

**П. В. Кауров, В. Е. Головки,
И. В. Ключкин, С. Г. Петров**

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
Часть 2. ДИНАМИКА, КРУЧЕНИЕ, ИЗГИБ
Учебно-методическое пособие

**Санкт-Петербург
2022**

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

**«Санкт-Петербургский государственный университет
промышленных технологий и дизайна»
Высшая школа технологии и энергетики**

**П. В. Кауров, В. Е. Головко,
И. В. Ключкин, С. Г. Петров**

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
Часть 2. ДИНАМИКА, КРУЧЕНИЕ, ИЗГИБ

Учебно-методическое пособие

Утверждено Редакционно-издательским советом ВШТЭ СПбГУПТД

Санкт-Петербург
2022

УДК 539.4(075)
ББК 30.121 я 7
Т 337

Рецензенты:

доктор технических наук, заслуженный работник высшей школы РФ,
профессор кафедры системного анализа Санкт-Петербургского государственного
технологического института (технического университета)

В. А. Холоднов;

заведующий кафедрой информационно-измерительных технологий и систем управления
Высшей школы технологии и энергетики СПбГУПТД, кандидат технических наук

В. И. Сидельников

Головко, В. Е. Кауров, П. В., Ключкин, И. В., Петров, С. Г.
Т 337 Теоретическая механика Часть 2. Динамика, кручение, изгиб: учебно-
методическое пособие / П. В. Кауров, В. Е. Головко, И. В. Ключкин,
С. Г. Петров. – СПб.: ВШТЭ СПбГУПТД, 2022. – 53 с.

Учебно-методическое пособие соответствует программам и учебным планам дисциплины «Теоретическая механика» для студентов, обучающихся по направлениям подготовки: 15.03.02. Технологические машины и оборудование; 13.03.01 «Теплоэнергетика и теплотехника», 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника», 15.03.04 «Автоматизация технологических процессов и производств».

В учебно-методическом пособии изложен курс теоретической механики, даны основные понятия и определения. Рассмотрены разделы «Динамика», «Кручение», «Изгиб» и их основные задачи.

УДК 539.4(075)
ББК 30.121 я 7

© ВШТЭ СПбГУПТД, 2022
© Кауров П. В., Головко В. Е.,
Ключкин И. В., Петров С.Г., 2022

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
1. ДИНАМИКА.....	4
1.1. Интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки, находящейся под действием переменных сил.....	4
1.2. Теорема об изменении количества движения механической системы в ее применении к сплошной среде.....	9
1.3. Применение теоремы об изменении кинетической энергии к изучению движения механической системы.....	17
2. КРУЧЕНИЕ И ИЗГИБ.....	27
2.1. Продольная деформация.....	27
2.2. Кручение	35
2.3. Изгиб.....	44
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	53

ВВЕДЕНИЕ

Механика играет весьма существенную роль в подготовке студентов любого профиля. Изучая эту дисциплину, студенты знакомятся с основными законами и принципами равновесия, движения и прочности твердых тел, деталей машин и элементов конструкций.

Хорошее усвоение курса механики требует не только глубокого изучения теории, но и приобретения твердых навыков решения задач. Для этого необходимо самостоятельно решить большое количество задач по всем разделам курса.

Настоящее учебно-методическое пособие содержит примеры решения задач по динамике, кручению и изгибу. Количество задач в каждом разделе позволяет выдавать индивидуальные наборы задач в зависимости от профиля подготовки бакалавра, т. е. от объема и содержания изучаемого курса механики.

1. ДИНАМИКА

1.1. Интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки, находящейся под действием переменных сил

Задача 1.1.1

Материальная точка массы m движется из начала координат вдоль горизонтальной оси OX (рис. 1), имея начальную скорость v_0 . Сила сопротивления движению точки $R=kv^2$. Определить закон движения точки.

Решение

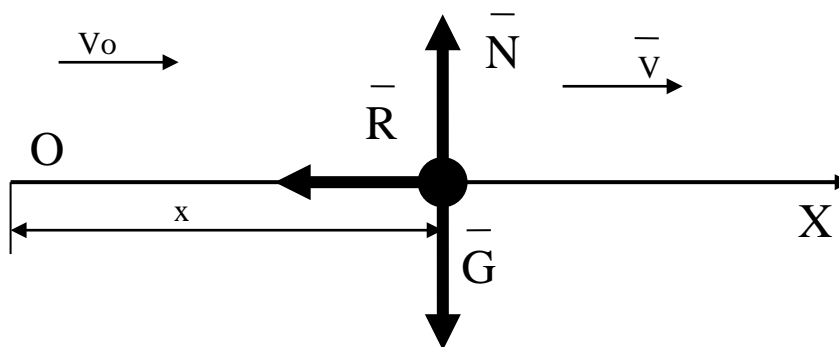


Рисунок 1

На точку действуют: сила тяжести $G=mg$, сила сопротивления R и нормальная реакция N . Дифференциальное уравнение движения точки в проекции на ось OX имеет вид:

$$m \frac{dv}{dt} = -R = -kv^2$$

Разделим переменные в дифференциальном уравнении и, интегрируя его, найдем:

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v^2} = -\frac{k}{m} \int_0^t dt;$$

$$-\frac{1}{v} \Big|_{v_0}^v = -\frac{kt}{m}; \quad \frac{1}{v} = \frac{1}{v_0} + \frac{kt}{m};$$

$$v = \frac{mv_0}{m + kv_0 t}.$$

Запишем левую часть равенства:

$$v = \frac{dx}{dt}; \quad \frac{dx}{dt} = \frac{mv_0}{m + kv_0 t}.$$

Разделив переменные в последнем равенстве и интегрируя его, найдем закон движения точки:

$$\int_0^x dx = mv_0 \int_0^t \frac{dt}{m + kv_0 t};$$

получаем:

$$x = mv_0 \frac{1}{kv_0} \ln(m + kv_0 t) \Big|_0^t.$$

Окончательно:

$$x = \frac{m}{k} [\ln(m + kv_0 t) - \ln m] = \frac{m}{k} \ln \frac{m + kv_0 t}{m} \quad (M).$$

Ответ:

$$x = \frac{m}{k} \ln \frac{m + kv_0 t}{m} \quad (M).$$

Задания 1.1

1. Материальная точка массой m движется вдоль горизонтальной оси Ox под действием силы $F = at$. Найти скорость V и положение точки x в момент времени t_1 при нулевых начальных условиях.

2. На тело массой m , движущееся по горизонтальной гладкой поверхности, действует сила отталкивания, проекция которой на горизонтальную ось Ox $F_x = k^2mx$. В начальный момент времени тело находится в покое на расстоянии x_0 от начала отсчета. Определить скорость тела в момент, когда расстояние от начала отсчета увеличится в n раз.

3. Сила тяги винтов вертолѐта массой m при вертикальном подъѐме из состояния покоя в n раз превышает его вес. Сопротивление воздуха пропорционально первой степени скорости $R = mkV$. Определить скорость подъѐма в момент времени t_1 , а также V_{max} .

4. Лодке массой M сообщается начальная скорость V_0 . При движении лодка встречает сопротивление, пропорциональное квадрату скорости $R = aV^2$. Спустя какое время скорость лодки уменьшится в n раз?

5. Материальная точка массой m движется из начала координат вдоль горизонтальной оси Ox , с начальной скоростью V_0 и испытывая силу сопротивления движению $R = kx$. Найти положение точки x и ее скорость V в момент времени t_1 .

6. Тело массой m , движущееся по гладкой горизонтальной поверхности, притягивается к неподвижному центру с силой, проекция которой на горизонтальную ось Ox равна $F_x = k^2mx$. В момент времени $t=0$ $x=0$ и $V=V_0$. Определить максимальное удаление тела от начала отсчета.

7. Груз массой m опускается при помощи парашюта без начальной скорости. Сила сопротивления воздуха пропорциональна первой степени скорости $R = bV$. Определить скорость V груза через t_1 после начала спуска.

8. В момент выключения мотора катер массой M имел скорость V_0 . Какой путь пройдет катер с выключенным мотором до момента времени, когда его скорость уменьшится в n раз. Силу сопротивления считать пропорциональной квадрату скорости $R = aV^2$.

9. Материальная точка массой m движется вдоль горизонтальной оси Ox под действием силы $F = a + bV$. Полагая начальные условия движения точки нулевыми, найти координату x точки в момент времени t_1 .

10. Материальная точка массой m движется из состояния покоя вдоль горизонтальной оси Ox под действием силы $F_x = a(b - kt)$. Найти скорость V и координату x в момент, когда сила обратится в ноль.

11. Лодке массой M сообщается начальная скорость V_0 . При движении лодка встречает сопротивление, пропорциональное первой степени скорости $R = aV$. Определить скорость лодки в момент времени t_1 .

12. Лыжник массой 70 кг спускается без начальной скорости по склону в α градусов, не отталкиваясь палками. Длина спуска L , коэффициент трения скольжения лыж о снег $f_{mp}=0,1$. Сопротивление воздуха $R = kV^2$. Какова скорость движения лыжника в конце спуска?

13. Материальная точка массой m движется из начала координат вдоль горизонтальной оси Ox , имея начальную скорость V_0 и испытывая действие позиционной силы $F = 0,25mk^2x$. Найти скорость и положение точки в момент времени t_1 .

14. Материальная точка массой m движется из состояния покоя вдоль горизонтальной оси Ox под действием силы $F_x = b(a - kt)$. Найти путь, пройденный точкой за время t_1 , если $x_0=0$.

15. Тело массой m движется из состояния покоя вдоль горизонтальной оси Ox под действием силы $F = at / V$. Какой путь пройдет тело за время t_1 ?

16. Самолет массой 10 М летит горизонтально. Его скорость в данный момент $10V_0$. Сила тяги двигателя постоянна $F_{\text{тяг}} = 4000$ Н и направлена под углом α к горизонту; сила лобового сопротивления $R = kV^2$. Какое расстояние пройдет самолет к моменту времени, когда его скорость увеличится в n раз?

17. Материальная точка массы m под действием силы $F = at^2 - bt + 2$ движется вдоль оси Ox . Определить максимальную скорость, которую достигнет точка при своем движении, если в начальный момент времени она имела нулевую скорость и находилась в начале координат.

18. Тело массой m совершает прямолинейное движение вдоль горизонтальной оси Ox под действием силы $F_x = a\pi \cos(kt)$. Определить положение тела на оси Ox в момент времени t_1 , если начальная скорость тела $V_0, x_0 = 0$.

19. На материальную точку массой m действует сила $F = b \sin(at)$, направленная вдоль горизонтальной оси Ox . Определить скорость и положение точки в момент времени t_1 , если она вышла из начала координат без начальной скорости.

20. Вертикальный спуск парашютиста массой m происходит без начальной скорости с высоты L при наличии силы сопротивления, пропорциональной квадрату скорости $R = amV^2$. Определить скорость парашютиста в момент приземления.

21. Автомобиль массой M движется по горизонтальной прямолинейной дороге. Принимая силу тяги мотора постоянной и равной $Q = 1000$ Н, а суммарное сопротивление движению $R = kV^2$, определить скорость автомобиля в конце пути L , если в начале этого пути он имел скорость V_0 .

22. Тело массой m начинает двигаться из состояния покоя по гладкой горизонтальной плоскости вдоль оси Ox под действием силы $F_x = a \sin kt$. Определить положение тела на оси Ox в момент времени t_1 .

23. Тело массой m , брошенное вертикально вверх со скоростью V_0 , испытывает сопротивление среды $R = kV$. Определить, через какое время тело достигнет наивысшего положения.

24. Для взлёта самолетов с корабля применяют специальные катапульты, уменьшающие длину свободного пробега самолета. Считая, что действие катапульты эквивалентно дополнительной тяге $F = 4,9$ кН, определить, насколько сократится длина взлетной дорожки, если масса самолёта M , тяга винта $Q = 14,71$ кН, взлётная скорость $500 V_0$, а сопротивление воздуха $R = aV^2$.

25. Материальная точка массой m движется вдоль горизонтальной оси Ox из состояния покоя под действием силы $F = 10a - bt$. В начальный момент времени точка находилась на расстоянии x_0 от начала отсчёта. Найти время, при котором точка вернется в начальное положение.

26. Для измерения глубины котлована на его дно бросают без начальной скорости груз массой m , который через время t_1 достигает дна. Какова глубина котлована? Сопротивление среды считать пропорциональным первой степени скорости $R = mkV$.

27. Материальная точка массой m движется вдоль горизонтальной оси Ox из состояния покоя под действием силы $F = kx$. В начальный момент времени точка находилась на расстоянии x_0 от начала отсчёта. Определить скорость точки в момент времени t_1 .

28. Материальная точка массой m движется вдоль горизонтальной оси Ox из состояния покоя под действием силы $F_x = b - at^3$ (Н). Найти скорость точки и величину x в момент времени t_1 . В начальный момент точка имела нулевую скорость и находилась в начале координат.

29. Тело массой m поднимается по гладкой плоскости, наклоненной к горизонту под углом α градусов, получив начальную скорость V_0 . Сопротивление среды пропорционально первой скорости $R = aV$. Через какое время тело остановится?

30. Тело массой m , находящееся в покое, начинает движение вдоль горизонтальной оси Ox под действием силы $F_x = b - e^{kt}$. Определить скорость тела и его координату в момент времени t_1 .

Данные, необходимые для вычисления, приведены в табл. 1

Таблица 1 – Исходные данные

№	k	a	b	m	M	x_0	V_0	n	t_1	L	α
	-	-	-	кг	кг	м	м/с	-	с	м	град
0	0,3	6	35	9	500	2	4	9	4	100	30
1	0,8	5	60	1	50	4	9	4	8	150	10
2	0,3	5	20	8	800	1	3	5	1	120	30
3	0,7	3	55	2	300	5	8	3	7	90	40
4	0,5	6	25	6	500	3	2	6	5	180	15
5	0,4	7	40	7	75	2	5	8	2	70	35
6	0,7	4	50	5	60	4	6	7	6	160	20
7	0,6	7	30	3	400	3	4	8	5	60	45
8	0,6	5	65	5	100	1	7	2	4	200	25
9	0,5	8	45	4	700	5	1	7	4	140	40

1.2. Теорема об изменении количества движения механической системы в ее применении к сплошной среде

Задача 1.2.1

Вода входит в неподвижный канал переменного сечения, симметричного относительно горизонтальной плоскости, со скоростью v_1 под углом α (рис. 2). Скорость воды у выхода из канала v_2 и направлена под углом β .

Определить модуль составляющей силы R , с которой вода действует на стенку канала.

Дано: v_1, D, d, α, β .

Определить: R_x или R_y .

Решение

При установившемся движении масса жидкости, протекающей в единицу времени через любое сечение трубы, постоянна:

$$m = \rho v_1 F_1 = \rho v_2 F_2, \text{ где } F_1 = \frac{\pi D^2}{4}, F_2 = \frac{\pi d^2}{4}.$$

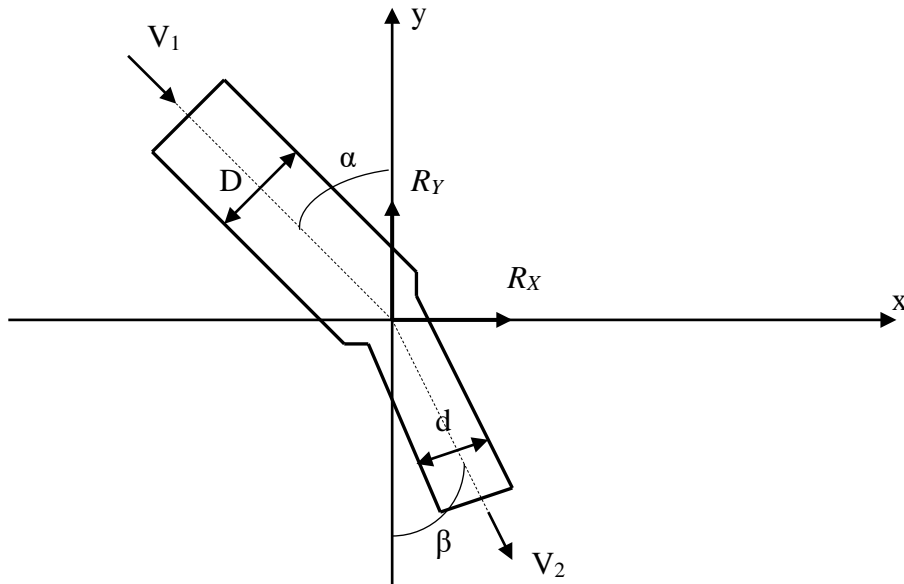


Рисунок 2

$$\text{Откуда: } v_2 = \frac{\rho v_1 F_1}{\rho F_2} = \frac{v_1 D^2}{d^2}.$$

Сила тяжести текущей по трубе жидкости перпендикулярна горизонтальной плоскости. Реакция стенок трубы расположена в горизонтальной плоскости.

Применим теорему импульсов к движению жидкости в трубе. За промежуток времени τ получим:

$$mv_2 - mv_1 = R\tau. \quad (1)$$

Спроецируем равенство (27) на ось X:

$$mv_2 \sin \beta - mv_1 \sin \alpha = R_x \tau,$$

откуда

$$\begin{aligned}
R_x &= \frac{mv_2}{\tau} \sin \beta - \frac{mv_1}{\tau} \sin \alpha = \\
\rho v_1 \frac{\pi D^2}{4} \frac{v_1 D^2}{d^2} \sin \beta - \rho v_1 \frac{\pi D^2}{4} v_1 \sin \alpha &= \\
= \rho \frac{\pi D^2}{4} v_1^2 \left(\frac{D^2}{d^2} \sin \beta - \sin \alpha \right).
\end{aligned}$$

Спроецируем равенство (27) на ось Y:

$$-mv_2 \cos \beta + mv_1 \cos \alpha = R_y \tau,$$

откуда

$$\begin{aligned}
R_y &= -mv_2 \cos \beta + mv_1 \cos \alpha = -\rho v_1 \frac{\pi D^2}{4} \frac{v_1 D^2}{d^2} \cos \beta + \rho v_1 \frac{\pi D^2}{4} v_1 \cos \alpha = \\
&= \rho \frac{\pi D^2}{4} v_1^2 \left(-\frac{D^2}{d^2} \cos \beta + \cos \alpha \right).
\end{aligned}$$

Если требуется определить составляющую R_x , то уравнение (1) проецируется на ось X. Если надо определить R_y , то уравнение (1) проецируется на ось Y.

$$\text{Модуль силы } R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}.$$

Ответ:

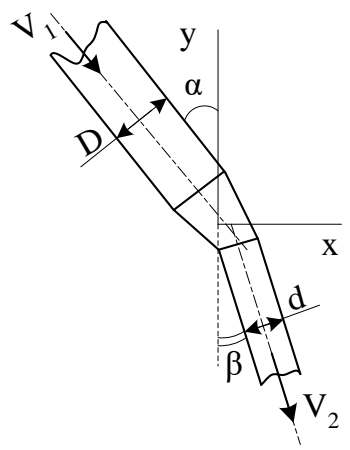
$$R_x = \rho \frac{\pi D^2}{4} v_1^2 \left(\frac{D^2}{d^2} \sin \beta - \sin \alpha \right), \quad R_y = \rho \frac{\pi D^2}{4} v_1^2 \left(-\frac{D^2}{d^2} \cos \beta + \cos \alpha \right).$$

Задача 1.2.2

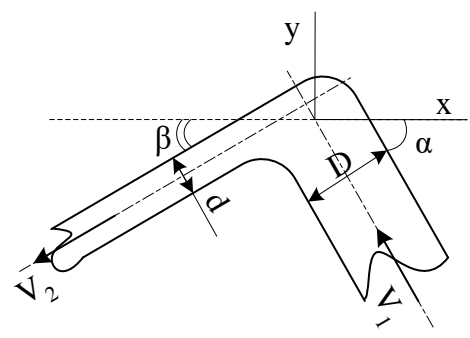
Вода входит в неподвижный канал переменного сечения, симметрично относительно горизонтальной плоскости, со скоростью V_1 под углом α . Скорость воды у выхода из канала V_2 направлена под углом β . Определить модуль составляющей силы R , с которой вода действует на стенку канала.

