f(x) = \frac{dF}{dx} = F_x'.$$

Пользуясь этой зависимостью для приведенного выше графика функции $F(x)$ (рис. 2.1), покажем соответствующий график функции $f(x)$ (рис. 2.3). Так как производная $\frac{dF}{dx}$ в точке x равна тангенсу угла наклона касательной к графику F в этой точке, то, рассматривая указанный график $F(x)$ по участкам, видим:

1) при $x < a$ касательная к участку графика $F(x) = 0$ составляет с осью x угол $\alpha = 0$, поэтому $tg\alpha = \frac{dF}{dx} = 0$, отсюда на этом участке $f(x) = 0$;

2) при $x > b$ касательная к участку графика $F(x)=1$ тоже составляет с осью x угол $\alpha = 0$, поэтому и здесь $f(x)=0$;

3) при $a < x < b$ угол наклона α касательной к графику $F(x)$ сначала возрастает (а вместе с ним возрастает и $tg\alpha = \frac{dF}{dx}$), затем он убывает (также убывает и $tg\alpha = \frac{dF}{dt}$).

Отсюда график изменения функции $f(x)$, соответствующий графику $F(x)$, имеет вид (рис. 2.3):

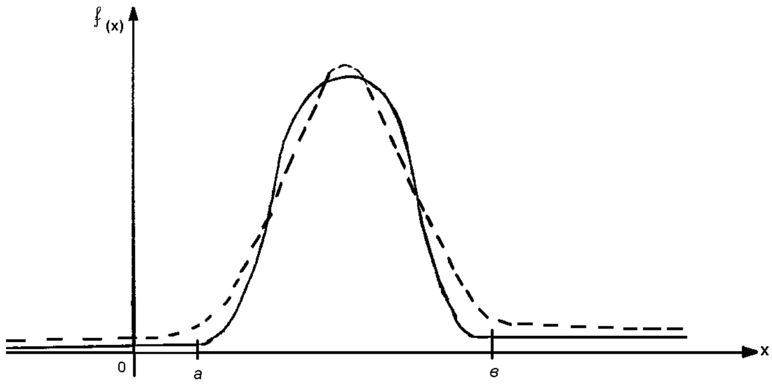

Рис. 2.3. Вид функции плотности вероятности f(x), соответствующий функции на рис.2.2

Видим, что функция $f(x)$ строго по определению тоже составная, поэтому её тоже обычно приближенно заменяют единой формулой по всей оси x (см. приближенный график, показанный штриховой линией).

Показанные графики функций распределения $F(x)$ и $f(x)$ соответствуют нормальному закону распределения случайных величин, широко распространенному на практике.

Покажем далее, что функция $f(x)$ действительно зависит от плотности расположения реализаций случайной величины X на числовой оси x.

Для этого учтем сначала, что по определению $f(x)=\frac{dF}{dx}$, отсюда $F(x)=\int f(x)dx+C$, где C - постоянная интегрирования.

В нашем случае при $x \to -\infty$ $F(x) \to 0$.

В теории вероятности показано, что при этом для $F(x)$ справедливо выражение:

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx = P(X<x) \text{ (см. рис. 2.4).}$$

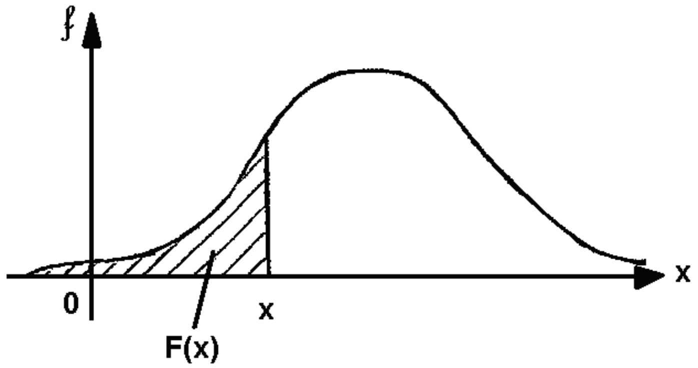

Рис. 2.4. Значения функции F(x) в соответствии с формулой (*)

Рассмотрим теперь интеграл $\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx$ (см. рис. 2.5).

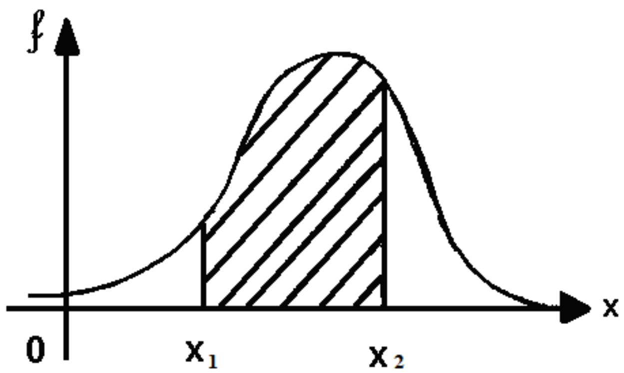

Рис. 2.5. Интеграл $\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$

Из теории вероятности известно, что этот интеграл равен вероятности попадания реализаций X в интервал $[x_1, x_2]$.

С другой стороны, имеем, что этот определенный интеграл равен разности значений первообразной функции F по концам участка интегрирования и тогда:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = F(x_2) - F(x_1) \cong \omega(x_2) - \omega(x_1) = \omega[x_1, x_2],$$

где $\omega[x_1, x_2]$ – относительная доля реализаций X, попадающих при испытаниях в интервал $[x_1, x_2]$.

Для $\omega[x_1, x_2]$ можем далее записать:

$$\omega[x_1, x_2] = \frac{n[x_1, x_2]}{N} \cong P[x_1, x_2]$$ (при достаточно большом N),

где $n[x_1, x_2]$ – число реализаций X, попадающих в $[x_1, x_2]$,

N - общее число реализаций X в испытаниях,

$P[x_1, x_2]$ – вероятность попадания X в $[x_1, x_2]$.

Рассмотрим теперь малый интервал изменения аргумента x: $[x, x + \Delta x]$. Соответствующий этому случаю график принимает вид (см. рис. 2.6).

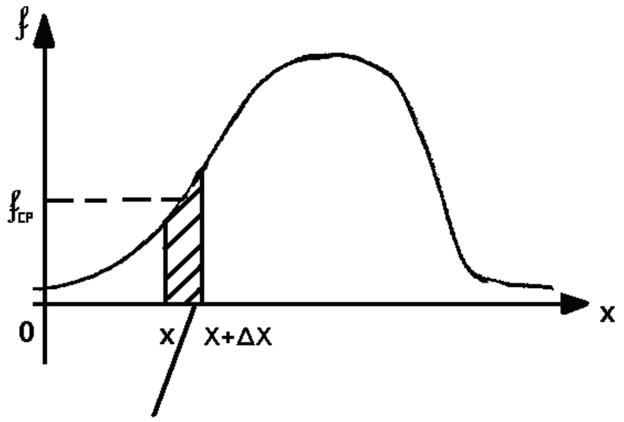

Рис. 2.6. Интеграл $\int_{x_1}^{x+\Delta x} f(x)dx$

Тогда для указанного выше определенного интеграла можем записать:

$$\int_{x}^{x+\Delta x} f(x)dx = f_{cp}(\Delta x)\Delta x \cong$$
$$\cong f(x)\Delta x = P(\Delta x).$$

Отсюда $$f(x) \cong \frac{P(\Delta x)}{\Delta x}. \qquad (2.1)$$

Если разделить весь диапазон $[a, b]$ значений X на большое количество малых одинаковых отрезков Δx, то из равенства (2.1) видно, что значения $f(x)$ на границах участков зависят только от вероятностей попадания случайной величины X на соответствующие участки (например, справа от каждой границы). Так как $P(\Delta x) \cong \omega(\Delta x) = \frac{n[x, x+\Delta x]}{N}$, то

$$f(x) \cong \frac{n(\Delta x)}{N\Delta x} \tag{2.2}$$

(это равенство тем точнее, чем меньше Δx и больше N).

То есть видим по (2.2), что значения функции $f(x)$ действительно зависят только от $n(\Delta x)$ и, тем самым, от плотности расположения реализаций случайной величины X по малым участкам Δx.

Например, при нормальном законе распределения значений случайной величины X её реализации, полученные по данным испытаний и нанесенные на ось x, наиболее плотно располагаются в районе нахождения максимума функции $f(x)$. По мере уменьшения f в обе стороны (вправо и влево от f_{max}) плотность расположения этих реализаций также уменьшается (см. рис. 2.7) примерно симметрично в обе стороны в соответствии с видом графика функции Гаусса.

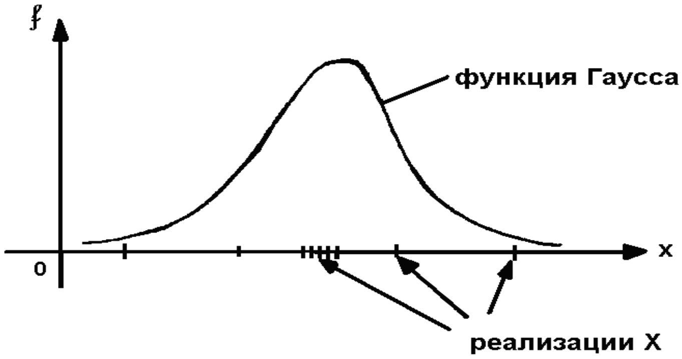

Рис. 2.7. Соответствие вида функции Гаусса для f(x) расположению реализаций случайной величины X на оси её значений x

Случайная величина X считается полностью заданной, если известны обе её функции распределения F и f.

Однако часто для решения задач не нужно полного задания распределения случайной величины, достаточно знать лишь некоторые параметры, характеризующие это распределение.

Такие параметры делятся на 2 группы.

1. Это параметры, характеризующие положение на оси x центра (центров) группирования реализаций случайной величины X.

2. Параметры, характеризующие степень рассеяния реализаций X вокруг указанного центра (центров) группирования.

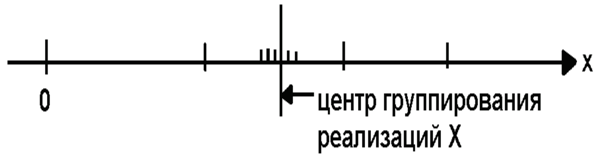

Рис. 2.8. Расположение реализаций случайной величины X на оси её значений x

К параметрам первой группы относятся:

1. Математическое ожидание m_x случайной величины X (в задачах надежности основной аргумент – время t, поэтому математическое ожидание сроков службы обозначается m_t).

2. Мода m_0 случайной величины.

3. Медиана m_e случайной величины.

Параметры второй группы следующие:

1. Дисперсия D_x случайной величины X.

2. Среднеквадратическое отклонение σ (или s) случайной величины.

3. Коэффициент вариации V случайной величины.

Напомним определения указанных параметров распределений случайных величин.

Параметры первой группы.

1. Математическое ожидание случайной величины – это обобщение понятия среднего арифметического всех реализаций случайной величины X в данных испытаниях.

Статистическая оценка m_x по результатам испытаний, обозначаемая $\overline{m}_x$, так и определяется как среднее арифметическое всех реализаций X в данных испытаниях:

$$\overline{m}_x = \frac{\sum x_i}{N},$$

где x_i - значения реализаций X,

N - количество испытаний (количество реализаций).

При увеличении N значение $\overline{m}_x$ уточняется и как к пределу стремится к точному значению m_x:

$$\overline{m}_x \xrightarrow[N \to \infty]{} m_x.$$

В теории вероятности приведены формулы для m_x.

Так, для дискретных случайных величин

$$m_x = \sum \left(p_i X_i \right),$$

где p_i - вероятности отдельных X_i.

Для непрерывных случайных величин

$$m_x = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

Здесь $f(x)dx = P(dx)$, отсюда видим, что вторая формула есть обобщение первой формулы.

В данном курсе встречаются в основном лишь непрерывные случайные величины, хотя в целом в науке о надежности иногда используются и дискретные случайные величины.

2. Мода m_0 случайной величины X - это значение X, соответствующее максимуму функции f.

Вероятность попадания реализаций X в малую окрестность моды m_0 больше, чем для любого другого значения X (см. рис. 2.9), то есть m_0 - это как бы самое “модное” значение X.

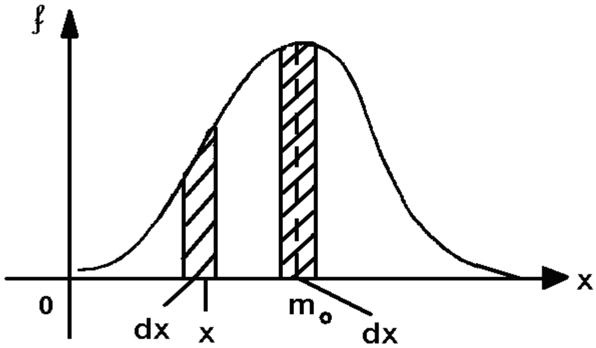

Рис. 2.9. Положение моды m_0 случайной величины X на оси её значений x

3. Медиана m_e случайной величины X - это значение X, соответствующее равенству

$$F(m_e) = 0{,}5 \text{ (см рис. 2.10)} \quad (2.3)$$

Согласно равенству (2.3) и по определению F, в ~50 % всех реализаций X по величине меньше m_e, соответственно, другие 50 % реализаций X по величине больше m_e, т.е. медиана делит все реализации X_i, нанесенные на ось x, на две равные части по количеству.

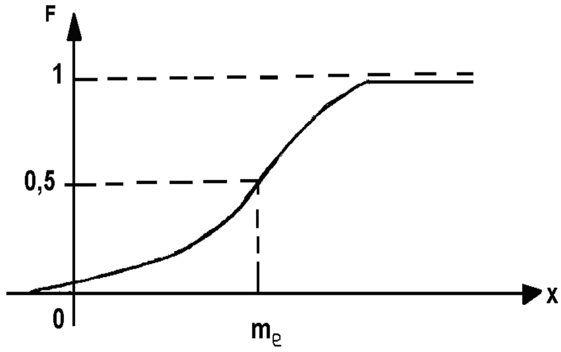

Рис. 2.10. Положение медианы m_e случайной величины X на оси её значений x

Параметры второй группы.

1. Дисперсия D_x случайной величины X – это математическое ожидание квадратов отклонений реализаций X от математического ожидания самой случайной величины X (т.е. от m_x). Статистическая оценка дисперсии по данным испытаний, обозначаемая $\overline{D}_x$, определяется как среднее арифметическое всех квадратов отклонений реализаций X от статистической оценки матожидания $\overline{m}_x$ случайной величины X в данных испытаниях:

$$\overline{D}_x = \frac{\sum\left(x_i - \overline{m}_x\right)^2}{N-1}.$$

При увеличении количества испытаний величина $\overline{D_x}$ уточняется, при этом она как к пределу стремится к точному значению дисперсии D_x:

$$\overline{D}_x \xrightarrow[N\to\infty]{} D_x.$$

В теории вероятности получены формулы для D_x. В ней также показано, что дисперсия D_x – это лучшая мера рассеяния X вокруг ее математического ожидания m_x.

Однако у дисперсии есть тот недостаток, что она имеет размерность квадрата случайной величины (а не самой случайной величины). Поэтому часто используется и другая мера рассеяния X вокруг m_x – среднеквадратическое отклонение σ (или S).

2. Среднеквадратическое отклонение:

$$\sigma = \sqrt{D_x}\,(= S)$$

имеет размерность самой случайной величины X.

3. Коэффициент вариации V характеризует относительное рассеяние X вокруг своего математического ожидания m_x:

$$V = \frac{\sigma}{m_x}\left(= \frac{S}{m_x}\right).$$

3. НАДЕЖНОСТЬ НЕВОССТАНАВЛИВАЕМЫХ ИЗДЕЛИЙ

Изделия (например, машины, их узлы, детали) – это технические объекты, имеющие собственные характеристики надежности.

Восстанавливаемые изделия – это такие, работоспособность которых после отказов может быть восстановлена в данных условиях (обычно путем ремонта).

В противном случае это изделия, невосстанавливаемые в данных условиях.

Ремонтируемые изделия – это такие, работоспособность которых после отказов в принципе может быть восстановлена путем ремонта.

Иначе (в противном случае) это изделия неремонтируемые.

Понятия восстанавливаемые и ремонтируемые изделия близки, но часто не совпадают.

Например, подшипники качения на предприятиях ЦБП – это изделия невосстанавливаемые из-за отсутствия необходимого оборудования для их ремонта на этих предприятиях.

В принципе же подшипники качения – изделия ремонтируемые. После многих отказов они могут быть отремонтированы, но на предприятиях шарикоподшипниковой промышленности.

3.1. Основная расчетная ситуация надежности для невосстанавливаемых изделий

Имеется N одинаковых изделий (например, подшипников). В момент времени t=0 начинается их работа (или испытания на надежность) в одинаковых условиях. В ходе испытаний фиксируются моменты времени отказов $t_{\text{отк}}$ и число отказавших изделий к каждому $t_{\text{отк}}$. Ремонт отказавших изделий не производится.

Таким образом, по данным, например, испытаний в любой момент времени t известно количество отказавших изделий $n(t)$ и количество изделий, оставшихся работоспособными $N_p(t)$. Поскольку ремонт изделий после их отказов не производится, то в любой момент времени имеем:

$$n\left(t\right)+N_p\left(t\right)=N.$$

Отношение $\dfrac{n(t)}{N}=\mathrm{Q}*$ называется статистической оценкой вероятности отказа к моменту времени t (или на интервале времени $[0,t]$). При увеличении числа испытуемых изделий N величина $Q^*(t)$ уточняется, при этом она как к пределу стремится к точному значению $Q(t)$, т.е. к точной вероятности отказа на интервале времени $[0,t]$:

$$\mathrm{Q}^*(t)\xrightarrow[N\to\infty]{}\mathrm{Q}(t).$$

Аналогично отношение $\dfrac{N_p(t)}{N}=P^*(t)$ называется статистической оценкой вероятности безотказной работы на интервале $[0,t]$. При увеличении N $P^*(t)$ также уточняется и стремится к $P(t)$:

$$P^*(t)\xrightarrow[N\to\infty]{}P(t),$$

где $P(t)$ – точная вероятность безотказной работы на $[0,t]$.

В данной ситуации отказ и безотказная работа – это два случайных события, которые вместе составляют полную группу случайных событий, так как других событий здесь не происходит.

Знаем из теории вероятности, что сумма вероятностей событий (несовместных), вместе составляющих полную группу, равна 1, так как это есть вероятность достоверного события.

Поэтому в нашем случае можем записать:

$$\forall t: \mathrm{Q}(t)+P(t)=1.$$

Это же равенство в данном случае справедливо и для статистических оценок этих вероятностей.

Действительно,

$$\mathrm{Q}^*(t)+P^*(t)=\frac{n(t)}{N}+\frac{N_p(t)}{N}=\frac{n(t)+N_p(t)}{N}=\frac{N}{N}=1.$$

Граничные условия надежности

В начале испытаний (работы), т.е. при t=0, n=0 (обычно это так), соответственно:

$$\mathrm{Q}(0)=\frac{n}{N}=\frac{0}{N}=0.$$

В этот же момент времени N_p=N, и поэтому $P(0)=\dfrac{N}{N}=1$.

В конце испытаний (работы), т.е. при $t=\infty$ (или при $t\to\infty$) n=N (так как рано или поздно все изделия откажут), следовательно $\mathrm{Q}(\infty)=\dfrac{N}{N}=1$. Соответственно, $N_p(\infty)=0$ и поэтому $P(\infty)=0$.

Отметим, что фактически вероятности отказа и безотказной работы в надежности берутся равными «точным» долям изделий отказавших и изделий, оставшихся работоспособными при данном t.

Из изложенного видим, что Q в ходе испытаний (работы) возрастает от 0 до 1 (по какому-то закону), а величина P, наоборот, уменьшается по соответствующему закону от 1 до 0 (см. рис. 3.1).

