В. Е. Головко, П. В. Кауров,
И. В. Клюшкин, А. П. Батенев

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
Часть 1. СТАТИКА И КИНЕМАТИКА

Учебно-методическое пособие

Санкт-Петербург
2022

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«Санкт-Петербургский государственный университет
промышленных технологий и дизайна»
Высшая школа технологии и энергетики

В. Е. Головко, П. В. Кауров,
И. В. Клюшкин, А. П. Батенев

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
Часть 1. СТАТИКА И КИНЕМАТИКА

Учебно-методическое пособие

Утверждено Редакционно-издательским советом ВШТЭ СПбГУПТД

Санкт-Петербург
2022

УДК 539.4(075)
ББК 30.121 я 7
Т 337

Рецензенты:
доктор технических наук, заслуженный работник высшей школы РФ,
профессор кафедры системного анализа Санкт-Петербургского государственного технологического института (технического университета)
В. А. Холоднов;
кандидат технических наук, заведующий кафедрой информационно-измерительных технологий и систем управления Высшей школы технологии и энергетики СПбГУПТД
В. И. Сидельников.

Головко, В. Е. Кауров, П. В., Клюшкин, И. В., Батенев, А. П.
Т 337 Теоретическая механика. Часть 1. Статика и кинематика: учебно-методическое пособие / В. Е. Головко, П. В. Кауров, И. В. Клюшкин, А. П. Батенев. – СПб.: ВШТЭ СПбГУПТД, 2022. – 53 с.

Учебно-методическое пособие соответствует программам и учебным планам дисциплины «Теоретическая механика» для студентов, обучающихся по направлениям подготовки: 15.03.02 «Технологические машины и оборудование»; 13.03.01 «Теплоэнергетика и теплотехника», 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника», 15.03.04 «Автоматизация технологических процессов и производств».

В учебно-методическом пособии изложен курс теоретической механики, даны основные понятия и определения. Рассмотрены разделы «Статика» и «Кинематика» и их основные задачи.

УДК 539.4(075)
ББК 30.121 я 7

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Механика играет весьма существенную роль в подготовке студентов любого профиля.

Изучая эту дисциплину, студенты знакомятся с основными законами и принципами равновесия, движения и прочности твердых тел, деталей машин и элементов конструкций. Хорошее усвоение курса механики требует не только глубокого изучения теории, но и приобретения твердых навыков решения задач. Для этого необходимо самостоятельно решить большое количество задач по всем разделам курса.

Настоящее учебное пособие содержит примеры решения задач по двум темам курса механики: статике и кинематике. Количество задач в каждом разделе позволяет выдавать индивидуальные наборы задач в зависимости от профиля подготовки бакалавра, т. е. от объема и содержания изучаемого курса механики.

1. СТАТИКА

Статикой называется раздел механики, в котором изучаются способы преобразования систем сил в эквивалентные и рассматриваются задачи на равновесие твердых тел.

Системой сходящихся сил называется такая система сил, линии действия которой пересекаются в одной точке.

Сходящиеся силы находятся в равновесии, если их равнодействующая равна нулю:

$$\vec{R}=\sum_{i=1}^{n}\vec{P_i}=0, \qquad (1)$$

Если все силы лежат в одной плоскости, то проецируя уравнение (1) на оси координат, расположенные в этой плоскости, получаем условия равновесия для плоской системы сходящихся сил:

$$\sum_{i=1}^{n}P_{ix}=0;\ \sum_{i=1}^{n}P_{iy}=0. \qquad (2)$$

Если же имеет место ***пространственная система сил***, то все силы проецируются на три взаимно перпендикулярные оси, и условия равновесия пространственной системы сходящихся сил имеют вид:

$$\sum P_{ix}=0; \qquad \sum P_{iy}=0; \qquad \sum P_{iz}=0. \qquad (3)$$

При приведении произвольной системы сил к центру получаем главный вектор, равный геометрической сумме сил, входящих в систему:

$$\vec{R}^* = \sum_{i=1}^{n} \vec{P}_i \,, \tag{4}$$

и главный момент для плоской системы, равный алгебраической сумме моментов всех сил относительно произвольного центра:

$$M_0 = \sum_{i=1}^{n} M_{i0} \,, \tag{5}$$

а для пространственной системы сил – геометрической сумме моментов:

$$M_0 = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_{i0} \,. \tag{6}$$

Условия равновесия произвольной плоской системы сил:

$$\vec{R}^* = 0; M_0 = 0. \tag{7}$$

При проецировании уравнений (7) на две взаимно перпендикулярные оси получаем три уравнения равновесия:

$$\sum_{i=1}^{n} P_{ix} = 0; \sum_{i=1}^{n} P_{iy} = 0; \sum_{i=1}^{n} M_{i0} = 0. \tag{8}$$

Условия равновесия произвольной пространственной системы сил:

$$\vec{R}^* = 0; \vec{M}_0 = 0 \tag{9}$$

При проектировании уравнения (9) на три взаимно перпендикулярные оси получаем шесть уравнений равновесия:

$$\sum_{i=1}^{n} P_{ix} = 0; \sum_{i=1}^{n} P_{iy} = 0; \sum_{i=1}^{n} P_{iz} = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_{ix} = 0; \sum_{i=1}^{n} M_{iy} = 0; \sum_{i=1}^{n} M_{iz} = 0. \tag{10}$$

1.1. Плоская система сходящихся сил

Задача 1.1.1

Груз P=20 кН поднимается краном BAC посредством цепи, перекинутой через блок A и через блок D, который укреплён на стенке так, чтобы угол CAD=30° (рис. 1). Углы между стержнями крана: CBA=60°, ACB=30°. Определить усилия Q_1 и Q_2 в стержнях AB и AC.

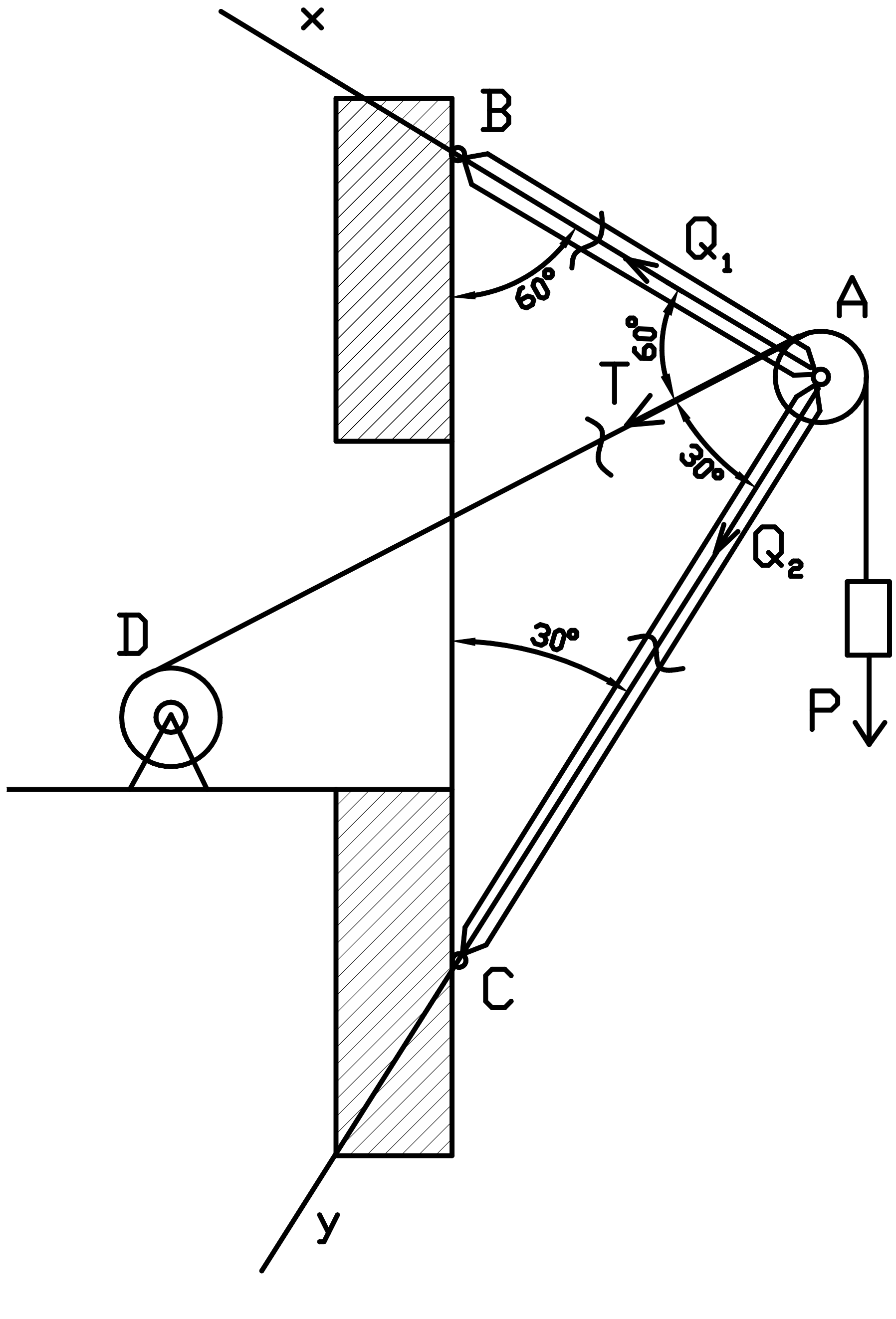


Рисунок 1

Решение

1. Составляем расчётную схему. Блок А принимаем за материальную точку, которая находится в равновесии под действием активной силы P и реакций связей Q_1, Q_2, T. Направления усилий Q_1 и Q_2 задаются в предположении, что стержни АВ и АС растянуты.

Так как ВАС=90°, то выбираем систему координат ХАУ. Стержень АВ совпадает с осью Х, а стержень АС – с осью У.

Все силы: P, Q_1, Q_2, T лежат в одной плоскости, и линии их действия пересекаются в точке А.

2. Составляем уравнение равновесия для плоской системы сходящихся сил:

$$\sum_{i=1}^{n} P_{ix} = 0;\ Q_1 + T \cdot \cos 60^\circ - P \cdot \cos 60^\circ = 0 \tag{11}$$

$$\sum_{i=1}^{n} P_{iy} = 0;\ T \cdot \cos 30^\circ + Q_2 + P \cdot \cos 30^\circ = 0 \tag{12}$$

3. Определяем искомые величины. Так как цепь в блоке А не закреплена, то усилия по всей длине цепи одинаковы, то есть

$$T=P.$$

Из (11): $Q_1=P\cdot\cos 60^\circ-T\cdot\cos 60^\circ=0$, $T=P=20$ кН.

Из (12): $Q_2=-P\cdot\cos 30^\circ-T\cdot\cos 30^\circ=-2\cdot 20\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=-34{,}6$ кН.

Усилия: $Q_1=0$ – стержень АВ не нагружен, $Q_2=-34{,}6$ кН – стержень АС сжат.

Ответ: $Q_1=0$; $Q_2=-34{,}6$ кН.

Задача 1.1.2

К шарниру А стержневого шарнирного четырёхугольника САВД, сторона СД которого закреплена, приложена сила Q=100 Н под углом 45° к АВ (рис. 2). Определить величину силы R, приложенной в шарнире В под углом 30° к АВ таким образом, чтобы четырёхугольник САВД был в равновесии, если углы САВ=135°; ДВА=90°.

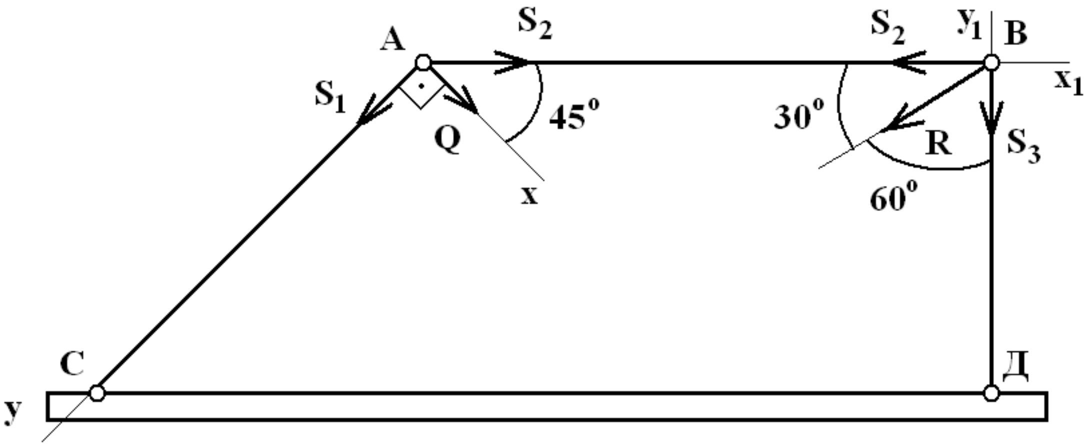


Рисунок 2

Решение

Задача решается методом «вырезания» узлов А и В. Усилия в разрезанных стержнях направляются от узлов А и В внутрь стержней, предполагая стержни работающими на растяжение.