Данные, необходимые для вычисления, приведены в табл. 2

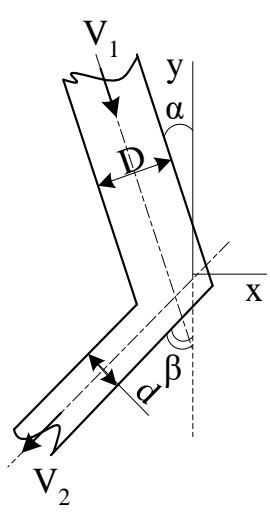
1



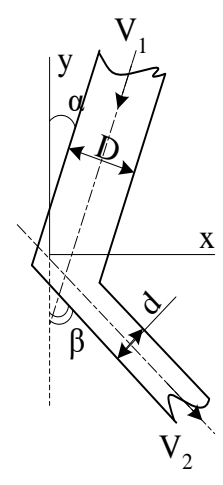
2



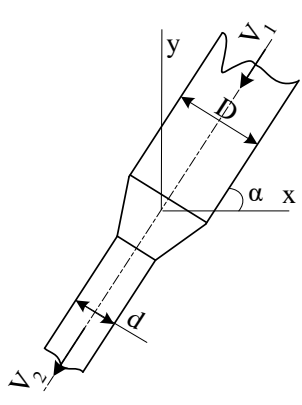
3



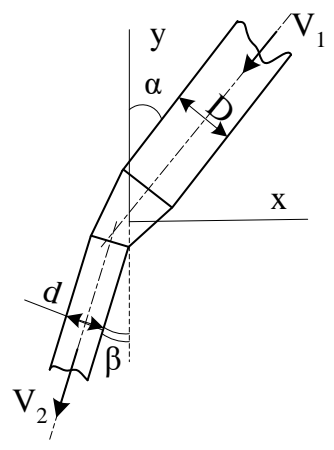
4

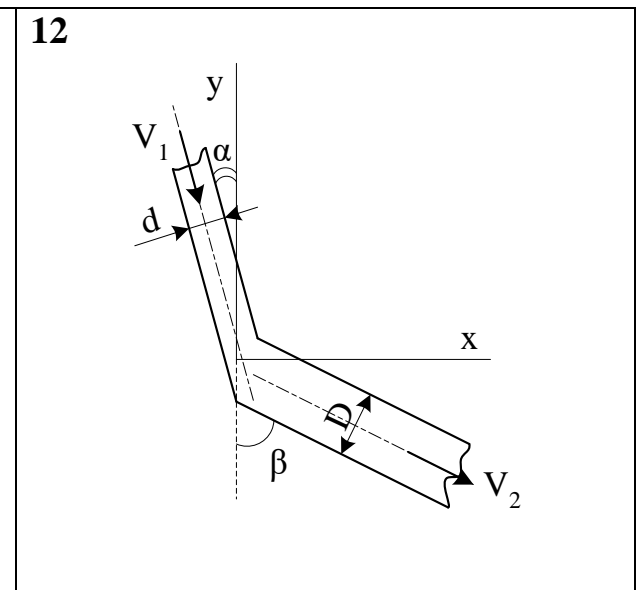
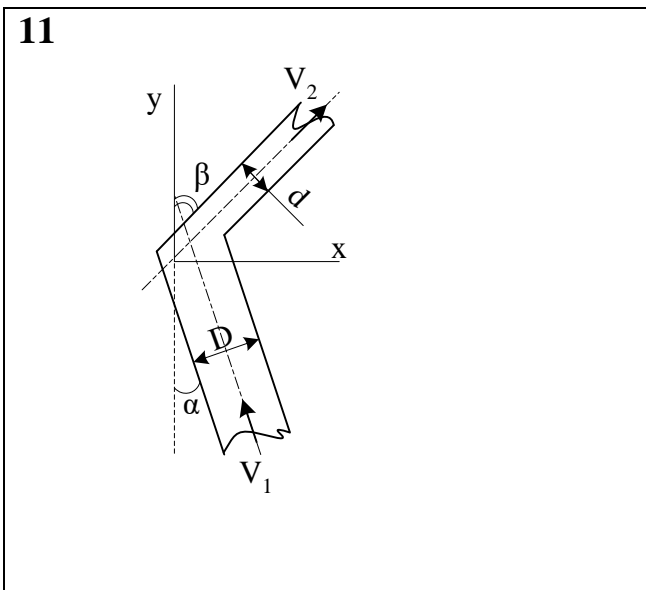
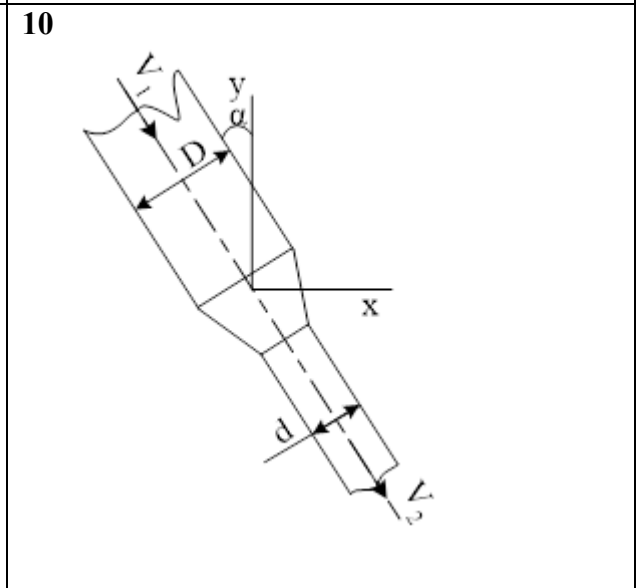
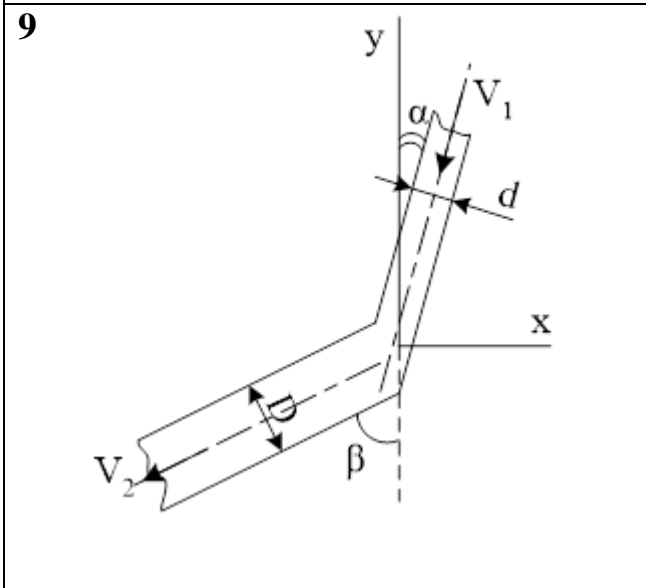
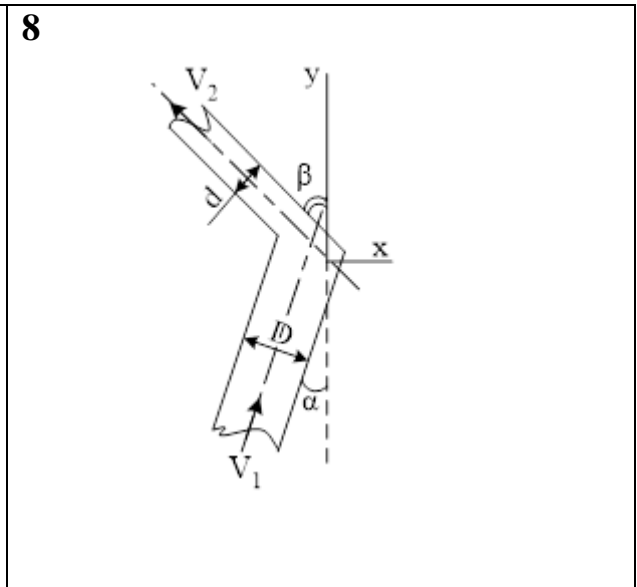
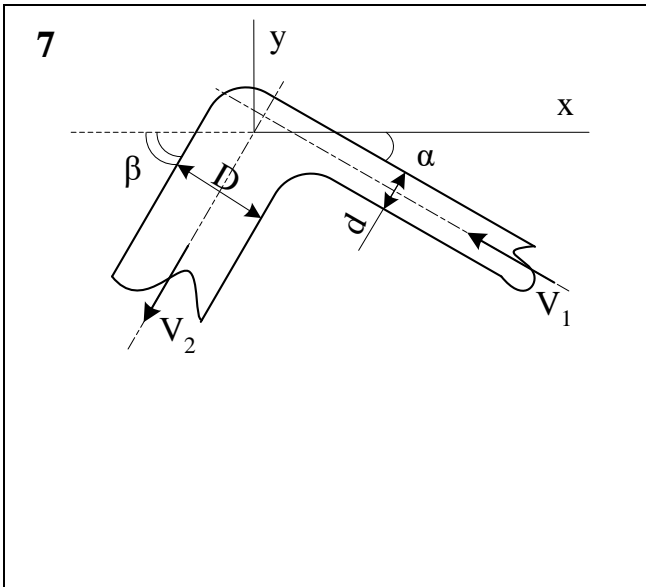


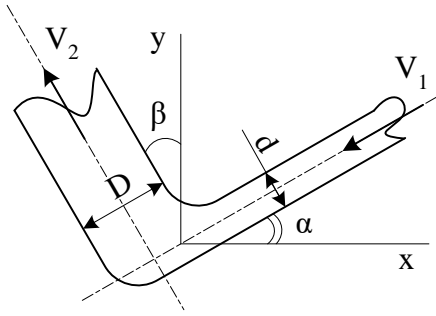
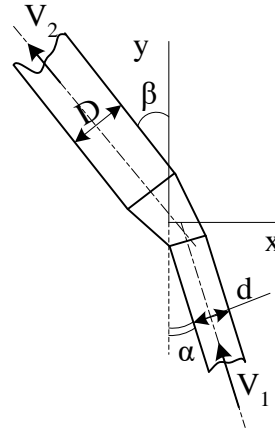
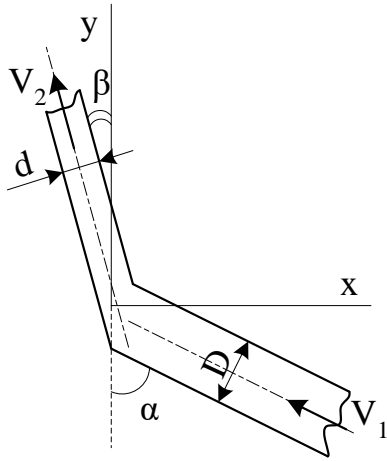
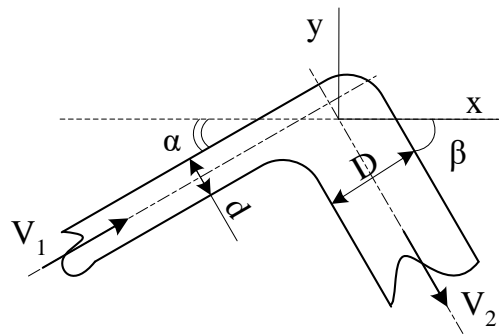
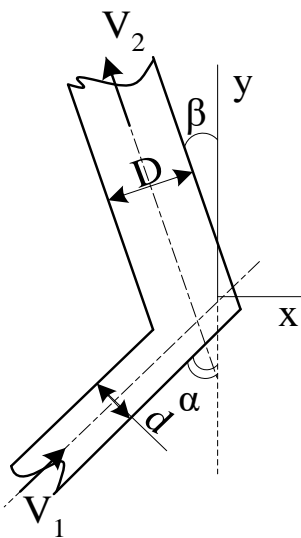
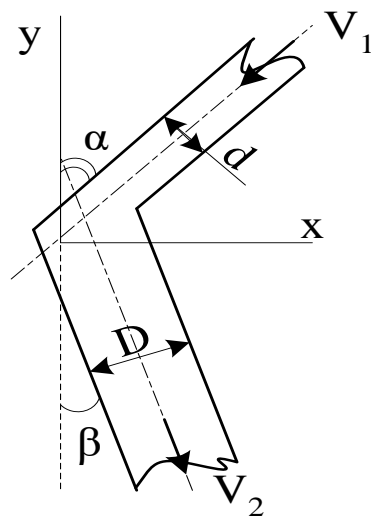
5



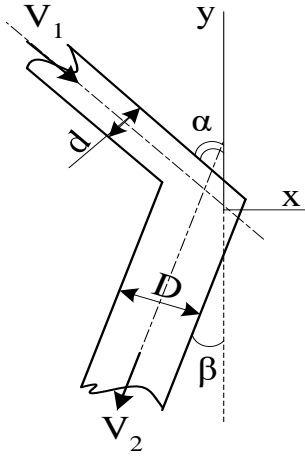
6



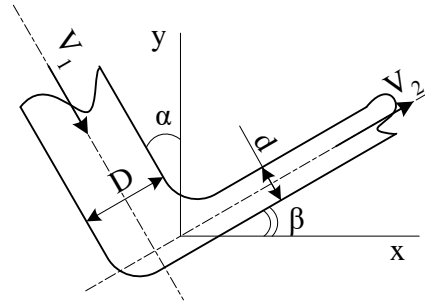


13**14****15****16****17****18**

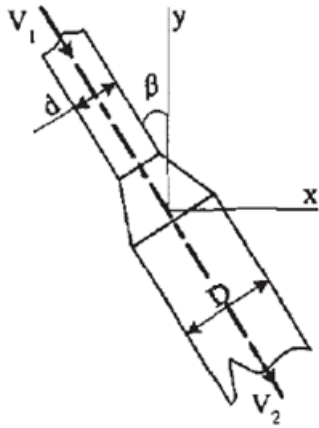
19



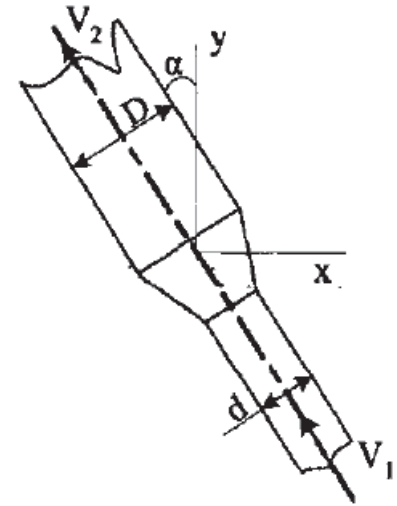
20



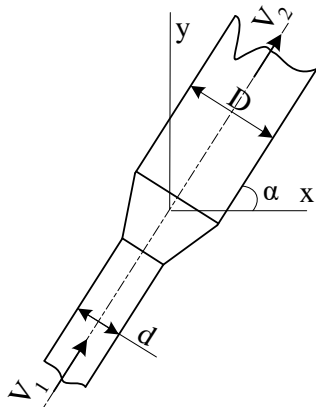
21



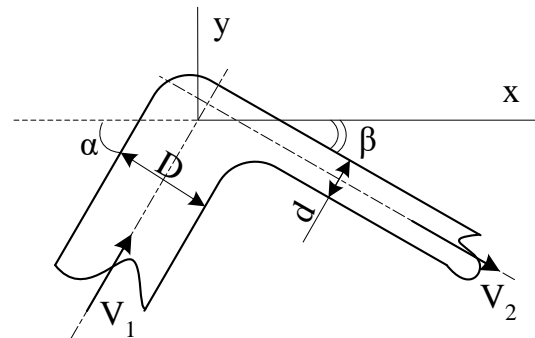
22



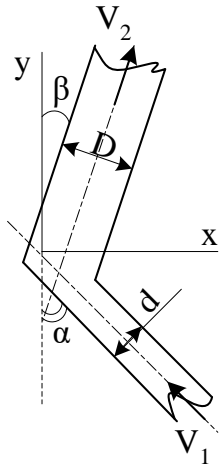
23



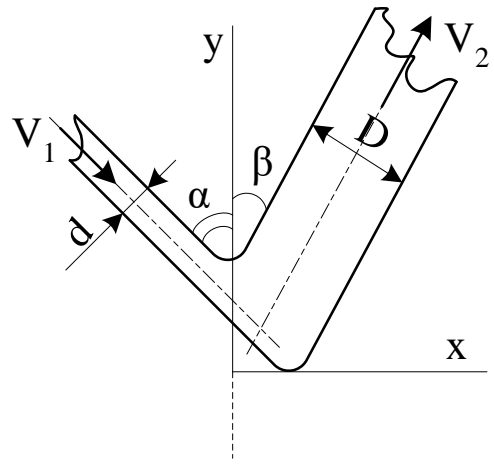
24



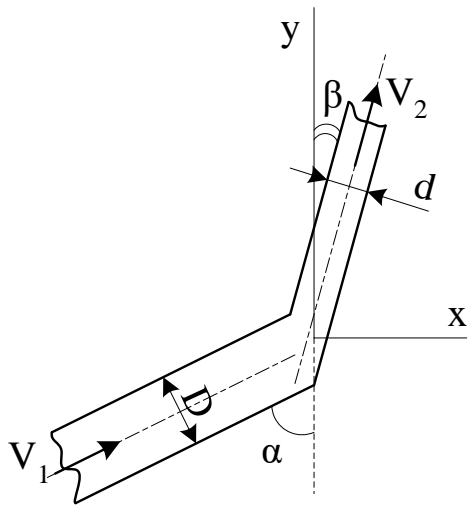
25



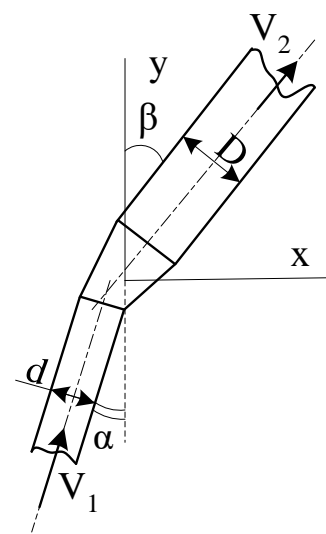
26



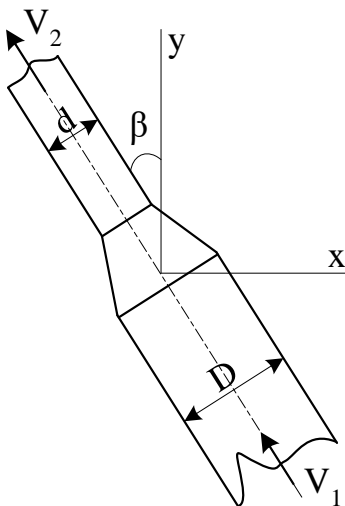
27



28



29



30

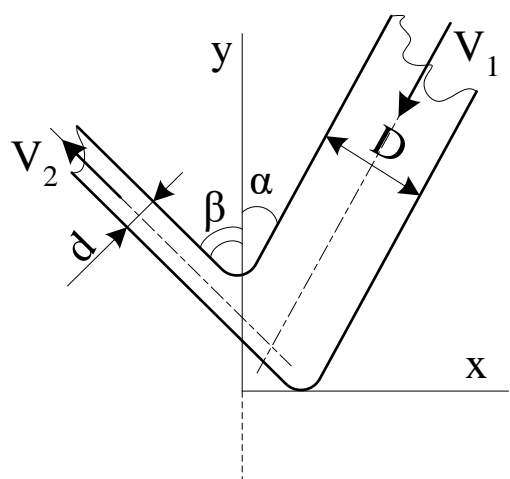


Таблица 2 – Исходные данные

№	V ₁	D	d	α	β	R
	м/с	м	м	град	град	-
0	1,0	0,52	0,22	5	50	R _x
1	1,2	0,42	0,12	25	45	R _y
2	1,5	0,50	0,17	10	35	R _x
3	1,8	0,40	0,15	15	40	R _y
4	2,5	0,56	0,22	15	30	R _x
5	2,0	0,40	0,10	20	45	R _y
6	3,4	0,60	0,12	10	35	R _x
7	3,0	0,54	0,20	15	40	R _y
8	3,2	0,50	0,10	25	30	R _x
9	3,8	0,43	0,15	20	50	R _y

1.3. Применение теоремы об изменении кинетической энергии к изучению движения механической системы

Задача 1.3.1

Для заданной механической системы (рис. 3) определить $v_1 = f(s_1)$. Считать, что у блоков и катков массы распределены по наружному радиусу. Массами нитей пренебречь, нити предполагая нерастяжимыми. Принять, что движение начинается из состояния покоя. В задании принять следующие обозначения: m_1, m_2, m_3 – массы тел; R и r – радиусы больших и малых окружностей; $f_{\text{тр}}=0,2$ – коэффициент трения скольжения. Проскальзывание отсутствует.