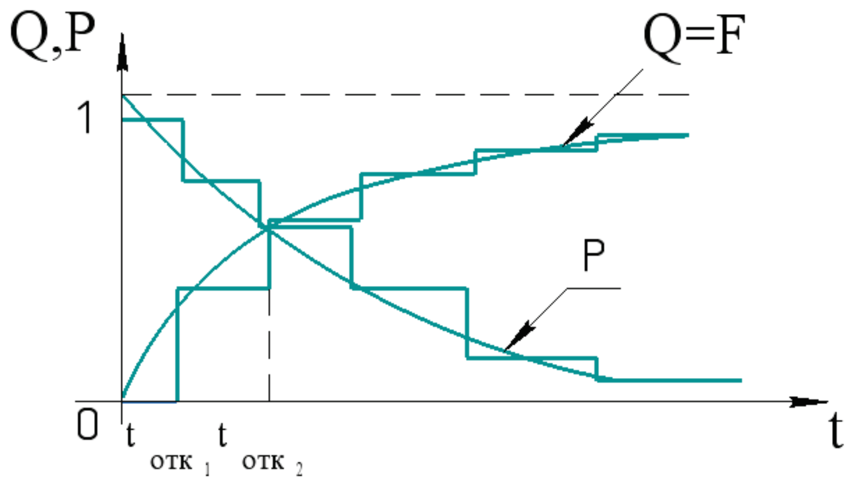

Рис. 3.1. Зависимости P(t), Q(t), F(t)

Изменения величин Q и P фактически происходят в моменты отказов изделий ($t_{отк1}$, $t_{отк2}$ и т.д.), поэтому, строго говоря, Q и P меняются ступенчато. Однако этим часто пренебрегают, и графики величин Q и P представляют в виде плавно меняющихся кривых.

В ходе испытаний (работы) фиксируются не только количества отказавших изделий $n(t)$, но также и сроки службы изделий до отказов.

Определим функции распределения случайной величины T.

Для этого учтем сначала, что вероятность отказа Q даёт долю изделий, отказавших к моменту времени t. Тем самым величина Q даёт и долю тех сроков службы этих изделий, которые были меньше этого t.

То есть $Q(t)$ = Вер ($T < t$), а это по определению совпадает с функцией распределения $F(t)$ случайной величины T – срок службы до отказа.

Таким образом, $Q(t)$ = Вер ($T < t$) = $F(t)$ для T.

Иначе говоря, найдя $Q(t)$ по данным испытаний, тем самым находим и функцию $F(t)$ для случайной величины T (см. рис. 3.1). Другая функция распределения случайной величины T – это функция $f(t)$.

Величина $f(t)$ по определению и по выше найденному равна:

$$f(t) = \frac{dF}{dt} = \frac{dQ}{dt} \cong \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\Delta n}{N\Delta t},$$

(т.к. $Q = \dfrac{n(t)}{N}$, то $\Delta Q = \dfrac{\Delta n}{N}$).

Таким образом,

$$f \cong f^* = \frac{\Delta n}{N\Delta t}\left[\frac{отк}{час}\right], \tag{3.1}$$

где $\dfrac{\Delta n}{\Delta t}\left[\dfrac{отк}{час}\right]$ - это частота отказов в данной группе изделий в момент времени t.

Поскольку $N = \text{const}$, то f пропорциональна частоте отказов $\frac{\Delta n}{\Delta t}$, и поэтому она сама часто называется тоже частотой отказов (но в расчете на одно исходное испытуемое изделие).

По равенству (3.1) величина f может подсчитываться, используя данные статистики отказов при испытаниях (работе).

Кроме обычных функций распределения F и f случайной величины T – срок службы до отказа, в науке о надежности широко используется еще характеристика $\lambda(t)$ – интенсивность отказов.

Для определения величины $\lambda(t)$ частота отказов в группе изделий при данном t (т.е. $\frac{\Delta n}{\Delta t}$) делится на величину $N_p(t)$, т.е.

$$\lambda(t) \cong \lambda^*(t) = \frac{\Delta n}{N_p(t)\Delta t}\left[\frac{отк}{ч}\right].$$

Сравнивая выражения для f и λ, видим, что по смыслу они близки. Разница между ними в том, что f дает частоту отказов при данном t в расчете на одно исходное изделие, а λ - в расчете на одно работоспособное изделие в данный момент.

Так как $N_p \le N$, то $\lambda(t) \ge f(t)$.

3.2. Основное уравнение надежности невосстанавливаемых изделий

Для вывода этого уравнения запишем выражение для λ^*:

$$\lambda^* = \frac{\Delta n}{N_p \Delta t}. \tag{3.2}$$

Далее умножим числитель и знаменатель (3.2) на N, от чего равенство (3.2) не нарушится:

$$\lambda^* = \frac{\Delta n N}{N_p \Delta t N}.$$

Учитывая, что $\frac{\Delta n}{N\Delta t} = f^*$, а $\frac{N_p}{N} = P^*$, перепишем последнее равенство для λ^* в виде:

$$\lambda^* = \frac{f^*}{p^*}. \tag{3.3}$$

Статистические оценки величин, входящие в (3.3), уточняются с увеличением количества испытуемых изделий N и с уменьшением интервалов времени Δt. При этом они (эти статистические оценки) стремятся к точным значениям соответствующих величин:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda * \to \lambda \\ f * \to f \\ P * \to P \end{array}\right\} \quad \text{при } N\uparrow \text{ и } \Delta t \downarrow.$$

Поэтому равенство (3.3) для статистических оценок величин λ^*, f^* и P^* в пределе переходит в равенство для точных значений этих величин (λ, f и P):

$$\lambda = \frac{f}{p}. \tag{3.4}$$

В уравнение (3.4) входят три неизвестные функции, что обычно неудобно для использования. Для уменьшения количества неизвестных функций в (3.4) учтем, что

$$f = \frac{dF}{dt} = \frac{dQ}{dt} = -\frac{dP}{dt},$$

так как Q(t) + P(t) =1, и отсюда при дифференцировании последнего равенства получаем:

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{dP}{dt} = 0 \text{ и } \frac{dQ}{dt} = -\frac{dP}{dt}.$$

Подставив последнее равенство в (3.4), получим:

$$\lambda(t) = -\frac{dP}{Pdt}. \tag{3.5}$$

В уравнение (3.5) входят уже две неизвестные функции (λ и P).

Функция $\lambda(t)$ часто известна по данным эксплуатации (испытаний) (см. ниже). Поэтому (3.5) становится уравнением для одной неизвестной функции Р.

Это – дифференциальное уравнение 1-го порядка с разделяющимися переменными. Разделив переменные, можно записать:

$$\frac{dP}{P} = -\lambda(t)dt. \tag{3.6}$$

Уравнение (3.6) можно решать (т.е. искать $P(t)$) двумя путями:

1. Как обычно в курсе высшей математике, нужно взять неопределенные интегралы от обеих частей (3.6):

$$\int \frac{dP}{P} = -\int \lambda(t)dt + C.$$

Постоянная интегрирования C находится с использованием каких-либо начальных условий для P.

2. Второй путь решения эквивалентен первому.

От обеих частей (3.6) берутся определенные интегралы с переменными верхними пределами и с фиксированными нижними пределами, которые в обоих интегралах должны соответствовать друг другу. Из граничных условий надежности знаем (см. выше), что при t=0 P=1. Поэтому получим соотношение:

$$\int_1^P \frac{dP}{P} = -\int_0^t \lambda(t)\,dt.$$

Продолжим решение по второму пути. Возьмем левый интеграл в последнем равенстве:

$$\int_1^P \frac{dP}{P} = \ln P\Big|_1^P = \ln P - 0 = \ln P.$$

Получаем, что

$\ln P = -\int_0^t \lambda(t)dt$, или потенцируя, имеем:

$$P(t) = e^{-\int_0^t \lambda(t)dt}. \tag{3.7}$$

Равенство (3.7) представляет собой основное уравнение надежности для невосстанавливаемых изделий.

Оно дает зависимость вероятности безотказной работы P от времени через известную функцию $\lambda(t)$.

В частности, из уравнения (3.7), пользуясь равенством $P(t) \cong \frac{N_p(t)}{N}$, можно выразить $N_p(t)$:

$$N_p(t) \cong Ne^{-\int_0^t \lambda(t)dt}, \tag{3.8}$$

т.е. найти уменьшение количества работоспособных изделий $N_p(t)$ в ходе работы (испытаний) при известной функции $\lambda(t)$.

3.3. Интенсивность отказов при эксплуатации

Стадии эксплуатации техники с позиций надежности

По данным эксплуатации и испытаний на надежность в общем случае функция $\lambda(t)$ имеет вид, показанный на рис. 3.2.

График показывает, что по его виду весь период эксплуатации невосстанавливаемых изделий можно разделить на 3 стадии.

Рассмотрим эти стадии.

Стадия I называется стадией «приработки».

Здесь частота отказов новых изделий (например, машин и др.) повышена из-за наличия в них различных скрытых дефектов (например, литейных раковин в отливках, погрешностей механической обработки, сварки, сборки и т.д., просочившихся через контроль ОТК, ошибок конструкторов).

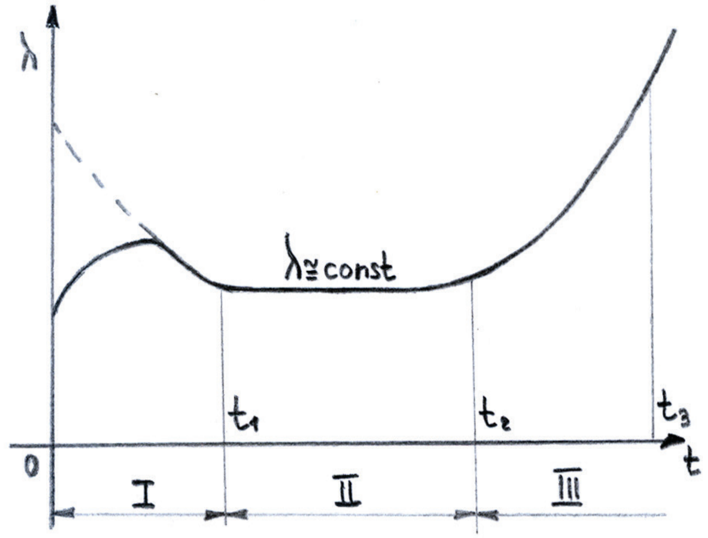

Рис. 3.2. Зависимость интенсивности отказов λ от времени эксплуатации (испытаний) t

На стадии I идут в основном внезапные отказы из-за случайных причин. Эта стадия отличается большой индивидуальностью по отказам и отсюда их плохой предсказуемостью.

После того, как проходят все отказы, характерные для стадии I (или после устранения их причин), наступает стадия II.

Стадия II – это стадия нормальной эксплуатации новой (исправной) техники.

На этой стадии новая техника (например, оборудование предприятий) отказывает в основном из-за случайно возникающих непроектных условий работы (из-за ошибок рабочих, колебаний качества сырья, скачков напряжения в сети и др. – в целом из-за того, что по указанным причинам техника подвергается перегрузкам – механическим, тепловым и др.).

Здесь отказы также идут в основном внезапные (по случайным причинам). Их частота не зависит от проработанного времени к моменту отказа.

Указанные случайные перегрузки, как показывает практика, в постоянных условиях эксплуатации возникают также с примерно постоянной частотой. Поэтому и частота отказов на этой стадии в расчете на одно работоспособное изделие в группе (т.е. интенсивность отказов λ) тоже примерно постоянна.

По мере эксплуатации из-за старения техники (износа, коррозии, развития усталостных явлений и др.) сопротивляемость ее случайным перегрузкам начинает снижаться, и поэтому частота отказов даже в постоянных условиях работы начинает расти. Начинается стадия III эксплуатации.

Стадия III – износовых (постепенных) отказов.

Предпосылки таких отказов развиваются постепенно (из-за процессов старения, т.е. износа в широком смысле слова), поэтому на данной стадии происходят в основном постепенные отказы (в отличие от предыдущих стадий). Для отдельных видов техники не все стадии эксплуатации имеют место, или отдельные стадии видоизменяются; так, например, у электронной техники до конца эксплуатации часто продолжается стадия II (стадия III отсутствует). При эксплуатации автомобильных шин, когда их износ сильно выражен с самого начала эксплуатации, наоборот, практически сразу после стадии I начинается стадия III (отсутствует стадия II).

Основное уравнение надежности применяется по отдельности к разным стадиям эксплуатации (в основном к стадиям II и III).

3.4. Надежность на основных стадиях эксплуатации техники

3.4.1. Надежность на стадии приработки

Как указано выше, стадия I отличается большой индивидуальностью и отсюда плохой предсказуемостью по отказам. Поэтому расчетный анализ и прогнозирование отказов на этой стадии на базе основного уравнения надежности практически не производятся.

Данные по надежности на стадии I обычно учитываются «задним числом» с использованием полученной при эксплуатации статистики отказов на этой стадии. Указанное использование данных по статистике отказов производится на основе положений, изложенных ниже.

Апостериорная вероятность безотказной работы

До сих пор говорили о вероятности безотказной работы на интервалах времени вида $[0,t]$, включающих момент времени t=0.

Часто нужно уметь оценить эту вероятность и на произвольных интервалах времени вида $[t_1, t_2]$ (см. рис. 3.3), где $t_1>0$ и $t_2>0$ ($t_2> t_1$).

Рис. 3.3. Интервал $[t_1, t_2]$ на оси времени t

Для этого учтем сначала, что случайное событие, заключающееся в безотказной работе на интервале времени $[0,t_2]$ произойдет лишь тогда, когда одновременно произойдут два других случайных события:

1) безотказная работа на $[0,t_1]$ и
2) такая же безотказная работа на $[t_1, t_2]$.

Из теории вероятности знаем, что такое исходное случайное событие на $[0,t_2]$ называется произведением случайных событий 1) и 2), и вероятность исходного события на $[0,t_2]$ равна произведению вероятностей событий 1) и 2) (когда события 1) и 2) независимы друг от друга).

То есть в нашем случае имеем:

Р $[0,t_2]$ = Р $[0,t_1]$ х Р $[t_1, t_2]$ (теорема произведения вероятностей событий для независимых друг от друга событий 1) и 2)).

Отсюда видим, что интересующая нас вероятность $P\,[t_1, t_2]$ равна:

$$P[t_1,t_2]=\frac{P[0,t_2]}{P[0,t_1]}. \tag{3.9}$$

Знаем далее, что по данным испытаний в основной расчетной ситуации надежности (см. выше) величины в правой части равенства (3.9) можно оценить так:

$$P[0,t_1]\cong\frac{N_p(t_1)}{N} \text{ и}$$

$$P[0,t_2]\cong\frac{N_p(t_2)}{N}.$$

Подставляя эти соотношения в равенство (3.9), получаем:

$$P[t_1,t_2]\cong\frac{N_p(t_2)N}{NN_P(t_1)}=\frac{N_P(t_2)}{N_p(t_1)},$$

где $N_P(t_1)$ и $N_P(t_2)$ – это количества остающихся работоспособных изделий в начале и конце интересующего нас интервала времени $[t_1, t_2]$.

Обобщая данное рассуждение, можно показать, что если интервал времени $[0,t_2]$ разделить на несколько подинтервалов Δt ($\Delta t_1, \Delta t_2$, ….. Δt_n), то вероятность $P[0,t_2]$ равна:

$$P[0,t_2]=P(\Delta t_1)P(\Delta t_2).....P(\Delta t_n)=\prod_{i=1}^{n}P(\Delta t_i).$$

Вернемся к случаю разделения интервала $[0,t_2]$ на 2 отрезка времени.

Вероятность безотказной работы на интервале времени $[t_1, t_2]$ можно оценить априорно (т.е. до начала наших испытаний) по данным других аналогичных испытаний с такими же изделиями. Но более точно эту вероятность можно оценить в ходе наших испытаний в момент времени t_1, когда уже известна величина $N_P(t_1)$ (величина $N_P(t_2)$ по-прежнему берется по данным других испытаний).

Определенная таким образом величина $P[t_1, t_2]$ называется апостериорной вероятностью безотказной работы (т.е. вероятностью, определенной после части наших испытаний).

Такой подход применим не только при определении апостериорной вероятности Р.

Например, рассмотрим еще раз график зависимости интенсивности отказов $\lambda(t)$ от времени работы t (рис. 3.4).

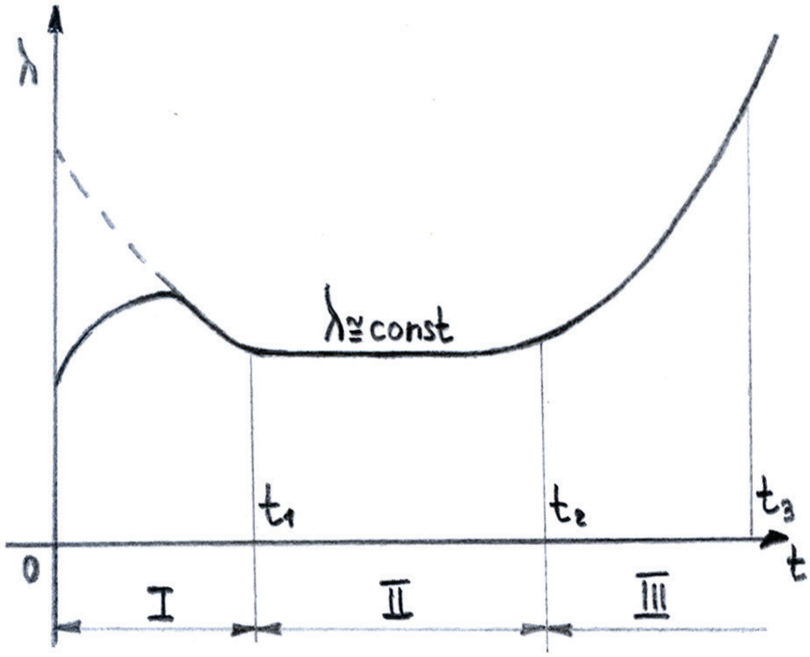

Рис. 3.4. Зависимость интенсивности отказов от времени

Здесь по вышесказанному

$$P[0,t_2] = P_I P_{II} \tag{3.10}$$

Знаем, что $P_1 \cong \dfrac{N_p(t_1)}{N}$.

Для P_{II} далее будет показано, что

$$P_{II} = e^{-\lambda(t_2 - t_1)}.$$

Поэтому, подставляя эти выражения в выражение (3.10), получаем:

$$P[0,t_2] \cong \frac{N_p(t_1)}{N} e^{-\lambda(t_2 - t_1)}.$$

Такое выражение позволяет оценить вклад в общую надежность надежностей на стадиях I и II (для стадии I это можно сделать, как обычно, задним числом по данным статистики отказов на этой стадии).

Аналогично

$$P[0,t_3] = P_I P_{II} P_{III}.$$

3.4.2. Надежность на стадии нормальной эксплуатации новой техники

Применим к стадии II основное уравнение надежности невосстанавливаемых изделий:

$$P(t) = e^{-\int_0^t \lambda(t)dt}. \tag{3.11}$$

Так как на этой стадии имеем $\lambda \cong$const (в постоянных условиях эксплуатации), то, подставляя это равенство в (3.11), получаем:

$$P(t) = e^{-\lambda\int_0^t dt} = e^{-\lambda t},$$

так как $\int_0^t 1dt = \mathrm{t} - 0 = \mathrm{t}$.

Окончательно здесь

$$P(t) = e^{-\lambda t}. \tag{3.12}$$

Покажем выражение (3.12) на рис. 3.5.