В начале вырезается узел А. В этом узле надо определить силу S_2, чтобы перейти к рассмотрению узла В, где приложена неизвестная сила R.

Составляем уравнения проекций сил на ось X, перпендикулярную усилию S_1, чтобы это усилие не проецировалось на данную ось X:

$$\sum_{i=1}^{n} P_{ix} = 0; \qquad Q + S_2\cos 45° = 0;$$

$$S_2 = -\frac{Q}{\cos 45^o} = -\frac{100}{0{,}707} = -141 \text{ Н}.$$

Рассматриваем равновесие сил, приложенных в узле В. Составляем уравнения проекций на ось x_1, перпендикулярную усилию S_3. (В данной задаче усилие S_3 определять не требуется).

$$\sum_{i=1}^{n} P_{ix_1} = 0; \qquad -S_2 - R\cos 30° = 0;$$

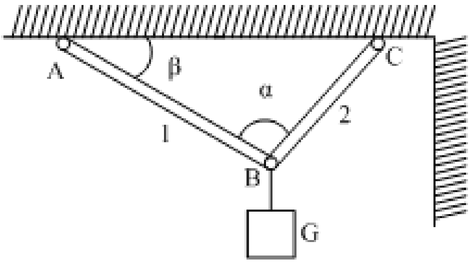
$$R = -\frac{S_2}{\cos 30°} = -\frac{-141}{0{,}866} = 163 \text{ Н}.$$

Ответ: R= 163 Н.

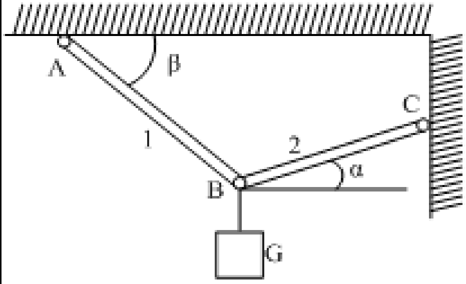
Задача 1.1.3

Для механических систем определить усилия в стержнях АВ и ВС при заданных значениях веса груза G и углов α и β. Весом стержней и нитей пренебречь. Нити считать гибкими и нерастяжимыми, соединения стержней – шарнирными, блок – идеальным. Данные, необходимые для вычисления, приведены в таблице 1.