Решение

Рассмотрим механическую систему, состоящую из груза 1, движущегося поступательно, блока 2, совершающего вращательное движение, и катка 3, совершающего плоское движение.

Применим к рассматриваемой системе теорему об изменении кинетической энергии механической системы в конечной форме:

$$T_{II} - T_I = \sum_{i=1}^n A_i^E,$$

где T_I – кинетическая энергия начального положения системы,

T_{II} – кинетическая энергия конечного положения системы,

$\sum A_i^E$ – сумма работ внешних сил.

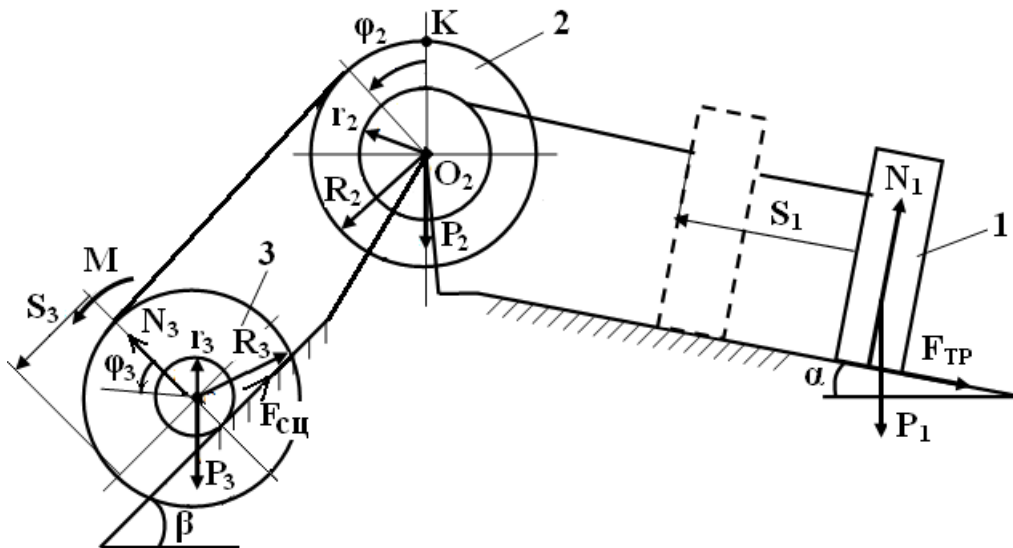


Рисунок 3

Движение системы началось из состояния покоя, поэтому:

$$T_I = 0;$$

$$T_{II} = \sum_{i=1}^n A_i^E.$$

Определим кинетическую энергию механизма в положении II.

При решении подобных задач рекомендуется линейные и угловые скорости всех тел системы выразить через искомую скорость, а перемещения линейные и угловые – через заданное перемещение.

$$T_{II} = T_1 + T_2 + T_3.$$

Груз 1 совершает поступательное движение: $T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2}$.

Блок 2 совершает вращательное движение: $T_2 = \frac{I_Z \omega_2^2}{2}$,

где I_Z – момент инерции блока относительно оси вращения. В данной задаче масса блока распределена по наружному радиусу, поэтому

$$I_Z = m_2 R_2^2.$$

Выразим угловую скорость блока 2 через скорость груза 1:

$$\omega_2 = \frac{v_1}{r_2}.$$

Получим:
$$T_2 = \frac{m_2 R_2^2}{2r_2^2} v_1^2.$$

Каток 3 совершает плоскопараллельное движение. Для него кинетическая энергия вычисляется по формуле
$$T_3 = \frac{m_3 v_{03}^2}{2} + \frac{I_{Z3} \omega_3^2}{2},$$

где $I_{Z3} = m_3 R_3^2$ (масса катка также распределена по наружному радиусу).

Так как нити нерастяжимы, скорости точек K и N равны:

$$v_K = v_N = \omega_2 R_2 = \omega_3 (R_3 + r_3),$$

отсюда
$$\omega_3 = \frac{\omega_2 R_2}{R_3 + r_3}.$$

Выразим угловую скорость катка 3 через скорость груза 1:

$$\omega_3 = \frac{v_1 R_2}{r_2 (R_3 + r_3)}.$$

Скорость центра масс катка v_{03} также выразим через скорость груза 1:

$$v_{03} = \omega_3 r_3 = v_1 \frac{r_3 R_2}{r_2 (R_3 + r_3)}.$$

Итого получим:

$$T_3 = \frac{m_3 R_2^2 r_3^2}{2r_2^2 (R_3 + r_3)^2} v_1^2 + \frac{m_3 R_3^2 R_2^2}{2r_2^2 (R_3 + r_3)^2} v_1^2 = \frac{m_3 R_2^2 (r_3^2 + R_3^2)}{2r_2^2 (R_3 + r_3)^2} v_1^2.$$

Кинетическая энергия всей системы:

$$\begin{aligned} T_{II} &= \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 R_2^2}{2r_2^2} v_1^2 + \frac{m_3 R_2^2 (r_3^2 + R_3^2)}{2r_2^2 (R_3 + r_3)^2} v_1^2 = \\ &= \frac{v_1^2}{2} \left[m_1 + \frac{m_2 R_2^2}{r_2^2} + \frac{m_3 R_2^2 (r_3^2 + R_3^2)}{r_2^2 (R_3 + r_3)^2} \right]. \end{aligned}$$

Сумма работ внешних сил складывается из:

- работы силы тяжести и силы трения скольжения при движении тела 1 вверх:

$$A_1 = -m_1 g \cdot \sin \alpha \cdot S_1 - f_{TP} \cdot m_1 g \cdot \cos \alpha \cdot S_1 = -m_1 g \cdot S_1 \cdot (\sin \alpha_1 + f_{TP} \cos \alpha).$$

- работы силы тяжести и момента M :

$$A_3 = m_3 g \cdot \sin \beta S_3 + M \cdot \varphi_3$$

- сила $F_{CЦ}$ приложена к неподвижной точке (МЦС), и работа этой силы равна нулю.

Выразим перемещение катка 3 через перемещение груза 1, используя кинематические соотношения:

$$\varphi_2 = \frac{S_1}{r_2}; \quad \varphi_3 = \frac{\varphi_2 R_2}{R_3 + r_3} = \frac{S_1 R_2}{r_2 (R_3 + r_3)}; \quad S_3 = \varphi_3 r_3 = \frac{S_1 R_2 r_3}{r_2 (R_3 + r_3)}.$$

Получим: $A_3 = \frac{S_1 R_2}{r_2 (R_3 + r_3)} [m_3 g r_3 \sin \beta + M].$

Сумма работ внешних сил:

$$\sum_{i=1}^n A_i^E = -m_1 g S_1 (\sin \alpha + f_{TP} \cos \alpha) + \frac{S_1 R_2}{r_2 (R_3 + r_3)} [m_3 g r_3 \sin \beta + M].$$

По теореме об изменении кинетической энергии:

$$\frac{v_1^2}{2} \left[m_1 + \frac{m_2 R_2^2}{r_2^2} + \frac{m_3 R_2^2 (r_3^2 + R_3^2)}{r_2^2 (R_3 + r_3)^2} \right] = -m_1 g S_1 (\sin \alpha + f_{TP} \cos \alpha) + \frac{S_1 R_2}{r_2 (R_3 + r_3)} [m_3 g r_3 \sin \beta + M].$$

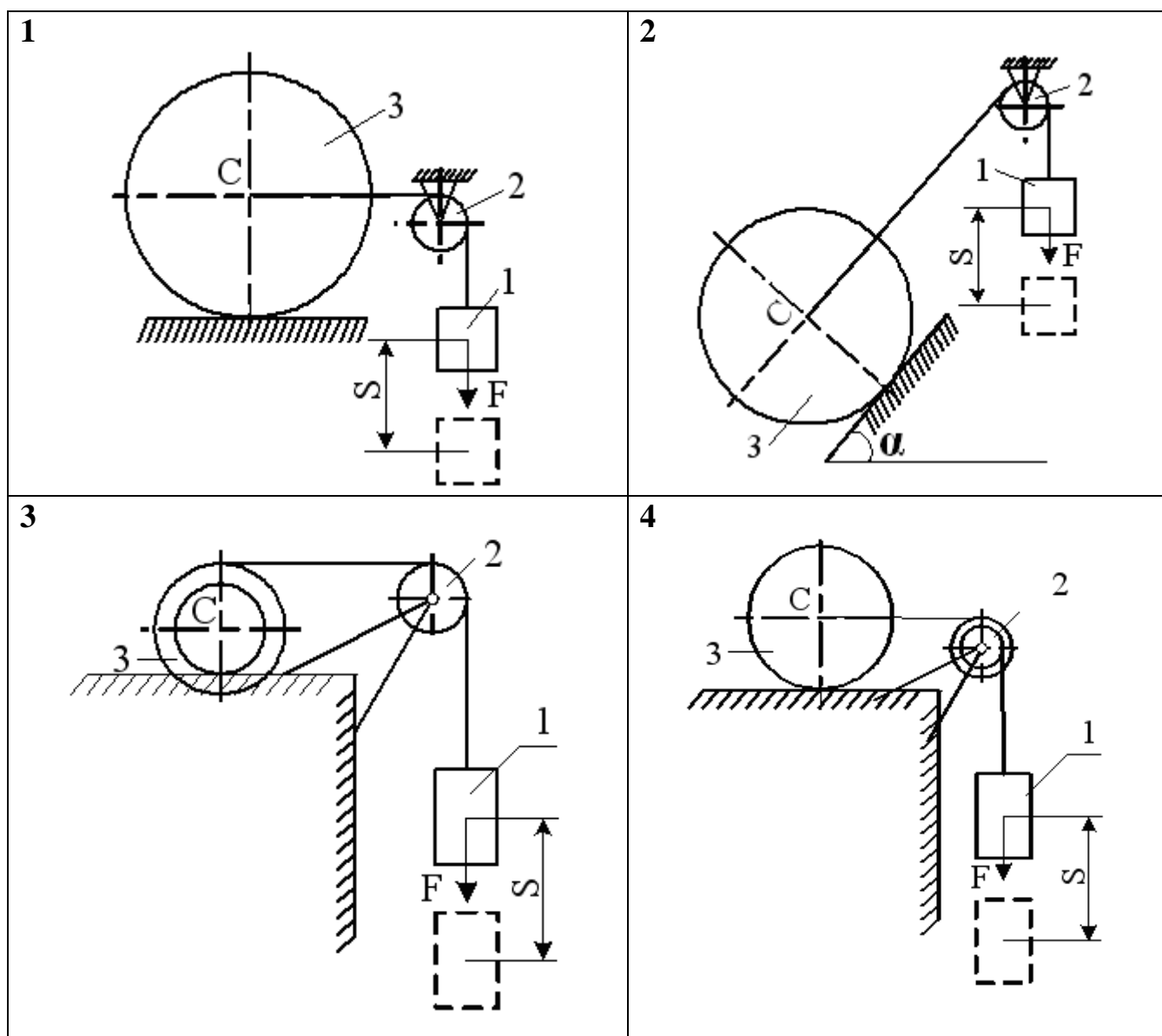
Отсюда найдем искомую скорость груза 1:

$$v_1 = \sqrt{2 \frac{-m_1 g S_1 (\sin \alpha + f_{TP} \cos \alpha) + \frac{S_1 R_2}{r_2 (R_3 + r_3)} [m_3 g r_3 \sin \beta + M]}{m_1 + \frac{m_2 R_2^2}{r_2^2} + \frac{m_3 R_2^2 (r_3^2 + R_3^2)}{r_2^2 (R_3 + r_3)^2}}}.$$

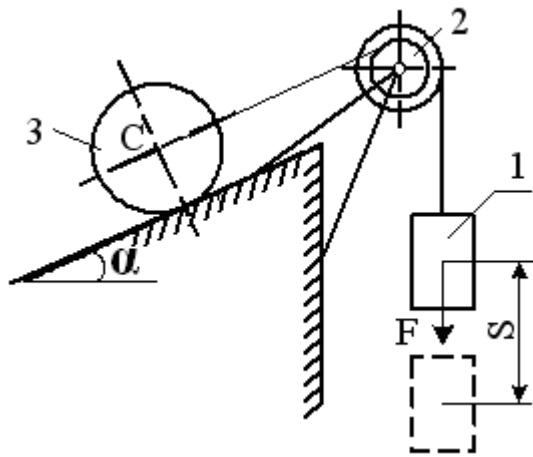
Ответ: $v_1 = \sqrt{2 \frac{-m_1 g S_1 (\sin \alpha + f_{TP} \cos \alpha) + \frac{S_1 R_2}{r_2 (R_3 + r_3)} [m_3 g r_3 \sin \beta + M]}{m_1 + \frac{m_2 R_2^2}{r_2^2} + \frac{m_3 R_2^2 (r_3^2 + R_3^2)}{r_2^2 (R_3 + r_3)^2}}}.$

Задача 1.3.2

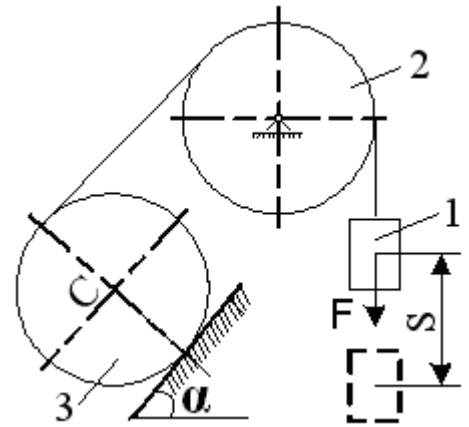
Для заданной механической системы определить $V_1 = f(S)$. Считать, что у блоков и катков массы распределены по наружному радиусу. Массами нитей пренебречь, предполагая их нерастяжимыми. Принять, что движение начинается из состояния покоя. В задании принять следующие обозначения: m_1, m_2, m_3 – массы тел; R_1 и R_2 – радиусы больших и малых окружностей; $f_{тр}=0,2$ – коэффициент трения скольжения; $f_k = 0,3$ – коэффициент трения качения. Проскальзывания отсутствуют. Данные, необходимые для вычисления, приведены в табл. 3.