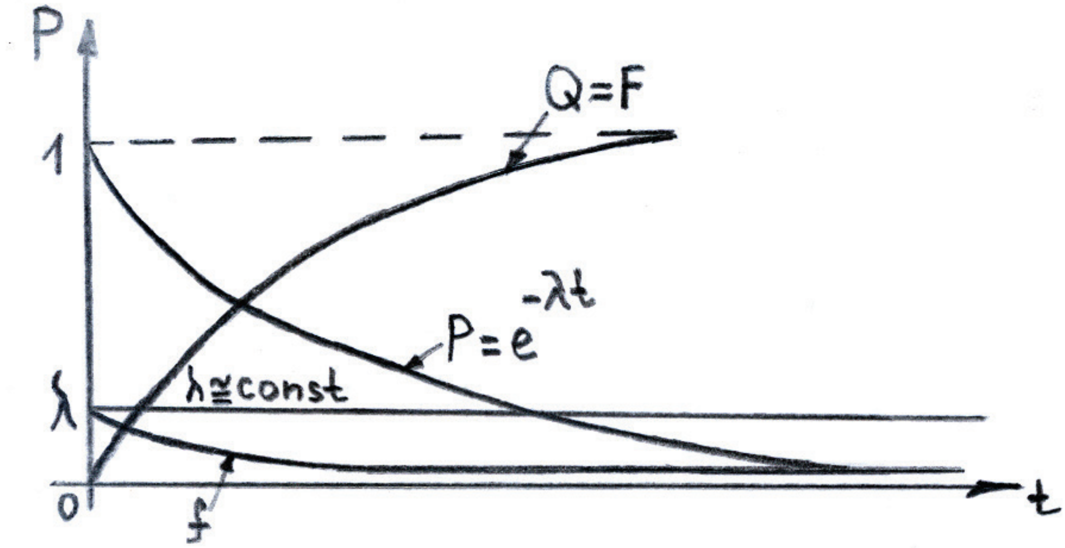

Рис. 3.5. Характеристики надёжности невосстанавливаемых изделий при экспоненциальном законе надёжности

Отсюда для стадии II эксплуатации техники:

$$\mathrm{Q}(t) = 1 - P(t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

У случайной величины T (срок службы до отказа) функции распределения F и f в данных условиях имеют вид:

$$F(t) = \mathrm{Q}(t) = 1 - e^{-\lambda t} \text{ и}$$

$$f(t) = \frac{dF}{dt} = \lambda e^{-\lambda t}.$$

Наконец, на стадии II $\lambda(t)\cong$const (см. графики функций на рис. 3.5).

Показанное на рис. 3.5 семейство функций характеризует надежность на стадии II.

Так как в данные функции входит функция экспонента ($e^x = e^{-\lambda t}$), то говорят, что на стадии II эксплуатации имеет место экспоненциальный закон надежности.

Его основным выражением является зависимость для вероятности безотказной работы (3.12).

Так как

$$P(t) \cong \frac{N_p(t)}{N},$$

то для $N_P(t)$ получаем:

$$N_P(t) \cong Ne^{-\lambda t}$$

- здесь $N_P(t)$ имеет целочисленные значения в моменты отказов изделий.

Функции F и f задают распределение случайной величины T – срок службы до отказа на стадии II.

Можно далее найти математическое ожидание T на данной стадии

$$m_t = T_{cp}$$

по известной зависимости из теории вероятности

$$m_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x \ f(x) dx.$$

В нашем случае аргументом является время t, поэтому запишем:

$$m_t = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} t\lambda e^{-\lambda t} = \int_{0}^{+\infty} t\lambda e^{-\lambda t} dt$$

(при $t<0$ $f(t)=0$, т.к. отказы начинаются при t=0).

Можно показать, что

$$\int_{0}^{+\infty} t\lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}.$$

Поэтому

$$m_t = \frac{1}{\lambda}.$$

С другой стороны, по данным испытаний статистическая оценка m_t, равная $\overline{m_t}$, определяется как среднее арифметическое T_{cp} всех зафиксированных сроков службы до отказа:

$$\overline{m_t} = \frac{\sum T_i}{N} = \overline{T_{cp}} \xrightarrow[N\to\infty]{} T_{cp} = m_t .$$

Величина $\overline{T}_{cp}$ стремится как к пределу к точному значению среднего срока службы T_{cp} на стадии II, которое по определению равно значению m_t математического ожидания T на стадии II.

Отсюда

$$T_{cp} = \frac{1}{\lambda}$$

и

$$\lambda = \frac{1}{T_{cp}} .$$

Поэтому, например, выражение (3.12) может быть записано в виде:

$$P(t) = e^{-t/Tcp} . \qquad (3.13)$$

Интенсивность отказов λ обычно малая величина. Это вызвано тем, что в науке о надежности сроки службы до отказа берутся обычно в часах (например, 1 год непрерывной работы в часах равен 24 х 365 = 8760 ч), поэтому λ имеет размерность $\frac{отк}{ч} = \frac{1}{ч}$.

Сроки службы техники обычно находятся в пределах от нескольких недель до нескольких десятков лет. В часах это составляет от нескольких 10^2 часов до нескольких 10^6 часов. У невосстанавливаемой техники, имеющей за это время всего один отказ, в расчете на один час получаем следующие доли отказов:

от $n \times 10^{-2} \frac{отк}{ч}$ до $m \times 10^{-6} \frac{отк}{ч}$.

По определению это и есть величины λ.

Экспоненциальный закон надежности включает один параметр λ (или T_{cp}), поэтому он проще при использовании, чем другие законы надежности, имеющие по 2 и более параметров (см. ниже).

Однако при $\lambda t \le 0{,}1$ вид экспоненциального закона еще больше упрощается.

Действительно, функция e^x имеет следующее разложение в степенной ряд:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots .$$

В нашем случае

$P = e^{-\lambda t}$, то есть $x = -\lambda t$, поэтому

$$e^{-\lambda t} = 1 - \frac{\lambda t}{1!} + \frac{(\lambda t)^2}{2!} - ... = 1 - \lambda t + \frac{(\lambda t)^2}{2} - ... .$$

При $\lambda t \leq 0{,}1$; $(\lambda t)^2 \leq 0{,}01$ и $\frac{(\lambda t)^2}{2} \leq 0{,}005$, поэтому $P(t)=1 - \lambda t$ с точностью до второго знака после запятой.

Отсюда $Q(t)=1 - P(t)=1 - 1 + \lambda t = \lambda t$, или $Q(t) = \lambda t$ (с такой же точностью).

Для случайной величины T – срок службы до отказа – ее функции распределения в данном случае запишутся так:

$$F(t) = Q(t) = \lambda t,$$

$$f(t) = \frac{dF}{dt} = \lambda .$$

Полученные формулы используются при малых λ (т.е. для высоконадежной техники) или при малых t (т.е. в начале испытаний (работы)).

Например, по ним легко вычислить количество отказавших изделий $n(t)$ за время t (при $\lambda t \leq 0{,}1$).

Действительно, по зависимости $Q(t) = \frac{n(t)}{N}$ имеем: $n(t) = N \times Q(t) = N\lambda t$.

Например, пусть $N=10^3$ шт., $\lambda=10^{-5} \frac{отк}{ч}$, и требуется определить, сколько изделий откажет за время $t=10^4$ч.

Подставляя все эти значения в выражение для $n(t)$, получаем:

$n(t) = N\lambda t = 10^3 * 10^{-5} * 10^4 = 10^2$ шт.

Знаем далее, что при экспоненциальном законе его основное выражение может быть записано в виде:

$$P(t) = e^{-t/Tср} .$$

Подсчитаем величину P при $t=Tср$:

$$P(Tср) = e^{-Tср/Tср} = e^{-1} = \frac{1}{e} = \frac{1}{2{,}7} = 0{,}37 .$$

Видим, что к моменту $t = Tср$ только 37 % от исходного количества изделий остаются работоспособными, соответственно, 63 % их отказывают. Таким образом, при экспоненциальном распределении случайной величины T – срок службы до отказа – математическое ожидание T не совпадает с её медианой.

Покажем теперь в таблице уменьшение количества работоспособных изделий при экспоненциальном законе в ходе эксплуатации:

Таблица 1 – Уменьшение количества работоспособных изделий при экспоненциальном законе

$\lambda t = t / T_{ср}$	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
$P \cong \frac{N_p}{N}$	0,37	0,9	0,99	0,999	0,9999

Здесь $\lambda t \leq 0{,}1 \Rightarrow P(t) = 1 - \lambda t$

Видим, что в ходе эксплуатации количество работоспособных изделий уменьшается, т.е. надежность техники с ростом срока службы снижается.

Для уменьшения доли отказавших изделий (т.е. для снижения величины $Q(t) = \frac{n(t)}{N}$ - вероятности отказа) можно, например, ограничивать срок использования изделий.

Например, в авиации, где цена каждого отказа велика, авиационные двигатели снимают с эксплуатации (независимо от их состояния) по достижении заранее назначенного срока службы, обеспечивающего заданную малую вероятность отказа $Q(t)$. Однако это требует больших затрат. Помимо авиации такой подход применяется для некоторых других видов военной техники.

В целлюлозно-бумажной и химической промышленности такой метод повышения надежности не применяют из-за его дороговизны.

Рассмотрим теперь произвольный интервал времени $[t_1, t_2]$ на стадии II.

Выше было показано, что $P[0,t_2] = P[0,t_1]$ х $P[t_1,t_2]$, где t=0 в данном случае соответствует началу стадии II.

Тогда при экспоненциальном законе надежности

$$P[t_1, t_2] = \frac{P[0, t_2]}{P[0, t_1]} = \frac{e^{-\lambda t_2}}{e^{-\lambda t_1}} = e^{-\lambda(t_2 - t_1)} = e^{-\lambda \Delta t},$$

где $\Delta t = t_2 - t_1$ - продолжительность интервала времени $[t_1,t_2]$.

Так как, $P[t_1, t_2] \cong \frac{N_P(t_2)}{N_P(t_1)}$ получаем, что $N_p(t_2) \cong N_p(t_1) e^{-\lambda \Delta t}$.

Таким образом, на протяжении стадии II эксплуатации экспоненциальный закон надежности справедлив для любого интервала времени.

При разделении стадии II на ряд интервалов Δt_i и при разных значениях интенсивности отказов λ_i по интервалам (например, из-за изменения условий работы на этих отрезках времени) по вышеприведенному можно показать также, что

$$P[0,t_2]=P(\Delta t_1)P(\Delta t_2).....P(\Delta t_n)=e^{-\lambda_1\Delta t}e^{-\lambda_2\Delta t_2}....e^{-\lambda_n\Delta t_n}=e^{-\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i\Delta t_i)}.$$

Если все λ_i одинаковы и равны λ, то

$P[0,t_2]=e^{-\lambda\sum\Delta t}=e^{-\lambda t}$, т.е. возвращаемся к обычному выражению экспоненциального закона.

Проверка выполнения экспоненциального закона по данным эксплуатации (испытаний) и определение интенсивности отказов λ в этих условиях

По данным эксплуатации (испытаний) часто можно проверить, выполнялся ли в этих условиях экспоненциальный закон надежности, и если выполнялся, то с какой интенсивностью λ шли отказы.

Действительно, если экспоненциальный закон выполнялся, то должна была соблюдаться зависимость

$$P(t)=e^{-\lambda t}, \tag{3.14}$$

где

$$P(t)\cong\frac{N_p(t)}{N}. \tag{3.15}$$

Логарифмируя обе части (3.14), получаем, что также должно было соблюдаться соотношение:

$$\ln P=-\lambda t. \tag{3.16}$$

Аналогично, умножая обе части (3.16) на -1, получаем далее, что

$$-\ln P=\lambda t, \tag{3.17}$$

а подставляя в (3.17) соотношение (3.15), видим, что должно было соблюдаться и следующее равенство:

$$-\ln\frac{N_p}{N}=\lambda t, \tag{3.18}$$

т.е. величина $-\ln\frac{N_p}{N}$ должна была примерно линейно расти со временем.

Поэтому для проверки выполнения экспоненциального закона надежности, по данным статистики отказов, строят график зависимости величины $-\ln\frac{N_p}{N}$ от времени работы изделий t, на котором точки наносят в моменты отказов (т.к. целочисленные значения $N_p(t)$ изменяются в моменты отказов) (см. рис. 3.6).

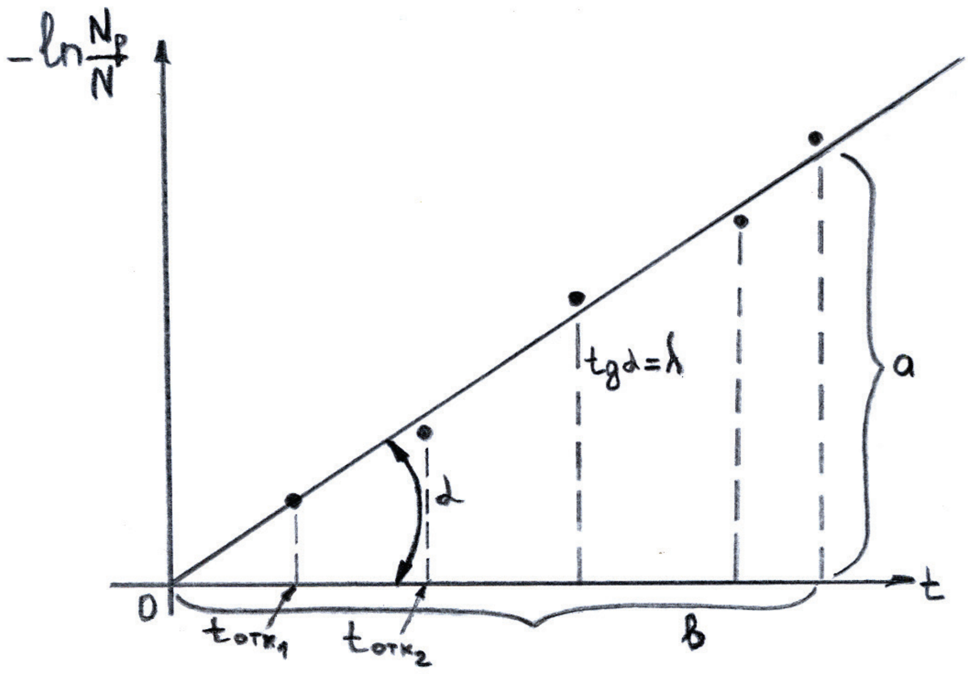

Рис. 3.6. Проверка выполнения экспоненциального закона надёжности по данным эксплуатации (испытаний)

Если точки графика хотя бы примерно ложатся на прямую линию, проходящую через начало координат, то это подтверждает соблюдение экспоненциального закона в данном случае.

Тогда по зависимости (3.18) тангенс угла наклона этой прямой равен интенсивности отказов, имевшей место в проверяемом случае, и величину λ можно определить с графика по отношению катетов *а* и *в*:

$$\lambda = tg\alpha = \frac{a}{в}\left[\frac{отк}{ч}\right],$$

где величины *а* и *в* берутся в единицах шкал на осях графика.

Прогнозирование вероятного хода отказов и потребности в запасных изделиях (запчастях)

Если экспериментальная проверка показала соблюдение экспоненциального закона, то на будущее для такой же техники, работающей в тех же условиях, можно также ожидать соблюдения экспоненциального закона с найденной интенсивностью отказов $\boldsymbol{\lambda}$ в пределах второй стадии эксплуатации.

Вероятные моменты будущих отказов можно оценить по зависимости (3.18), выразив из неё время отказа $t_{отк}$:

$$t_{отк} = \frac{1}{\lambda}\left(-\ln\frac{N\rho}{N}\right) = \frac{1}{\lambda}\left[-ln\frac{N-n(t)}{N}\right],$$

где n = 1,2, … N – номера будущих отказов.

Например, задавшись величиной n как количеством имеющихся запасных изделий (запчастей), можно оценить время, на которое хватит этого запаса изделий.

Наоборот, если нужно оценить требуемый запас изделий на заданное время t, то можно использовать выражение для вероятности отказа Q(t).

Так как Q(t) = $\frac{n(f)}{N}$, то

$$n(t) = N \times Q(t) = N\,(1 - e^{-\lambda t}) = N\lambda t \quad (\text{при } \lambda t \le 0{,}1).$$

При заданном t подсчитаем n – количество отказов, которые произойдут за это время; отсюда определится необходимый запас изделий для замены отказавших изделий.

3.4.3. Надежность на стадии износовых (постепенных) отказов

Напомним, что на этой стадии частота (интенсивность) отказов начинает расти из-за снижения сопротивляемости техники случайным перегрузкам вследствие старения техники (её износа в широком смысле слова).

Для определения функций распределения случайной величины T (срок службы до отказа) на стадии III эксплуатации (испытаний) невосстанавливаемых изделий данные статистики их отказов обрабатывают так.

По окончании, например, испытаний на надежность группы N одинаковых изделий общая продолжительность испытаний $t_{\text{исп.}}$ наносится на горизонтальную ось t графика (см. рис. 3.7).

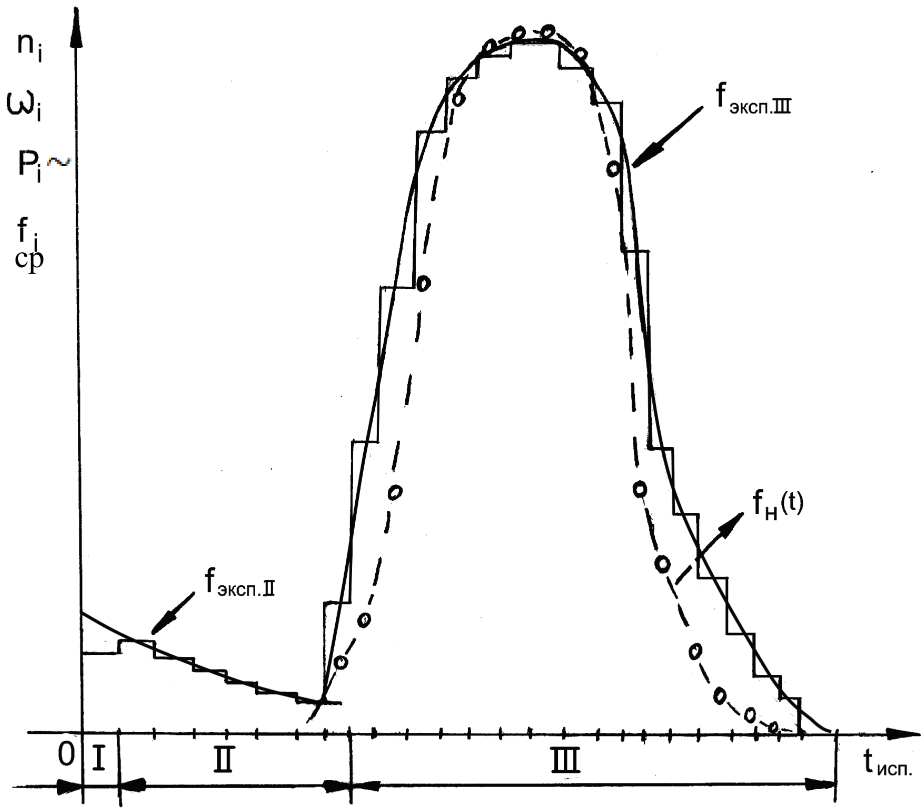

Рис. 3.7. Обработка данных эксплуатации (испытаний) по надёжности

Затем величина $t_{\text{исп.}}$ делится на большое количество достаточно малых одинаковых интервалов времени Δt.

На каждом Δt сначала подсчитываются количества отказов n_i и затем строится гистограмма n_i по всем Δt. Типичный вид такой гистограммы для механических изделий (например, деталей или узлов машин) приведен на рис. 3.7. По виду гистограммы можно выделить также три характерные стадии эксплуатации (испытаний), что, например, ранее были показаны по виду графика интенсивности отказов λ (см. рис. 3.2).

Затем все n_i делятся на N – исходное число испытуемых изделий. Получают величины $\omega_i = \frac{n_i}{N}$ – относительные частоты отказов по интервалам времени Δt (частости отказов).

Так как N=const, то если строить такую же гистограмму для величин ω_i по всем Δt , её форма будет подобна гистограмме $n_i\ (\Delta t)$. Поэтому в некотором специальном масштабе эти две гистограммы совпадают.