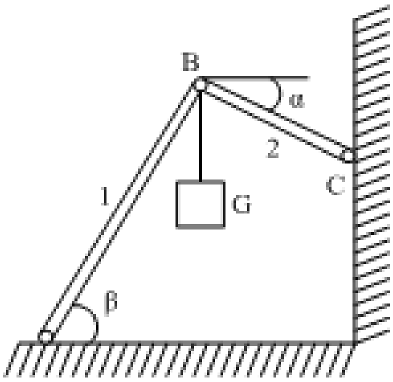
1


A
β
α
C
2
1
B
G

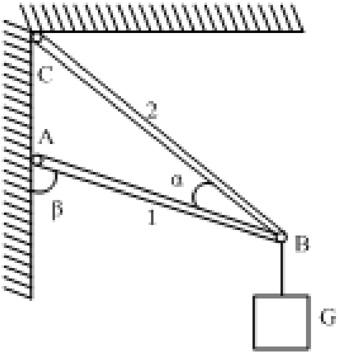
2


A
β
1
2
C
α
B
G

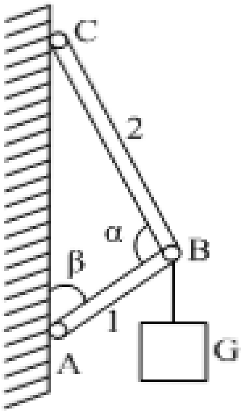
3


B
α
2
C
1
G
β

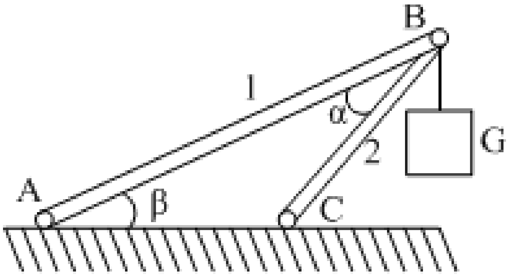
4


C
2
A
α
β
1
B
G

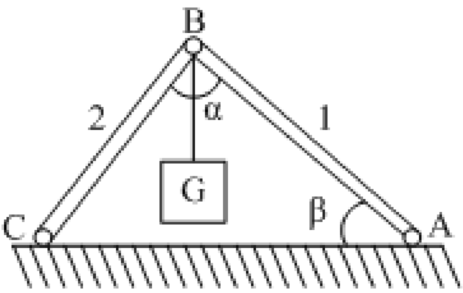
5


C
2
α
B
β
1
A
G

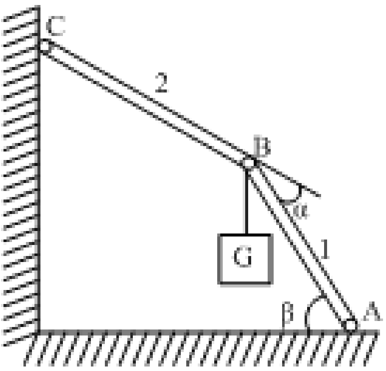
6


B
1
α
2
G
A
β
C

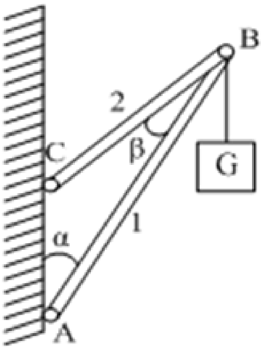
7


B
2
α
1
G
C
β
A

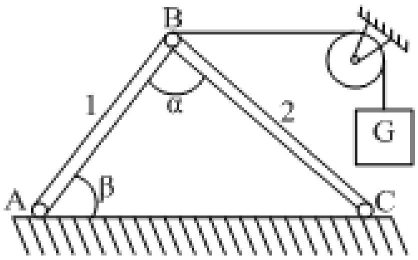
8


C
2
B
α
G
1
β
A

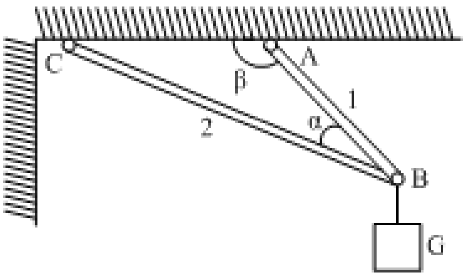
9



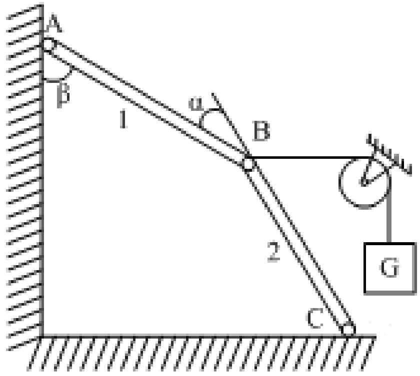
10



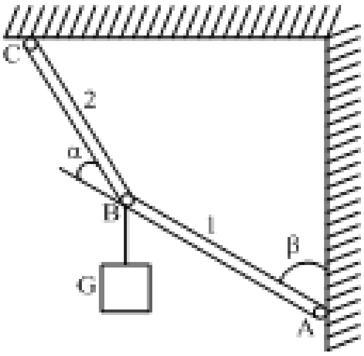
11



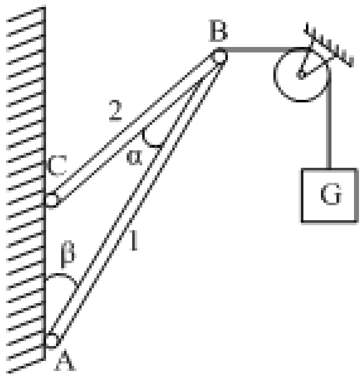
12



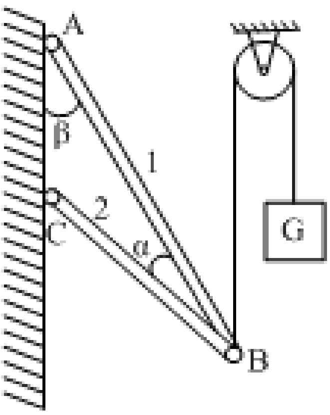
13



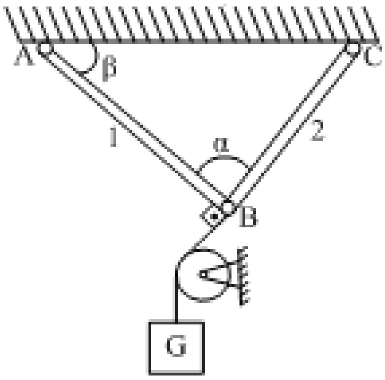
14



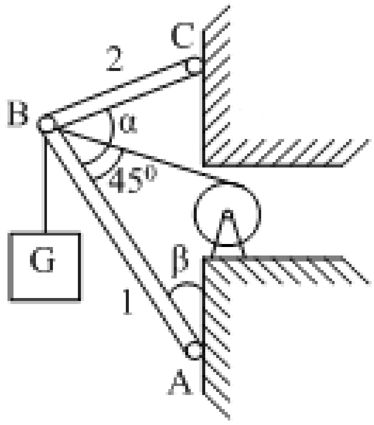
15



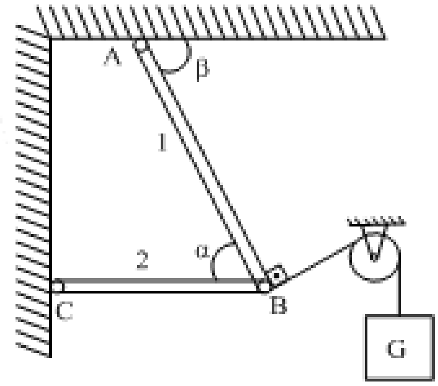
16



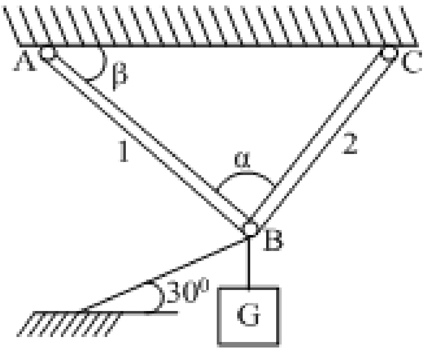
17



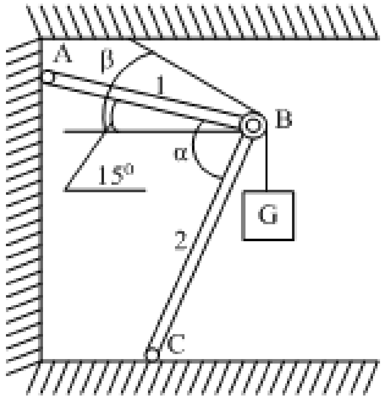
18



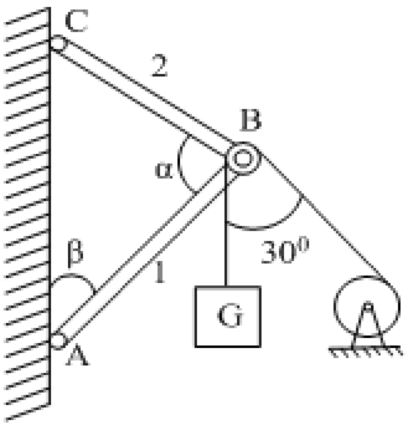
19



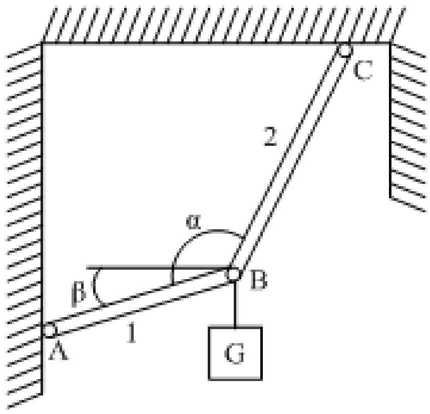
20



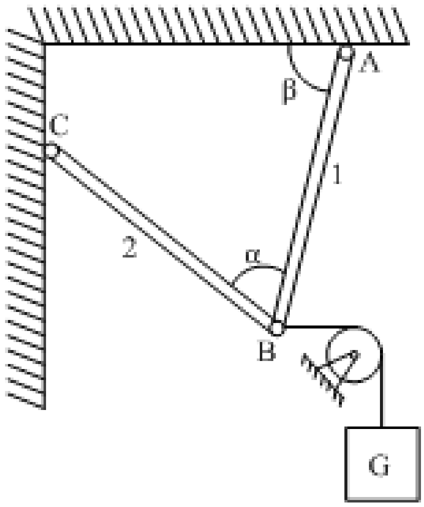
21



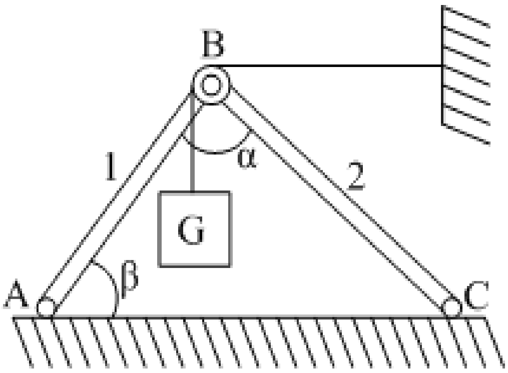
22



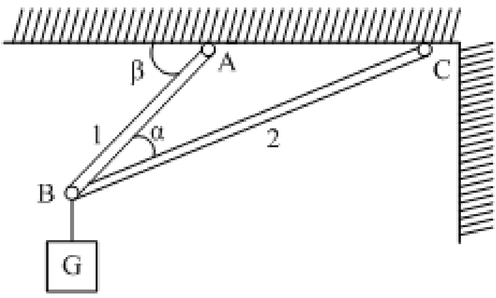
23



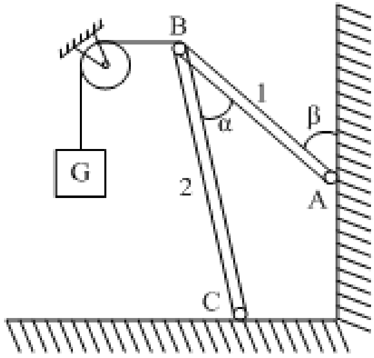
24



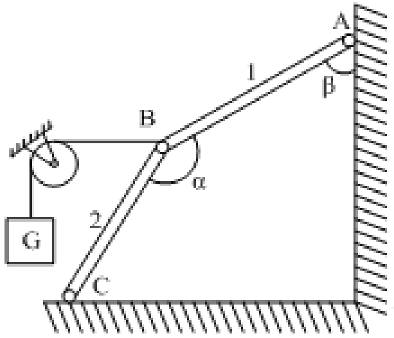
25



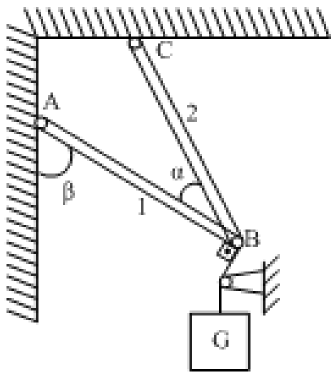
26



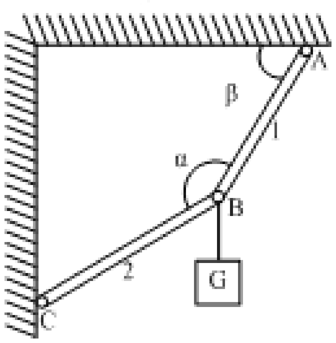
27



28



29



30

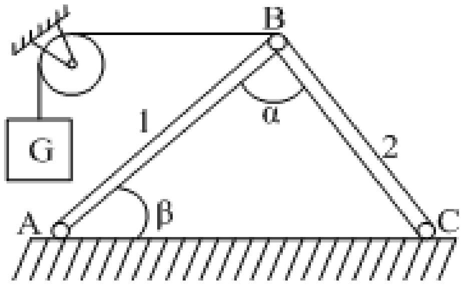


Таблица 1 – Исходные данные

№	α	β	G
	град	град	кН
0	30	70	10
1	75	25	15
2	40	60	30
3	70	25	25
4	60	50	20
5	35	60	25
6	80	30	15
7	45	55	30
8	30	75	10
9	25	80	20

1.2. Равновесие твердого тела под действием плоской системы сил

Задача 1.2.1

Определить реакции опор A и B балки, находящейся под действием одной сосредоточенной силы, и пары сил с моментом M (рис. 3).

Направления нагрузок и геометрические размеры указаны на схеме.

Решение

Балка находится в равновесии под действием задаваемых нагрузок: силы P, момента M и реакций связей в шарнирах A и B. В шарнирно-неподвижной опоре A модуль и направление реакции определяются через её проекции на оси координат X_A и Y_A, так как её направление заранее неизвестно. В шарнирно-подвижной опоре B реакция R_B направлена перпендикулярно плоскости качения катков.

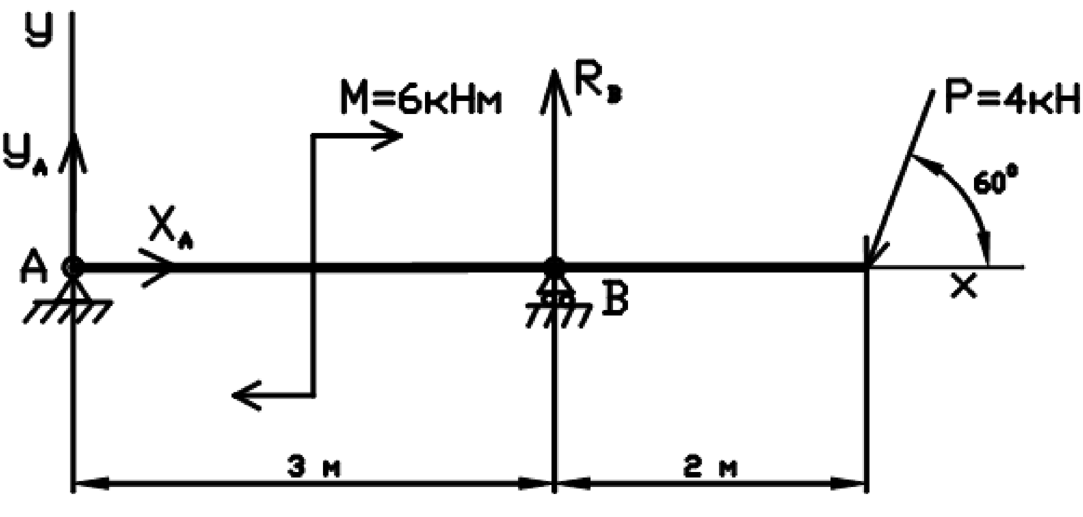


Рисунок 3

Составляем расчётную схему. Проводим оси координат X, Y. Опорные реакции X_A, Y_A, R_B направляем по положительному направлению осей. Отбрасываем связи, наложенные на балку, и заменяем их действие реакциями связей. Рассматриваем равновесие балки под действием задаваемых сил P и M и реакции связей X_A, Y_A, R_B.

Составляем три уравнения равновесия для рассматриваемой плоской системы сил. При составлении уравнения моментов за центр приведения выбираем точку, где пересекаются линии действия большего количества неизвестных.

$$\sum_{i=1}^{n} P_{ix} = 0;\ X_A - P\cdot\cos 60^{\circ} = 0; \tag{13}$$

$$\sum_{i=1}^{n} P_{iy}=0;\ Y_A+R_B-P\cdot\sin 60^{\circ}=0; \tag{14}$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iA}=0;\ -M+R_B\cdot 3-P\cdot\sin 60^{\circ}\cdot 5=0. \tag{15}$$

Из уравнения (15):

$$R_B = \frac{M + P\cdot\sin 60^0\cdot 5}{3} = \frac{6+4\cdot 0,866\cdot 5}{3} = 7,77\ \text{кН}.$$

Из уравнения (14): $Y_A=-R_B+P\cdot\sin 60^{\circ}=-7,77+4\cdot 0,866=-4,31\text{кН}.$

Из уравнения (13): $X_A=P\cdot\cos 60^{\circ}=4\cdot 0,5=2\text{кН}.$

Ответ: X_A= 2 кН; Y_A= – 4,31 кН; R_B = 7,77 кН.

Задача 1.2.2

Определить реакции заделки консольной балки (рис. 4), находящейся под действием равномерно распределённой нагрузки, одной сосредоточенной силы и двух пар сил.

Дано: q=3 кН/м, M_1=2 кНм, M_2=3 кНм**,** P=4 кН, α=45°, размеры показаны на чертеже.

Определить: реакции жёсткой заделки X_A, Y_A, M_A.

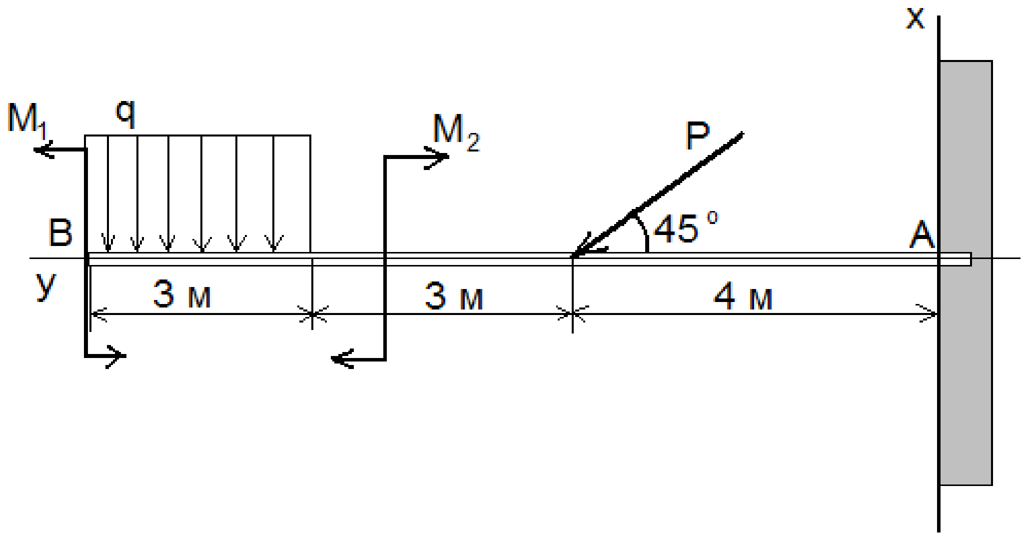


Рисунок 4

Решение

1. Рассмотрим равновесие балки АВ, на которую действуют: активная сила Р, пары сил с моментами M_1 и M_2, равномерно распределённая нагрузка интенсивностью q и реакции связей X_A, Y_A, M_A.