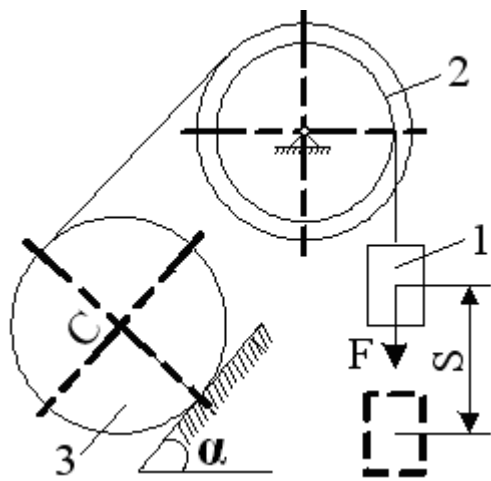
5



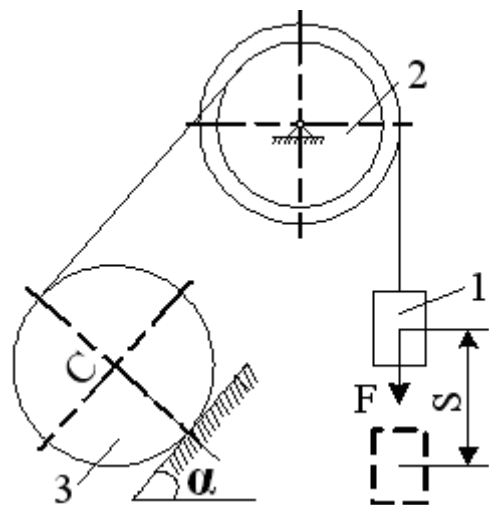
6



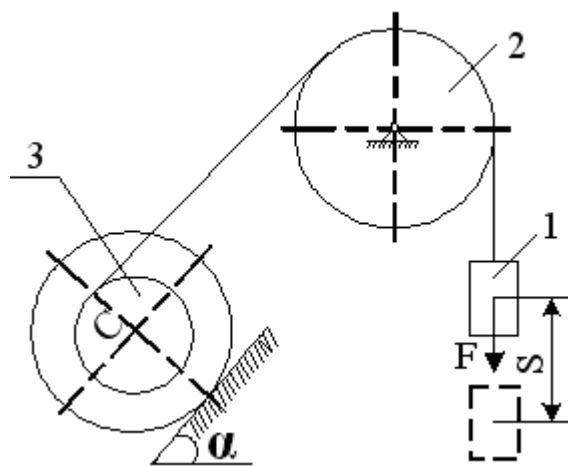
7



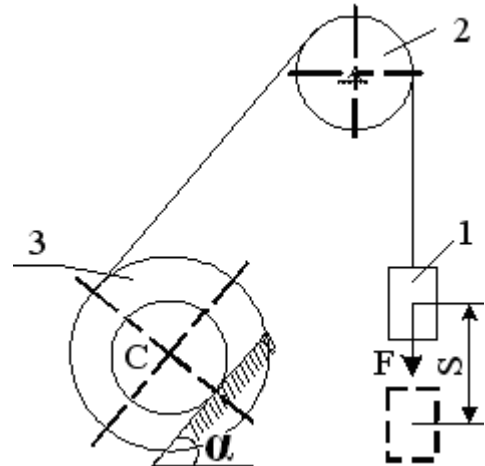
8



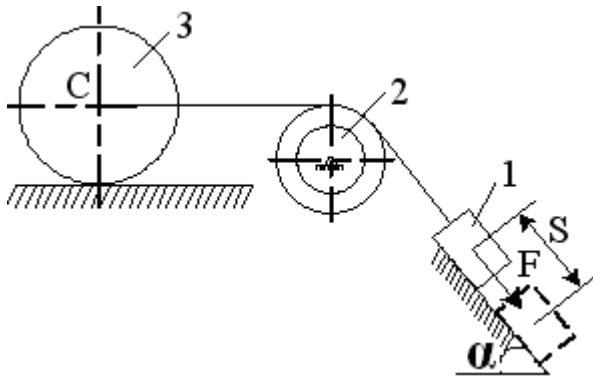
9



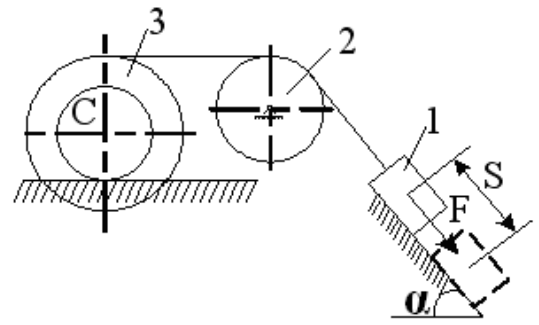
10



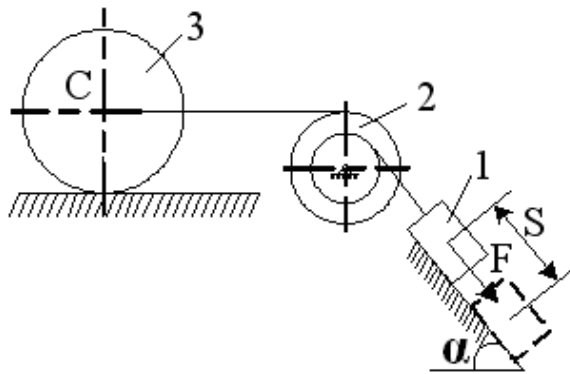
11



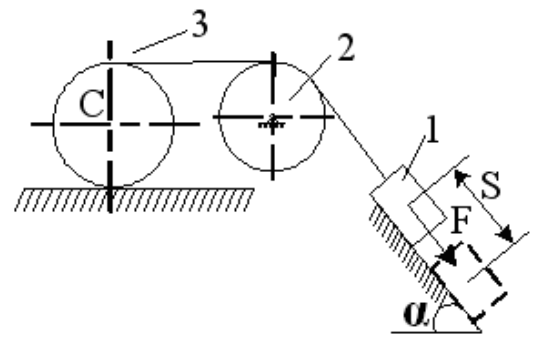
12



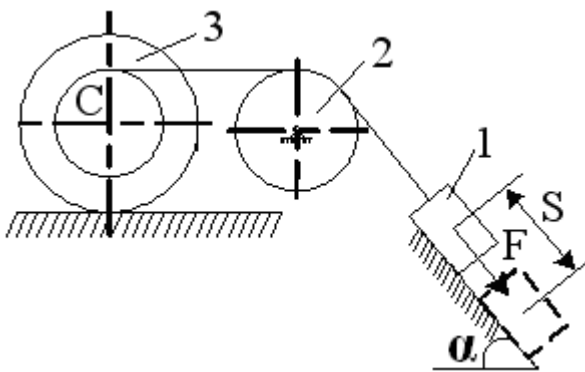
13



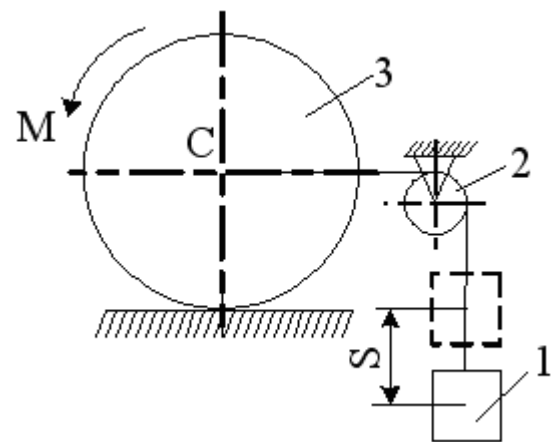
14



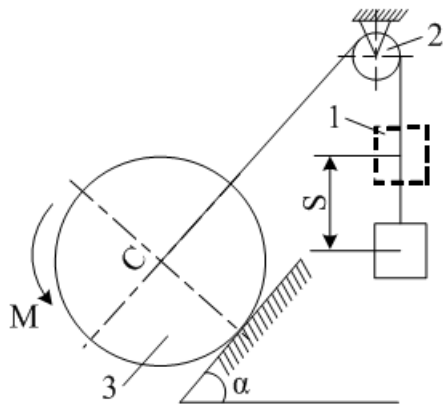
15



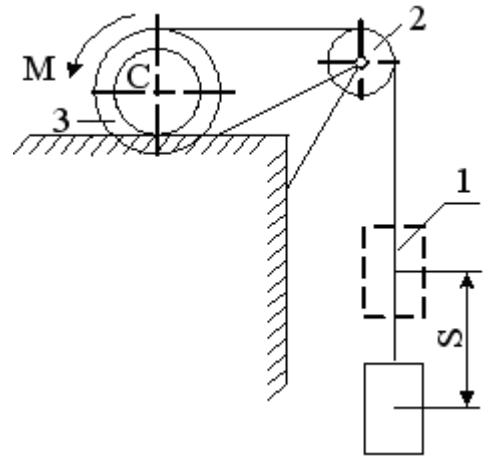
16



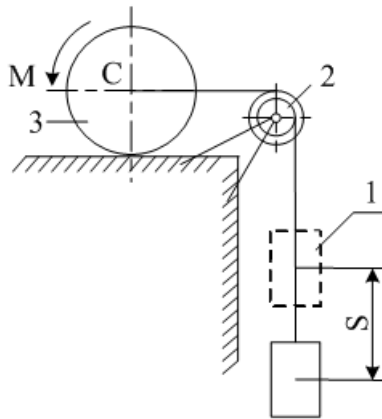
17



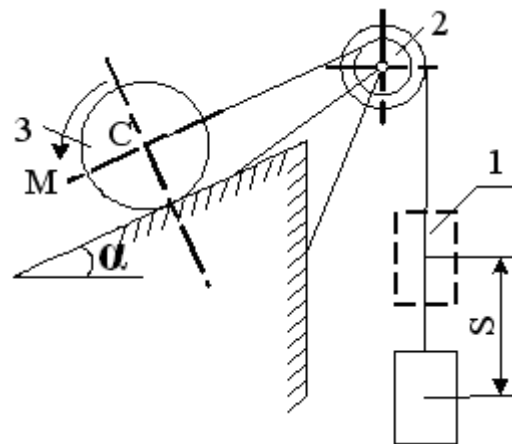
18



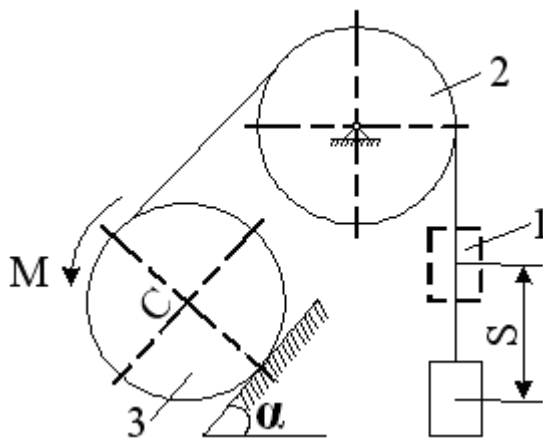
19



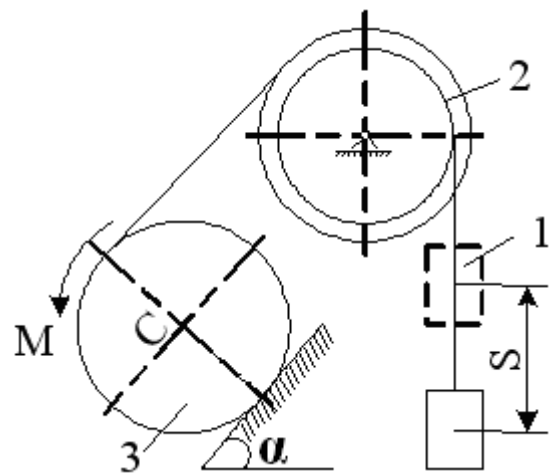
20



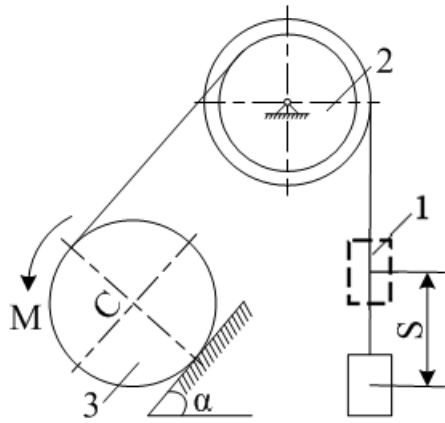
21



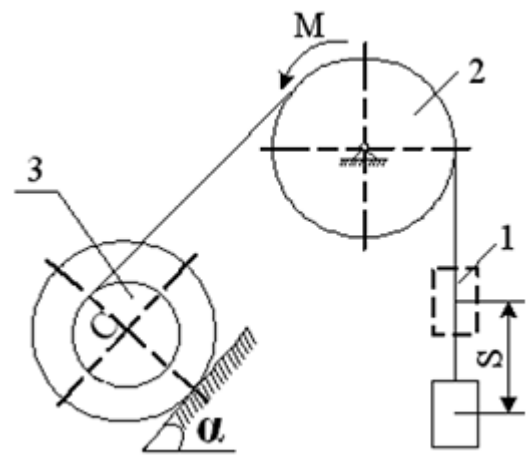
22



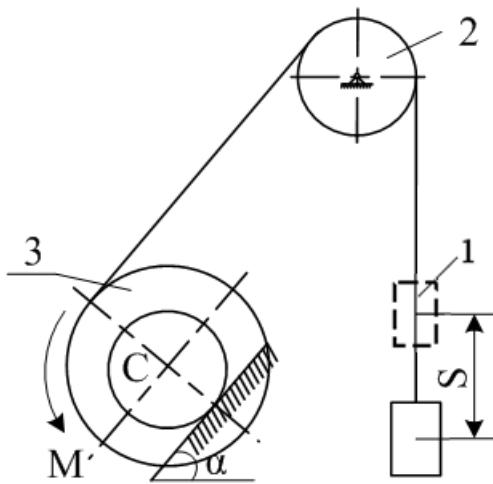
23



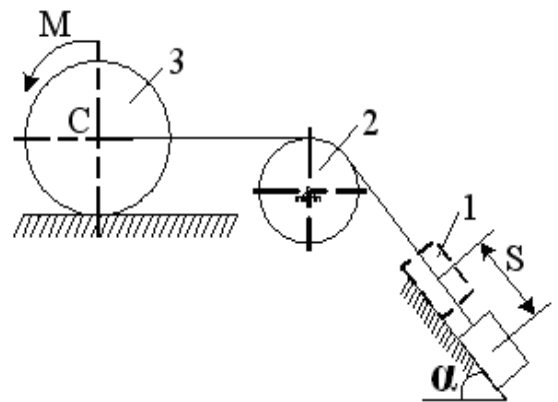
24



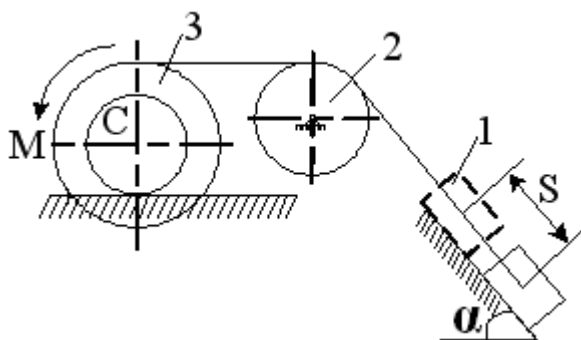
25



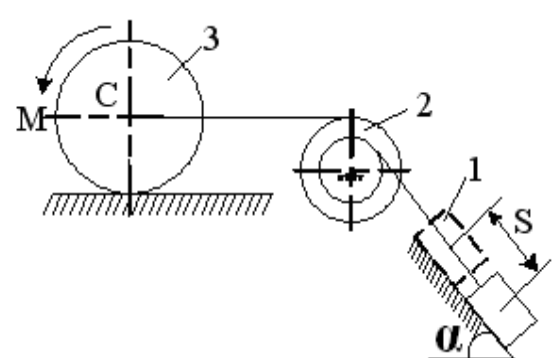
26



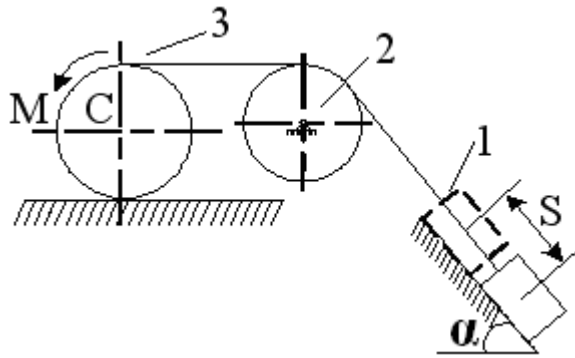
27



28



29



30

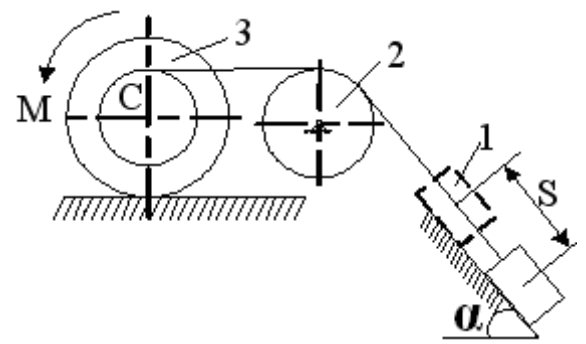


Таблица 3 – Исходные данные

	m_1	m_2	m_3	R_1	R_2	α	F	M	S
	кг	кг	кг	см	см	град	Н	Нм	м
0	100	200	500	20	30	30	5000	5000φ	2
1	400	500	100	40	50	40	4500	2000φ	4
2	300	100	400	20	40	50	6000	2500φ	5
3	500	200	300	40	50	60	3000	7000φ	1
4	100	300	200	30	20	60	4000	3000φ	3
5	200	500	400	40	50	30	5500	2000φ	4
6	200	400	400	30	40	60	2500	5500φ	2
7	400	300	100	50	20	50	7000	3500φ	3
8	200	200	300	50	30	40	3500	6000φ	1
9	300	100	300	40	50	50	2000	5500φ	5

2. КРУЧЕНИЕ И ИЗГИБ

2.1. Продольная деформация

Стержень подвергается *продольной деформации*, когда в его поперечных сечениях возникает внутренняя продольная сила N . Её величина определяется методом сечений по участкам, границами которых являются места приложения внешних продольных сил, действующих на стержень. Из условия равновесия следует, что величина внутренней продольной силы N в поперечном сечении стержня численно равна алгебраической сумме внешних продольных сил, действующих по одну сторону от рассматриваемого сечения.

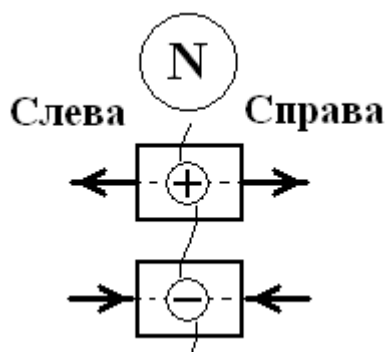


Рисунок 4

Продольная сила N в поперечном сечении стержня считается положительной, когда внешняя продольная сила, приложенная справа или слева от сечения, вызывает растяжение стержня; сжимающая сила считается отрицательной (рис. 4).

Эюра продольной силы – это график, показывающий изменение величины внутренней продольной силы N в поперечных сечениях стержня в зависимости от координаты x по длине стержня.

Величина *нормального напряжения* σ в любой точке поперечного сечения стержня определяется по формуле

$$\sigma = \frac{N}{A},$$

где N – величина внутренней продольной силы в сечении, A – площадь поперечного сечения стержня.

Условие прочности при продольной деформации имеет вид

$$\sigma_{\text{MAX}} = \frac{|N_{\text{MAX}}|}{A} \leq [\sigma],$$

где N_{MAX} – максимальная величина внутренней продольной силы в сечении стержня, $[\sigma]$ – допускаемое нормальное напряжение.

Абсолютное удлинение ΔL на участке длиной L , где продольная сила N постоянна, определяется по формуле

$$\Delta L = \frac{N \cdot L}{E \cdot A},$$

где E – модуль Юнга материала стержня.

Произведение $E \cdot A$ называется *продольной жесткостью* стержня.

Если стержень имеет несколько участков, то абсолютное удлинение будет определяться как алгебраическая сумма абсолютных удлинений на участках

$$\Delta L = \sum_{i=1}^n \frac{N_i \cdot L_i}{E \cdot A_i}.$$

Величина наибольшего относительного удлинения на участке стержня длиной L определяется по формуле

$$\varepsilon = \frac{|\Delta L_{\text{MAX}}|}{L}.$$

Условие жесткости при продольной деформации имеет вид

$$\varepsilon_{\text{MAX}} \leq [\varepsilon],$$

где $[\varepsilon]$ – допускаемое относительное удлинение.

Задача 2.1.1

Стальной стержень АЕ (рис. 5) круглого поперечного сечения нагружен заданными продольными силами $F_1=10$ кН, $F_2=7$ кН, $F_3=24$ кН и $F_4=15$ кН.

Длины участков стержня $L_1=k_1L=0,7L$, $L_2=k_2L=0,4L$, $L_3=k_3L=0,5L$, $L_4=k_4L=0,8L$, допускаемое напряжение $[\sigma]=160$ МПа, допускаемое относительное удлинение $[\varepsilon]=0,001$, модуль Юнга материала $E=2 \cdot 10^8$ кПа.

Требуется построить эпюры продольной силы N и относительного удлинения ε , с помощью которых определить диаметр поперечного сечения стержня из условий прочности и жесткости.

Построение эпюры продольной силы

Не вычисляя из уравнений равновесия значение реакции в заделке и используя метод сечений, запишем выражения для продольной силы по участкам стержня. Будем двигаться при этом слева направо в сторону заделки E , начиная со свободного конца A стержня и используя правило знаков согласно рис. 5.

Границы первого участка:

$$0 \leq x_1 \leq L_1.$$

$$N_1 = \Sigma N^{\text{ЛЕВ}} = F_1 = 10 \text{ кН.}$$

Границы второго участка:

$$L_1 \leq x_2 \leq L_1 + L_2.$$

$$N_2 = \sum N^{\text{ЛЭВ}} = F_1 - F_2 = 10 - 7 = 3 \text{ кН.}$$

Границы третьего участка:

$$L_1 + L_2 \leq x_3 \leq L_1 + L_2 + L_3.$$

Границы четвертого участка:

$$L_1 + L_2 + L_3 \leq x_4 \leq L_1 + L_2 + L_3 + L_4.$$

$$N_4 = \sum N^{\text{ЛЭВ}} = F_1 - F_2 - F_3 + F_4 = 10 - 7 - 24 + 15 = -6 \text{ кН.}$$

Полученные значения откладываем в масштабе на каждом из соответствующих участков стержня (рис. 5). После построения эпюры продольной силы делаем ее проверку, используя правило проверки правильности построения эпюры продольной силы: в тех сечениях стержня, где приложены сосредоточенные продольные силы, на эпюре будут скачки на их величину в соответствии с направлением хода построения и выбранного правила знаков.