При увеличении N величины ω_i уточняются, при этом они как к пределам стремятся к величинам p_i – вероятностям отказов по Δt.

Т.е. имеем $\omega_i \xrightarrow[N\to\infty]{} P_i$.

Поэтому при достаточно больших N $\omega_i \cong P_i$ и гистограммы $\omega_i\ (\Delta t)$ и $P_i(\Delta t)$ тоже практически совпадают.

Далее, если бы для случайной величины Т – срок службы до отказа, например , на стадии III была бы известна её функция распределения f (см. рис. 3.8), то для каждого Δt P_i выразили бы следующим образом (см. курс теории вероятностей):

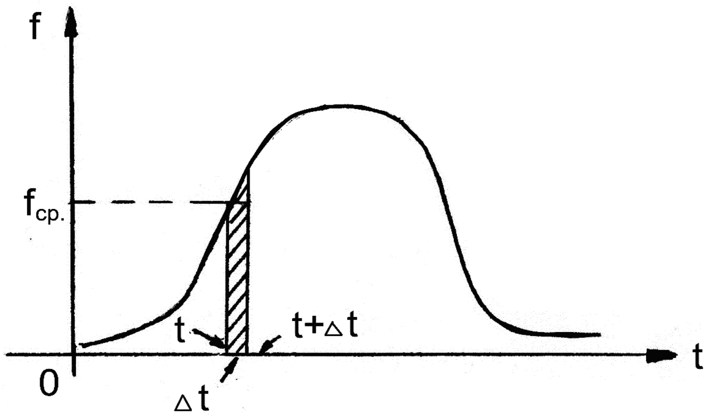

Рис. 3.8. Расчётный график к определению вероятности отказов на малом интервале времени

$$P_i = \int_t^{\Delta t + t} f(t)dt = f_{\text{ср}\,i}\ (\Delta t)\cdot \Delta t\ \rightarrow f_{\text{ср}\,i}\ (\Delta t) = \frac{P_i}{\Delta t}.$$

Так как Δt все одинаковы, то $f_{\text{ср}\,i}$ (Δt) на каждом Δt пропорциональны P_i, поэтому гистограмма, построенная для $\Delta P_i\ (\ \Delta t)$, в каком-то масштабе является гистограммой для $f_{\text{ср}\,i}$ (Δt) .

Полученная ступенчатая гистограмма для $f_{\text{ср}\,i}$ (Δt) на стадии III эксплуатации (аналогично и на стадиях I и II) уже даёт грубое представление об искомом графике функции f на этой стадии (аналогично и на других стадиях).

Гистограмма для $f_{\text{ср}\,i}$ приближается к искомому плавному графику функции f(t) при уменьшении Δt и увеличении N.

Однако уточнение за счет уменьшения Δt (при достаточно большом N) имеет свои ограничения, так как на каждом Δt должно оставаться по несколько отказов для определения ω_i.

На практике плавные графики функции f(t) проводят через середины горизонтальных участков гистограммы при приемлемом Δt .

На стадиях II и III эксплуатации при этом чаще всего получаются следующие результаты.

На стадии II функция f_{II}(t) обычно уменьшается с ростом t, как это должно быть при экспоненциальном законе надежности (согласно основному уравнению надежности).

На стадии III эксплуатации основное уравнение надежности на практике пока широко не применяется по следующим причинам:

- из-за большого разнообразия явлений старения техники;

- их недостаточной изученности (например, явлений коробления тонкостенных литых корпусов, заедания деталей и др.);

- для упрощения математических выкладок.

Взамен этого полученные экспериментально функции $f_{\text{эксп.}III}$ сравнивают с аналогичными функциями f у известных из теории вероятностей типовых случайных величин.

Нормальный закон надежности

Так, наиболее часто функция $f_{\text{эксп.}III}$ имеет один максимум примерно посередине стадии III, от которого в обе стороны примерно симметрично убывает до 0 к началу и концу стадии III.

В таких случаях функция $f_{\text{эксп.}III}$ достаточно хорошо заменяется (аппроксимируется) функцией $f_{\text{н}}$(t) нормального закона распределения:

$$f_{\text{н}}(t)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(t-m_t)^2}{2\sigma^2}} \text{ – функция Гаусса} \tag{3.19}$$

(в источнике [2] вместо обозначения σ использовано обозначение S).

Для проверки этого соответствия функций на фоне найденной $f_{\text{эксп}\,III}$ по формуле (3.19) также по данным испытаний (эксплуатации) строят график функции $f_{\text{н}}$(t) , соответствующий данным условиям.

Для этого сначала по данным испытаний подсчитывают статистические оценки $\overline{m}_t$ и $\bar{\sigma}$ параметров нормального закона (m_t и σ) по соотношениям:

$$m_t \cong \overline{m}_t=\frac{\sum t_i}{N},$$

$$\sigma \cong \bar{\sigma}=\sqrt{\overline{D}_x}=\sqrt{\frac{\sum(t_i-\overline{m}_i)^2}{N-1}},$$

где все t_i – реализации случайной величины Т – срок службы до отказа – определяют в пределах стадии III эксплуатации (испытаний).

Затем, подставляя найденные $\overline{m}_t$ и $\bar{\sigma}$ в формулу (3.19) (взамен m_t и σ), вычисляют значения $f_{\text{н}}$(t) в серединах всех интервалов Δt на стадии III, строят график $f_{\text{н}}$(t) на фоне графика $f_{\text{эксп}\, III}$ и проверяют их соответствие друг другу.

В случае их хорошего соответствия считается, что на стадии III в данном случае выполняется нормальный закон надежности (он имеет два параметра: m_t и $\sigma = S$).

На практике для упрощения и наглядности часто сравнивают не функции $f_{\text{эксп}.III}$ и $f_{\text{н}}$(t), а распределение количеств отказов n_i по интервалам Δt, найденное экспериментально, и распределение количеств отказов $n_{i\,\text{н}}$ по Δt, строго соответствующее нормальному закону надежности.

Для нахождения величин $n_{i\,\text{н}}\ (\Delta t)$ используют соотношение для вероятностей отказа по Δt:

$$P_i(\Delta t) = f_{\text{ср}\, i}\ (\Delta t)\ \times \Delta t \text{ (см. выше).} \qquad (3.20)$$

При этом сначала учитывают, что при достаточно малых Δt $f_{\text{ср}\, i}(\Delta t) \cong f(t_{\text{ср}\, i})$, где $t_{\text{ср}\, i}$ – середины интервалов Δt.

Далее используют соотношение (см. выше):

$$P_i(\Delta t)\ \cong\ \omega_i(\Delta t) = \frac{n_i(\Delta t)}{N}\,. \qquad (3.21)$$

Подставляя это в равенство (3.20), получаем:

$$\frac{n_i(\Delta t)}{N}\ \cong\ f(t_{\text{ср}\, i}\,) \times \Delta t \text{ и}$$

$$n_i(\Delta t) \cong N\, f(t_{\text{ср}\, i}\,)\, \Delta t. \qquad (3.22)$$

При нормальном законе надежности на стадии III будем иметь:

$$n_{i\text{н}}(\Delta t) \cong \mathrm{N_{III}}\ f_{\text{н}}\ (t_{\text{ср}\, i}\,)\ \Delta t\,, \qquad (3.23)$$

где $n_{i\,\text{н}}\ (\Delta t)$ – количество отказов по интервалам Δt, соответствующее нормальному закону надежности,

$\mathrm{N_{III}}$ – суммарное количество отказов на стадии III при эксплуатации (испытаниях);

$f_{\text{н}}\ (t_{\text{ср}\, i})$ – значения функции $f_{\text{н}}$ в серединах интервалов времени Δt.

Величины $f_{\text{н}}\ (t_{\text{ср}\, i})$ можно подсчитывать по формуле (3.19), предварительно определив $\overline{m}_1$ и $\bar{\sigma} = \overline{S}$.

Однако для сокращения вычислений эти величины определяют, используя таблицы значений функции $f_{0\text{н}}$ (x) стандартного нормального распределения. Это распределение имеет параметры m_x= 0 и $\sigma = 1$. Поэтому его функция распределения $f_{\text{н}}$ (x) = $f_{\text{он}}$ (x) имеет вид:

$f_{0\text{н}}$ (x)=$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$ (см. рис. 3.9):

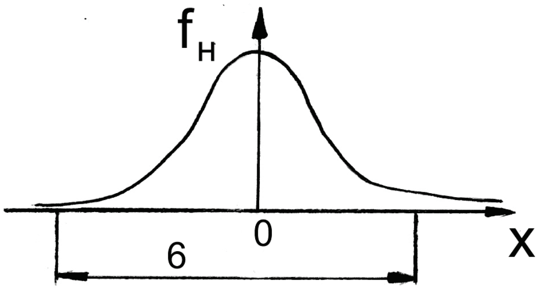

Рис. 3.9. Функция плотности вероятности стандартного нормального распределения

Функции $f_{он}(x)$ и $f_н$ (t) связаны между собой подстановкой:

$$X = \frac{t - m_t}{\sigma},$$

где $m_t \cong \overline{m_t}$ и $\sigma \cong \overline{\sigma}$ (= $\bar{S}$).

Таким образом, если надо найти значение $f_н$ ($t_{ср\, i}$), где $t_{ср\, i}$ – середина какого-нибудь интервала Δt_i, то сначала по указанной подстановке находим для данного $t_{ср\, i}$ соответствующее x_i:

$$x_i = \frac{t_{ср\, i} - \bar{m}_t}{\bar{\sigma}}$$

и затем из определяем $f_{он}$ (x_i), после чего вычисляем:

$$f_н\ (t_{ср\, i}) = \frac{f_{0н}(x_i)}{\sigma}\ .$$

Наконец, по соотношению (3.23) находим для соответствующего Δt_i его $n_{iн}(\Delta t)$ – количество отказов на этом Δt_i, строго соответствующее нормальному закону.

В результате на гистограмме $n_{i\, эксп.}(\Delta t)$ в серединах всех интервалов времени Δt в пределах стадии III наносим точки, соответствующие $n_{i\, эксп.}$(t) и $n_{i\, н}$ (t), после чего в случае хорошего соответствия получившихся графиков можем сделать вывод о выполнении нормального закона надежности на стадии III эксплуатации (или о невыполнении этого закона, если указанные графики не соответствуют друг другу).

В том случае, когда выполнение нормального закона надежности проверяется сравнением функций $f_{эксп\, III}$ и $f_н$, построение графика $f_н(t)$ также может проводиться с использованием таблиц для стандартного нормального распределения (функции $f_{0н}$ (x)).

Проверив выполнение нормального закона надежности на стадии III эксплуатации (испытаний), остальные зависимости, характеризующие надежность при нормальном законе, можно получить по виду найденной функции $f_н(t)$.

Так, другую функцию распределения $F_н$ (t) случайной величины Т (срок службы до отказа) можно получить графическим (или численным) интегрированием $f_н(t)$ (см. рис. 3.10).

Вероятность отказа в данных условиях Q(t) = $F_н$(t), вероятность безотказной работы P(t) = 1- Q(t) и интенсивность отказа

$$\lambda(t) = \frac{f}{p}\,.$$

Проверив выполнение нормального закона надежности, на будущее для таких же изделий, работающих в тех же условиях, также можно ожидать выполнения этого закона.

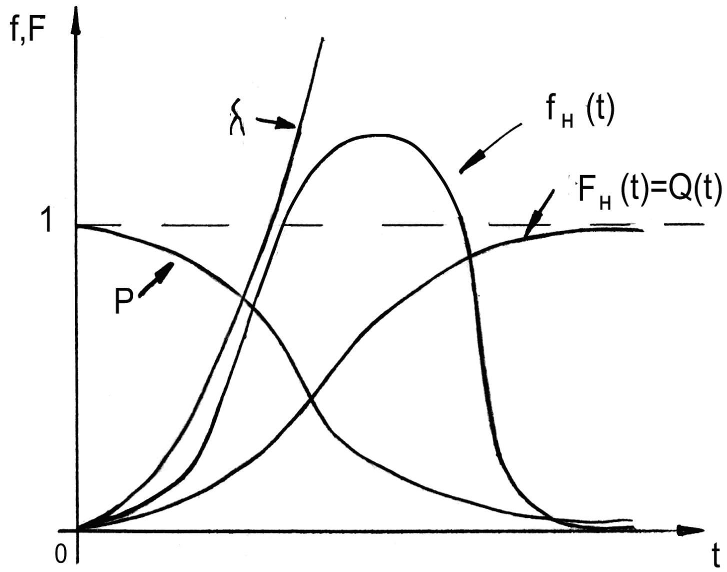

Рис. 3.10. Характеристики надёжности невосстанавливаемых изделий при нормальном законе надёжности

Это позволяет прогнозировать вероятный ход отказов при нормальном законе надежности, например, для определения потребности в запасных изделиях (запчастях).

Закон надежности Вейбулла

Нормальный закон надежности на стадии III эксплуатации выполняется тогда, когда здесь выполняются условия одной из основных теорем теории вероятности – центральной предельной теоремы. Эта теорема дает условия, при соблюдении которых любая случайная величина (в том числе Т – срок службы до отказа невосстанавливаемых изделий) подчиняется нормальному закону.

Таких условий два:

1. На данную случайную величину действует большое количество факторов, отклоняющих её от среднего значения в обе стороны.

2. Все эти факторы (каждый из них) примерно одинаково влияют на данную случайную величину.

Когда эти условия не выполняются (например, нарушаются), вид нормального распределения также нарушается, например, нарушается характерный для нормального распределения вид функции f, даваемый функцией Гаусса.

Так, если при эксплуатации группы одинаковых изделий (например, подшипников) нарушается режим смазки или неправильно был произведен их монтаж, то уменьшается средний срок службы таких изделий (рис. 3.7), максимум функции $f_{\text{эксп } III}$ смещается влево, и вид этой функции теряет симметричность.

Также и на стадии II, если с самого начала эксплуатации значительное количество отказов уже вызвано износом, то искажается вид зависимости $f_{\text{эксп } II}$, характерный для экспоненциального закона надежности.

Во всех этих случаях используют более универсальный закон надежности Вейбулла (Вейбулл – шведский ученый, профессор Стокгольмского университета).

Согласно закону Вейбулла зависимость для вероятности безотказной работы P(t) в группе одинаковых невосстанавливаемых изделий имеет вид:

$$P(t) = e^{-t^m/t_0} ,$$

где m>0 и $t_0 > 0$ – параметры закона Вейбулла (m – параметр формы, t_0 - параметр масштаба).

Другие зависимости, характеризующие надежность техники, при законе Вейбулла имеют следующий вид:

$$Q(t)= 1- P(t)= 1- e^{-t^m/t_0} = F(t),$$

$$f(t)= \frac{dF}{dt} = \frac{m}{t_0}\, t^{m-1}\ \ e^{-t^m/t_0},$$

$$\lambda(t) = \frac{f}{p} = \frac{m}{t_0}\, t^{m-1}.$$

Придавая параметрам закона Вейбулла различные значения, можно получить большое разнообразие конкретных закономерностей надежности.

Например, при m = 1 получаем:

$$P = e^{-t/t_0} , f = \frac{1}{t_0} e^{-t/t_0}$$

или, обозначив $\frac{1}{t_0} = \lambda$,

$$P=e^{-\lambda t}, f = \lambda e^{-\lambda t},$$

то есть экспоненциальный закон (как частный случай закона Вейбулла).

Покажем графически вид функции f(t) при различных значениях параметра формы m.

Так, при m=1 f(t) имеет вид как при экспоненциальном законе
(рис. 3.11).

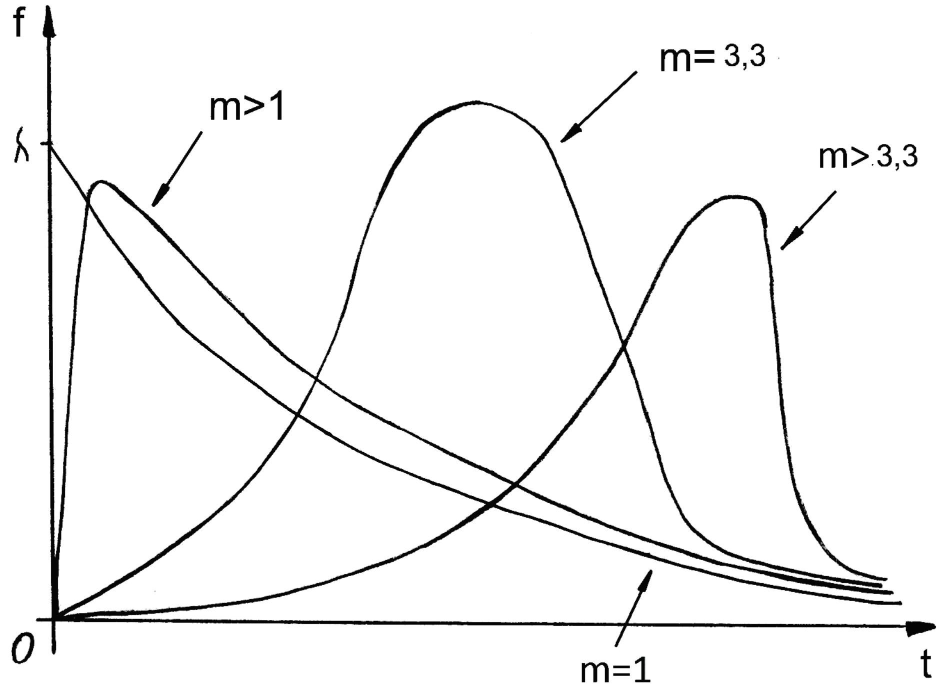

Рис. 3.11. Графики функции f(x) при различных значениях параметра формы m в законе надёжности Вейбулла

При m >1 (немного) построение графика функции f(t) дает вид кривой, с одной стороны, мало отличающийся от предыдущего случая. Но, с другой стороны, здесь возникает качественное отличие, заключающееся в том, что график f(t) начинается из начала координат, быстро достигает максимума и затем идет ближе к предыдущей кривой.

При дальнейшем росте m максимум функции f(t) смещается вправо. Так, при m = 3,3 вид функции f(t) близко соответствует функции $f_н$(t) нормального закона распределения. Отличие, заключающееся в том, что при законе Вейбулла графики $f_н$(t) все начинаются из начала координат, а $f_н$(t) идет над всей осью t (от $-\infty$ до $+\infty$), несущественно, т.к согласно правилу 3σ в диапазоне $t \in [-3\sigma + m_t\,,\ m_t + 3\sigma\,]$ находится 99,7 % всех реализаций случайной величины.

При дальнейшем росте m максимум f продолжает смещаться вправо, и асимметрия графика меняет свое положение на противоположное.

Проверка соблюдения закона Вейбулла, определение его параметров

По данным эксплуатации (испытаний на надежность) часто можно проверить, выполнялся ли закон Вейбулла, и если выполнялся, то определить его параметры m и t_0 .

Действительно, пусть имеется N одинаковых невосстанавливаемых изделий, и в момент времени t = 0 начинается их эксплуатация (или испытания на надежность). Тогда, если соблюдался закон Вейбулла, то в ходе испытаний (работы) должна была выполняться зависимость:

$$P(t) = e^{-t^m/t_0}, \tag{3.24}$$

$$\text{где } P(t) \cong \frac{N_P(t)}{N}. \tag{3.25}$$

Логарифмируя обе части (3.24), получаем:

$$\ln P = {-t^m}/{t_0}, \tag{3.26}$$

и умножая далее (3.26) на -1, можно записать:

$$-\ln P = {t^m}/{t_0}. \tag{3.27}$$

Обозначив ${t^m}/{t_0} = y$, получаем:

$$-\ln P = {t^m}/{t_0} = y. \tag{3.28}$$

Прологарифмировав правое равенство в (3.28), запишем:

$$\ln y = m \ln t - \ln t_0 \tag{3.29}$$

и одновременно для левого равенства (3.28) имеем:

$$\ln(-\ln P) = m \ln t - \ln t_0. \tag{3.30}$$

Подставив теперь (3.25) в (3.30), запишем:

$$\ln\left(-\ln \frac{N_P}{N}\right) \cong m \ln t - \ln t_0. \tag{3.31}$$

Так как m и t_0 константы, то по (3.31) получаем, что при соблюдении закона Вейбулла величина $\ln\left(-\ln \frac{N_P}{N}\right)$ должна линейно зависеть от ln t.