2. Заменяем распределённую нагрузку эквивалентной сосредоточенной силой, приложенной в середине загруженного участка (рис. 5).

$$Q=q\cdot l=3\cdot 3=9кН.$$

3. Составляем уравнения равновесия балки для плоской системы сил:

$$\sum_{i=1}^{n} P_{ix}=0;\ X_A-P\cdot\cos 45^{\circ}-Q=0; \tag{16}$$

$$\sum_{i=1}^{n} P_{iy}=0;\ Y_A-P\cdot\cos 45^{\circ}=0; \tag{17}$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iA}=0;\ M_A+P\quad\cdot 4-P\cdot\sin 45^{\circ}-M_2+Q\cdot 8{,}5+M_1=0. \tag{18}$$

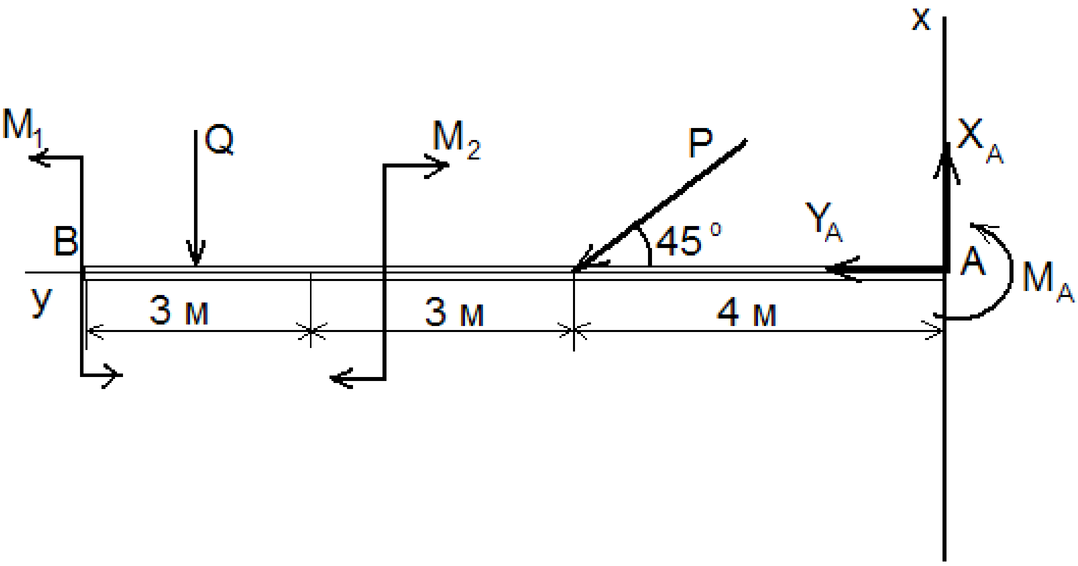


Рисунок 5

4. Определяем искомые величины

из (16): $$X_A = P\cdot\cos 45^{\circ} + Q = 4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + 9 = 11{,}8\text{кН}$$

из (17): $$Y_A = -P\cdot\sin 45^{\circ} = -4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = -2{,}8\text{кН}$$

из (18):

$$M_A = -P\cdot 4\sin 45^{\circ} + M_2 - Q\cdot 8{,}5 - M_1 = -\,-4\cdot 4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + 3 - 9\cdot 8{,}5 - 2 = -86{,}8\text{кН}$$

Ответ: X_A= 11,8 кН; Y_A= – 2,8 кН; M_A = – 86,8 кН.

Задача 1.2.3

Рама находится в равновесии под действием равномерно распределённой нагрузки q, сосредоточенной силы P и момента M (рис. 6). Опорные закрепления: в точке A – шарнирно неподвижная опора, в точке B – стержень BC. Требуется определить реакции опор.

Исходные данные: q=20 кН/м; P=$10\sqrt{3}$ Н; M=4 кНм; a=0,3м; b=0,2 м.

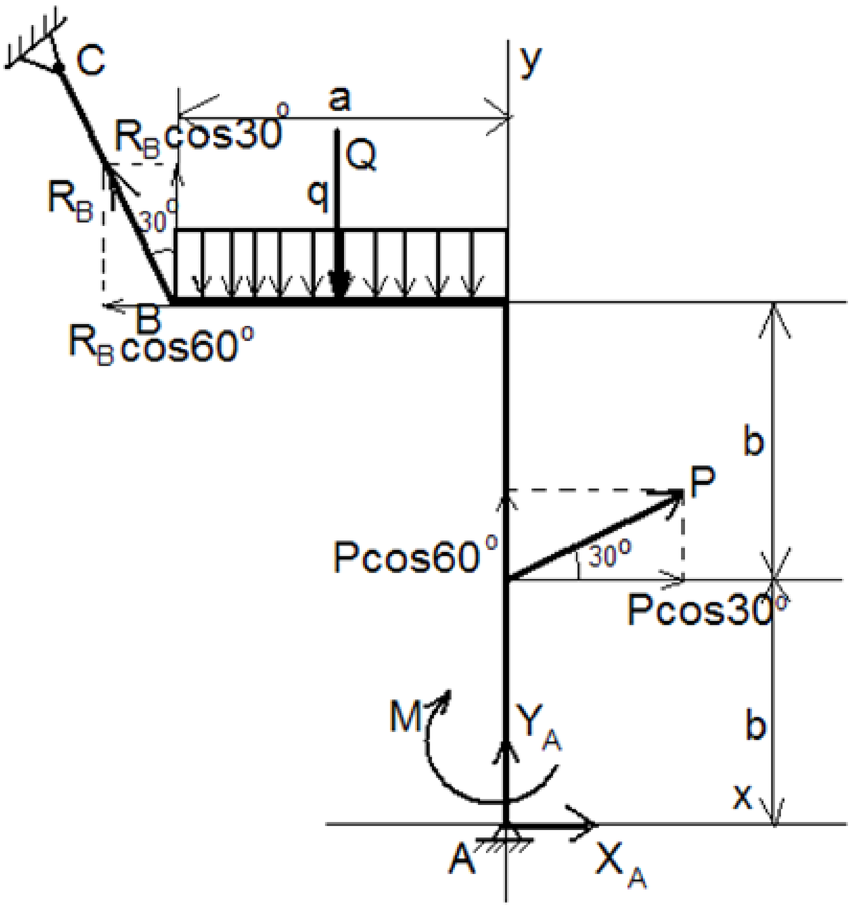


Рисунок 6

Решение

Составляем расчётную схему. Проводим оси координат XAY с началом координат в точке А. Определяем направление опорных реакций. Опорную реакцию шарнирно неподвижной опоры А будем определять через проекции на оси координат X_A и Y_A. Реакция стержня ВС направлена вдоль стержня и приложена в точке В.

Заменим равномерно распределённую нагрузку q эквивалентной сосредоточенной силой Q, приложенной в середине загруженного участка:

$Q = q \cdot a = 20 \cdot 0{,}3 = 6кН$**.**

Составляем уравнения равновесия для заданной плоской системы сил.

При составлении уравнения моментов за центр приведения принимаем точку А, где находятся неизвестные X_A и Y_A.

$$1.\ \sum_{i=1}^{n} M_{iA} = 0;$$

$$-M - P \cdot \cos 30^0 \cdot b + Q \cdot \frac{a}{2} - R_B \cos 30^0 \cdot a + R_B \cos 60^0 \cdot 2b = 0$$

$$R_B = \frac{-M - P\cdot\cos30^0\cdot b + Q\cdot\frac{a}{2}}{a\cdot\cos30^0 - 2\cdot b\cdot\cos60^0} = \frac{-4 - 10\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 0{,}2 + 6\cdot 0{,}15}{0{,}3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\cdot 0{,}2\cdot 0{,}5} = -92\,\text{кН}.$$

2. $\sum\limits_{i=1}^{n} P_{ix} = 0;$ $\quad -R_B\cdot\cos 60° + P\cdot\cos 30° + X_A = 0;$

$$X_A = R_B\cdot\cos60^0 - P\cdot\cos30^0 = (-92)\cdot\frac{1}{2} - 10\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = -61\,\text{кН}.$$

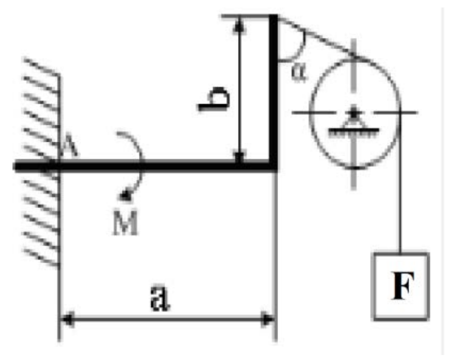
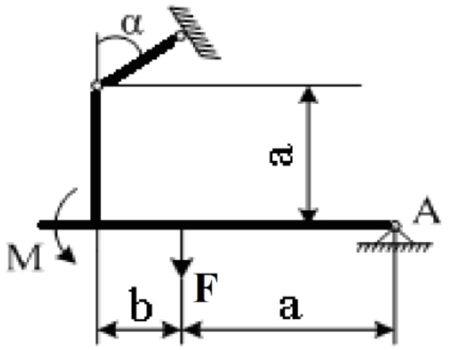
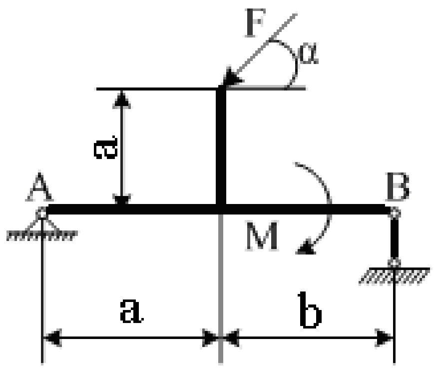
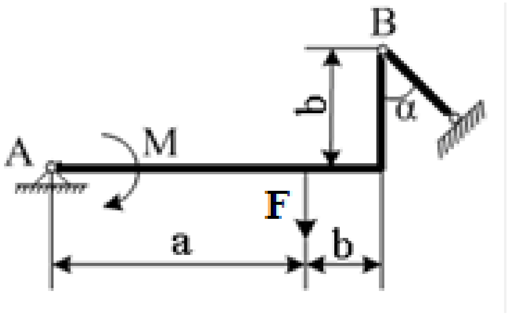
3. $\sum\limits_{i=1}^{n} P_{iy} = 0;$ $\quad R_B\cdot\cos30° - Q + P\cdot\cos60° + Y_A = 0;$

$$Y_A = Q - R_B\cdot\cos30^0 - P\cdot\cos60^0 = 6 - (-92)\cdot 0{,}866 - 10\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2} = 76\ \text{кН}.$$

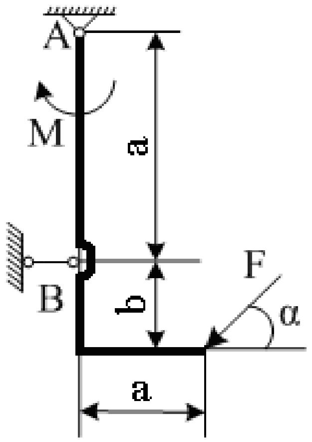
Ответ: $X_A = -61$ кН; $Y_A = 76$ кН; $R_B = -92$ кН.

Задача 1.2.4

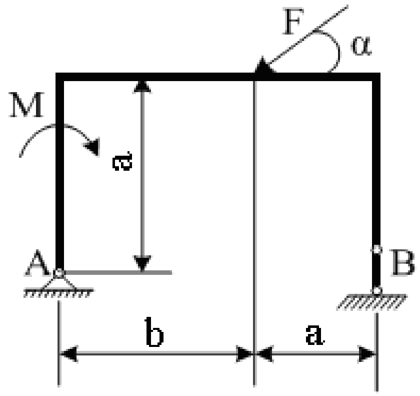
Определить опорные реакции рамы при действии заданной нагрузки. Весом рамы пренебречь. Данные, необходимые для вычисления, приведены в табл. 2.