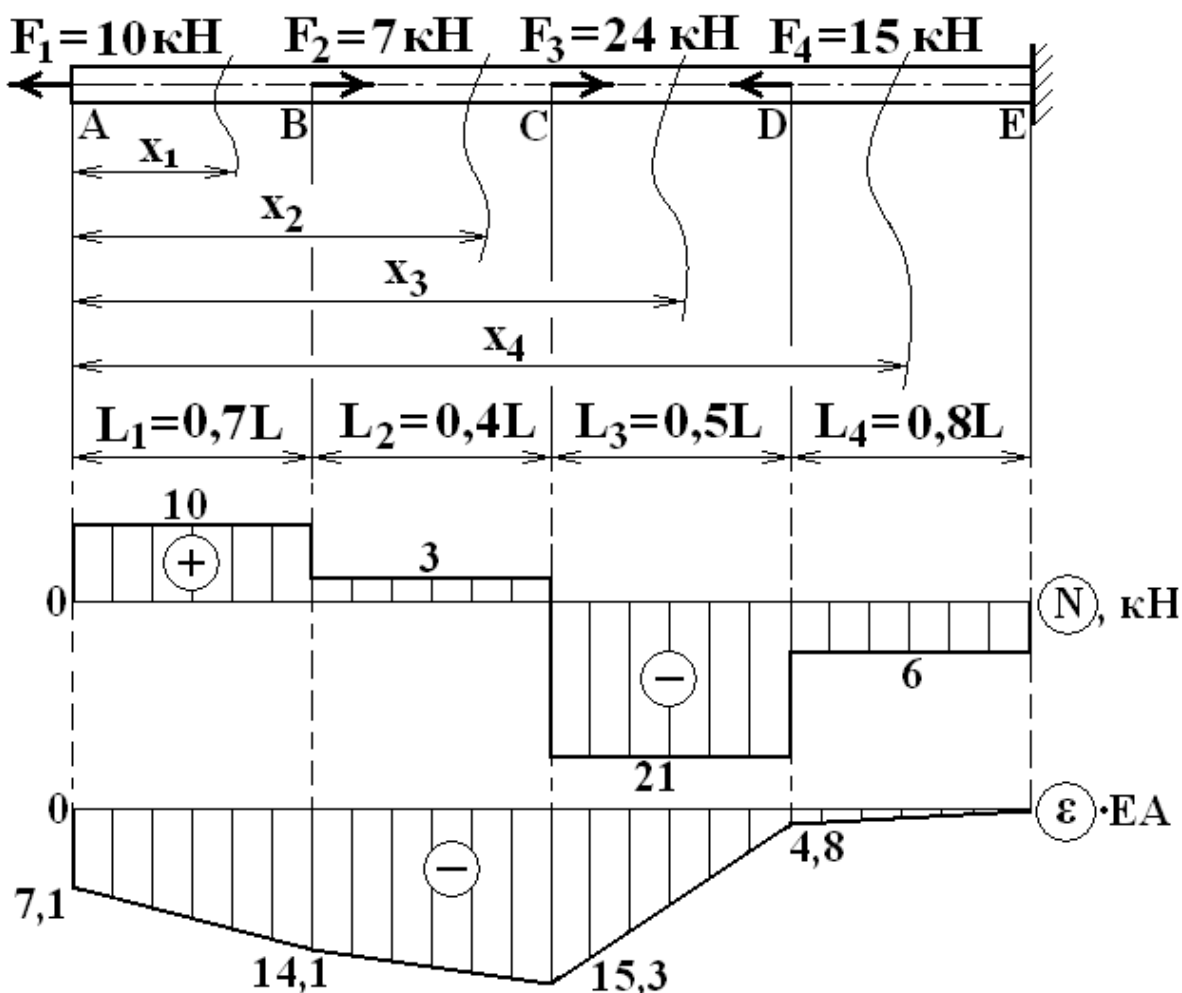


Рисунок 5

Построение эпюры удлинения

Заделка неподвижна, поэтому удлинение в ней $\Delta L_E = 0$.

Удлинение сечения D относительно неподвижной заделки E

$$\Delta L_{DE} = \frac{N_4 \cdot L_4}{EA},$$

$$\text{откуда } \varepsilon_{DE} \cdot EA = \frac{\Delta L_{DE}}{L} \cdot EA = N_4 \cdot k_4 = -6 \cdot 0,8 = -4,8 \text{ кН}.$$

Относительное удлинение сечения C относительно неподвижной заделки E складывается из суммы относительных удлинений сечения C относительно D и сечения D относительно E , т. е.

$$\varepsilon_{CE} \cdot EA = \varepsilon_{CD} \cdot EA + \varepsilon_{DE} \cdot EA,$$

$$\text{где } \varepsilon_{CD} \cdot EA = \frac{\Delta L_{CD}}{L} \cdot EA = N_3 \cdot k_3 = -21 \cdot 0,5 = -10,5 \text{ кН},$$

$$\text{тогда } \varepsilon_{CE} \cdot EA = \varepsilon_{CD} \cdot EA + \varepsilon_{DE} \cdot EA = -10,5 + (-4,8) = -15,3 \text{ кН}.$$

Аналогично определяются относительные удлинения сечений B и A относительно неподвижной заделки E :

$$\varepsilon_{BE} \cdot EA = \varepsilon_{BC} \cdot EA + \varepsilon_{CE} \cdot EA,$$

$$\text{где } \varepsilon_{BC} \cdot EA = \frac{\Delta L_{BC}}{L} \cdot EA = N_2 \cdot k_2 = 3 \cdot 0,4 = 1,2 \text{ кН},$$

$$\text{тогда } \varepsilon_{BE} \cdot EA = \varepsilon_{BC} \cdot EA + \varepsilon_{CE} \cdot EA = -15,3 + 1,2 = -14,1 \text{ кН},$$

$$\varepsilon_{AE} \cdot EA = \varepsilon_{AB} \cdot EA + \varepsilon_{BE} \cdot EA,$$

$$\varepsilon_{AB} \cdot EA = \frac{\Delta L_{AB}}{L} \cdot EA = N_1 \cdot k_1 = 10 \cdot 0,7 = 7 \text{ кН},$$

$$\varepsilon_{AE} \cdot EA = \varepsilon_{AB} \cdot EA + \varepsilon_{BE} \cdot EA = 7 + (-14,1) = -7,1 \text{ кН}.$$

Полученные значения откладываем в масштабе на каждом из соответствующих участков стержня (рис. 5).

Определение диаметра стержня

Так как сечение стержня по длине не меняется, то из условия прочности определим минимальный диаметр стержня круглого сплошного сечения

$$d_{\min} \geq \sqrt{\frac{4 \cdot |N_{\max}|}{\pi \cdot [\sigma]}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 21 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 160 \cdot 10^6}} = 0,01293 \text{ м} = 12,93 \text{ мм}.$$

Полученное значение округлим до $d = 15 \text{ мм}$.

Определение наибольшего относительного удлинения

Сначала определим величину площади стержня круглого сплошного сечения

$$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot (0,015)^2}{4} = 17,65 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2.$$

Тогда продольная жесткость стержня будет равна

$$EA = 2 \cdot 10^8 \cdot 17,65 \cdot 10^{-5} = 35320 \text{ кН}.$$

Величина наибольшего относительного удлинения

$$|\varepsilon_{\text{MAX}}| = \frac{|\varepsilon_{\text{CE}} \cdot EA|}{EA} = \frac{|-15,3|}{35320} = 0,00043.$$

Выполняем проверку условия жесткости стержня

$$|\varepsilon_{\text{MAX}}| = 0,00043 < 0,001 = [\varepsilon].$$

Условие жесткости стержня для диаметра 15 мм выполняется, в противном случае диаметр стержня надо увеличить до значения, определяемого формулой

$$d_{\text{MIN}} \geq \sqrt{\frac{4 \cdot |\varepsilon_{\text{MAX}} \cdot EA|}{E \cdot \pi \cdot [\varepsilon]}}.$$

Задача 2.1.2

Стальной стержень АЕ круглого поперечного сечения нагружен заданными продольными силами F_1, F_2, F_3 и F_4 .

Относительные длины участков стержня $k_1=L_1/L, k_2=L_2/L, k_3=L_3/L, k_4=L_4/L$, допускаемое напряжение $[\sigma]$ и допускаемое относительное удлинение $[\varepsilon]$ известны. Модуль Юнга материала стержня $E = 2 \cdot 10^8$ кПа.

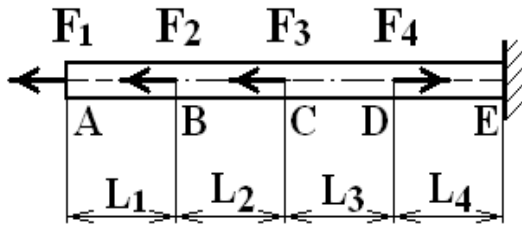
Требуется построить эпюры продольной силы N и относительного удлинения ε , с помощью которых определить диаметр поперечного сечения стержня из условий прочности и жесткости.

Данные, необходимые для вычисления, приведены в табл. 4.

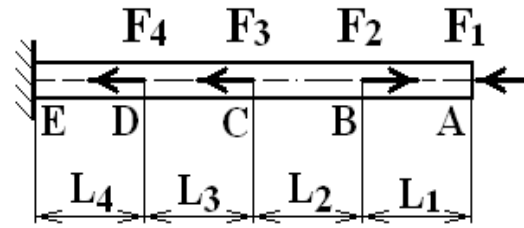
Таблица 4 – Исходные данные

№	F_1	F_2	F_3	F_4	k_1	k_2	k_3	k_4	$[\sigma]$	$[\varepsilon]$
	кН	кН	кН	кН	-	-	-	-	МПа	%
0	3	7	2	11	0,4	0,5	0,2	0,6	110	0,15
1	2	3	11	7	0,2	0,4	0,6	0,5	120	0,14
2	11	7	3	2	0,6	0,5	0,4	0,2	125	0,13
3	3	2	11	7	0,4	0,2	0,6	0,5	130	0,12
4	2	11	7	3	0,2	0,6	0,5	0,4	135	0,11
5	3	11	2	7	0,4	0,6	0,2	0,5	140	0,1
6	7	2	3	11	0,5	0,2	0,4	0,6	145	0,09
7	11	2	3	7	0,6	0,2	0,4	0,5	150	0,08
8	7	11	2	3	0,5	0,6	0,2	0,4	155	0,07
9	3	2	7	11	0,4	0,2	0,5	0,6	160	0,06

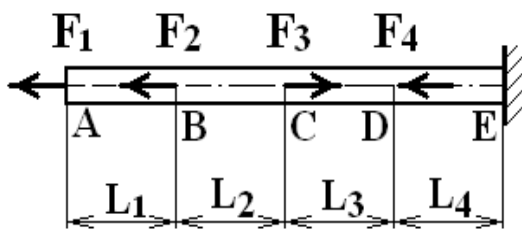
1



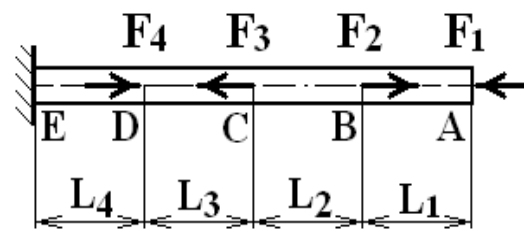
2



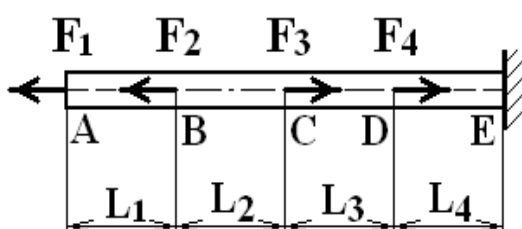
3



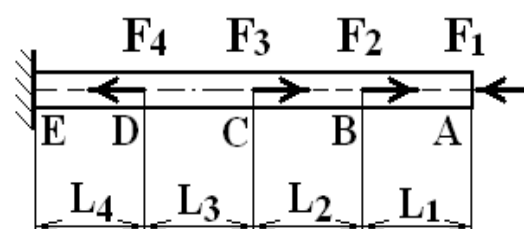
4



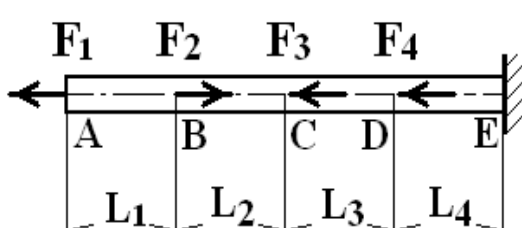
5



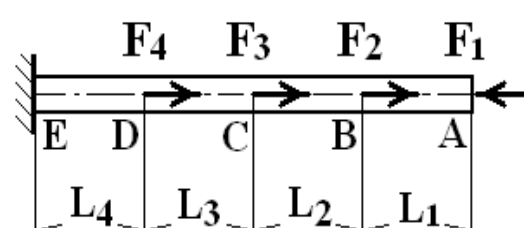
6



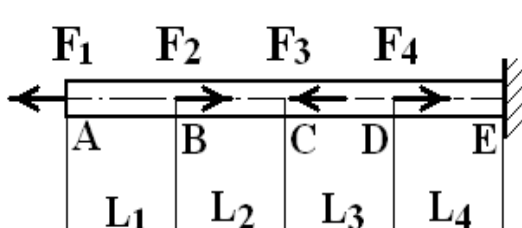
7



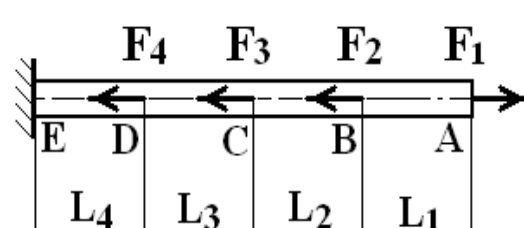
8

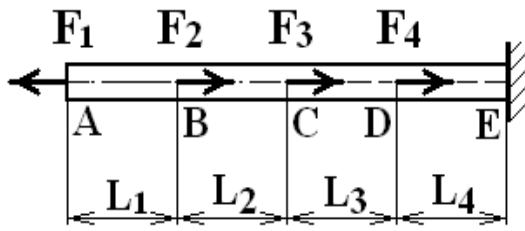
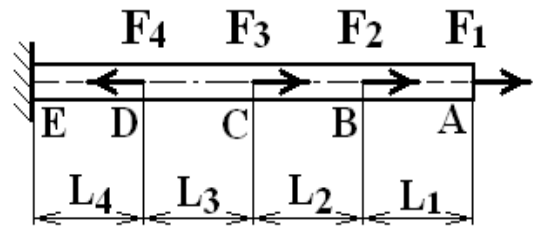
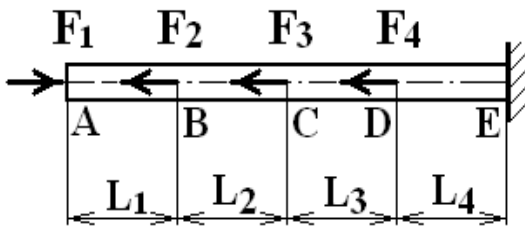
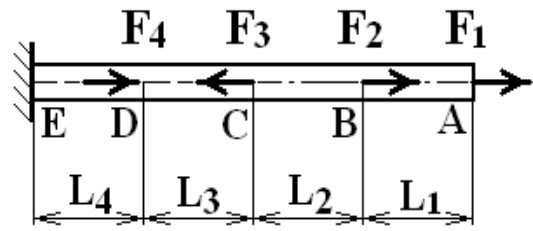
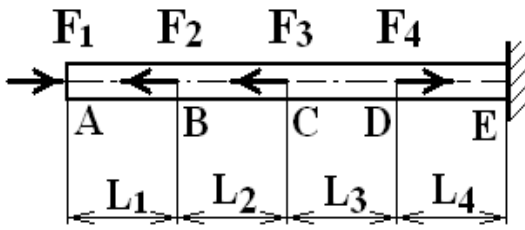
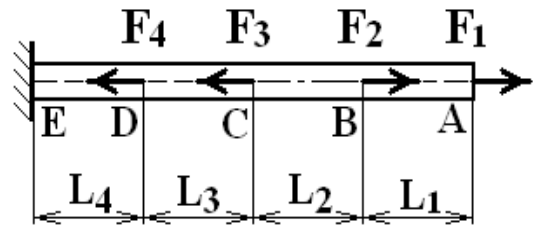
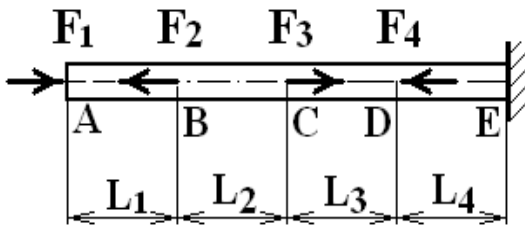
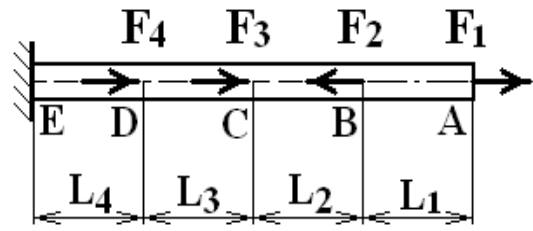
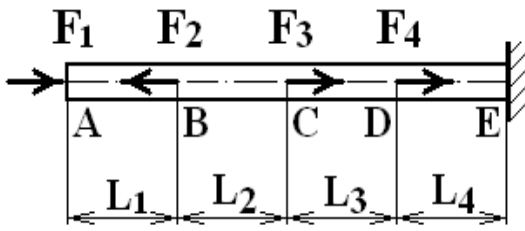
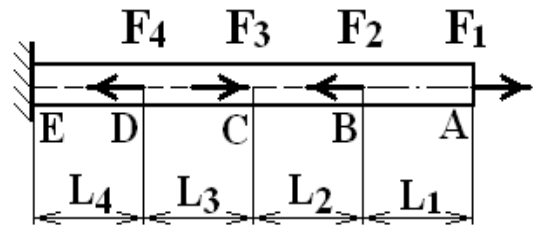


9

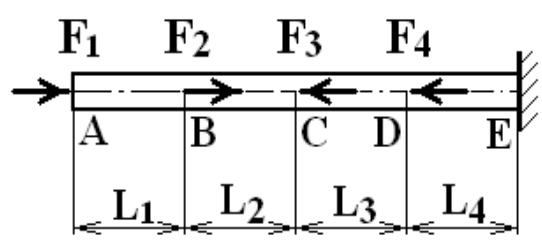


10

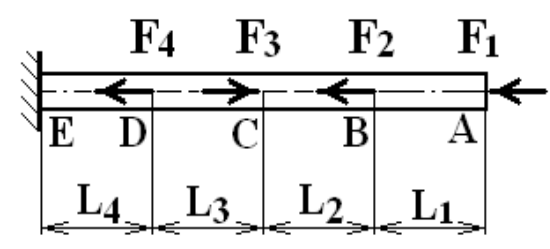


11**12****13****14****15****16****17****18****19****20**

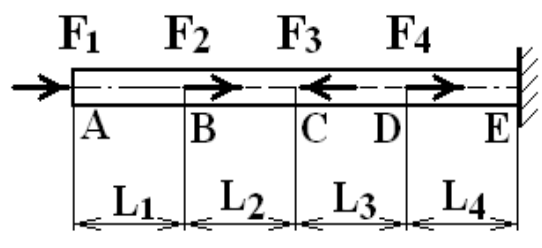
21



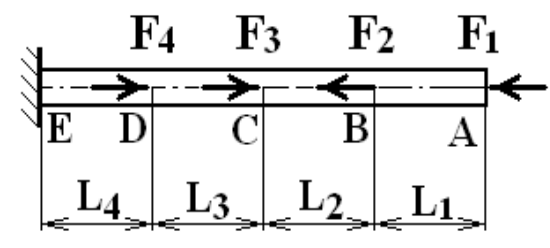
22



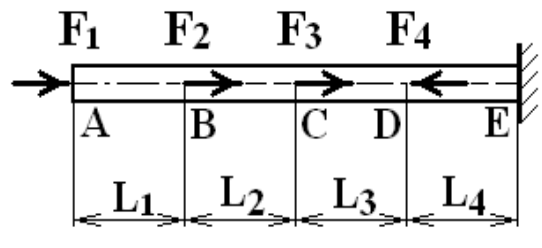
23



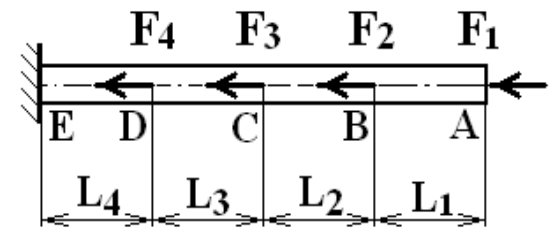
24



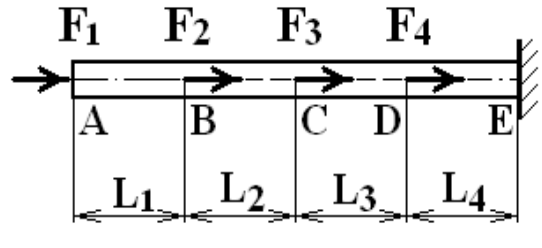
25



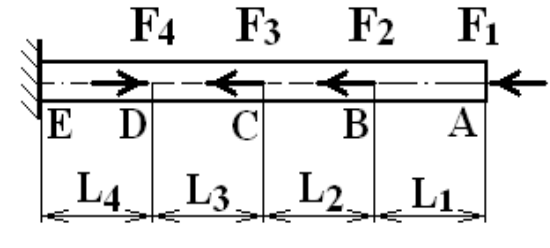
26



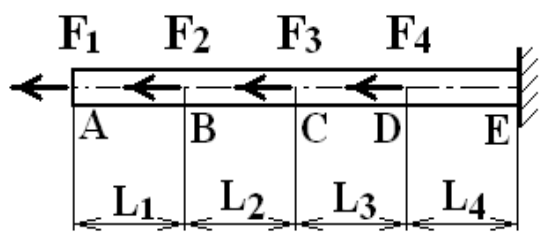
27



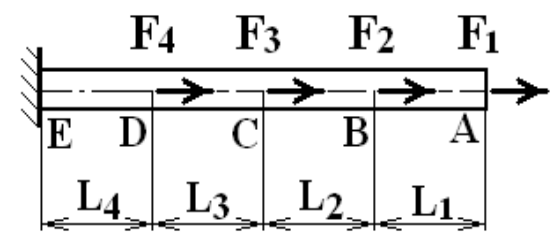
28



29



30



2.2. Кручение

Стержень подвергается деформации **кручения**, когда в его поперечных сечениях возникают внутренние крутящие моменты M_K . Их величина определяется методом сечений по участкам, границами которых являются места приложения внешних крутящих моментов T , действующих на стержень. Из условия равновесия следует, что величина внутреннего крутящего момента M_K в поперечном сечении стержня численно равна алгебраической сумме внешних крутящих моментов T , действующих по одну сторону от рассматриваемого сечения.