Поэтому для выполнения закона Вейбулла по данным испытаний (эксплуатации) строят график зависимости величины $\ln\left(-\ln \frac{N_P}{N}\right)$ от ln t, где точки наносят в соответствии с моментами отказов.

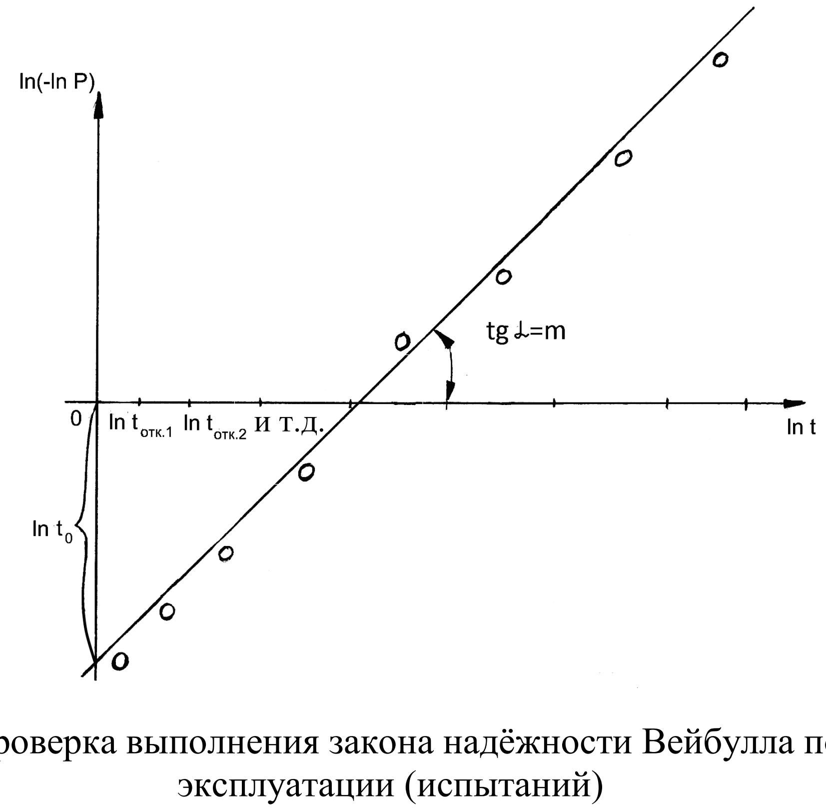

Рис. 3.12. Проверка выполнения закона надёжности Вейбулла по данным эксплуатации (испытаний)

Если точки на графике хотя бы примерно располагаются на прямой линии, то согласно зависимости (3.31) в ходе эксплуатации (испытаний) выполнялся закон Вейбулла. Тогда, согласно (3.31) тангенс угла наклона прямой $\text{tg}\alpha = m,$ и отрезок , отсекаемой прямой на вертикальной оси, равен $\ln t_0$.

Таким образом, построенный график позволяет определить и параметры закона Вейбулла.

При этом, так как экспоненциальный и нормальный законы надежности являются частными случаями закона надежности Вейбулла, если при данной проверке окажется, что m= 1, то фактически будет установлено, что соблюдался экспоненциальный закон, а если m= 3,3, то имел место нормальный закон надежности.

Полученные результаты также могут быть использованы для прогнозирования вероятного хода отказов на будущее у таких же изделий, работающих в тех же условиях, и, тем самым, для определения потребности в запасных изделиях (запчастях).

Так, решая соотношение (3.31) относительно t, находим время будущих отказов:

$$t_{\text{отк}} = e^{\frac{1}{m}\left[\ln\left(-\ln\frac{N_P}{N}\right)+ln\ t_0\right]}\ . \qquad (3.32)$$

Так как N_p = N- n (t), то, подставляя в (3.32) n= 1,2,… N, находим на будущее время 1-го; 2-го и других отказов.

С другой стороны, по выражению для вероятности отказа Q(t)=$\frac{n(t)}{N}$ имеем:

$$\text{n(t)} = \text{N} \times \text{Q(t)} = \text{N}\ [1 - \text{P(t)}] = \text{N}\ (1\text{-}\ e^{-t^m/t_0}). \qquad (3.33)$$

Поэтому по (3.33), задаваясь значением времени работы t на будущее, определяем, сколько отказов за это время произойдет и, соответственно, сколько нужно иметь запасных изделий на это время.

3.4.4. Совместный ход внезапных и постепенных отказов

До сих пор исходили из того, что на стадии II эксплуатации идут, в основном, лишь внезапные отказы (практически нет износовых), а на стадии III идут практически одни износовые отказы (постепенные).

Однако встречаются случаи, когда отказы обоих видов идут одновременно в сравнимых количествах.

Пример 1. При обучении учеников профтехучилища (ПТУ) на старых металлорежущих станках все отказы можно разделить на 2 группы:

- внезапные отказы из-за ошибок обучаемых;
- износовые (постепенные) отказы из-за поломок изношенных деталей станков.

Если имеется возможность раздельного сбора и обработки данных по этим группам отказов, то в каждой группе проявляются свои закономерности надежности.

Например, в группе внезапных отказов обычно проявится экспоненциальный закон (характерные для него зависимости надежности см. на рис. 3.13).

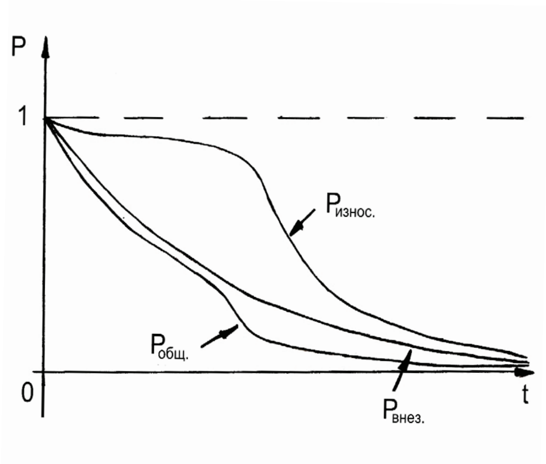

Рис. 3.13. Характеристики надёжности в группе внезапных отказов (экспоненциальный закон надёжности)

В группе износовых отказов чаще всего может проявиться нормальный закон надежности (см. рис. 3.14).

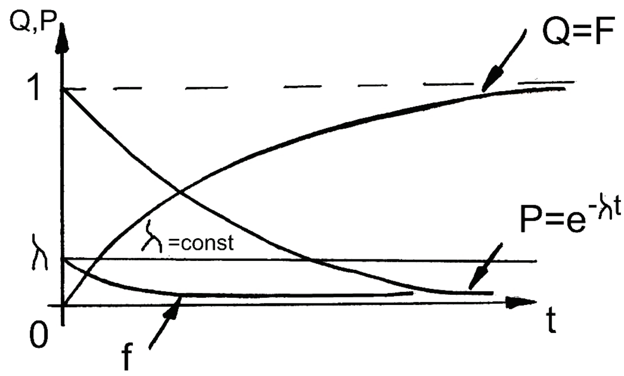

Рис. 3.14. Характеристики надёжности в группе износовых отказов (нормальный закон надёжности)

С точки зрения теории вероятности, случайное событие, заключающееся в отсутствии отказов любого вида (назовем его исходным общим событием), произойдет лишь тогда, когда одновременно произойдут два других случайных события: отсутствие внезапных отказов и отсутствие износовых отказов.

Такое исходное событие в теории вероятности называется произведением этих других двух случайных событий, и его вероятность равна произведению вероятностей этих двух событий.

Вероятность отсутствия отказов есть вероятность безотказной работы. Поэтому в данном случае можно записать:

$$P_{общ.}(t)=P_{внез.}(t)\cdot P_{износ}(t) \qquad (3.34)$$

(когда износовые и внезапные отказы не зависят друг от друга).

Найдем зависимость $P_{общ.}(t)$ графически.

Первый сомножитель в правой части равенства (3.34) графически показан на рис. 3.15 в виде зависимости $P_{внез}(t)=e^{-\lambda t}$, второй сомножитель здесь показан как зависимость $P_{износ}(t)$.

Их произведение $P_{общ.}$ при малых t будет мало отличаться от $P_{внез.}$ (т.к. $P_{износ.}$ здесь близко к 1). Затем из-за резкого уменьшения $P_{износ.}$ график $P_{общ.}$ также резко отойдет вниз от графика $P_{внез.}$ и далее пойдет близко к $P=0$.

Таким образом, вид графика зависимости $P_{общ.}(t)$ будет таким, как показано на рис. 3.15. Найдя $P_{общ.}$, можем найти и остальные зависимости, характеризующие надежность в этом случае:

$$Q_{общ.} = 1 - P_{общ.} = F_{общ.};$$

$$f_{общ.} = \frac{d}{dt}F_{общ.}: \quad \lambda_{общ.} = \frac{f_{общ.}}{P_{общ.}}$$

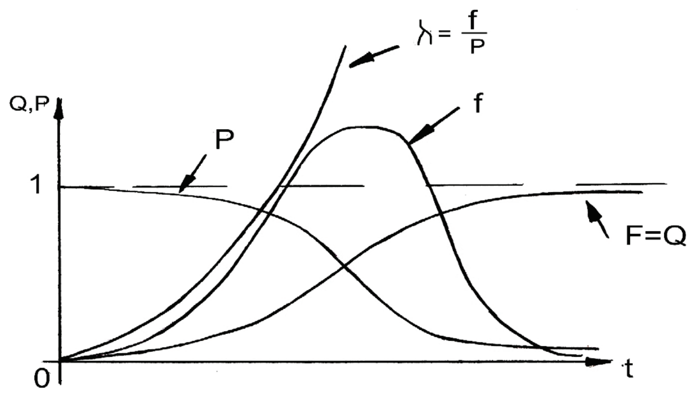

Рис. 3.15. Определение вероятности безотказной работы при совместном ходе внезапных и износовых отказов

Если нет возможности раздельного сбора и обработки данных по группам отказов, то проводят общую статистическую обработку данных по отказам, например, проверяя соблюдение закона Вейбулла. При этом фактически подыскивается выражение закона, наиболее близкое к собранным данным.

Так или иначе, после указанной обработки данных по отказам возможно прогнозирование на будущее хода отказов для такой же ситуации. Отсюда можно оценивать потребность на будущее в запасных изделиях (в данном случае, в станках для обучения).

Пример 2. При эксплуатации автомобильных шин одни отказы идут из-за их проколов (внезапные отказы), другие – из-за износа шин (износовые отказы).

По собранной статистике отказов можно прогнозировать потребность в запасных шинах на будущее для этих же условий.

4. НАДЕЖНОСТЬ ВОССТАНАВЛИВАЕМЫХ ИЗДЕЛИЙ

Предыдущий материал относился к надежности изделий, не подвергающихся ремонту после отказов. Это, например, подшипники качения на предприятиях целлюлозно-бумажной промышленности, электролампочки и др. Этот материал относится также к первым отказам восстанавливаемых (ремонтируемых) изделий, т.к. ход их первых отказов не зависит от того, производится ли затем ремонт. При этом в случаях ремонта простой заменой отказавших изделий на запасные (например, деталей машин, их узлов) каждое изделие тоже можно считать невосстанавливаемым, так как по существу ремонт здесь производится не этих деталей и узлов, а самой машины (путем замены отказавших элементов машины на запасные).

Как сказано выше, большинство изделий, относящихся к оборудованию предприятий, после отказов подвергается ремонту (особенно машины и аппараты в целом, в меньшей мере их детали и узлы) – это так называемый послеаварийный ремонт.

Наряду с таким ремонтом производится еще предупредительный (профилактический) ремонт по данным ревизий (периодических остановов и разборки оборудования с целью контроля его состояния) для предотвращения назревающих отказов изношенных изделий. Такой ремонт также может производиться как заменой изношенных изделий, так и проведением их восстановительной обработки.

Промежутки времени работы изделия (например, машины), ревизий, профилактических ремонтов, послеаварийного ремонта показывают на графиках эксплуатации (рис. 4.1.):

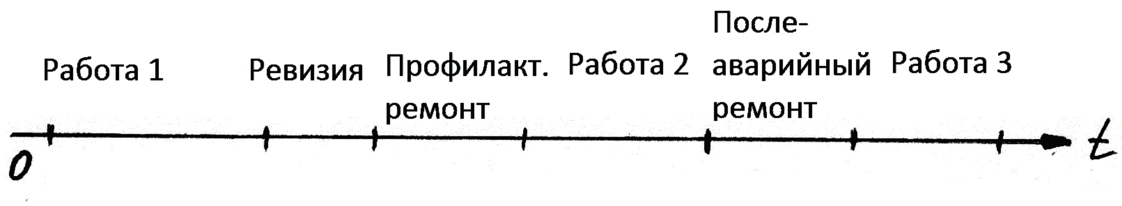

Рис. 4.1. График эксплуатации оборудования

Строят также графики только для промежутков времени работы (рис. 4.2):

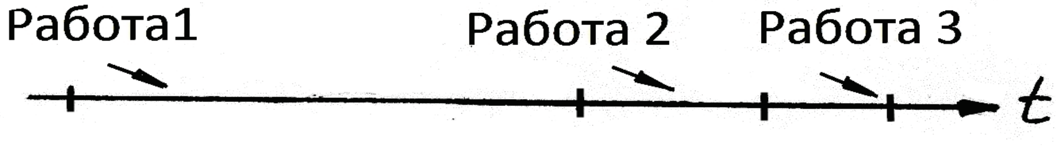

Рис. 4.2. График работы оборудования

По мере износа и старения техники продолжительность промежутков времени работы обычно уменьшается, а частота отказов восстанавливаемых изделий нарастает.

Ревизии оборудования и его предупредительные ремонты (по результатам ревизий) можно проводить согласно плану, поэтому их частота обычно постоянна, но со временем растут объемы работ при предупредительных ремонтах. Непрерывно работающее оборудование (это основное оборудование в составе технологических линий предприятий ЦБП) для проведения планово-предупредительного ремонта (ППР) останавливается; ППР периодически работающего оборудования (например, станков в ремонтно-механических цехах) проводится в нерабочие смены.

Все это соответствует принятой в промышленности России основной системе планово-предупредительного ремонта (ППР).

В настоящее время создаются предпосылки для перехода к более современной системе ремонта по потребности (по состоянию техники).

При ней контроль состояния техники должен проводиться не периодически при ревизиях, а непрерывно в ходе работы техники, в основном с помощью средств технической диагностики.

При помощи специальных датчиков (а также органов чувств человека, т.е. органолептически) контролируются параметры вибрационного, теплового, акустического режимов работы оборудования.

Изменения параметров указанных режимов работы часто говорят о появлении повреждений в конструкциях (например, машин и аппаратов). По этим данным судят о действительной необходимости остановов на предупредительный ремонт оборудования для предотвращения возможных отказов. При этом можно отказаться от обязательных плановых остановов на ППР. В настоящее время элементы такой системы внедряются в рамках обычной системы ППР, что дает дальнейшее значительное снижение аварийности оборудования (машин и аппаратов).

Система ППР в свое время сама пришла (в начале XX в.) на смену исторически первой системе чисто послеаварийного ремонта.

4.1. Надежность восстанавливаемых изделий при отказах

Так как простейшим видом ремонта (и наиболее распространенным) является простая замена отказавших или изношенных изделий на запасные (обычно это детали и узлы), то простейшей расчетной ситуацией в надежности для восстанавливаемых изделий является следующая.

Имеется N одинаковых изделий (например, подшипников) и несколько запасных комплектов изделий к ним. В момент времени $t=0$ начинается работа исходного комплекта (или их испытание на надежность) в одинаковых условиях. После отказов изделий производится их замена на запасные сначала из 1-го запасного комплекта, затем из 2-го и т.д. Испытания (работа) продолжаются до истечения заранее назначенного времени или до окончания запасных изделий (запчастей).

Указанные расчетные ситуации надежности (в данном случае их две – по числу вариантов окончания срока испытаний) называются также планами испытаний на надежность. На них есть специальный ГОСТ, содержащий несколько основных таких планов (три из них изложены в настоящем курсе – см. также расчетную ситуацию надежности для невосстанавливаемых изделий).

4.1.1. Основные показатели надежности восстанавливаемых изделий при отказах

По данным испытаний (эксплуатации) можно определить следующие основные показатели надёжности восстанавливаемых изделий:

1. Среднее количество отказов $\bar{n}$ на одно изделие в группе одинаковых изделий за время t:

$$\bar{n}(t)=\frac{\Sigma\, n_i(t)}{N},$$

где $n_i(t)$ – количество отказов у i-го изделия (или у i-й позиции) за время t,
N – число изделий (или позиций) в группе.

Можно также сказать, что n(t) дает число отказов за время t у одного усредненного изделия (усредненной позиции) в данной группе изделий (позиций).

Изделия с таким числом отказов $\bar{n}(t)$ в данной группе может и не быть, но понятие об усредненном по отказам изделии (позиции) практически полезно (см. ниже п. 2).

2. Параметр потока отказов $\Lambda(t)$:

$$\Lambda(t)=\frac{d\bar{n}}{dt}\cong\frac{\Delta\bar{n}}{\Delta t}\left[\frac{\text{отк}}{\text{час}}\right]$$

(поток отказов – это последовательность моментов времени отказов).

По смыслу этого показателя надежности величина $\Lambda(t)$дает частоту отказов у усредненного по отказам изделия в группе в данный момент времени t.

Если какая-либо техническая система (например, машина) состоит из нескольких подсистем (механическая часть машины или несколько её подсистем, электропривод, автоматическая система управления машиной), то очевидно, что общая частота отказов машины при данном t равна сумме частот отказов по всем подсистемам при том же t.

Поэтому можно показать, что

$$\Lambda_{сист}(t)=\Lambda_1(t)+\Lambda_2(t)+\ldots+\Lambda_n(t)=\sum_{i=1}^{n}\Lambda_i(t),$$

где n – количество подсистем в системе (например, машине).

Вид зависимостей $\Lambda_i(t)$ зависит от того, из каких отказов формируется в той или иной подсистеме её поток отказов.

Например, в механической части бумагоделательной машины (БДМ) имеются подсистемы одинаковых подшипников, зубчатых передач, муфт, валов, сушильных цилиндров, элементов АСУТП и т.д.

Пусть в какой-то подсистеме одинаковых подшипников (например, в сушильной части – у подшипников сетковедущих валов) на данной машине практически все отказы происходят при достаточно большом времени эксплуатации (т.е. на третьей стадии эксплуатации – это может быть при хорошей постановке эксплуатации подшипников).

Тогда, если говорить об отказах в исходном комплекте указанных подшипников, поставленном, например, при монтаже машины, то здесь может проявляться нормальный закон надежности (рис. 4.3).

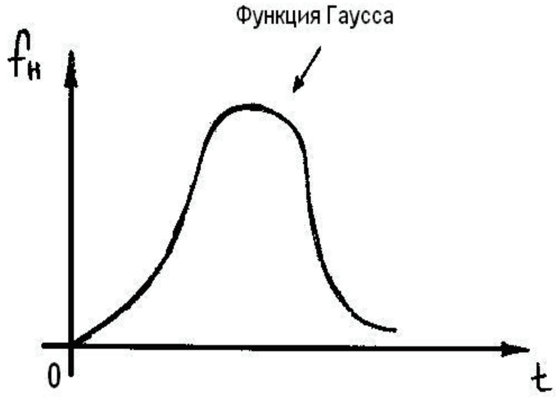

Рис. 4.3. Функция f(x) при отсутствии восстановления заменой
(при нормальном законе надёжности)

Можно показать, что функция $\Lambda_i(t)$ в случае невосстанавливаемых изделий принимает вид функции f(t).