1 	**2** 
3 	**4** 

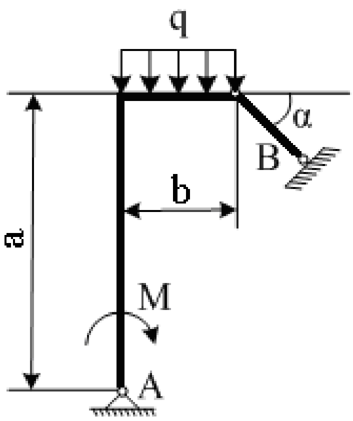
5



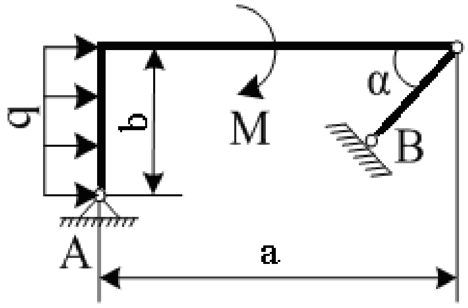
6



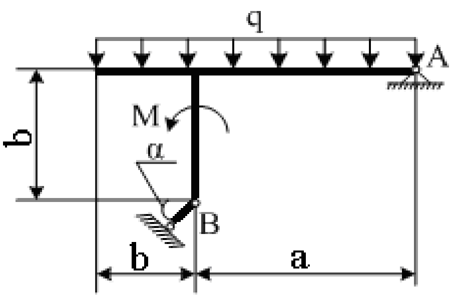
7



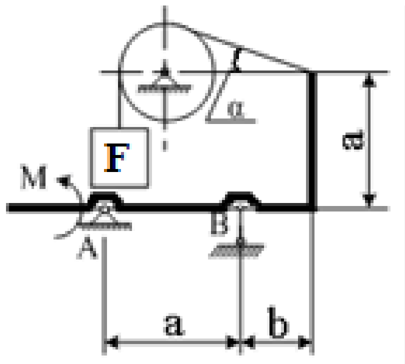
8



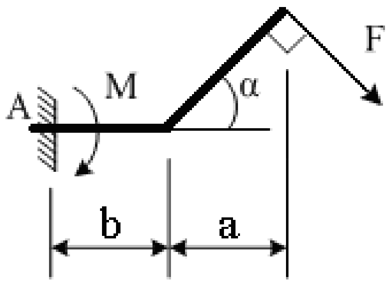
9



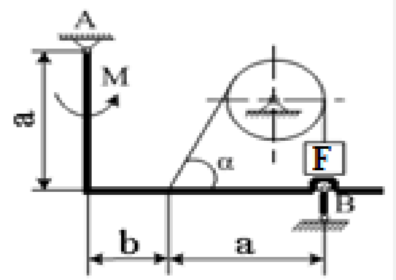
10



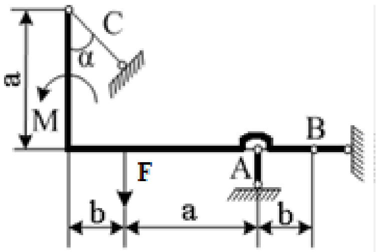
11



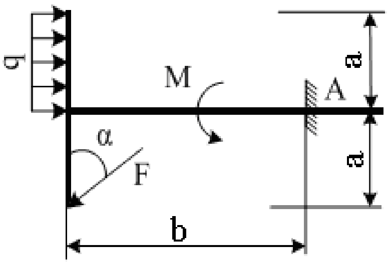
12



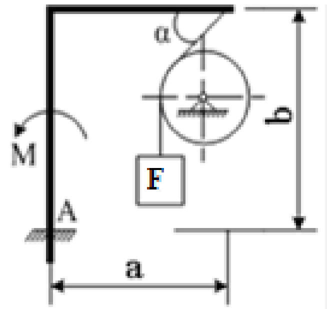
13



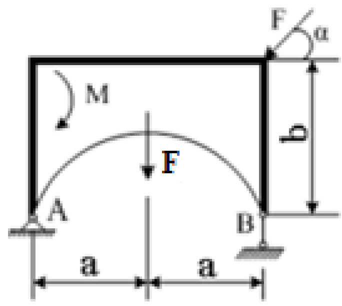
14



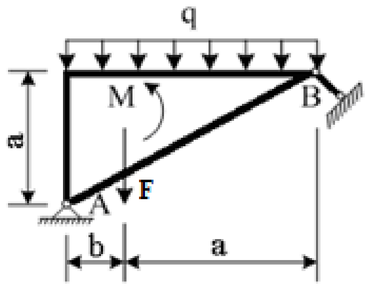
15



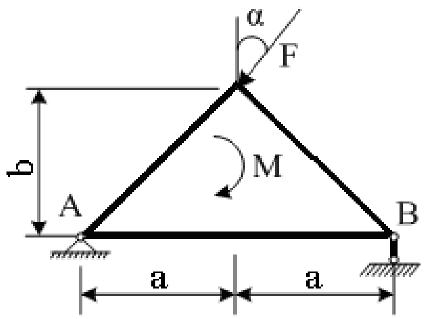
16



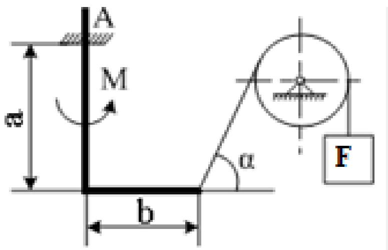
17



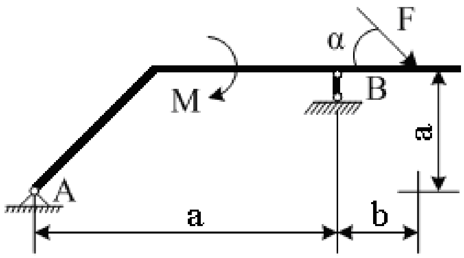
18



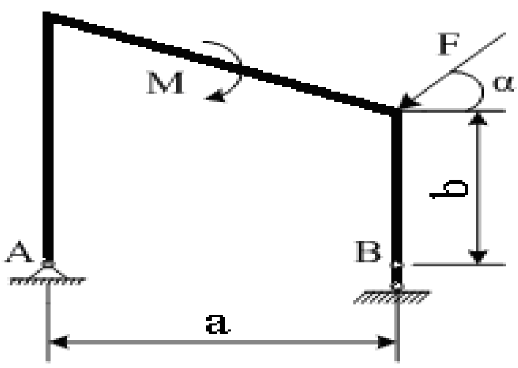
19



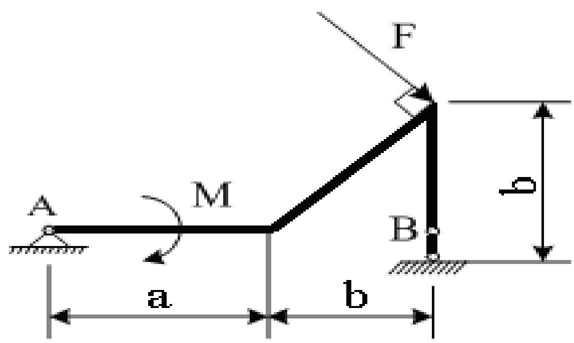
20



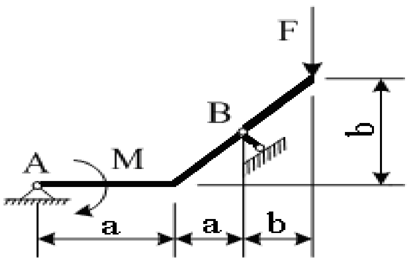
21



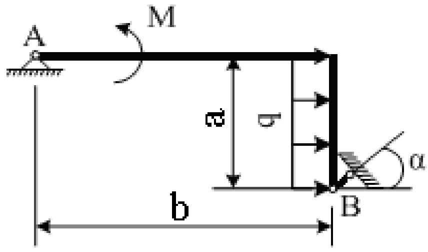
22



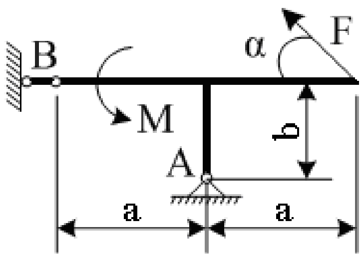
23



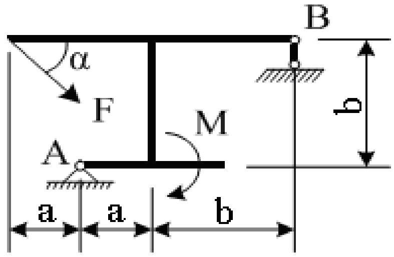
24



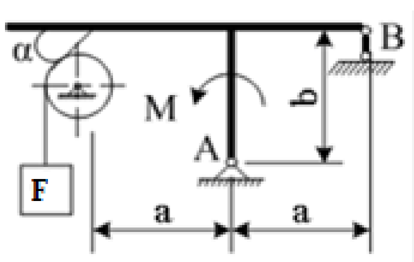
25



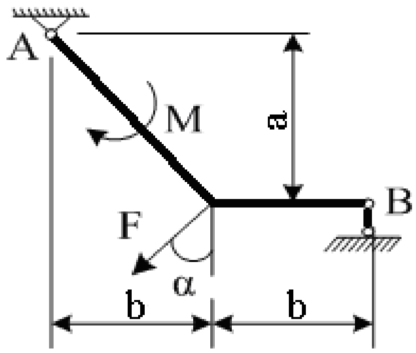
26



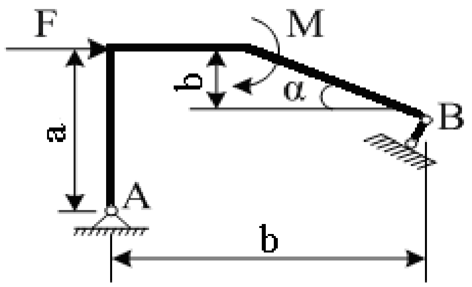
27



28



29



30

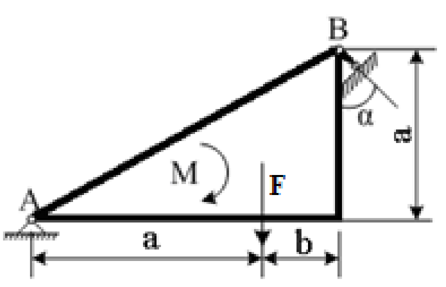


Таблица 2 – Исходные данные

№	F	q	M	α	a	b
	кН	кН/м	кНм	град.	м	м
0	10	40	40	10	1	3
1	50	20	60	30	2	4
2	20	45	50	20	4	2
3	40	25	10	50	2	4
4	30	10	70	10	3	2
5	50	30	20	40	3	1
6	20	50	70	50	2	3
7	40	15	90	20	4	3
8	10	35	30	40	1	4
9	30	5	80	30	4	1

1.3. Равновесие твёрдого тела под действием пространственной системы сил

Задача 1.3.1

На вал AB ворота намотана верёвка, поддерживающая груз Q. Радиус R колеса C, насаженного на вал, в шесть раз больше радиуса барабана r вала; другие размеры указаны на рис. 7. Верёвка, намотанная на окружность колеса и натягиваемая грузом P весом 60 Н, сходит с колеса по касательной, наклоненной к горизонту под углом $\alpha=30^0$. Определить вес груза Q, при котором ворот остаётся в равновесии, а также реакции подшипников A и B, пренебрегая весом вала и трением на блоке D.

Дано: Вал AB с барабаном. Вес груза P=60 Н. Радиус барабана r, радиус колеса R.

$R/r=6$, $\alpha=30°$.

Определить: X_A, Z_A, X_B, Z_B, вес груза Q.

Решение

1. Составляем расчётную схему. Рассматриваемая конструкция находится в равновесии под действием двух активных сил P, Q и реакций подшипников A и B.

Реакции подшипников лежат в плоскостях, перпендикулярных оси вращения Y, и определяются через проекции на оси X и Z.

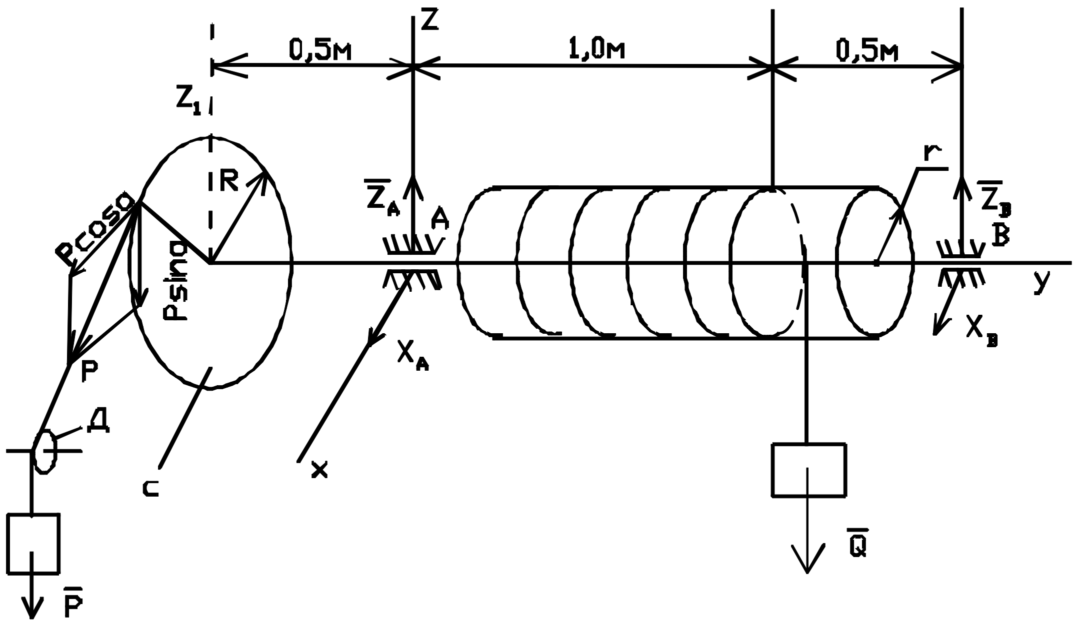


Рисунок 7

2. Составляем уравнения равновесия для рассматриваемой произвольной пространственной системы сил, составляем уравнение моментов сил относительно координатных осей.