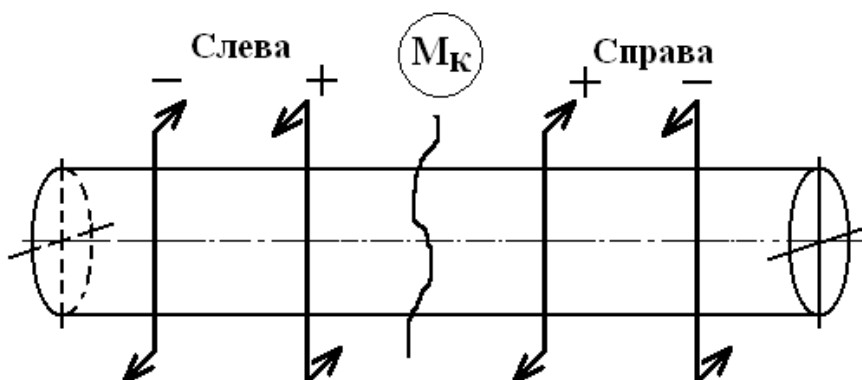


Рисунок 6

Крутящий момент M_K в поперечном сечении вала считается положительным, когда внешний крутящий момент T действует по часовой стрелке при взгляде на соответствующий торец вала (рис. 6).

Эпюра крутящего момента – это график, показывающий изменение величины внутреннего крутящего момента в поперечных сечениях вала в зависимости от координаты x .

Для цилиндрического стержня круглого поперечного сечения диаметром d величина касательного напряжения τ в точке поперечного сечения, находящегося на расстоянии ρ от центра (рис. 6), определяется по формуле

$$\tau = \frac{M_K}{I_p} \cdot \rho,$$

где M_K – величина крутящего момента в сечении, I_p – полярный момент инерции сечения. Для круглого сплошного сечения диаметром d полярный момент инерции I_p определяется по формуле

$$I_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32}.$$

Максимальные касательные напряжения τ в поперечном сечении вала действуют в точках, наиболее удаленных от центра, т. е. при $\rho = d/2$ (рис. 7). Их величина определяется по формуле

$$\tau_{\text{MAX}} = \frac{M_{\text{K}}}{W_{\text{P}}},$$

где W_{P} – полярный момент сопротивления. Для круглого сплошного сечения W_{P} определяется по формуле

$$W_{\text{P}} = \frac{I_{\text{P}} \cdot 2}{d} = \frac{\pi \cdot d^3}{16}.$$

Условие прочности при кручении имеет вид

$$\tau_{\text{MAX}} = \frac{|M_{\text{K}}|}{W_{\text{P}}} \leq [\tau],$$

где $[\tau]$ – допускаемое касательное напряжение при кручении.

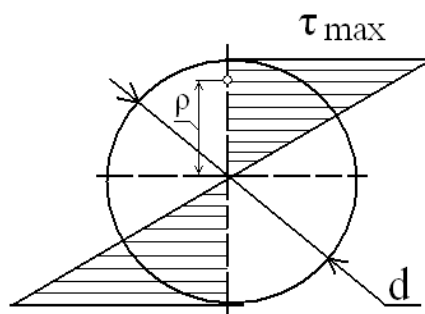


Рисунок 7

Угол закручивания φ на участке вала длиной L , где крутящий момент M_{K} постоянен, определяется по формуле

$$\varphi = \frac{M_{\text{K}} \cdot L}{G \cdot I_{\text{P}}},$$

где G – модуль сдвига материала вала.

Произведение $G \cdot I_{\text{P}}$ называется **жесткостью при кручении** вала.

Если стержень имеет несколько участков, то угол закручивания будет определяться как алгебраическая сумма углов закручивания на участках

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \frac{M_{\text{Ki}} \cdot L_i}{G \cdot I_{\text{Pi}}}.$$

Величина наибольшего относительного угла закручивания (рад/м) на участке вала длиной L определяется по формуле

$$\Delta\varphi = \frac{|\varphi_{\text{MAX}}|}{L}.$$

Условие жесткости при кручении имеет вид

$$\Delta\varphi_{\text{MAX}} \leq [\Delta\varphi],$$

где $[\Delta\varphi]$ – допускаемый относительный угол закручивания.

Задача 2.2.1

Стальной стержень АЕ круглого поперечного сечения нагружен крутящими моментами $T_1 = 7$ кНм, $T_2 = 10$ кНм, $T_3 = 15$ кНм и $T_4 = 24$ кНм.

Длины участков стержня $L_1 = k_1L = 0,8L$, $L_2 = k_2L = 0,7L$, $L_3 = k_3L = 0,4L$, $L_4 = k_4L = 0,5L$ (рис. 8), допускаемое напряжение $[\tau] = 25$ МПа, допускаемый относительный угол закручивания $[\Delta\varphi] = 0,006$ рад/м, модуль сдвига материала стержня $G = 0,8 \cdot 10^8$ кПа.

Требуется построить эпюры крутящего момента M_K и относительного угла закручивания $\Delta\varphi$, с помощью которых определить диаметр поперечного сечения стержня из условий прочности и жесткости.

Построение эпюры крутящих моментов

Не вычисляя из уравнений равновесия значение реактивного момента в заделке и используя метод сечений, запишем выражения для крутящего момента по участкам вала. Будем двигаться при этом слева направо в сторону заделки E , начиная со свободного конца A вала и используя правило знаков согласно рис. 8.

Границы первого участка:

$$0 \leq x_1 \leq L_1.$$

$$M_{K1} = \Sigma T^{\text{ЛЭВ}} = T_1 = 7 \text{ кНм.}$$

Границы второго участка:

$$L_1 \leq x_2 \leq L_1 + L_2.$$

$$M_{K2} = \Sigma T^{\text{ЛЭВ}} = T_1 - T_2 = 7 - 10 = -3 \text{ кНм.}$$

Границы третьего участка:

$$L_1 + L_2 \leq x_3 \leq L_1 + L_2 + L_3.$$

$$M_{K3} = \Sigma T^{\text{ЛЭВ}} = T_1 - T_2 - T_3 = 7 - 10 - 15 = -18 \text{ кНм.}$$

Границы четвертого участка:

$$L_1 + L_2 + L_3 \leq x_4 \leq L_1 + L_2 + L_3 + L_4.$$

$$M_{K4} = \Sigma T^{\text{ЛЭВ}} = T_1 - T_2 - T_3 + T_4 = 7 - 10 - 15 + 24 = 6 \text{ кНм.}$$

Полученные значения откладываем в масштабе на каждом из соответствующих участков вала (рис. 8). После построения эпюры крутящих моментов делаем ее проверку, используя правило проверки правильности построения эпюры крутящих моментов: в тех сечениях вала, где приложены сосредоточенные крутящие моменты, на эпюре будут скачки на их величину в соответствии с направлением хода построения и выбранного правила знаков.

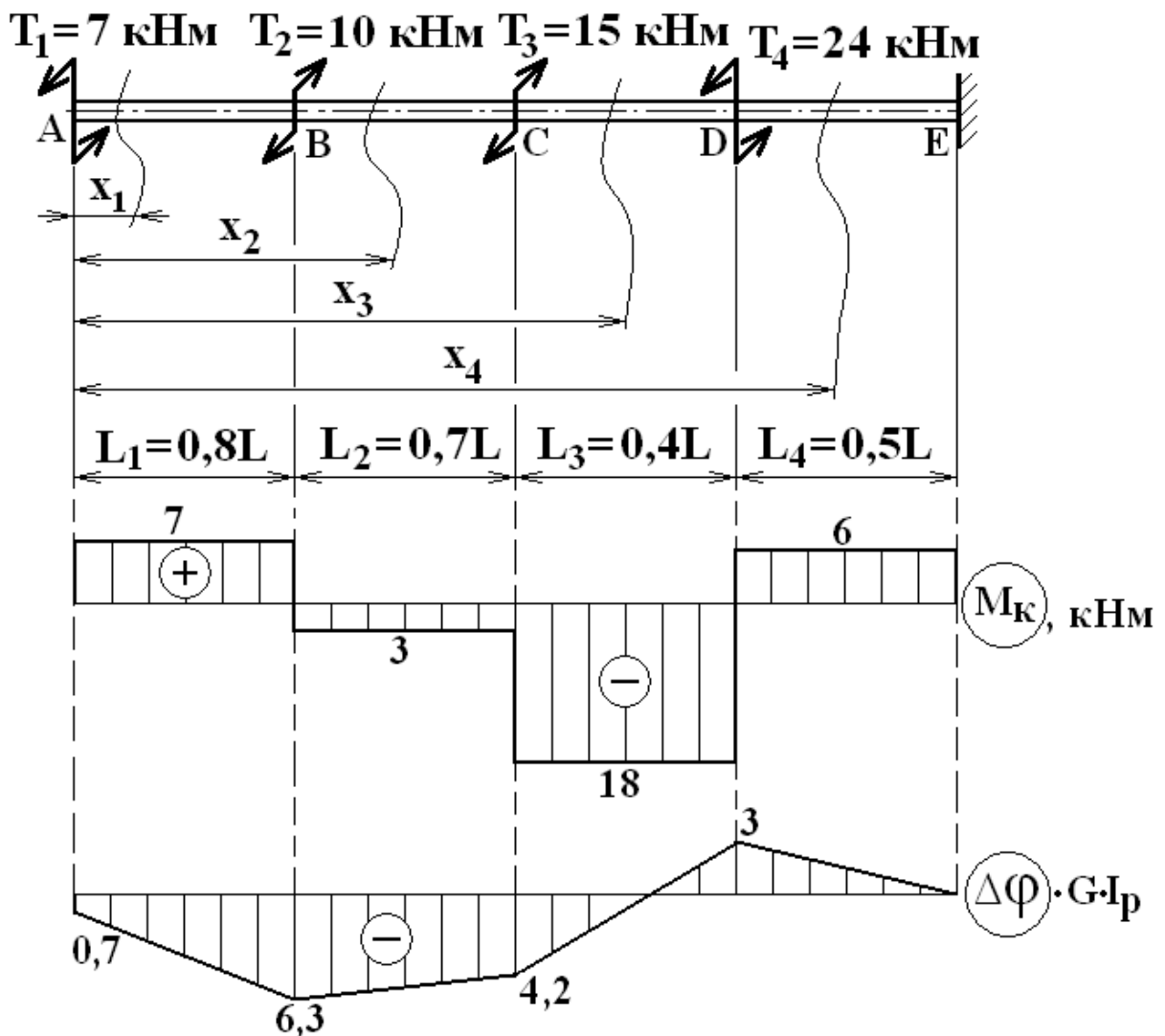


Рисунок 8

Построение эпюры углов закручивания

Заделка неподвижна, поэтому угол закручивания в ней $\varphi_E = 0 \text{ рад}$.
 Угол поворота сечения D относительно неподвижной заделки E

$$\varphi_{DE} = \frac{M_{K4} \cdot L_4}{G \cdot I_p},$$

откуда
$$\Delta\varphi_{DE} \cdot GI_p = \frac{\varphi_{DE}}{L} \cdot GI_p = M_{K4} \cdot k_4 = 6 \cdot 0,5 = 3 \text{ кНм}.$$

Относительный угол закручивания сечения C относительно неподвижной заделки E складывается из суммы относительных углов закручивания сечения C относительно D и сечения D относительно E , то есть

$$\Delta\varphi_{CE} \cdot GI_P = \Delta\varphi_{CD} \cdot GI_P + \Delta\varphi_{DE} \cdot GI_P,$$

где $\Delta\varphi_{CD} \cdot GI_P = \frac{\varphi_{CD}}{L} \cdot GI_P = M_{K3} \cdot k_3 = -18 \cdot 0,4 = -7,2 \text{ кНм},$

тогда $\Delta\varphi_{CE} \cdot GI_P = \Delta\varphi_{CD} \cdot GI_P + \Delta\varphi_{DE} \cdot GI_P = -7,2 + 3 = -4,2 \text{ кНм}.$

Аналогично определяются относительные углы закручивания сечений B и A относительно неподвижной заделки E :

$$\Delta\varphi_{BE} \cdot GI_P = \Delta\varphi_{BC} \cdot GI_P + \Delta\varphi_{CE} \cdot GI_P,$$

где $\Delta\varphi_{BC} \cdot GI_P = \frac{\varphi_{BC}}{L} \cdot GI_P = M_{K2} \cdot k_2 = -3 \cdot 0,7 = -2,1 \text{ кНм},$

тогда $\Delta\varphi_{BE} \cdot GI_P = \Delta\varphi_{BC} \cdot GI_P + \Delta\varphi_{CE} \cdot GI_P = -2,1 + (-4,2) = -6,3 \text{ кНм},$

$$\Delta\varphi_{AE} \cdot GI_P = \Delta\varphi_{AB} \cdot GI_P + \Delta\varphi_{BE} \cdot GI_P,$$

$$\Delta\varphi_{AB} \cdot GI_P = \frac{\varphi_{AB}}{L} \cdot GI_P = M_{K1} \cdot k_1 = 7 \cdot 0,8 = 5,6 \text{ кНм},$$

$$\Delta\varphi_{AE} \cdot GI_P = \Delta\varphi_{AB} \cdot GI_P + \Delta\varphi_{BE} \cdot GI_P = 5,6 + (-6,3) = -0,7 \text{ кНм}.$$

Полученные значения откладываем в масштабе на каждом из соответствующих участков вала (рис.8).

Определение диаметра вала

Так как сечение вала по длине не меняется, то из условия прочности определим минимальный диаметр вала круглого сплошного сечения

$$d_{\text{MIN}} \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot |M_{\text{KMAX}}|}{\pi \cdot [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 18 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 25 \cdot 10^6}} = 0,154 \text{ м} = 154 \text{ мм}.$$

Полученное значение округлим до $d = 160 \text{ мм}.$

Определение наибольшего относительного угла закручивания

Сначала определим величину полярного момента инерции I_P при кручении вала круглого сплошного сечения. Так как сечение вала по длине постоянно, то для каждого участка имеем

$$I_P = \frac{\pi \cdot d^4}{32} = \frac{3,14 \cdot (0,16)^4}{32} = 64,3 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4.$$

Тогда жесткость стержня при кручении будет равна

$$GI_p = 0,8 \cdot 10^8 \cdot 64,3 \cdot 10^{-6} = 5144,6 \text{ кНм}^2.$$

Величина наибольшего относительного угла закручивания будет равна

$$|\Delta\varphi_{\text{MAX}}| = \frac{|\Delta\varphi_{\text{BE}} \cdot GI_p|}{GI_p} = \frac{|-6,3|}{5144,6} = 0,00122 \text{ рад/м}.$$

Выполняем проверку условия жесткости вала

$$|\Delta\varphi_{\text{MAX}}| = 0,00122 \text{ рад/м} < 0,006 \text{ рад/м} = [\Delta\varphi].$$

Условие жесткости вала для диаметра 160 мм выполняется, в противном случае диаметр вала надо увеличить до значения, определяемого формулой

$$d_{\text{MIN}} \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot |\Delta\varphi_{\text{MAX}} \cdot GI_p|}{G \cdot \pi \cdot [\Delta\varphi]}}.$$

Задача 2.2.2

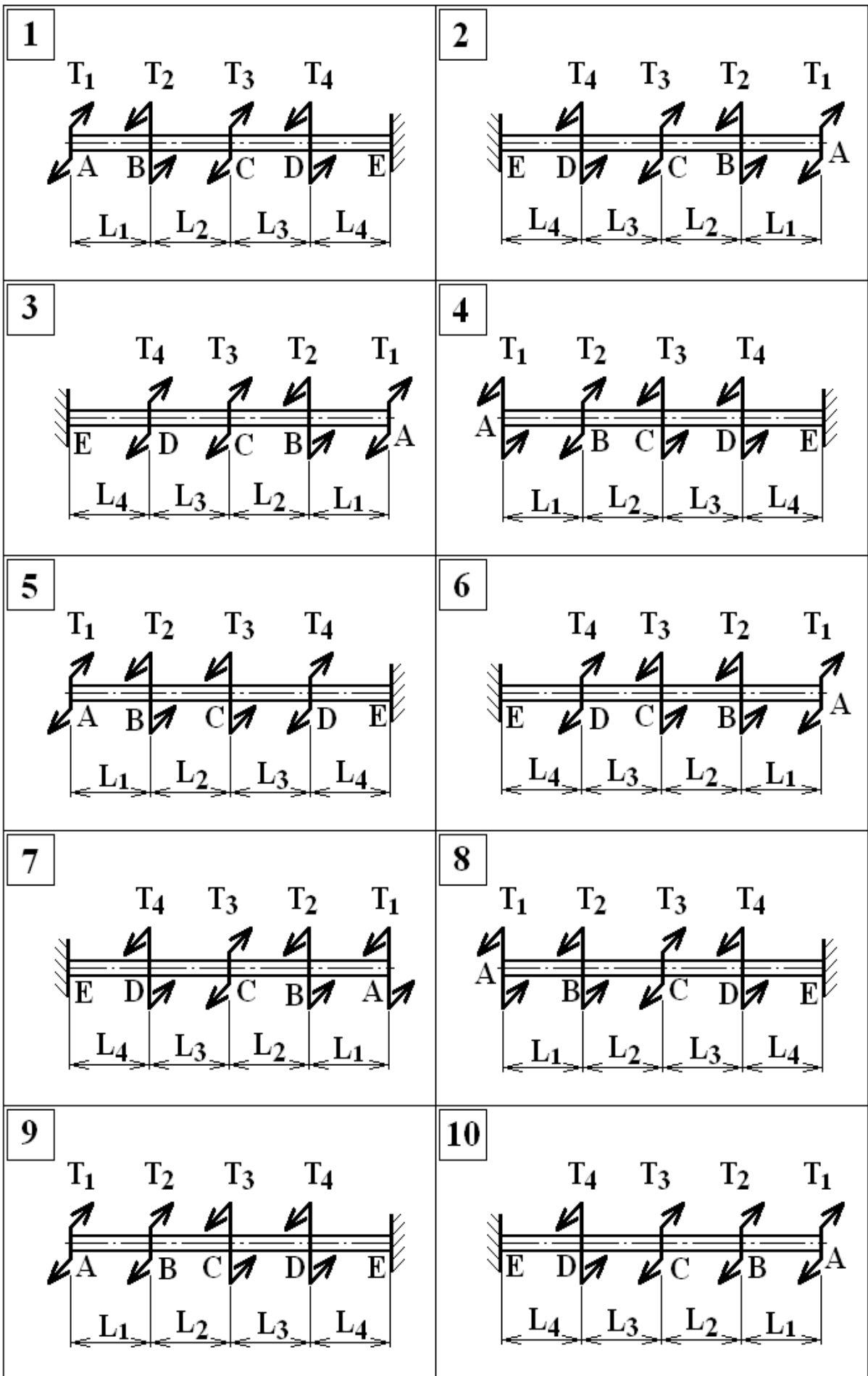
Стальной стержень АЕ круглого поперечного сечения нагружен заданными крутящими моментами T_1, T_2, T_3 и T_4 .