При ремонте отказавших подшипников исходного комплекта, как обычно, заменой на запасные подшипники функция $\Lambda_i(t)$, как показывает практика, в этом случае имеет вид (рис. 4.4):

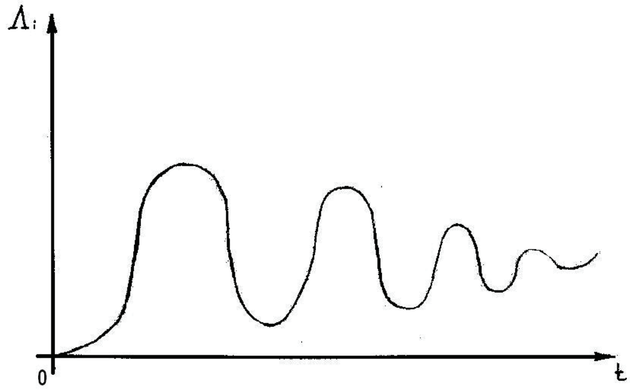

Рис. 4.4. Функция $\Lambda_i(t)$ при восстановлении заменой (когда без замен
в исходном комплекте изделий проявляется нормальный закон надёжности)

Вначале $\Lambda_i(t)$ практически совпадает с функцией $f_н(t)$ исходного комплекта подшипников (без учета ремонта заменой). Но чем дальше, тем больше нарастает различие между ними. Так, в конце первой волны графика Λ_i частота отказов при замене отказавших подшипников на запасные уже не нулевая, так как здесь начинают отказывать ранее поставленные подшипники 1-го запасного комплекта. По аналогичной причине максимум 2-й волны Λ_i меньше максимума 1-й волны и т.д. Количество волн на графике отражает количество и время установки запасных комплектов подшипников. Со временем частота отказов выравнивается на уровне, соответствующем среднему сроку службы данных подшипников.

Пусть в какой-то другой подсистеме данной машины в исходном комплекте элементов идут отказы, подчиняющиеся экспоненциальному закону надежности с интенсивностью отказов λ (например, в какой-то подсистеме АСУТП, построенной на электронике). Тогда можно показать, что при ремонте заменой отказавших элементов на запасные функция $\Lambda_i(t)$ в этой подсистеме с самого начала будет $\Lambda_i(t) \cong const = \lambda$ (рис. 4.5).

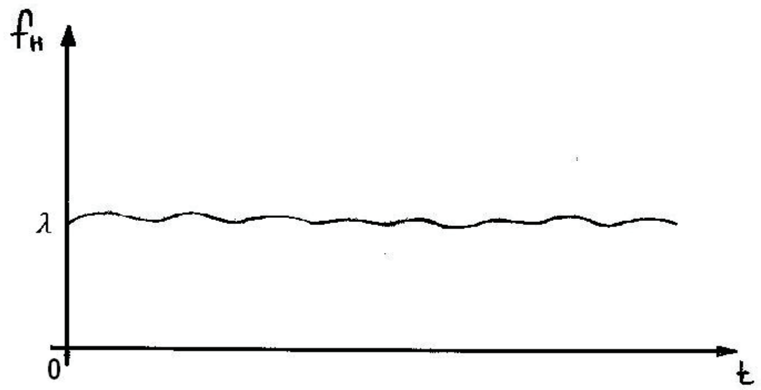

Рис. 4.5. Функция $\Lambda_i(t)$ при восстановлении заменой (когда без замен в исходном комплекте имеет место экспоненциальный закон надёжности)

4.2. Надежность при восстановлении отказавших изделий

У восстанавливаемых изделий, наряду с потоком случайных событий, заключающихся в отказах изделий, имеет место ещё один поток случайных событий по восстановлению изделий после отказов. Поэтому, наряду со случайной величиной Т (срок службы до отказа), появляется ещё одна случайная величина $T_в$ – время восстановления после отказа. В общем случае величина $T_в$ состоит из трех этапов:

1) время между фактическим моментом отказа и моментом его обнаружения ($T_{в1}$);
2) время поиска места и причины отказа ($T_{в\,2}$);

3) время на устранение отказа и его последствий ($T_{в3}$=$T_{пр}$ – время послеаварийного ремонта).

В зависимости от вида техники основным может быть тот или иной из указанных этапов $T_в$.

Например:

1) при отказе прессового вала на БДМ из-за поломки его цапфы $T_в$ в основном затрачивается на замену этого вала на запасной. Здесь основным по длительности является 3-й этап: $T_{в3}$=$T_{пр}$;
2) в сложных электрогидравлических системах управления на металлорежущих станках поиск места и причины отказа такой системы может занимать больше половины времени всего простоя станка из-за отказа. Здесь основным является 2-й этап: $T_{в2}$;
3) в электронике (особенно на ранних этапах её развития) некоторые отказы довольно долго могут оставаться незамеченными. Здесь основным этапом $T_в$ может быть 1-й этап: $T_{в1}$.

4.2.1. Основная расчетная ситуация надежности при восстановлении

Даже после одинаковых отказов у одинаковых изделий начало периодов времени $T_в$ обычно не совпадает, так как отказы разных изделий происходят неодновременно. Отдельные этапы $T_в$ у одинаковых изделий тоже происходят неодновременно.

При накоплении одинаковых отказавших изделий после одинаковых отказов иногда возможна одновременная постановка на ремонт по одинаковой технологии группы таких изделий, т.е. при этом периоды времени $T_{в3}$ = $T_{пр}$ могут начинаться одновременно. Однако это, скорее, не правило, а исключение.

Тем не менее несколько условно (обычно задним числом) расчетная ситуация надежности при ремонте на 3-й стадии $T_в$ принимается следующей.

Имеется N одинаковых отказавших изделий после одинаковых отказов. В момент времени t=0 начинается их восстановление путем ремонта по одинаковой технологии. Основных разновидностей технологии ремонта здесь две:

1 – простая замена отказавших изделий (обычно деталей или узлов машин) на запасные и

2 – восстановительная обработка самих отказавших изделий (деталей или узлов) по одинаковой технологии.

Как указывалось выше, в первом случае производится ремонт машин в целом путем замены её отказавших деталей и узлов на запасные элементы машин. Во втором случае производится ремонт самих отказавших элементов машин (но вместе с этим и ремонт машины в целом путем ремонта её элементов).

В ходе восстановления работоспособности фиксируется время восстановления каждого изделия (а также, если нужно, трудоемкости и стоимости их восстановления) и количество восстановленных изделий к данному моменту времени t>0. Указанные данные могут быть задним числом собраны по соответствующей документации (журналы ремонта, эксплуатации и др.).

Таким образом, получается расчетная ситуация, во многом аналогичная с такой же ситуацией при отказах невосстанавливаемых изделий.

Поэтому и характеристики надежности на 3-й стадии $T_в$ (при ремонте $T_{пр}$) получаются во многом аналогичными характеристикам надежности при отказах невосстанавливаемых изделий. Например, в обоих случаях происходит по одному случайному событию в ходе испытаний – один отказ (нарушение работоспособности) или одно восстановление работоспособности у одного изделия и др.

4.2.2. Основные показатели надежности при восстановлении (ремонте)

1. Вероятность восстановления за время t ($P_в(t)$) подсчитывается по формуле:

$$P_в(t) \cong \frac{N_в(t)}{N_{пв0}},$$

где $N_{пв0}$ – количество изделий, условно поставленных на восстановление при t=0;

$N_в(t)$ – количество изделий, восстановленных за время t.

При этом в любой момент времени t>0:

$$N_в(t) + N_{не\ восст.}(t) = N_{пв0}.$$

2. Величина $P_в(t)$, кроме доли изделий, восстановленных (отремонтированных) за время t, дает также долю тех реализаций $T_{в3}=T_{пр}$, которые меньше этого t, т.е.:

$$P_в(t)=Вер(T_{пр}<t) = P(T_{пр}<t) = F_{пр}(t) \text{ для } T_{пр}.$$

Таким образом, функция $P_в(t)$ одновременно является функцией распределения вероятности значений случайной величины $T_{пр} = T_{в3}$.

3. Другая функция распределения случайной величины $T_{пр}$ такая:

$$f_{пр} = \frac{dF_{пр}}{dt} = \frac{dP_в}{dt}.$$

4. Среднее время восстановления (ремонта) в группе одинаковых изделий:

$$T_{пр\ ср} = \frac{\sum T_{пр}}{N_{пв0}}.$$

5. Вводится также характеристика: интенсивность восстановления μ (аналогично λ – интенсивности отказов при отказах невосстанавливаемых изделий).

Для подсчета величины μ число изделий, восстановленных в единицу времени при данном t, делится на количество ещё невосстановленных изделий при этом же t.

Так же как при отказах для случайной величины T(срок службы до отказа) при восстановлении у случайной величины $T_{в3}=T_{пр}$ имеют место разные законы распределений $T_{пр}$.

Наиболее часто имеет место нормальный закон распределения $T_{пр}$.

Иначе говоря, в группе одинаковых изделий, восстанавливаемых после одинаковых отказов по одинаковой технологии, имеет место какое-то среднее время восстановления $T_{пр\ ср}$ и некоторое рассеяние величины $T_{пр}$ в группе вокруг $T_{пр\ ср}$ примерно симметричное в обе стороны.

При этом функция распределения $f_{пр}$ у $T_{пр}$ имеет вид функции Гаусса:

$f_{пр}(t)=\frac{1}{\sigma_{пр}\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(t-m_{tпр})^2}{2\sigma_{пр}^2}}$ (см. рис. 4.6).

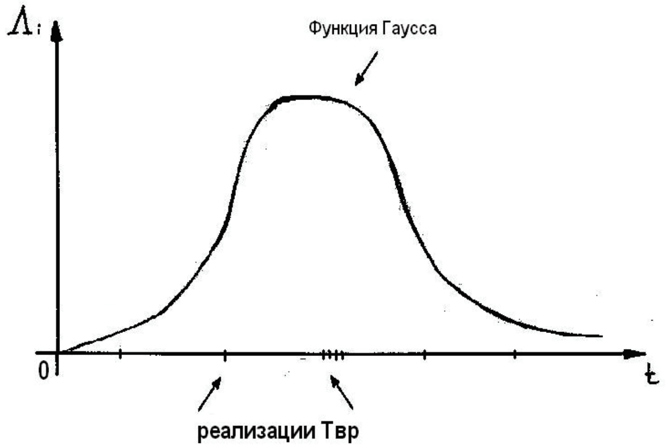

Рис. 4.6. Функция $f_{пр}$ при нормальном законе распределения случайной величины $T_{пр}$

Иногда при восстановлении выполняется условие μ=const, тогда для вероятности восстановления за заданное время $P_в(t)$ имеет место выражение:

$$P_в(t)= 1-e^{-\mu t}.$$

Это соответствует экспоненциальному закону восстановления.

Для других двух стадий времени восстановления $T_в$ ($T_{в1}$ и $T_{в2}$) сбор данных по их законам распределения часто затруднен или не производится. Имеющиеся данные позволяют заключить, что для этих стадий, как и для $T_в$ в целом, наиболее часто справедлив нормальный закон распределения этих случайных величин.

5. НАДЕЖНОСТЬ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Выше шла речь о надежности изделий (например, отдельных элементов техники), имеющих собственные “неделимые” характеристики надежности.

Наряду с этим большой практический интерес представляет оценка надежности сложных технических систем (например, машин, технологических линий, электронных схем и др.) по известной надежности их элементов.

Надежность элементов может по-разному влиять на надежность технических систем в зависимости от структуры этих систем.

5.1. Надежность последовательных технических систем

Рассмотрим, например, последовательную цепь из n электрических лампочек (рис. 5.1).

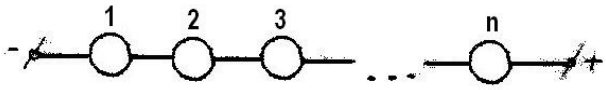

Рис. 5.1. Функциональная схема последовательной цепи электролампочек

Такая цепь безотказно работает лишь при условии одновременной безотказной работы всех n лампочек, то есть при отказе любой лампочки цепь отказывает (свет гаснет).

С точки зрения теории вероятности здесь можно сказать следующее.

Случайное событие, заключающееся в безотказной работе цепи, произойдёт лишь тогда, когда одновременно произойдут n других случайных событий, имеющих место при безотказной работе каждой лампочки.

Такое основное событие в теории вероятности называется произведением этих n других событий, а его вероятность равна произведению вероятностей этих n событий (когда они независимы друг от друга).

Поэтому в нашем случае можно записать следующее равенство:

$$P_c(t) = P_1(t) * P_2(t) * \dots * P_n(t) = \prod_{i=1}^{n} P_i(t),$$

где $P_c(t)$ – вероятность безотказной работы системы (цепи);

$P_i(t)$ – вероятность безотказной работы i-ой электролампочки.

При фиксированном времени $t=t_0$ все $P_i(t)$=const, то есть каждое $P_i(t)$ – это фиксированное число; при всех одинаковых n лампочках в данной цепи все эти константы будут также одинаковыми:

$$P_1(t_0) = P_2(t_0) = \dots = P_n(t_0) = P_л(t_0).$$

Тогда $P_c(t_0) = P_л^n(t_0)$ или $P_c = P_л^n$ (опуская t_0).

Далее, рассматривая также последовательные цепи как невосстанавливаемые изделия, можем записать, например, вероятность отказа цепи будет равна:

$$Qc(t) = 1 - Pc(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P_i(t).$$

При $t=t_0$ и всех одинаковых лампочках

$$Q_c(t_0) = 1 - P_л^n.$$

Для случайной величины T_c – срок службы данной цепи до отказа её функции распределения будет следующим:

$$F_c(t)=Q_c(t) \text{ и } f_c(t) = \frac{dF_c}{dt} = \frac{dQ_c}{dt}.$$

Интенсивность отказов такой цепи равна:

$$\lambda_c(t) = \frac{f_c(t)}{P_c(t)}.$$

Пример.

Пусть при $t=t_0$= 1 год $P_л$=0,9 (то есть из 10 одиночных лампочек за 1 год безотказно проработают 9 лампочек). Тогда $P_c(t_0)=0{,}9^n$. Пусть n= 10 лампочек.

При этом $P_c(t_0)= 0{,}9^{10}=0{,}35$ и $Q_c(t_0)= 1 – 0{,}35 = 0{,}65$.

Видим, что надежность данных невосстанавливаемых последовательных цепей значительно ниже надежности одиночных лампочек, из которых эти цепи составлены (т.к. из 10 одинаковых цепей за год без восстановления безотказно проработает 3÷4 цепи).

Также видим, что надежность последовательных цепей электролампочек снижается с увеличением числа лампочек в них.

В технике часто встречаются технические системы, работающие безотказно только при одновременной безотказной работе всех их элементов (эти системы отказывают при отказе любого их элемента). Например, часто встречаются такие машины, технологические линии, электронные схемы и др.

Все такие системы называются системами с последовательным включением элементов в схемы их надежности или, короче, последовательными системами по надежности.

Например, схема надежности последовательной цепи электролампочек (рис. 5.2) совпадает с её функциональной схемой (см. рис. 5.1).

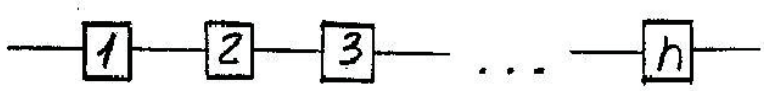

Рис. 5.2. Схема надёжности последовательной цепи электролампочек

Далее, если при произвольной электрической схеме она отказывает при отказе любого её элемента, то схема надежности её тоже чисто последовательная, и надежность такой электрической схемы рассчитывается так же, как надежность последовательной схемы лампочек (см. выше).

То же самое может быть и в случае машин.

Примечание. При составлении схемы надежности машины сначала отбрасывают все её элементы, ни разу не отказывающие за весь срок службы машины (например, станины), и элементы, надежность которых не влияет на надежность этой машины (например, перила, поручни и др.). Если отказ любого из оставшихся элементов машин (из-за износа, поломок, коррозии и др.) приводит к отказу машины в целом, то все эти элементы включены в схему надежности машины последовательно (схема надежности машины может быть составлена на уровне узлов или частей этой машины или более подробно на уровне деталей).

Расчет надежности машины при последовательной схеме её надежности производится в принципе так же, как расчет надежности последовательной цепи электролампочек.

5.1.1. Примеры последовательных технических систем в зависимости от надежности их элементов

1. Пусть в последовательной технической системе надежность всех элементов при первых отказах подчиняется экспоненциальному закону, то есть $P_i(t) = e^{-\lambda_i t}$ (при $\forall i$).

Тогда при первых отказах в группе таких одинаковых систем имеем:
$P_c(t) = P_1(t)*P_2(t)*\ldots*P_n(t) = e^{-\lambda_1 t}*e^{-\lambda_2 t}*\ldots*e^{-\lambda_n t} = e^{-\Sigma\lambda_i t} = e^{-t\Sigma\lambda_i} = e^{-\lambda_c t}$, где $\lambda_c = \Sigma\lambda_i$.

Видим, что в данном случае надежность таких систем при первых отказах также подчиняется экспоненциальному закону. При этом первые отказы систем идут с интенсивностью отказов $\lambda_c = \Sigma\lambda_i$, где λ_i – интенсивность отказов i-тых элементов в этих системах.

2. Пусть надежность всех элементов последовательной системы при их первых отказах подчиняется закону Вейбулла с одинаковым параметром формы m, т.е. $P_i(t) = e^{-t^m/t_{0i}}$. Тогда для таких систем при их первых отказах можно записать:

$$P_c(t) = P_1(t)*P_2(t)*\ldots*P_n(t) = e^{-t^m/t_{01}}*e^{-t^m/t_{02}}*\ldots*e^{-t^m/t_{0n}} = e^{-t^m \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{t_{0i}}} =$$

$$= e^{-t^m/t_{0c}}, \text{где } \frac{1}{t_{0c}} = \sum_{i=1}^{n} 1/t_{0i} ,$$

или, опуская промежуточные выкладки,

$$P_c(t) = e^{-t^m/t_{0c}}.$$

Видим, что надежность таких последовательных систем при их первых отказах также будет подчиняться закону Вейбулла с тем же параметром формы m.

В частности, знаем, что при m = 1 имеет место экспоненциальный закон надежности, а при m = 3,3 имеет место нормальный закон надежности. Таким образом, результат, показанный выше для закона Вейбулла при произвольном m, справедлив и для двух других законов надежности как частных случаев закона Вейбулла.

Пример. Если надежность всех элементов машины (с последовательной схемой надежности) подчинится нормальному закону надежности, то это значит, что любой элемент машины (деталь или узел) имеет какой-то средний срок службы и некоторое рассеивание этих сроков службы вокруг среднего, примерно симметричное в обе стороны по времени работы t и описываемое функцией Гаусса.

Тогда по вышесказанному и для группы таких одинаковых машин тоже будет иметь место какой-то средний срок их службы до 1-го отказа и некоторое рассеивание сроков службы машин при 1-х отказах вокруг этого среднего срока службы, примерно симметричное в обе стороны по времени t и также описываемое своей функцией Гаусса.

В заключение раздела следует указать, что если надежность всех элементов последовательной по надежности технической системы подчиняется закону

Вейбулла с разными параметрами формы m и масштаба t_0 у всех элементов этой системы, то можно показать, что надежность таких последовательных систем при первых отказах также подчиняется закону Вейбулла, параметры которого определяются по параметрам закона Вейбулла для элементов данной технической системы.

5.1.2. Ускорение испытаний на надежность элементов последовательных технических систем

Пусть имеем последовательную по надежности техническую систему, состоящую из одинаковых элементов, надежность которых подчиняется экспоненциальному закону.