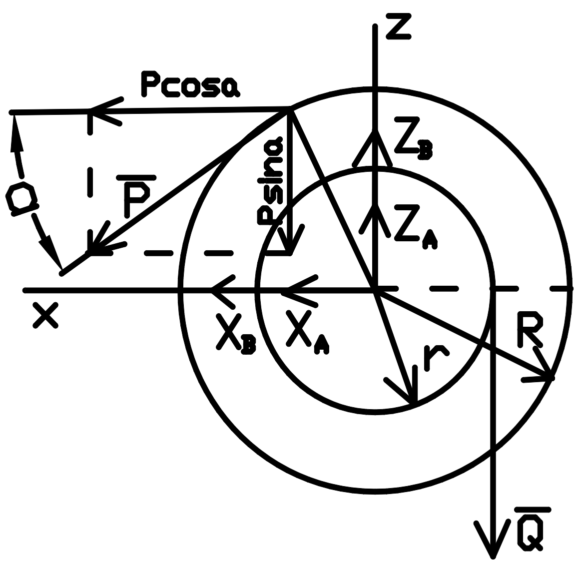


Рисунок 8

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iy}=0$$

Проецируем конструкцию на плоскость XAZ, перпендикулярную оси Y. Составляющие реакции подшипников X_A, Z_A, X_B, Z_B пересекают ось У и поэтому моментов относительно этой оси не создают (рис. 8).

$$P \cdot R - Q \cdot r = 0.$$

Откуда:

$$Q = P\frac{R}{r} = 60 \cdot 6 = 360 \text{ Н};$$

$\sum M_{iz}=0;$

$$-X_B \cdot 1{,}5 + P \cdot \cos\alpha \cdot 0{,}5 = 0;$$

$$X_B = \frac{P \cdot \cos\alpha \cdot 0{,}5}{1{,}5} = \frac{60 \cdot 0{,}866 \cdot 0{,}5}{1{,}5} = 17{,}3 \text{ Н}.$$

$\sum M_{ix}=0;$

$$Z_B \cdot 1{,}5 - Q \cdot 1 + P \cdot \sin\alpha \cdot 0{,}5 = 0;$$

$$Z_B = \frac{Q \cdot 1 - P \cdot \sin\alpha \cdot 0{,}5}{1{,}5} = \frac{360 \cdot 1 - 60 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}{1{,}5} = 230 \text{ Н}.$$

Составляем уравнение проекций сил на координатные оси:

$\sum P_{ix}=0$

$$X_A + X_B + P \cdot \cos\alpha = 0;$$
$$X_A = -X_B - P \cdot \cos\alpha = -17{,}3 - 60 \cdot 0{,}866 = -69{,}3 \text{ Н}.$$

$\sum P_{iz}=0;$

$$Z_A + Z_B - Q - P \cdot \sin\alpha = 0;$$
$$Z_A = -Z_B + Q + P \cdot \sin\alpha = -230 + 360 + 60 \cdot 0{,}5 = 160 \text{ Н}.$$

Ответ: Q=360 Н, X_A=-69,3 Н, Z_A=160 Н, X_B=17,3 Н, Z_B=230 Н.

Задача 1.3.2

Однородная прямоугольная рама весом G=20 Н прикреплена к стене при помощи шарового шарнира A и петли B и удерживается в горизонтальном положении верёвкой CE, привязанной в точке C рамы и к гвоздю E, вбитому в стену на одной вертикали с A, причём $\angle ECA = \angle BAC = 30°$ (рис. 9). Определить натяжение верёвки S и опорные реакции.

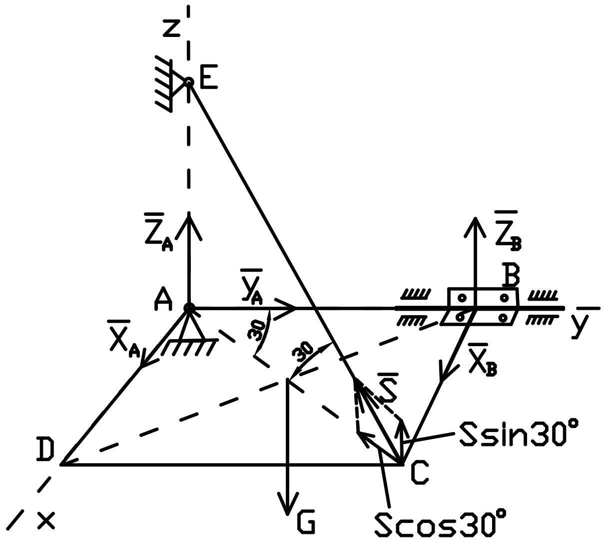


Рисунок 9

Решение

1. Составляем расчётную схему. На схему действует активная сила – сила тяжести G и реакции связей. Шаровой шарнир А не даёт возможности перемещаться точке А в любом направлении. Реакция шарнира А определяется по трём составляющим проекциям на оси координат X_A, Y_A, Z_A. Петля В допускает возможность перемещения точки В вдоль оси вращения Y, но препятствует её перемещению в плоскости, перпендикулярной этой оси. Реакция петли В определяется по двум составляющим X_B и Z_B. Реакция верёвки СЕ направлена вдоль верёвки и приложена в точке прикрепления верёвки к раме, в точке С. Рассматриваемая конструкция находится в равновесии.

2. Составляем уравнения равновесия для всех сил, приложенных к раме:

$$\sum_{i=1}^{n} P_{ix} = 0; \quad X_A + X_B - S\cdot\cos30°\cdot\sin30°=0; \tag{19}$$

$$\sum_{i=1}^{n} P_{iy}; \quad Y_A - S\cdot\cos30°\cdot\cos30°=0; \tag{20}$$

$$\sum_{i=1}^{n} P_{iz}; \quad Z_A - G + Z_B + S\cdot\sin30°=0. \tag{21}$$

Для составления уравнений моментов изобразим на вспомогательном чертеже проекции рассматриваемой конструкции вместе с силами на плоскостях, перпендикулярных к осям.

Плоскость, перпендикулярная оси X (рис. 10).

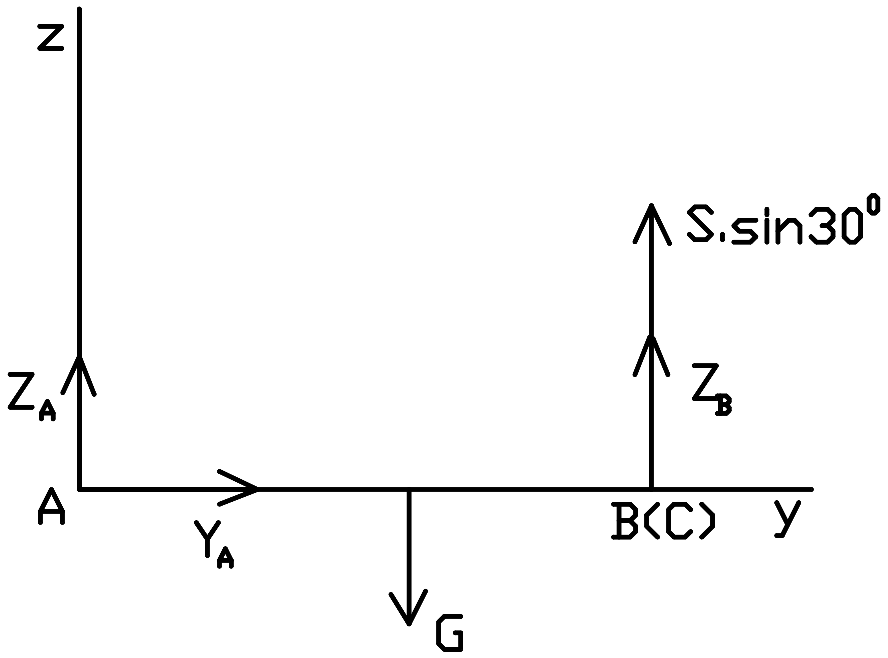


Рисунок 10

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iX} = 0;\ -G\frac{AB}{2}+Z_B\cdot AB+S\cdot\sin30°\cdot AB=0. \qquad (22)$$

Плоскость, перпендикулярная оси Y (рис. 11).

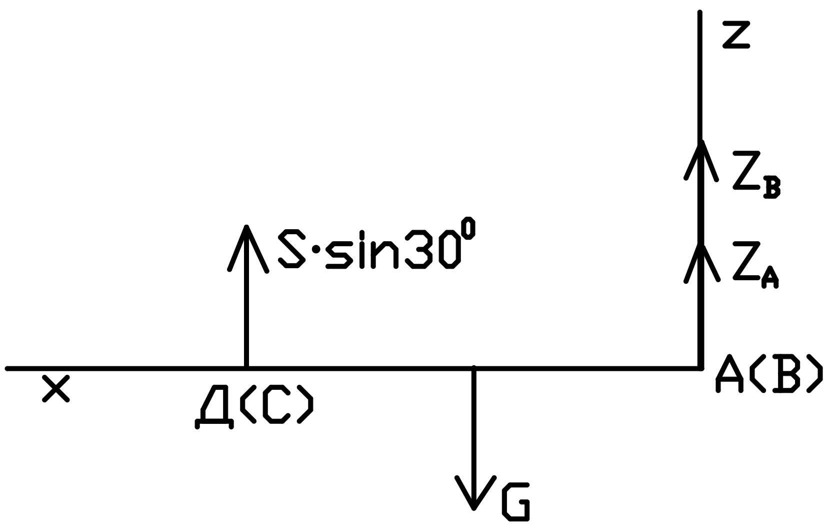


Рисунок 11

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iy} = 0;\ G\frac{AD}{2}-S\cdot\sin30°\cdot AD=0. \qquad (23)$$

Плоскость, перпендикулярная оси Z (рис. 12).

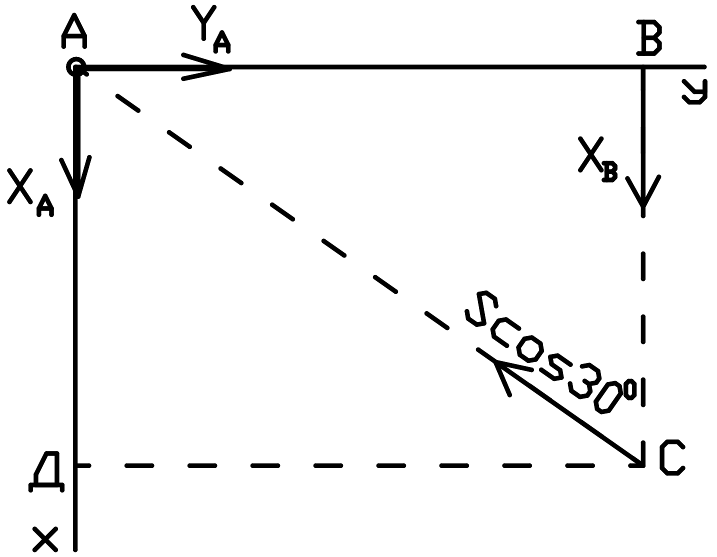


Рисунок 12

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iZ} = 0; \quad X_B \cdot AB = 0 \qquad (24)$$

3. Определяем искомые величины, решая уравнения (19) – (24):

из (24): $X_B=0$;

из (23): $S = \dfrac{G}{2\sin30^\circ} = \dfrac{20}{2 \cdot 0.5} = 20Н;$

из (22): $Z_B = \dfrac{G}{2} - S \cdot sin30^0 = \dfrac{20}{2} - 20 \cdot 0.5 = 0Н;$

из (19): $X_A = S \cdot \cos30^\circ \sin30^\circ = 20 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = 8{,}66$ Н;

из (20): $Y_A = S \cdot \cos30^\circ \cos30^\circ = 20 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 15$ Н;

из (21): $Z_A = G - Z_B - S \cdot \sin30^\circ = 20 - 0 - 20 \cdot 0{,}5 = 10$ Н.