Относительные длины участков стержня $k_1=L_1/L, k_2=L_2/L, k_3=L_3/L, k_4=L_4/L$, допускаемое напряжение $[\tau]$ и относительный угол закручивания $[\Delta\varphi]$ известны. Модуль сдвига материала стержня $G=0,8 \cdot 10^8$ кПа.

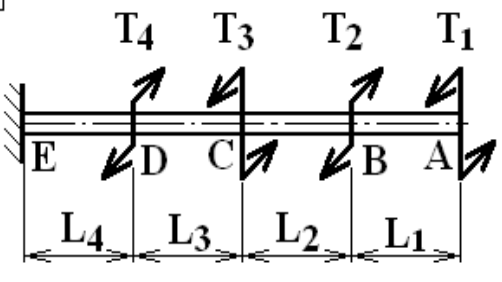
Требуется построить эпюры крутящего момента M_k и относительного угла закручивания $\Delta\varphi$, с помощью которых определить диаметр поперечного сечения стержня из условий прочности и жесткости. Данные, необходимые для вычисления, приведены в табл. 5.

Таблица 5 – Исходные данные

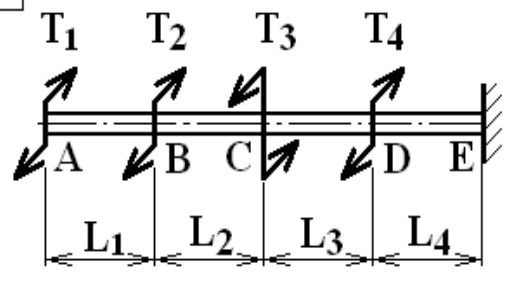
№	T_1	T_2	T_3	T_4	k_1	k_2	k_3	k_4	$[\tau]$	$[\Delta\varphi]$
	кНм	кНм	кНм	кНм	-	-	-	-	МПа	рад/м
0	3	2	7	11	0,4	0,2	0,5	0,6	35	0,015
1	7	11	2	3	0,5	0,6	0,2	0,4	40	0,014
2	11	2	3	7	0,6	0,2	0,4	0,5	45	0,013
3	7	2	3	11	0,5	0,2	0,4	0,6	50	0,012
4	3	11	2	7	0,4	0,6	0,2	0,5	55	0,011
5	2	11	7	3	0,2	0,6	0,5	0,4	60	0,01
6	3	2	11	7	0,4	0,2	0,6	0,5	65	0,009
7	11	7	3	2	0,6	0,5	0,4	0,2	70	0,008
8	2	3	11	7	0,2	0,4	0,6	0,5	75	0,007
9	3	7	2	11	0,4	0,5	0,2	0,6	80	0,006



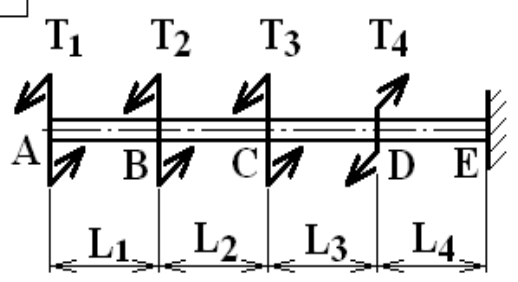
11



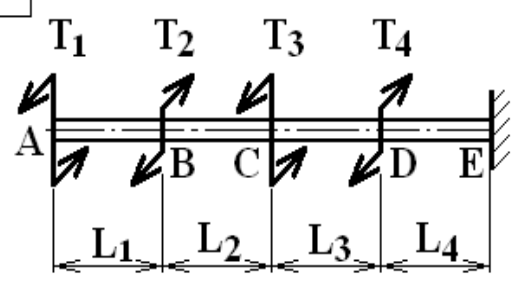
12



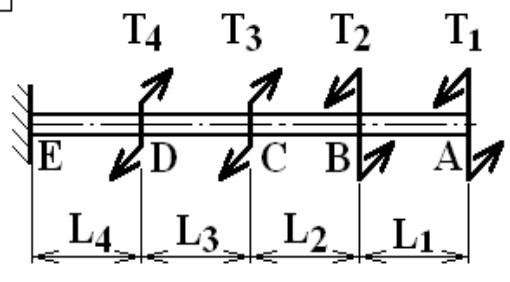
13



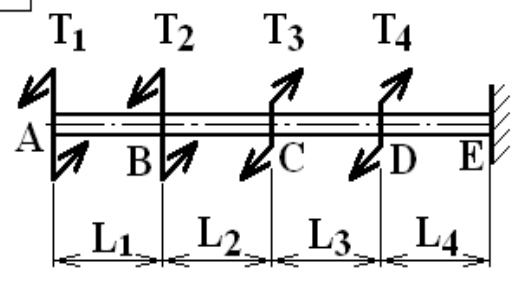
14



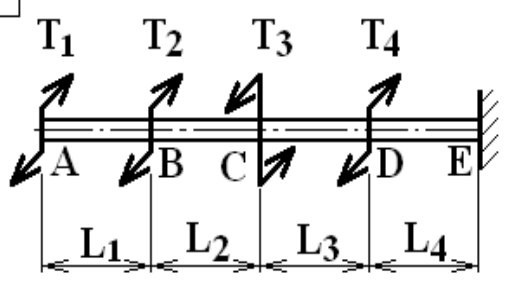
15



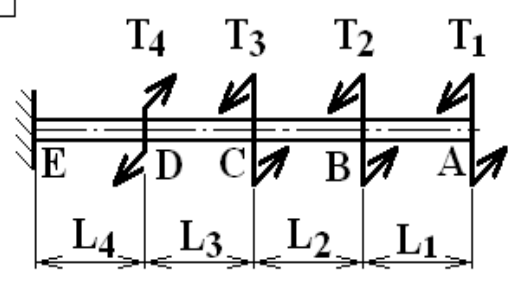
16



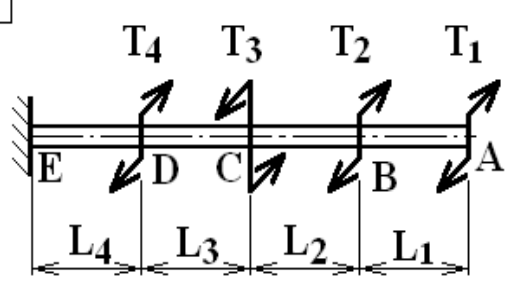
17



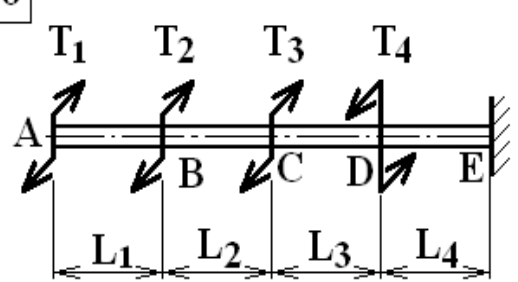
18



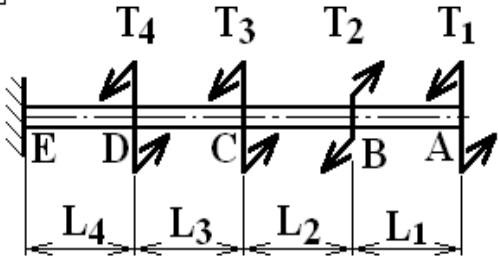
19



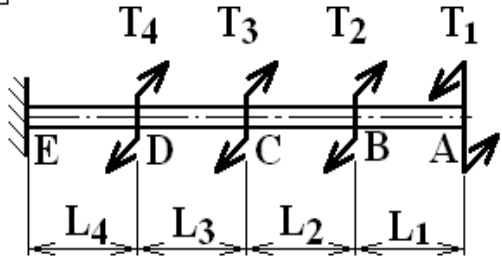
20



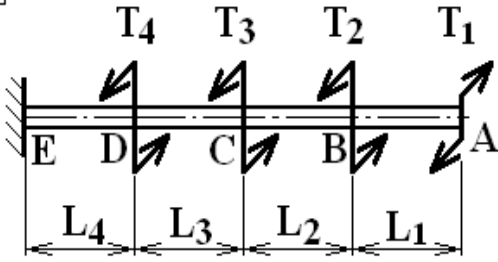
21



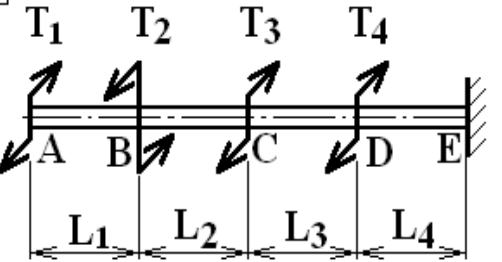
22



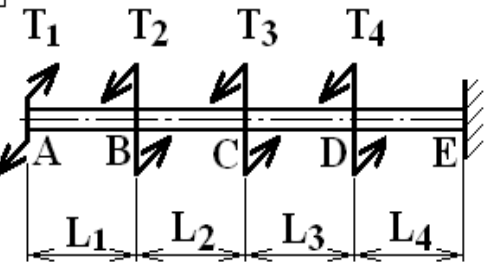
23



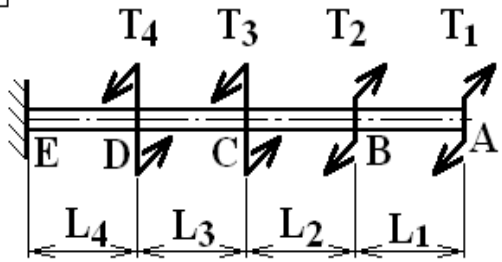
24



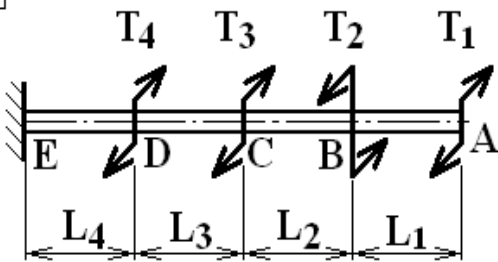
25



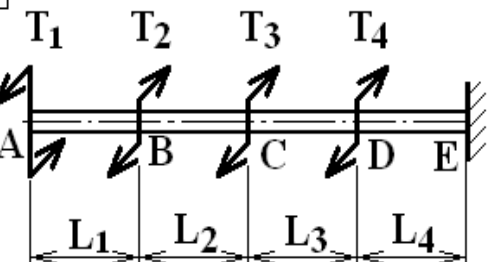
26



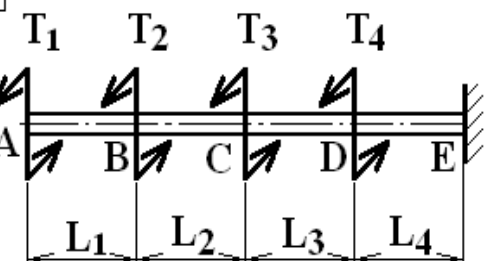
27



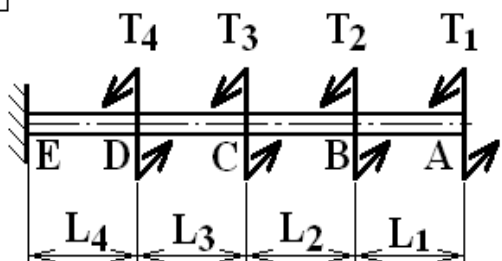
28



29



30



2.3. Изгиб

Деформация, при которой меняется кривизна геометрической оси, называется *изгибом*. Стержень при изгибе называется *балкой*.

При изгибе стержня за счет действия на него внешней поперечной нагрузки (сосредоточенных сил и моментов) в поперечных сечениях стержня возникают следующие внутренние силовые факторы: поперечная сила Q и изгибающий момент M .

Если плоскость, в которой лежат действующие нагрузки, совпадает с одной из главных плоскостей инерции, то такой изгиб называется *прямым*, а если не совпадает, то *косым*. Если величина поперечной силы в сечении не равна нулю, то такой изгиб называется *поперечным*. Если величина поперечной силы в сечении равна нулю и изгибающий момент постоянен, то такой изгиб называется *чистым*.

Далее будет рассмотрена теория прямого поперечного изгиба.

Величина *поперечной силы* Q_Y в поперечном сечении балки численно равна алгебраической сумме проекций на ось Y всех внешних сил, действующих по одну сторону (справа или слева) от рассматриваемого сечения. Поперечная сила считается положительной, если она направлена слева вверх и справа вниз. При противоположных направлениях поперечная сила считается отрицательной (рис. 7).

Величина *изгибающего момента* M_Z в поперечном сечении балки численно равна алгебраической сумме моментов внешних нагрузок, действующих по одну сторону (справа или слева) от рассматриваемого сечения. Изгибающий момент считается положительным, если он направлен слева от сечения по часовой стрелке, а справа - против часовой стрелки. При противоположных направлениях считается отрицательным (рис. 9).

Эпюрой поперечных сил Q и изгибающих моментов M называется график, показывающий изменение соответствующих величин в зависимости от координаты X .

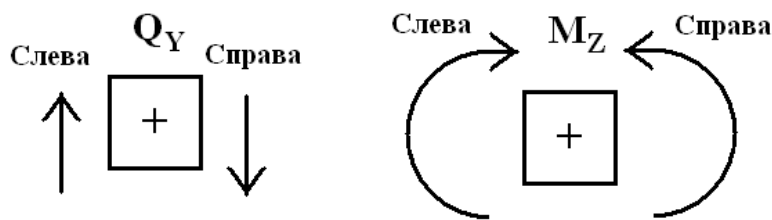


Рисунок 9

Условие прочности по нормальным напряжениям при изгибе имеет вид:

$$\sigma_{\text{MAX}} = \frac{|M_{\text{MAX}}|}{W_Z} \leq [\sigma],$$

где σ_{MAX} – максимальное нормальное напряжение в поперечном сечении балки, $|M_{MAX}|$ – наибольшее по модулю значение изгибающего момента, взятое с его эпюры, W_Z – момент сопротивления постоянной по длине балки площади поперечного сечения, $[\sigma]$ – допускаемое нормальное напряжение при изгибе.

Для круглого сплошного сечения величина W_Z определяется по формуле

$$W_Z = \frac{\pi \cdot d^3}{32},$$

где d – диаметр стержня.

При изгибе балки существует дифференциальная зависимость

$$\frac{dM(x)}{dx} = Q(x).$$

Из неё следуют правила проверки построенных эпюр Q и M :

1. В тех сечениях балки, где приложены сосредоточенные силы, включая опорные реакции, на эпюре Q будут скачки на их величину, а на эпюре M – излом эпюры.

2. В тех сечениях балки, где приложены сосредоточенные моменты, на эпюре M будут скачки на их величину, а на эпюре Q особенностей не будет.

3. Если эпюра Q представлена горизонтальной линией, то эпюра M будет наклонной к оси x прямой.

4. На участке, где поперечная сила Q положительна, изгибающий момент M возрастает, а если сила Q отрицательна, то момент M убывает.

Задача 2.3.1

Стальной стержень АВ круглого поперечного сечения нагружен изгибающими моментами $M_{01} = 15$ кНм, $M_{02} = 15$ кНм и поперечными силами $F_1 = 5$ кН и $F_2 = 20$ кН (рис. 26).

Длины участков стержня $a=2$ м, $b=3$ м, $c=1$ м, допускаемое напряжение $[\sigma]=160$ МПа.

Требуется определить реакции в опорах А и В, построить эпюры поперечной силы Q и изгибающего момента M , определить диаметр поперечного сечения стержня из условия прочности.

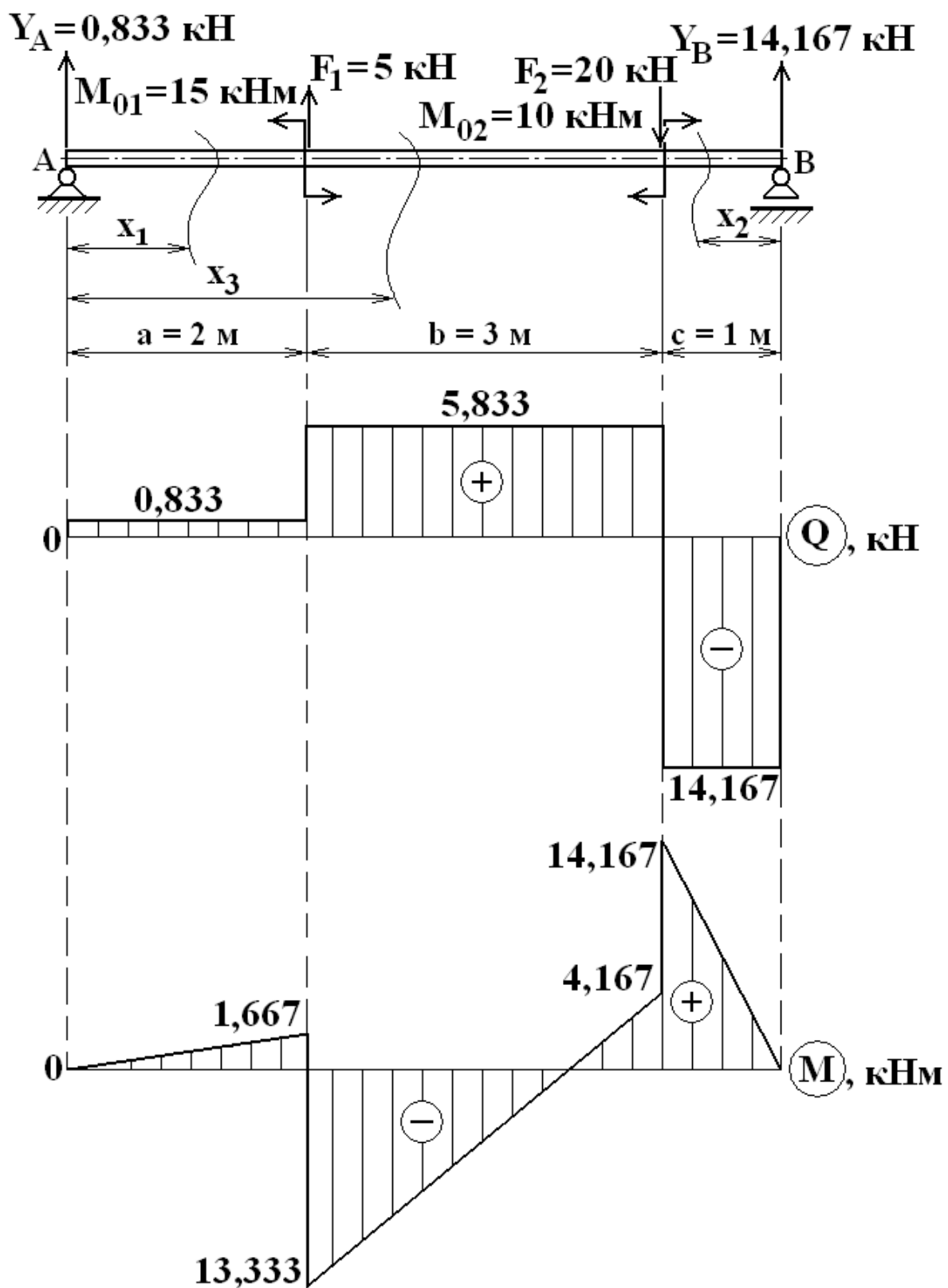


Рисунок 10

Определение реакций опор

Для определения реакции в опорных закреплениях используем уравнения равновесия статики на плоскости. Для этого в опорах A и B покажем действие реакций Y_A и Y_B , направив их предварительно вертикально вверх (см. рис. 8). Так как горизонтальных сил к балке не приложено, то $X_A=0$.