Тогда для каждого элемента системы имеем:

$$P_э(t) = e^{-\lambda_э t} \tag{5.1}$$

и аналогично для системы в целом

$$P_c(t) = e^{-\lambda_c t} = e^{-\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_{элi}\right)t} = e^{-n\lambda_{эл} t}, \tag{5.2}$$

$$т.к.\ \lambda_c = n\lambda_э \tag{5.3}$$

Покажем графически зависимости (5.1) и (5.2), например, в ходе испытаний на надежность отдельно группы одинаковых элементов и отдельно группы таких систем (рис. 5.3.).

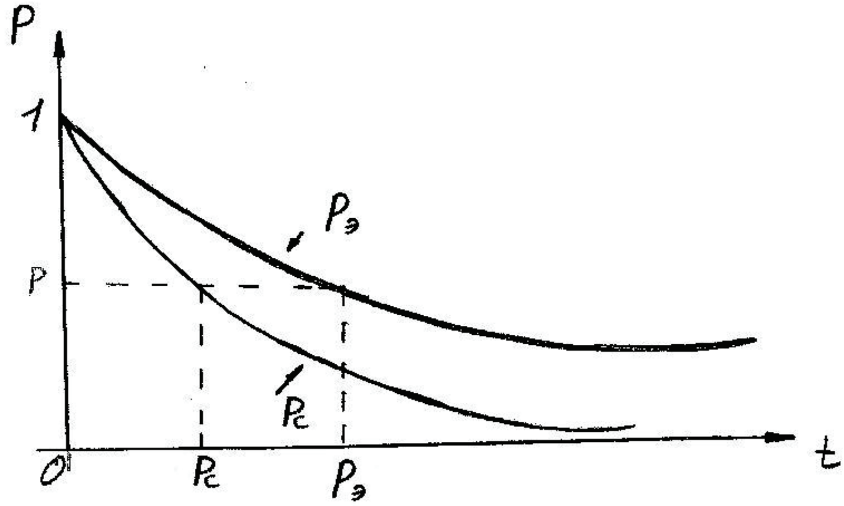

Рис. 5.3. Зависимости $P_э(t)$ и $P_c(t)$

Рассмотрим моменты времени, соответствующие одинаковому количеству отказов элементов и систем. При этом одинаковы и количества остающихся работоспособных элементов $N_{р\,э}$ и систем $N_{р\,с}$, а поэтому одинаковы и величины $P_э(t)$ и $P_c(t)$, так как если

$$N_{р\,э} = N_{р\,с},$$

$$то \quad \frac{N_{р\,э}}{N} = \frac{N_c}{N},$$

$$а\ так\ как\ P_э \cong \frac{N_{рэ}}{N} \qquad P_c \cong \frac{N_{рс}}{N},$$

$$\text{то и } P_э(t_э) \cong P_c\,(t_c). \tag{5.4}$$

(при одинаковых количествах N испытуемых элементов и систем).

Равенство (5.4) означает, что $e^{-\lambda_э t_э} = e^{-\lambda_c t_c}$ в моменты времени $t_э$ и t_c, когда имеют место одинаковые количества отказов в группе элементов и в группе систем из этих элементов.

Но так как $\lambda_c = n\lambda_э$, то получаем:

$$e^{-\lambda_э t_э} = e^{-n\lambda_э t_c}. \tag{5.5}$$

Из равенства (5.5) получаем:

$$-\lambda_э t_э = -n\lambda_э t_c,$$

то есть $t_э = nt_c$ и

$$t_c = \frac{t_э}{n}. \tag{5.6}$$

Покажем на рис. 5.3 моменты времени $t_э$ и t_c, соответствующие равенству

$$P_э = P_c = P.$$

Видим, что, согласно (5.6), в данных условиях для получения одинакового количества отказов при испытаниях последовательных систем нужно времени в n раз меньше, чем при испытаниях отдельных элементов.

Поэтому, если нужно получить данные по надежности отдельных элементов, например, величину их интенсивности отказов $\lambda_э$, то для ускорения испытаний можно ставить на испытания последовательные системы по n элементов в каждой системе.

По результатам испытаний получаем величину интенсивности отказов систем λ_c, по которой, пользуясь равенством (5.3), находим искомую величину интенсивности отказов элементов $\lambda_э$:

$$\lambda_э = \frac{\lambda_c}{n}. \tag{5.7}$$

Времени на такие испытания систем затрачивается в n раз меньше, чем на испытания отдельных элементов (согласно равенству (5.6)).

Пример. Если необходимо экспериментально определить характеристику надежности новых подшипников качения – их интенсивность отказов λ_n , то вместо одиночных подшипников на испытания можно ставить комплекты по n подшипников в каждом комплекте (в каждом комплекте все подшипники испытываются независимо друг от друга). За отказ комплекта считается 1-й отказ подшипника в нем.

По данным испытаний экспериментально находят интенсивность отказов комплектов подшипников ($\lambda_к$) и затем искомую величину λ_n подсчитывают по равенству:

$$\lambda_n = \frac{\lambda_k}{n}. \tag{5.8}$$

Времени на такие испытания нужно в n раз меньше, чем на испытания одиночных подшипников.

Указанный подход возможен и в случаях других новых узлов и деталей машин (в пределах их стадий нормальной эксплуатации).

5.2. Надежность параллельных технических систем

Рассмотрим теперь схему с параллельным подключением n электролампочек к источнику питания (рис. 5.4.).

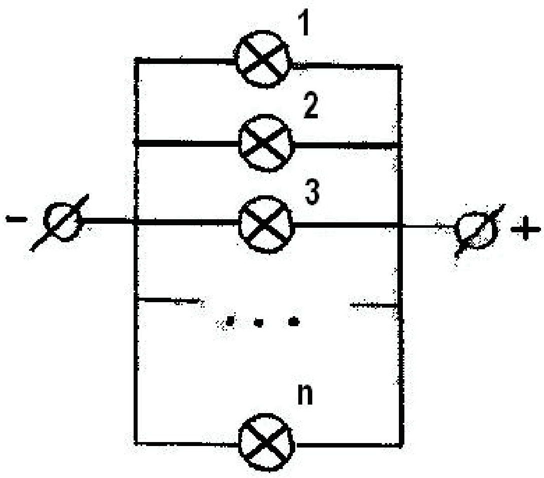

Рис. 5.4. Функциональная схема параллельной цепи электролампочек

Здесь схема полностью откажет (света не будет) лишь при одновременном отказе всех электролампочек. Иначе говоря, случайное событие, заключающееся в полном отказе схемы, произойдёт лишь тогда, когда одновременно произойдут n других случайных событий, заключающихся в отказе каждой лампочки. Поэтому отказ схемы есть случайное событие, являющееся произведением n других случайных событий, заключающихся в отказе каждой лампочки, и вероятность отказа схемы равна произведению вероятностей отказов лампочек (когда отказы всех лампочек независимы друг от друга):

$$Qc(t) = Q_1(t) * Q_2(t) * \dots * Q_2(t) = \prod_{i=1}^{n} Q_i(t),$$

где $Q_c(t)$ – вероятность отказа системы (схемы);

$Q_i(t)$ – вероятность отказа i-ой лампочки.

В фиксированный момент времени $t = t_0$ все $Q_i = const$ (т.е. Q_i становятся постоянными числами), а если при этом все лампочки одинаковые, то все эти константы одинаковые:

Тогда $Q_c(t_0) = Q_л^n$ или, короче, $Q_c = Q_л^n$.

Вероятность безотказной работы данной схемы (как невосстанавливаемые изделия) равна:

$$P_c(t) = 1 - Q_c(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} Q_i(t).$$

При $t = t_0$ и всех одинаковых лампочках

$$P_c = 1 - Q_л^n.$$

Функции распределения случайной величины T_c (срока службы таких схем до первых отказов) будут следующими:

$$F_c = Q_c \qquad \text{и} \qquad f_c = \frac{dF_c}{dt} = \frac{dQ_c}{dt}.$$

Интенсивность отказов λ_c этих схем при их первых отказах имеет вид:

$$\lambda_c = \frac{f_c}{P_c}.$$

Пример. Пусть $t = t_0 = 1$ год, все $Q_i = Q_л = 0{,}1$ и $n = 10$ (схема включает 10 одинаковых лампочек, и за год из 10 таких одинаковых одиночных лампочек откажет одна).

Тогда $Q_c(t_0) = 0{,}1^{10}$.

Видим, что надежность системы здесь повышается с увеличением числа лампочек (вероятность отказа схемы с ростом n снижается), и надежность системы здесь выше надежности одиночных лампочек ($Q_c \leq Q_л$).

В технике встречаются системы, которые отказывают лишь при одновременном отказе всех их элементов. Например, это система 2-х парашютов у парашютиста, система эскалаторов на станции метро, система основного и резервного насосов в цехе целлюлозно-бумажного комбината (ЦБК) и др.

Все такие системы называются системами с параллельным включением элементов в схему надежности системы (параллельными системами по надежности).

Термины «последовательные» и «параллельные» системы заимствованы в теории надежности из электро- и радиотехники.

Например, схема надежности системы из n электролампочек, параллельно подключенных к источнику питания, практически совпадает с функциональной схемой данной системы (см. выше).

Здесь, если при каком-то $t = t_0$ $Q_{H1} = Q_{H2} = 0{,}1$, то $Q_c(t_0) = 0{,}1^2 = 0{,}01$. Таким образом, если из 10 одинаковых одиночных насосов за время t_0 откажет 1, то за это же время t_0 одна такая система (из 2-х насосов) откажет лишь из 100 таких систем (т.е. вероятность отказа системы из 2-х насосов в 10 раз ниже вероятности отказа одиночного работающего насоса).

Примечание. Снижение вероятности отказа в 10 раз системы из двух насосов называется повышением надежности в 10 раз за счет резервного насоса.

В общем случае схемы надежности технических систем включают участки с последовательным и параллельным включением элементов в схемы надежности систем. Участки с последовательным включением элементов называются основными, так как встречаются наиболее часто.

5.2.1. Примеры схем надежности систем общего вида

Знаем, что если техническая система (например, произвольная электрическая схема) отказывает при отказе любого её элемента, то схема надежности такой системы – чисто последовательная (рис. 5.5).

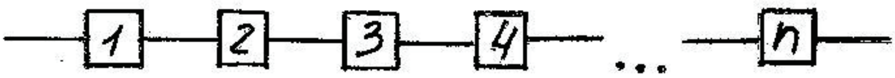

Рис. 5.5. Схема надёжности произвольной последовательной системы

Если в такой электрической схеме для повышения надежности дополнительно установлены резервные элементы, используемые при отказе основных, то в указанной схеме надежности появляются участки с параллельным включением элементов (например, как на рис. 5.6).

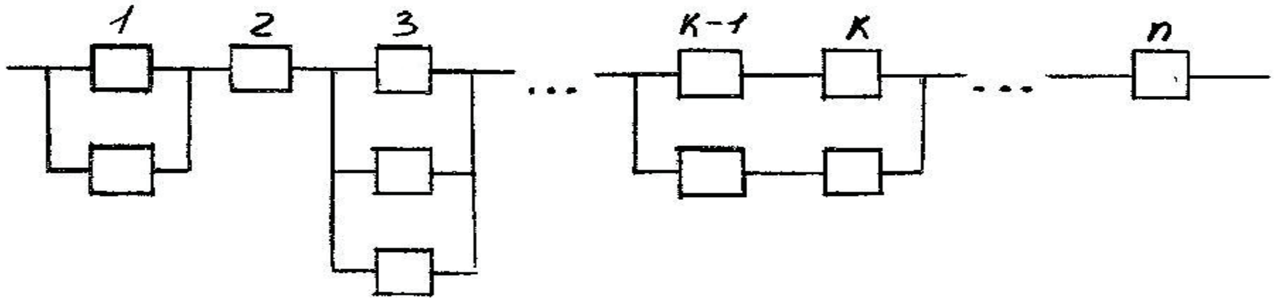

Рис. 5.6. Схема надёжности последовательной системы с подключением резервных элементов

Здесь 1-й основной элемент снабжен одним резервным элементом, 3-й основной элемент снабжен двумя резервными элементами, блок из двух основных элементов (к-1-го и к-го) снабжен таким же резервным блоком из указанных элементов (в качестве резервных могут быть участки по несколько элементов).

В электротехнике, радиотехнике, электронике такое резервирование для повышения надежности используется часто.

Иногда резервирование элементов используется также в машинах и технологических линиях предприятий. Однако здесь это применяется гораздо реже из-за более высокой стоимости резервирования.

Например, иногда в подшипниковых узлах машин и аппаратов для повышения надёжности устанавливают по два подшипника.

Резервированием можно (в какой-то мере условно) считать также наличие запчастей (запасных узлов, деталей) на складе для работающих машин и аппаратов. В этом случае схема надёжности системы: машина (аппарат) с запчастями – может выглядеть аналогично показанной выше на рис. 5.6 для электрической схемы с резервированием.

В технологических линиях предприятий, как было сказано выше, тоже могут устанавливаться резервные элементы этих линий. Иногда могут резервироваться также участки технологических линий.

Пример. Если в древесно-подготовительном цехе (ДПЦ) целлюлозного завода на ЦБК имеются 3 основные технологические линии (это участки основной линии предприятия), состоящие каждая из корообдирочного барабана, рубительной машины, сортировок, то для повышения надёжности в цехе может быть дополнительно установлена ещё и 4-я линия (в том же составе), которая используется при отказе какой-либо из основных линий.

5.2.2. Понятие о резервировании техники

Резервирование – это метод повышения надёжности техники, при котором используются какие-то дополнительные возможности повышения надёжности сверх минимально необходимых для нормальной работы.

Основные виды резервирования.

1. При *структурном* резервировании в структуру технической системы (машины, технологической линии, электронной схемы и т.д.) для повышения надёжности включаются дополнительные (резервные) элементы, обычно одинаковые с основными элементами системы.

При этом, если резервные элементы при работе основных элементов не используются (используются только при отказе основных), то это ненагруженный резерв.

Если резервные элементы используются всё время, в том числе и одновременно с основными, то это нагруженный резерв.

Кратностью структурного резервирования называется отношение числа резервных элементов к числу основных, резервируемых ими. При кратности резервирования, равной единице, имеем дублирование.

2. При *нагрузочном* резервировании для повышения надёжности техники используется способность её элементов и систем в целом нести повышенную нагрузку (в широком смысле слова) по сравнению с минимально необходимой для нормальной работы.

Например, при проектировании машин и аппаратов обычно обеспечивается повышенная прочность основных деталей по сравнению с минимально необходимой прочностью (см. курс «Детали машин» – коэффициенты запаса по прочности).

Аналогично в проект машины могут закладываться завышенная скорость и мощность привода машины (для возможности её дальнейших модернизаций в ходе эксплуатации), при создании системы трубопроводов могут предусматриваться участки с завышенной пропускной способностью (например, при возможности их засорения и др.), в электрических схемах могут использоваться конденсаторы с завышенным напряжением пробоя и т.д.

Вся совокупность средств для повышения надёжности технической системы путём резервирования разных видов называется резервом данной технической системы по надёжности.

5.3. Использование теоремы о сложении вероятностей при оценке надёжности технических систем

До сих пор при оценке надёжности технических объектов использовали теорему о произведении вероятностей, однако при этом используется и теорема о сложении вероятностей.

Для её использования напомним, что случайное событие А в теории вероятностей называется суммой двух других случайных событий В и С, и это записывается так:

$$A=B+C,$$

если событие А происходит лишь тогда, когда происходит либо событие В, либо С, или оба они одновременно (когда события В и С совместны).

При этом вероятность события А равна вероятности события В плюс вероятность события С минус вероятность того, что оба эти события (В и С) произойдут одновременно:

$$P(A)=P(B)+P(C)-P(B \cdot C).$$

Для независимых событий В и С:

$$P(B \cdot C)=P(B) \cdot P(C).$$

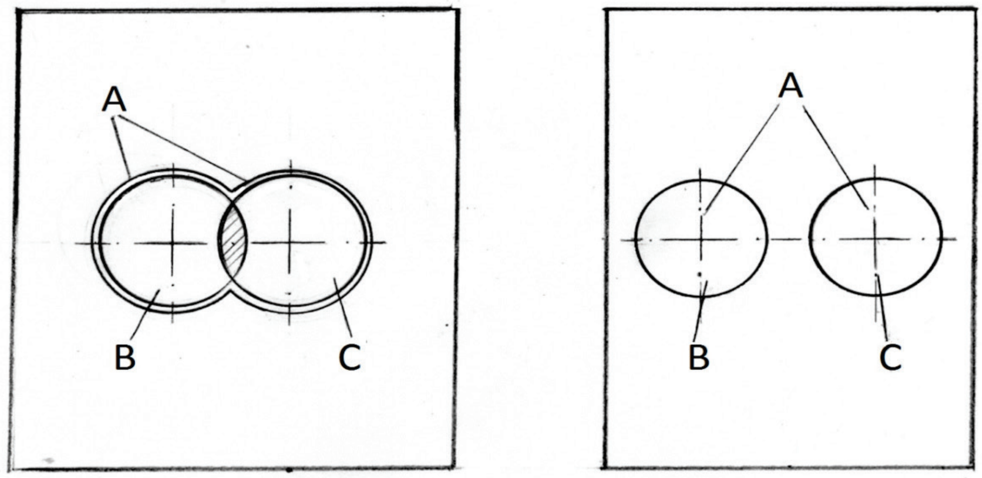

Рис. 5.7. Расчётная схема примера к теореме о сложении вероятностей

Для несовместных событий В и С (события В и С одновременно происходить не могут и $P(B \cdot C)=0$) имеем теорему о сложении вероятностей в чистом виде:

$$P(A)=P(B)+P(C).$$

Пример. Пусть на листе бумаги изображены две фигуры (В и С) – см. рис. 5.7.

Фигура А получается объединением фигур В и С, и это записывается так:

$$A=B \cup C.$$

Проведём мысленное испытание, заключающееся в том, что бросаем случайным образом материальную точку на указанный лист бумаги. Считаем попадание материальной точки в любую точку листа бумаги равновероятным (при этом материальная точка обязательно попадёт в данный лист бумаги).

Тогда попадание материальной точки в фигуру В – это событие В, попадание в фигуру С – это событие С, а попадание в фигуру А – это событие А.

Здесь событие А произойдёт лишь тогда, когда произойдут либо событие В, либо событие С, либо и то, и другое события произойдут одновременно (то есть материальная точка попадёт в пересечение фигур В и С – когда события В и С совместны).

Очевидно, что при данных условиях вероятность попадания материальной точки в фигуру пропорциональна площади этой фигуры. Более точно, при равновероятном попадании бросаемой точки в каждую точку листа вероятность попадания в фигуру равна той доле, которую площадь этой фигуры занимает в общей площади листа.

В данном случае события В и С независимы друг от друга, поэтому $P(B\cdot C) = P(B)\cdot P(C)$.

Применим теперь теорему о сложении вероятностей к бумагоделательной машине (БДМ).

Рассмотрим многодвигательный привод сушильной части БДМ. При таком приводе все сушильные цилиндры машины разделены на несколько групп по приводу.

Каждая приводная группа цилиндров имеет свой электродвигатель, вращение от которого передаётся через механическую зубчатую передачу на все сушильные цилиндры данной приводной группы.

Привод группы цилиндров укрупненно можно считать состоящим из двух элементов: двигателя и механической передачи. Так как привод откажет при отказе любого из этих элементов, то они в упрощённую схему надёжности привода включены последовательно:

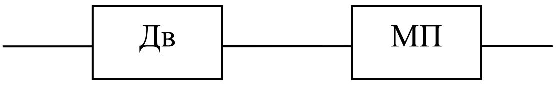

Рис. 5.8. Схема надежности привода

Пусть по данным эксплуатации известно, что в течение года вероятность безотказной работы двигателя равна 0,8, а вероятность безотказной работы механической передачи равна 0,7:

$$P_{Дв} = 0{,}8, \quad P_{МП} = 0{,}7.$$

Далее, так как двигатель и механическая передача включены последовательно в схему надёжности привода, то по теореме произведения вероятностей вероятность безотказной работы привода равна:

$$P_{Пр} = P_{Дв}\cdot P_{Мп} = 0{,}8\cdot 0{,}7 = 0{,}56.$$

Рассмотрим теперь случайное событие, заключающееся в отказе привода.