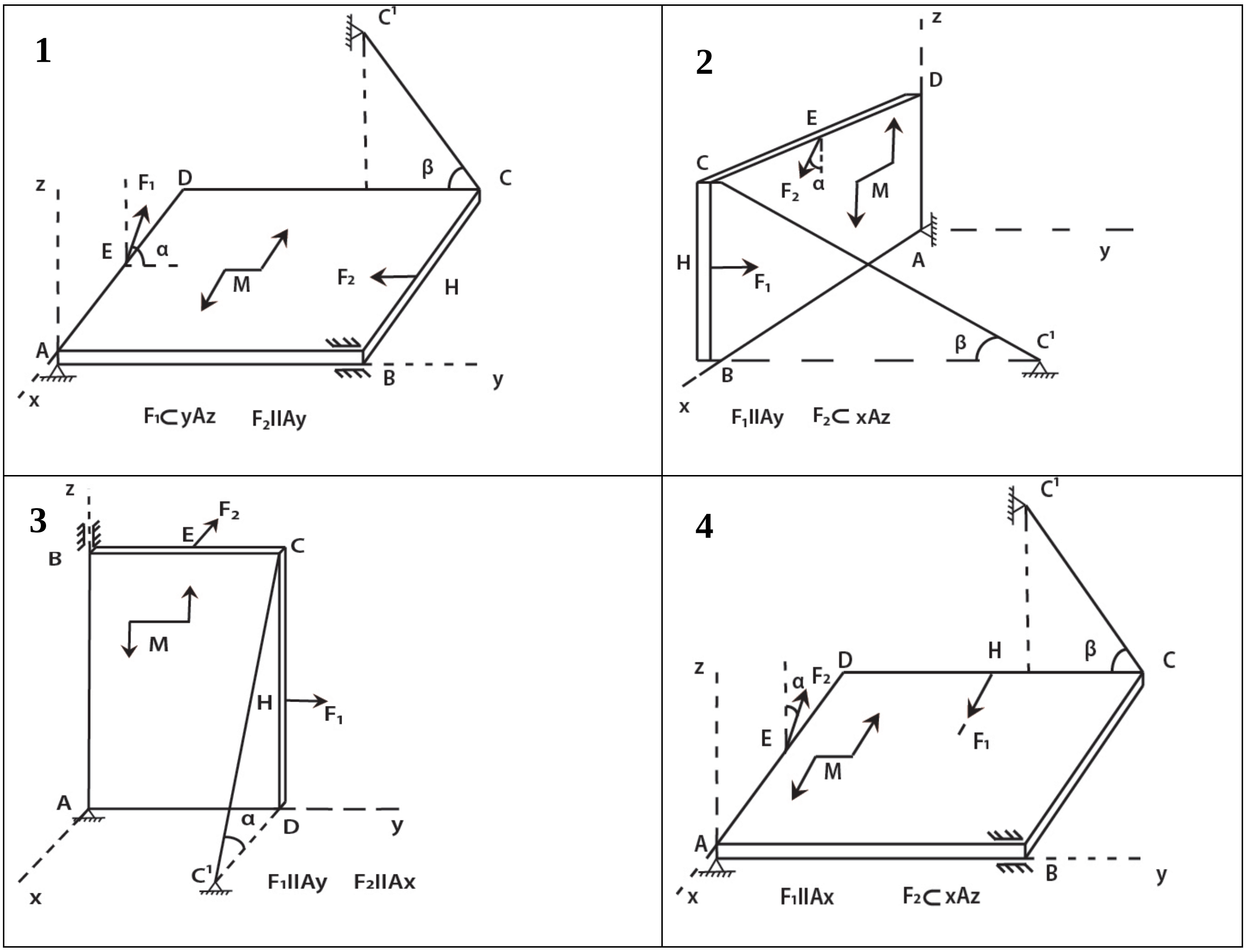
Ответ: $S=20$ Н; $X_A=8{,}66$ Н; $Y_A=15$ Н; $Z_A=10$ Н; $X_B=Z_B=0$.

Задача 1.3.3

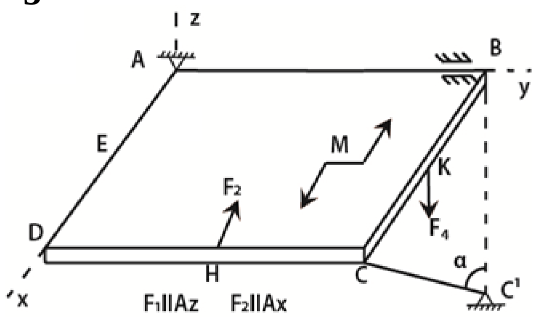
Прямоугольная однородная плита ABCD весом P со сторонами AB и BC закреплена в точке A при помощи шарового шарнира, в точке B – при помощи цилиндрического шарнира, а в точке C удерживается стержнем CC^1. К плоскости плиты приложена пара сил M, а к серединам граней плиты H и E приложены соответствующие две силы F_1 и F_2. Остальные величины показаны на рисунках.

Определить реакции шарниров A и B и стержня CC^1, крепления C и C^1 - шарнирные.

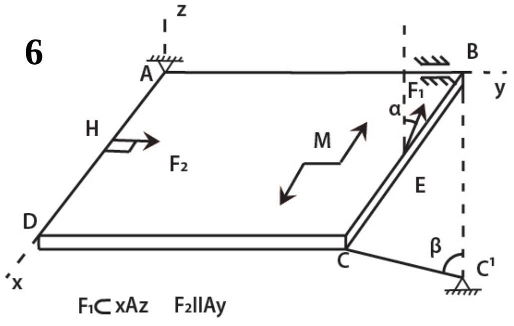
Данные, необходимые для вычисления, приведены в табл. 3.