Для нахождения реакции Y_A составим сумму моментов всех действующих сил относительно точки B :

$$\sum_{i=1}^n M_{Bi} = 0;$$
$$- Y_A \cdot (a + b + c) + M_{01} - F_1 \cdot (b + c) - M_{02} + F_2 \cdot c = 0;$$

$$Y_A = \frac{M_{01} - F_1 \cdot (b + c) - M_{02} + F_2 \cdot c}{a + b + c} = \frac{15 - 5 \cdot (3 + 1) - 10 + 20 \cdot 1}{2 + 3 + 1} = 0,833 \text{ кН.}$$

Так как значение реакции Y_A получилось положительным, то её направление соответствует показанному направлению Y_A на расчетной схеме (в противном случае направление следует поменять на обратное).

Для нахождения реакции Y_B составим сумму моментов всех действующих сил относительно точки A :

$$\sum_{i=1}^n M_{Ai} = 0;$$
$$Y_B \cdot (a + b + c) + M_{01} - F_2 \cdot (b + a) - M_{02} + F_1 \cdot a = 0;$$

$$Y_B = \frac{M_{02} + F_2 \cdot (b + a) - M_{01} - F_1 \cdot a}{a + b + c} = \frac{10 + 20 \cdot (3 + 2) - 15 - 5 \cdot 2}{2 + 3 + 1} = 14,167 \text{ кН.}$$

Так как значение реакции Y_B получилось положительным, то её направление соответствует показанному направлению Y_B на расчетной схеме (в противном случае направление следует поменять на обратное).

Сделаем проверку найденных реакций:

$$\sum_{i=1}^n Y_i = Y_A + Y_B + F_1 - F_2 = 0,833 + 14,167 + 5 - 20 = 0.$$

Проверка сошлась, теперь на расчетной схеме все известно и можно приступать к построению эпюр поперечной силы и изгибающего момента.

Построение эпюр поперечной силы и изгибающего момента

Заданная балка состоит из трех участков. Рассечем ее последовательно на каждом из них и запишем выражения для поперечной силы и изгибающего момента, действующих по одну сторону от рассматриваемого сечения, используя правило знаков согласно рис. 10.

Границы первого участка:

$$0 \leq x_1 \leq a.$$

$$Q_1 = \Sigma Q^{\text{ЛЭВ}} = Y_A = 0,833 \text{ кН.}$$

$$M_1 = \Sigma M^{\text{ЛЭВ}} = Y_A \cdot x_1 = 0,833 \cdot x_1.$$

При $x_1 = 0$ м, $M_1 = 0$ кНм.

При $x_1 = a = 2$ м, $M_1 = 1,667$ кНм.

Границы второго участка:

$$0 \leq x_2 \leq c.$$

$$Q_2 = \Sigma Q^{\text{ПР}} = -Y_B = -14,167 \text{ кН.}$$

$$M_2 = \Sigma M^{\text{ПР}} = Y_B \cdot x_2 = 14,167 \cdot x_2.$$

При $x_2 = 0$ м, $M_2 = 0$ кНм.

При $x_2 = c = 1$ м, $M_2 = 14,167$ кНм.

Границы третьего участка:

$$a \leq x_3 \leq a + b.$$

$$Q_3 = \Sigma Q^{\text{ЛЭВ}} = Y_A + F_1 = 0,833 + 5 = 5,833 \text{ кН.}$$

$$M_3 = \Sigma M^{\text{ЛЭВ}} = Y_A \cdot x_3 - M_{01} + F_1 \cdot (x_3 - a) = 0,833 \cdot x_3 - 15 + 5 \cdot (x_3 - 2).$$

При $x_3 = a = 2$ м, $M_3 = 0,833 \cdot 2 - 15 = -13,333$ кНм.

При $x_3 = a + b = 5$ м, $M_3 = 0,833 \cdot 5 - 15 + 5 \cdot (5 - 2) = 4,167$ кНм.

Полученные значения откладываем в масштабе на каждом из соответствующих участков балки (рис. 10). После построения эпюры делаем ее проверку, используя правила построения эпюр при изгибе.

Определение диаметра балки

Так как сечение балки по длине не меняется, то из условия прочности определим минимальный диаметр балки круглого сплошного сечения

$$d_{\text{MIN}} \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot |M_{\text{MAX}}|}{\pi \cdot [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 14,167 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 160 \cdot 10^6}} = 0,0966 \text{ м} = 96,6 \text{ мм}.$$

Полученное значение округлим до $d=100$ мм.

Задача 2.3.2

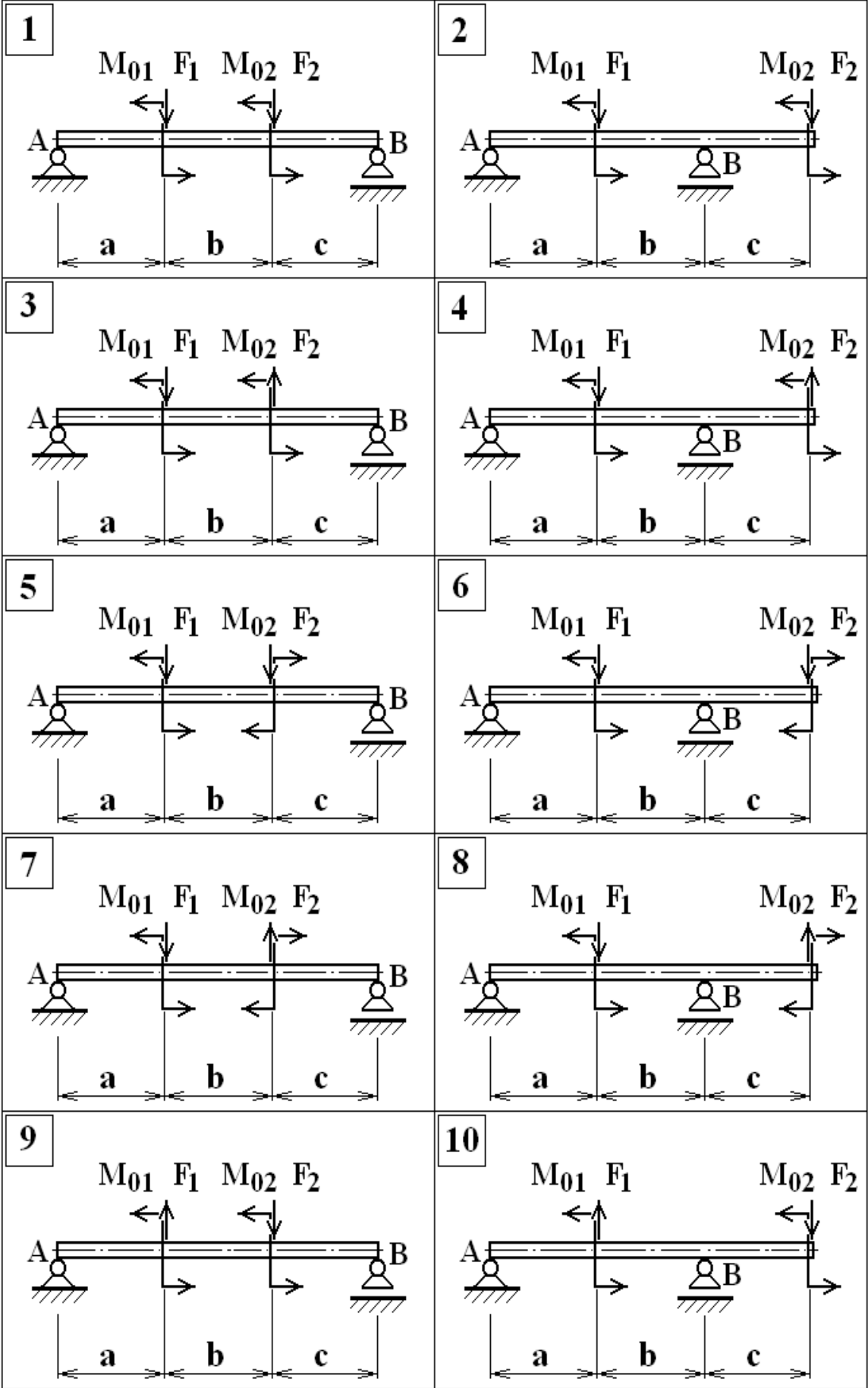
Стальной стержень AB круглого поперечного сечения нагружен заданными изгибающими моментами M_{01} , M_{02} и поперечными силами F_1 и F_2 .

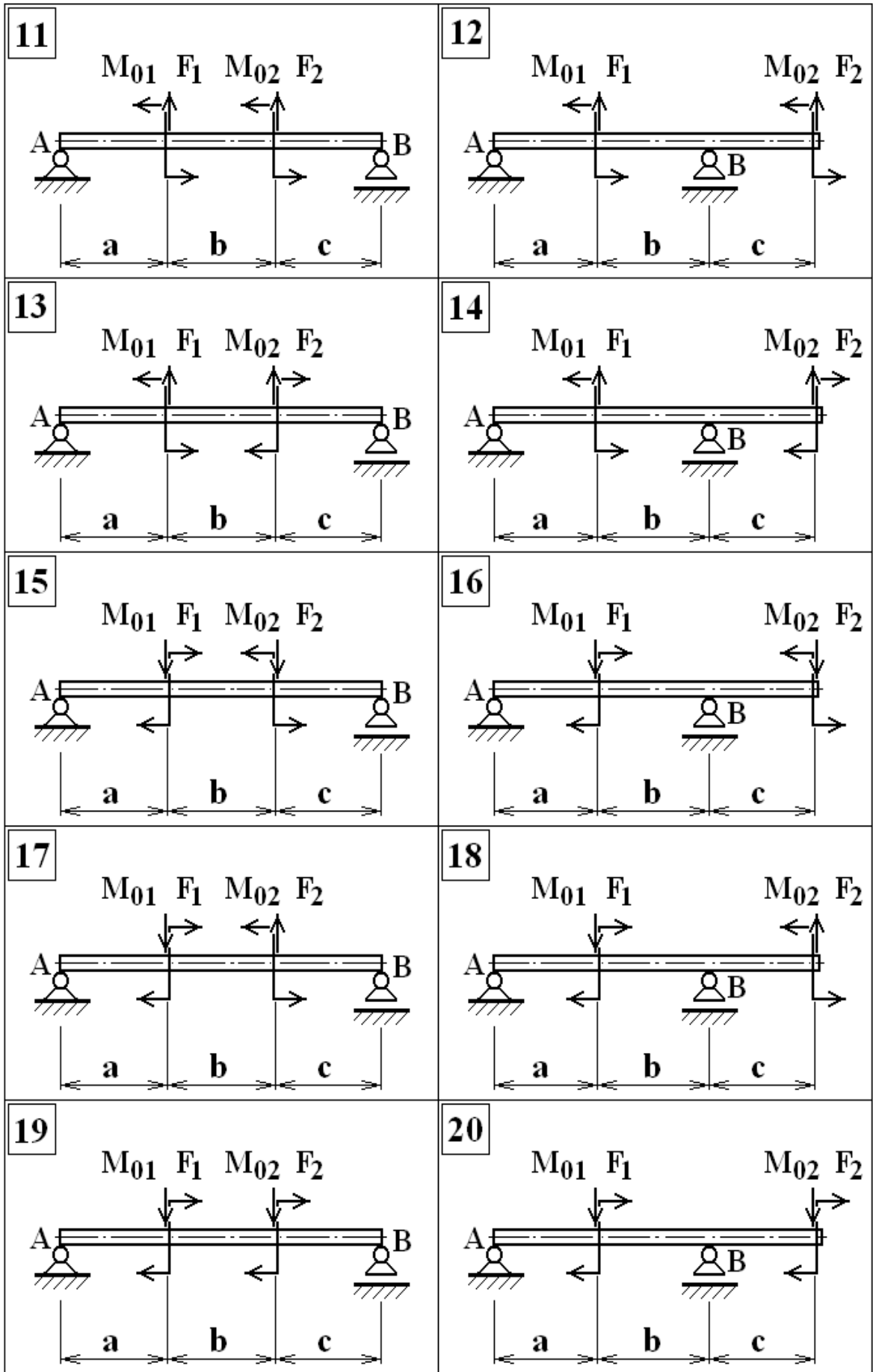
Длины участков стержня a , b , c и допускаемое напряжение $[\sigma]$ известны.

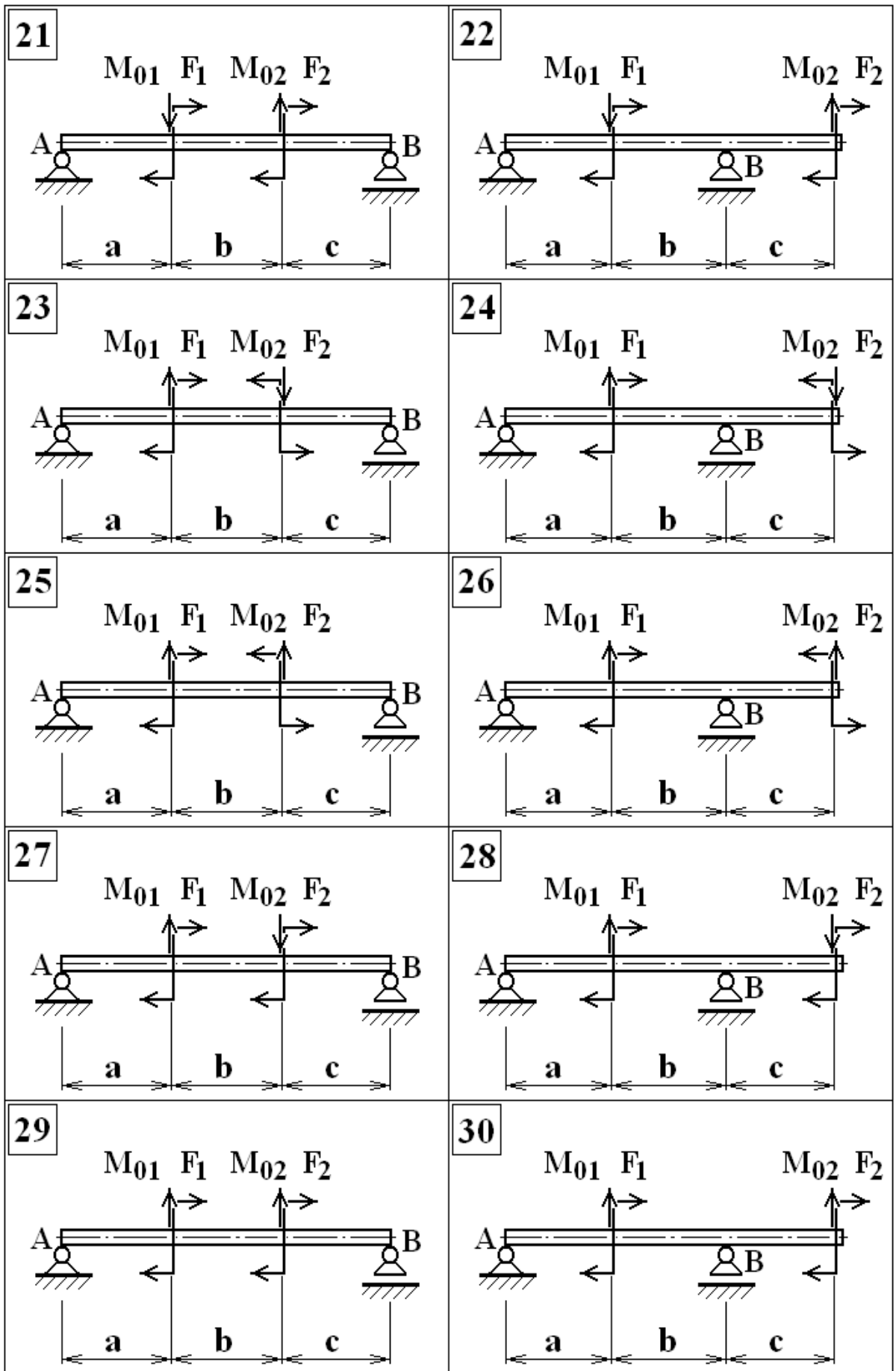
Требуется определить реакции в опорах A и B , построить эпюры поперечной силы Q и изгибающего момента M , определить диаметр поперечного сечения стержня из условия прочности. Данные, необходимые для вычисления, приведены в табл. 6.

Таблица 6 – Исходные данные

№	M_{01}	F_1	M_{02}	F_2	a	b	c	$[\sigma]$
	кНм	кН	кНм	кН	м	м	м	МПа
0	4	2	3	5	1	2	3	110
1	7	3	2	4	2	3	1	120
2	2	8	5	6	3	1	2	125
3	7	9	8	2	2	1	3	130
4	6	5	7	3	1	3	2	135
5	3	7	5	6	2	2	1	140
6	2	8	9	7	1	3	1	145
7	6	5	8	2	3	1	1	150
8	4	2	3	7	2	3	2	155
9	5	3	2	4	3	2	1	160







БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Александров, А. В. Сопротивление материалов [Текст] : учебник для вузов / А. В. Александров, В. Д. Потапов, Б. П. Державин. – 4-е изд., испр. – М.: Высшая школа, 2004. – 560 с.
2. Мещерский, И. В. Сборник задач по теоретической механике [Текст]: учебное пособие / И. В. Мещерский. – 51-е изд.– СПб.: Лань, 2012. – 448 с
3. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике [Текст]: учебное пособие / Под ред. А. А. Яблонского. – 18-е изд. – М.: КноРус, 2011. – 386 с.
4. Тарг, С. М. Краткий курс теоретической механики: [Текст] : учебник для вузов / С. М Тарг. – 18-е изд. – М.: Высшая школа, 2010. – 416 с.
5. Яблонский, А. А. Курс теоретической механики [Текст] : учебник для студентов высших учебных заведений, обучающихся по техническим специальностям / А. А. Яблонский, В. М. Никифорова. – 16-е изд., стер. – Москва : КноРус, 2011. – 603 с.

Учебное издание

**Кауров Павел Викторович
Головко Виктор Евгеньевич
Клюшкин Иван Владимирович
Петров Сергей Гаррикович**

Теоретическая механика

Часть 2. Динамика, кручение, изгиб

Редактор и корректор Е. О. Гарновская
Техн. редактор Д. А. Романова

Учебное электронное издание сетевого распространения

Системные требования:
электронное устройство с программным обеспечением
для воспроизведения файлов формата PDF

Режим доступа: http://publish.sutd.ru/tp_get_file.php?id=202016, по паролю.
- Загл. с экрана.

Дата подписания к использованию 07.06.2022 г. Изд. № 5211/21

Высшая школа технологии и энергетики СПбГУПТД
198095, СПб., ул. Ивана Черных, 4.