В данном случае привод группы цилиндров откажет, если откажет либо двигатель, либо механическая передача, либо и двигатель, и передача одновременно. Пусть отказ привода – это событие А, отказ двигателя – событие В и отказ механической передачи – событие С.

Тогда видим, что по определению суммы двух случайных событий можем записать:

$$A=B+C \text{ и}$$

$$P(A) = P(B) + P(C) - P(B \cdot C)$$

или более точно

$$P(A) = P(B) + P(C) - P(B) \cdot P(C).$$

Переобозначив в последнем равенстве все вероятности отказов, как это принято в нашем курсе, через Q, можем переписать это последнее равенство в виде:

$$Q_{\text{Пр}} = Q_{\text{Дв}} + Q_{\text{Мп}} - Q_{\text{Дв}} \cdot Q_{\text{Мп}} = 0{,}2 + 0{,}3 - 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}44.$$

Так как отказ и безотказная работа привода вместе составляют полную группу случайных событий, то сумма их вероятностей должна быть равна единице.

Выше было показано, что

$$P_{\text{Пр}} = 0{,}56 \text{ и } Q_{\text{Пр}} = 0{,}44.$$

Сложив эти величины, получаем:

$$P_{\text{Пр}} + Q_{\text{Пр}} = 0{,}56 + 0{,}44 = 1, \text{как и должно быть.}$$

Таким образом, оценка данных вероятностей произведена правильно.

В данном примере теорема произведения вероятностей использована для подсчёта вероятности безотказной работы привода, а теорема о сложении вероятностей – для подсчёта вероятности отказа привода.

Привод группы сушильных цилиндров был рассмотрен как последовательная техническая система (с точки зрения надёжности), состоящая из двух элементов: двигателя и механической передачи.

5.4. Оценка различных вариантов повышения надёжности последовательных систем применением структурного резервирования

Оценим, что больше повышает надёжность последовательной технической системы: резервирование системы целиком или резервирование её элементов.

Вначале оценим это на примере автомобиля.

Надёжность автомобиля в основном лимитируется двумя его узлами: двигателем и коробкой передач.

1. Оценим вначале надёжность автомобиля без резервирования.

Пусть известно, что вероятность безотказной работы двигателя за год $P_{\text{Дв}} = 0{,}9$. Тогда вероятность отказа двигателя за год $Q_{\text{Дв}} = 0{,}1(Q_{\text{Дв}} = 1 - P_{\text{Дв}})$.

Аналогично вероятность безотказной работы коробки передач пусть тоже: $P_{\text{КП}} = 0{,}9$ и $Q_{\text{КП}} = 0{,}1$.

Так как автомобиль отказывает при отказе любого из этих двух узлов, то они в упрощённую схему надёжности автомобиля включены последовательно.

Поэтому по теореме произведения вероятностей вероятность безотказной работы автомобиля равна:

$$P_А = P_{Дв} \cdot P_{кп} = 0{,}9 \cdot 0{,}9 = 0{,}81 \cong 0{,}8 = P_{C1}$$

(P_{C1} - вероятность безотказной работы системы 1-автомобиля без резервирования).

2. Надёжность при резервировании автомобиля в целом (при наличии запасного автомобиля).

Схема надёжности системы из двух автомобилей имеет вид (рис. 5.9).

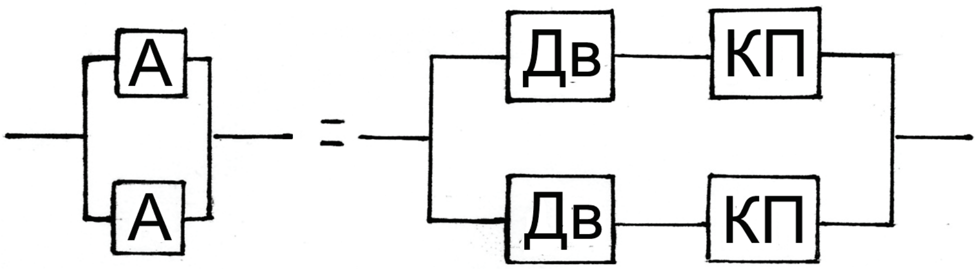

Рис. 5.9. Схема надёжности системы двух автомобилей (основного и резервного)

В данном случае вероятность отказа системы равна:

$$Q_{C2} = Q_{C1}^2 = Q_A^2 = 0{,}2^2 = 0{,}04,$$

а $$P_{C2} = 1 - 0{,}04 = 0{,}96.$$

Видим, что при наличии запасного автомобиля вероятность отказа снизилась ~ в 5 раз:

$$\frac{Q_{C1}}{Q_{C2}} = \frac{0{,}2}{0{,}04} = 5.$$

В таких случаях говорят, что надёжность повышена в 5 раз за счёт запасной машины.

3. Надёжность при резервировании отдельных узлов автомобиля (наличие запасных узлов (запчастей)).

При резервировании отдельных узлов схема надёжности получающейся технической системы принимает вид (рис. 5.10):

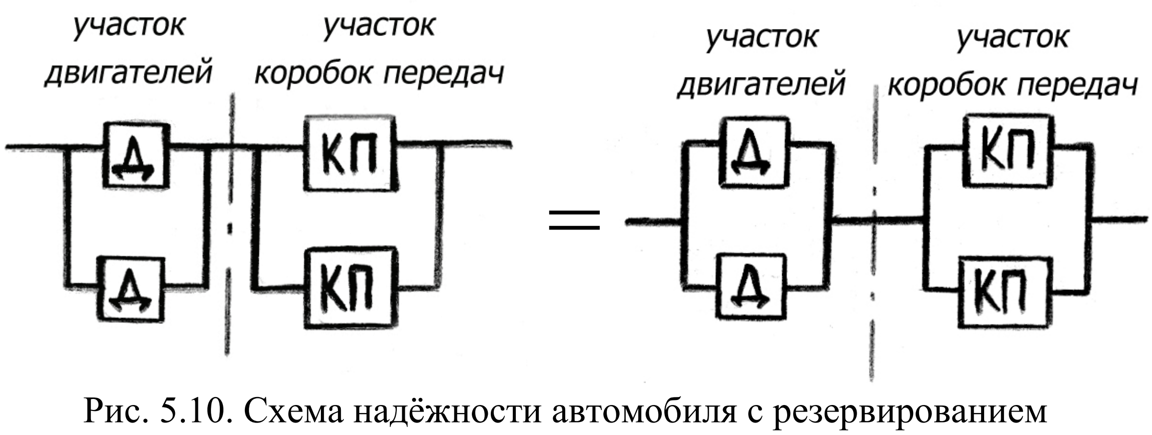

Рис. 5.10. Схема надёжности автомобиля с резервированием (дублированием) основных узлов

Для системы из двух двигателей (соответствующего участка общей схемы надёжности):

$$Q_{\text{уч.дв}} = 0{,}1^2 = 0{,}01\,,\ \mathrm{P}_{\text{уч.дв.}} = 1 - 0{,}01 = 0{,}99.$$

Аналогично для участка коробки передач:

$$Q_{\text{уч.кп}} = 0{,}1^2 = 0{,}01\,, \mathrm{P}_{\text{уч.кп}} = 0{,}99.$$

Так как оба участка включены в общую схему надёжности 3-й системы последовательно, то по теореме произведения вероятностей можно записать:

$$\mathrm{P}_{\text{С3}} = \mathrm{P}_{\text{уч.дв}} \cdot \mathrm{P}_{\text{уч.кп}} = 0{,}99^2 = 0{,}98,$$

$$Q_{\text{С3}} = 1 - 0{,}98 = 0{,}02.$$

Видим, что при таком резервировании вероятность отказа снижена в 10 раз, т.е. здесь надёжность повышена в 10 раз (за счёт запасных узлов).

Таким образом наличие запасных узлов больше повышает надёжность автомобиля, чем наличие запасной машины.

Рассмотрим теперь последовательную (с точки зрения надёжности) техническую систему с количеством элементов, равным 10. Этот пример будет ближе, например, к случаю БДМ, когда упрощённая схема надёжности машины составляется на уровне основных частей машины (сеточной части, прессовой, сушильной и т.д.).

Рис. 5.11. Схема надёжности машины, отказывающей при отказе любого её элемента

Аналогично предыдущему примеру также рассмотрим 3 случая: 1) машина без резервирования; 2) резервирование машины в целом; 3) резервирование отдельных частей машины.

1. Надёжность машины без резервирования.

Так как машина отказывает при отказе любой из её частей, то она представляет собой последовательную систему. Её схема надёжности имеет вид (рис. 5.11):

Пусть по данным эксплуатации за какой-то характерный период (например, за год) вероятность безотказной работы каждого элемента этой системы примерно равна $\mathrm{P}_{эi} = 0{,}9$ и, соответственно, вероятность отказа элемента равна $Q_{эi} = 0{,}1$.

Тогда вероятность безотказной работы машины в целом равна:

$$\mathrm{P}_{\text{С1}} = P_{эi}^{n} = 0{,}9^{10} = 0{,}35,$$

и её вероятность отказа:

$$Q_{C1} = 1 - 0{,}35 = 0{,}65.$$

2. Резервирование системы в целом.

При этом схема надёжности системы двух машин имеет вид (рис. 5.12).

Тогда вероятность отказа такой системы равна:

$$Q_{C2} = Q_{C1}^2 = 0{,}65^2 = 0{,}42,$$

и её вероятность безотказной работы:

$$P_{C2} = 1 - Q_{C2} = 1 - 0{,}42 = 0{,}58.$$

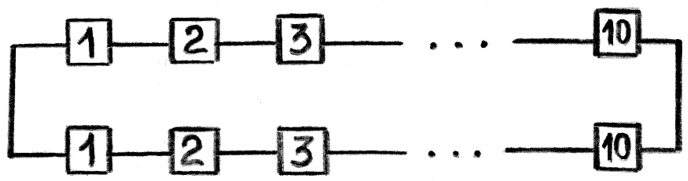

Рис. 5.12. Схема надёжности системы двух машин (основной и резервной)

3. Резервирование отдельных элементов машины (их дублирование).

При этом схема надёжности системы машина – запасные элементы машины имеет вид (рис. 5.13):

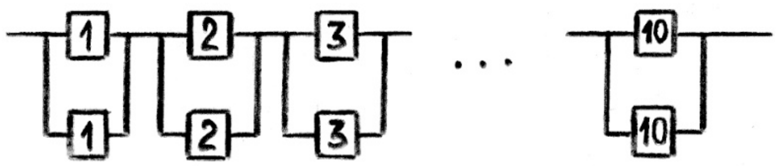

Рис. 5.13. Схема надёжности машины, отказывающей при отказе любого элемента (при дублировании каждого её элемента)

Здесь схема надёжности состоит из 10 участков, на каждом из которых параллельно подключены друг к другу два одинаковых элемента.

Вероятность отказа каждого участка схемы равна:

$$Q_i = Q_{эi}^2 = 0{,}1^2 = 0{,}01,$$

и вероятность безотказной работы участка такова:

$$P_i = 1 - Q_i = 1 - 0{,}01 = 0{,}99.$$

По теореме произведения вероятностей вероятность безотказной работы всей системы 3 равна:

$$\mathrm{P}_{C3} = 0{,}99^{10} = 0{,}9,$$

и её вероятность отказа:

$$Q_{C3} = 1 - \mathrm{P}_{C3} = 1 - 0{,}9 = 0{,}1.$$

Сведём в таблицу результаты всех оценок надёжности последовательных систем при n=2 и n=10 при разных случаях резервирования.

Таблица 5.1 – Результаты всех оценок надёжности последовательных систем

n	$Q_{\text{сист } i}$		
	i=1	i=2	i=3
2	0,2	0,04	0,02
10	0,65	0,42	0,1

Здесь

i=1 – система без резервирования.

i=2 – резервирование (дублирование) системы в целом.

i=3 – резервирование (дублирование) всех элементов системы по отдельности (наличие запасных элементов системы).

Видим, что при любом количестве элементов в последовательной технической системе надёжность системы повышается больше при резервировании отдельных элементов (например, наличие запчастей для машин), чем при резервировании системы в целом (например, наличие запасной машины). Поэтому на производстве гораздо чаше к машинам имеют неснижаемые запасы запчастей, и сравнительно редко рядом с основными машинами ставят запасные машины на случай отказа основных (например, рядом с основными насосами в цехах часто рядом ставят запасные насосы, хотя и в этом случае имеются запчасти к этим насосам).

6. ОЦЕНКА НАДЁЖНОСТИ РАЗЛИЧНЫХ ТЕХНИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

Задача 1. Рассчитать вероятность безотказной работы $\mathrm{P_c}(t)$ технической системы из последовательно соединённых в схеме надёжности 3-х элементов при наработке t = 300 часов.

Средние сроки службы (ресурсы) элементов равны:

$\mathrm{T_{P1}} = 1400$ ч.

$\mathrm{T_{P2}} = 2000$ ч.

$\mathrm{T_{P3}} = 3000$ ч.

Законы распределения ресурсов (случайной величины $\mathrm{T_P}$), т.е. законы надёжности, у всех элементов экспоненциальные.

Решение.

Схема надёжности данной последовательной системы имеет вид (рис. 6.1),

её структурная формула:

1-2-3.

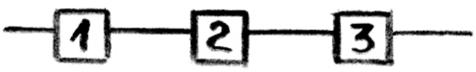

Рис. 6.1. Схема надёжности

Согласно теореме произведения вероятностей, вероятность безотказной работы данной последовательной системы равна:

$$P_c(t) = P_1(t)\cdot P_2(t)\cdot P_3(t) = e^{-\lambda_1 t}\cdot e^{-\lambda_2 t}\cdot e^{-\lambda_3 t} = e^{-\frac{1}{T_{p1}}t}\cdot e^{-\frac{1}{T_{p2}}t}\cdot e^{-\frac{1}{T_{p3}}t} =$$

$$= e^{-\left(\frac{1}{T_{p1}}+\frac{1}{T_{p2}}+\frac{1}{T_{p3}}\right)t} = 2{,}7^{-(\frac{1}{1400}+\frac{1}{2000}+\frac{1}{3000})\cdot 300} = 2{,}7^{-1{,}5\cdot 10^{-3}\cdot 300} =$$

$$= 2{,}7^{-0{,}45} = \frac{1}{2{,}7^{0{,}45}} = 0{,}57.$$

На наработку 300 часов для обеспечения безотказной работы указанных последовательных систем надо иметь запасных систем (1-0,57)=0,43 от исходного количества таких работающих систем.

Примечание. Указанная последовательная техническая система может представлять собой, например, новый узел машины, состоящий из $3^х$ деталей, если этот узел отказывает при отказе любой из его деталей.

Задача 2. Рассчитать вероятность безотказной работы $P_c(t)$ технической системы из параллельно соединённых в схеме надёжности трёх однотипных элементов при наработке t=500 часов.

Средний ресурс элемента $\text{Т}_\text{р} = 1000$ ч.

Закон распределения ресурсов элементов (т.е. закон надёжности элементов) экспоненциальный.

Решение.

Схема надёжности данной технической системы имеет вид (рис. 6.2), её структурная формула:

1/2/3.

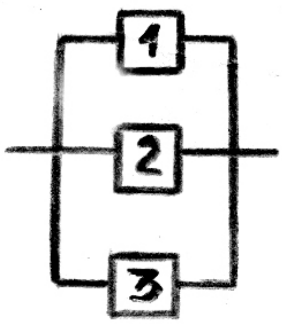

Рис. 6.2. Схема надёжности

Для данной параллельной технической системы, согласно теореме произведения вероятностей, имеем: вероятность отказа системы

$$Q_c(t) = Q_1(t)\cdot Q_2(t)\cdot Q_3(t),$$

где $Q_i(t)$ - вероятность отказа i-го элемента системы ($Q_i(t) = 1 - P_i(t)$ - где $\mathrm{P}_i(t)$ - вероятность безотказной работы i-го элемента системы).

Тогда вероятность безотказной работы данной технической системы $\mathrm{P_c}(t)$ равна:

$$\mathrm{P}_c(t) = 1 - Q_c(t) = 1 - Q_1(t) \cdot Q_2(t) \cdot Q_3(t) = 1 - \big(1 - P_1(t)\big) \cdot \big(1 - \mathrm{P}_2(t)\big) \cdot \big(1 - \mathrm{P}_3(t)\big) = 1 - \big(1 - \mathrm{P}_{\text{эл}}(t)\big)^3 = 1 - (1 - e^{-\lambda_{\text{эл}} t})^3 = 1 - (1 - e^{-\frac{1}{\mathrm{T_p}} t})^3 = 1 - (1 - 2{,}7^{-\frac{500}{1000}})^3 = 1 - (1 - 2{,}7^{-0{,}5})^3 = 0{,}94.$$

Примечание. Данная параллельная техническая система из 3-х элементов может представлять собой, например, систему из 3-х новых насосов (одного основного и двух запасных).

Задача 3. Определить вероятность безотказной работы радиально-упорного подшипника при наработке t=2000 часов. Надёжность подшипника подчиняется закону надёжности Вейбулла в виде P(t)=$e^{-(\frac{t}{A})^B}$, где B – параметр формы, A – параметр масштаба.

Параметр формы B=1,8. Параметр масштаба A=1500 часов.

Решение.

Подставляя значения t, B и A в приведённое выражение закона Вейбулла, получаем:

$$\mathrm{P}(t) = e^{-(\frac{t}{A})^B} = 2{,}7^{-(\frac{2000}{1500})^{1{,}8}} = 2{,}7^{-1{,}67} = 0{,}19.$$

В данном случае из группы в 10 подшипников за 2000 часов непрерывной работы безотказно проработает ~2 подшипника. Для обеспечения безотказной работы указанной группы в 10 подшипников в течение 2000 часов необходимо иметь 8 запасных подшипников.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данном учебном пособии рассмотрены основы надежности машин, невосстанавливаемых и восстанавливаемых технических объектов, основы надежности сложных технических систем применительно к машинам, аппаратам и их элементам. Дано представление об основных закономерностях надежности при отказах и восстановлении технических объектов, основных видах технических систем с точки зрения надежности и др.

Представленный в учебном пособии материал позволяет студентам самостоятельно изучить азы дисциплины «Основы надежности машин» и разобраться самостоятельно в основных задачах курса и просчитать основные показатели надежности для восстанавливаемых и невосстанавливаемых деталей и узлов механизма.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Решетов, Д. Н. Надёжность машин [Текст] учебное пособие / Д. Н. Решетов, А. С. Иванов, В. З. Фадеев. – М.: Высшая школа, 1988. – 238с.

2. Амалицкий, В. В. Надёжность машин и оборудования лесного комплекса [Текст] учебное пособие / В. В. Амалицкий и др. – М.: МГУЛ, 2002. – 279с.

3. Проников, А. С. Надежность машин [Текст] учебное пособие / А. С. Проников. – М.: Машиностроение,1978. –592 с.

4. ГОСТ 27.002-89. Надёжность в технике. Основные понятия. Термины и определения [Текст]. – Введ. 1990–07–01.

5. ГОСТ 27.002-2015. Надёжность в технике. Термины и определения [Текст]. – Введ. 2017–03–01.

Учебное издание

Кокушкин Николай Николаевич
Клюшкин Иван Владимирович
Головко Виктор Евгеньевич
Кауров Павел Викторович
Шишкин Федор Дмитриевич

Основы надежности машин

Учебное пособие

Редактор и корректор М. Д. Баранова
Техн. редактор Д. А. Романова

Учебное электронное издание сетевого распространения

Системные требования:
электронное устройство с программным обеспечением
для воспроизведения файлов формата PDF

Режим доступа: http://publish.sutd.ru/tp_get_file.php?id=202016, по паролю.
- Загл. с экрана.

Дата подписания к использованию 03.02.2023 г. Рег. № 5083/22

Высшая школа технологии и энергетики СПбГУПТД
198095, СПб., ул. Ивана Черных, 4.