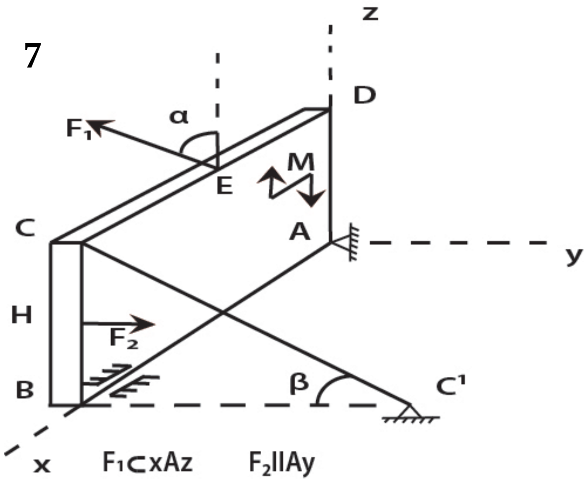
5


z
A
B
y
E
M
K
F_2
D
F_4
H
C
α
x
C^1
$F_1 \parallel Az$
$F_2 \parallel Ax$

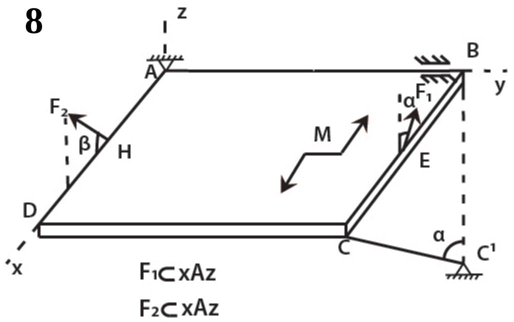
6


z
A
B
y
F_1
α
H
M
F_2
E
D
β
C
C^1
x
$F_1 \subset xAz$
$F_2 \parallel Ay$

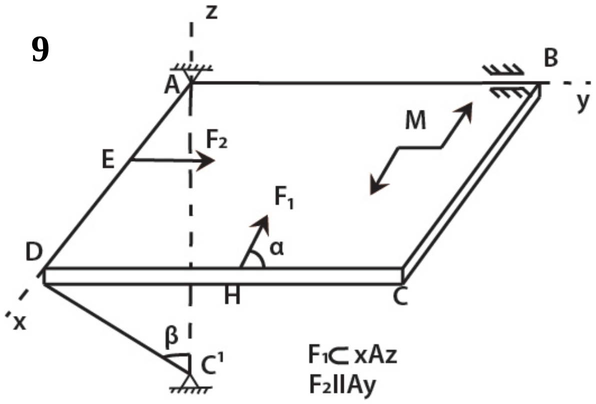
7


z
D
F_1
α
M
E
C
A
y
H
F_2
B
β
C^1
x
$F_1 \subset xAz$
$F_2 \parallel Ay$

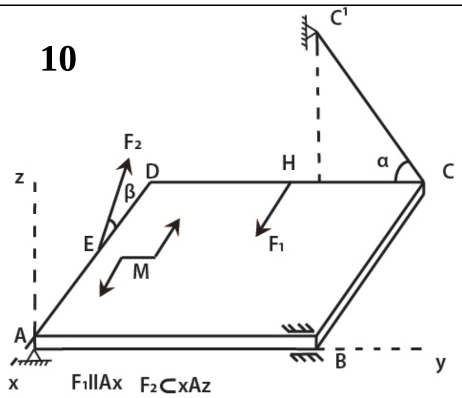
8


z
A
B
y
F_2
α
F_1
β
H
M
E
D
C
α
C^1
x
$F_1 \subset xAz$
$F_2 \subset xAz$

9

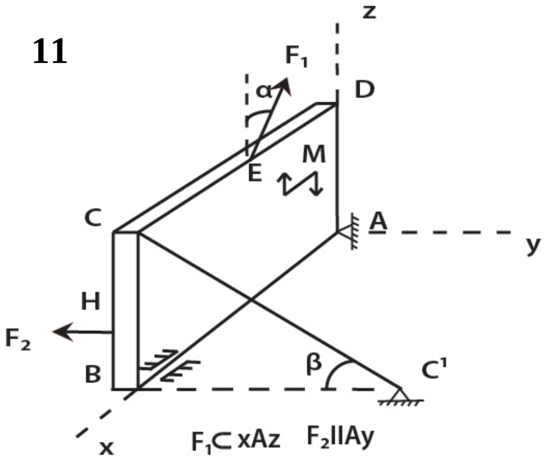

z
A
B
y
M
E
F_2
F_1
D
α
H
C
x
β
C^1
$F_1 \subset xAz$
$F_2 \parallel Ay$

10


C^1
F_2
D
H
α
C
z
β
E
F_1
M
A
B
y
x
$F_1 \parallel Ax$
$F_2 \subset xAz$

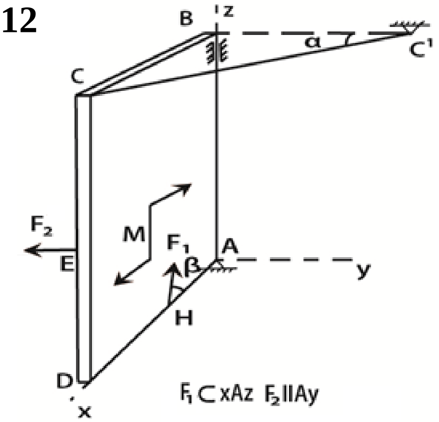
<table>
<tr>
<td>

11



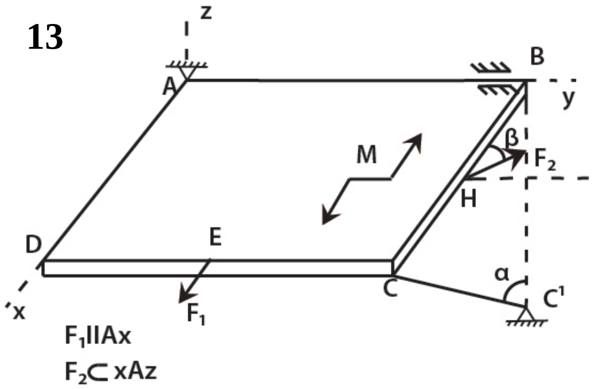
</td>
<td>

12



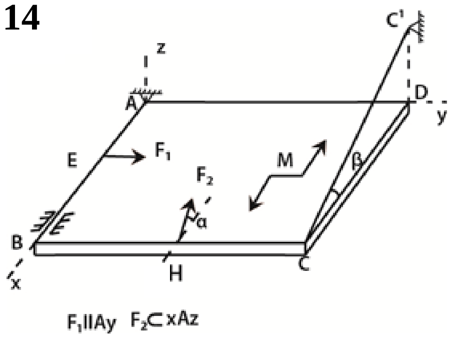
</td>
</tr>
<tr>
<td>

13



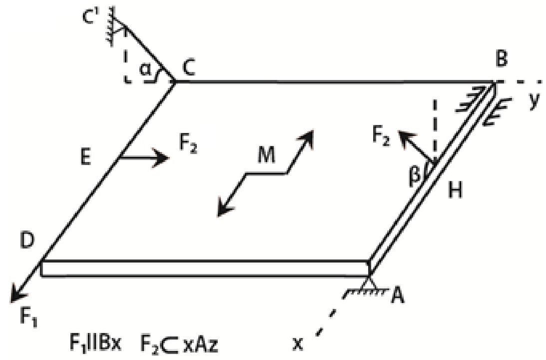
</td>
<td>

14



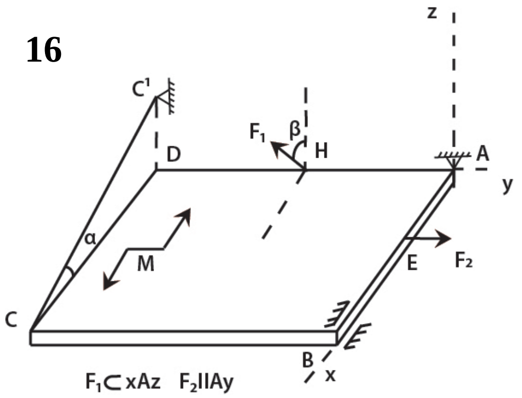
</td>
</tr>
<tr>
<td>

15

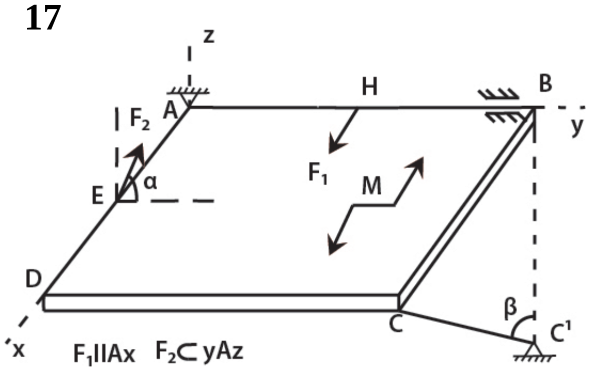
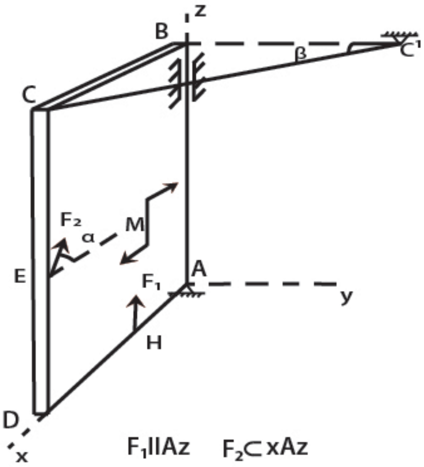
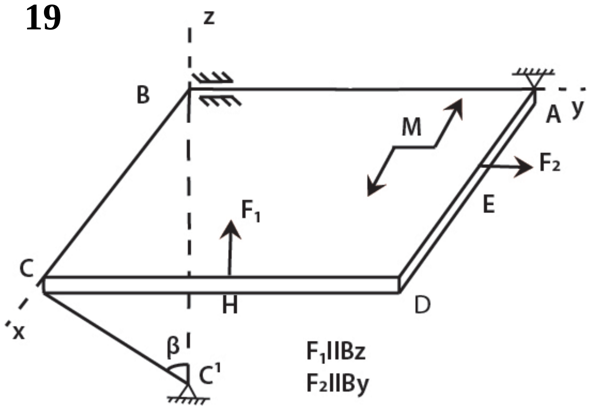
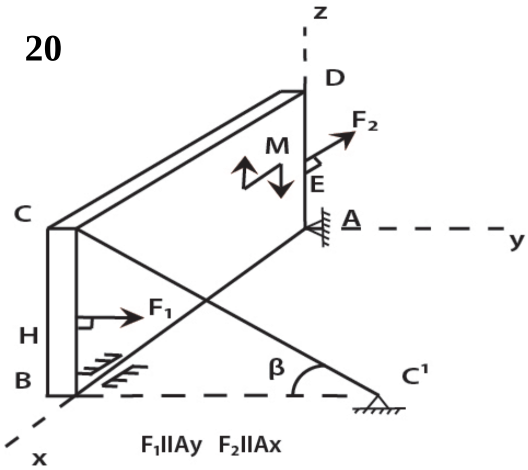
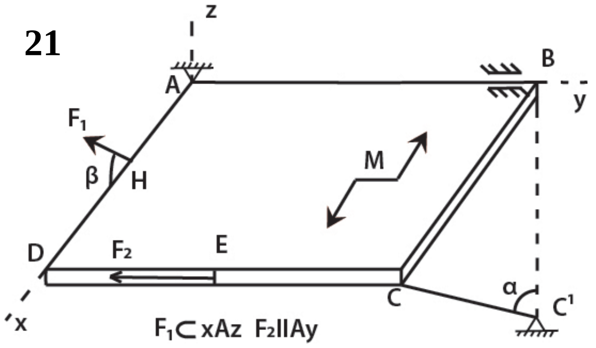
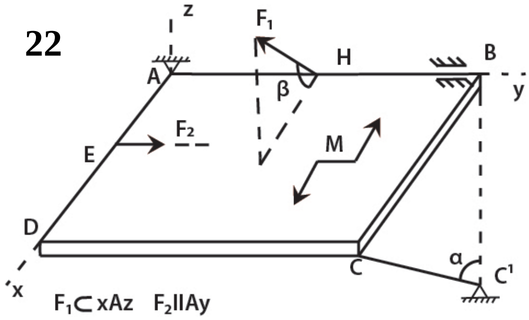
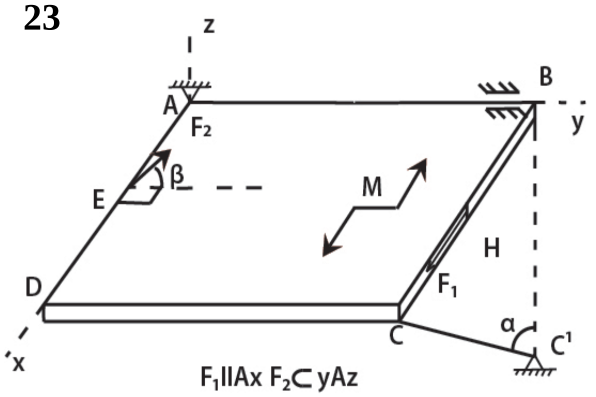
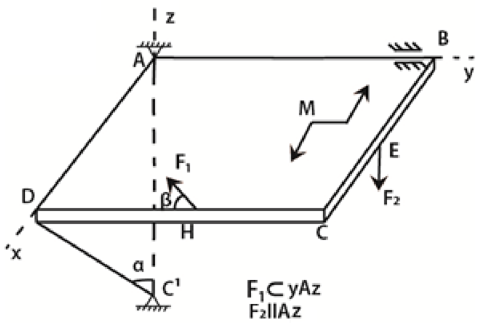


</td>
<td>

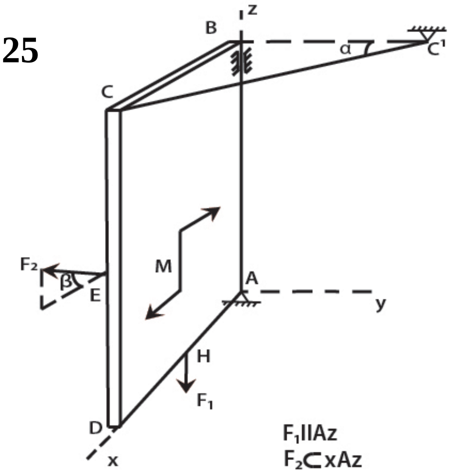
16



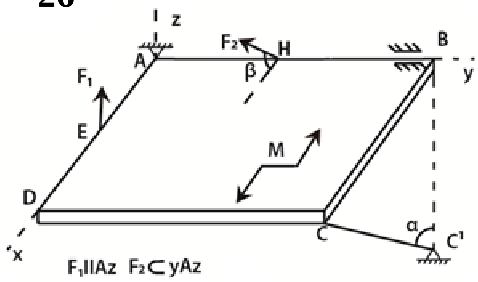
</td>
</tr>
</table>

17 	**18** 
19 	**20** 
21 	**22** 
23 	**24** 

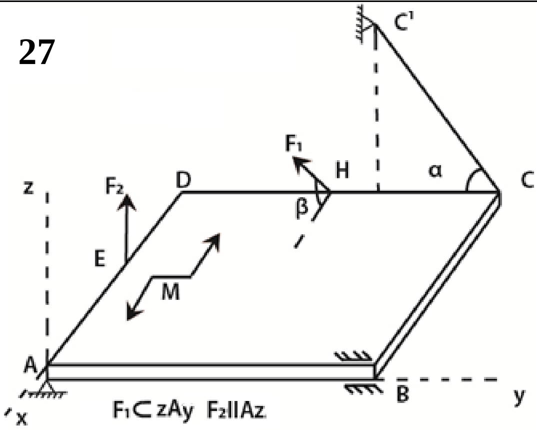
25



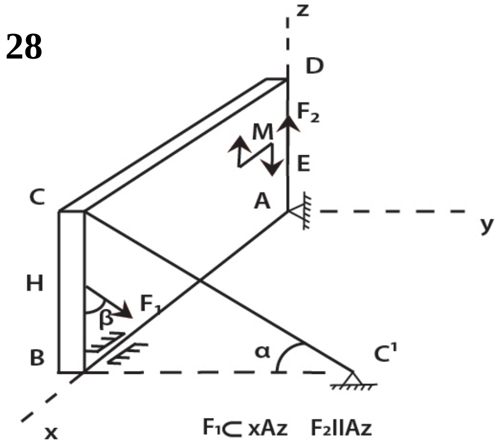
26



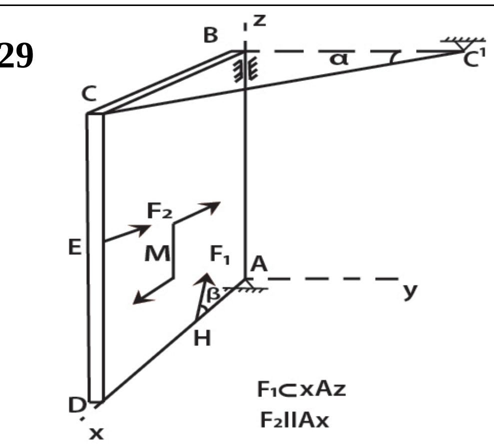
27



28



29



30

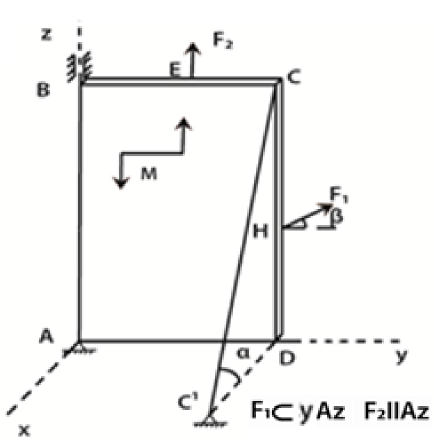


Таблица 3 – Исходные данные

№	P	F_1	F_2	M	AB	BC	α	β
	кН	кН	кН	кНм	м	м	град	град
0	10	4	3	20	10	8	20	70
1	11	6	7	36	6	5	35	65
2	12	10	11	28	8	3	50	60
3	13	4	5	22	9	7	30	45
4	14	8	9	40	6	4	40	50
5	17	2	11	32	8	4	50	40
6	19	10	9	24	12	5	45	30
7	16	8	3	35	10	7	60	50
8	18	6	7	30	12	8	65	35
9	15	2	5	34	11	9	70	20

2. КИНЕМАТИКА

Кинематикой называется раздел механики, в котором изучаются геометрические свойства движения тел без учета их массы и действующих на них сил.

2.1. Определение скорости и ускорения точки по заданным уравнениям её движения

Задача 2.1.1

Движение точки задано уравнениями: $x = 3t, y = \frac{3}{t}$ (см).

Определить в моменты времени $t_1 = 1c$ и $t_2 = 2c$ скорость точки, ускорение точки, касательное и нормальное ускорение и радиус кривизны траектории. Определить и построить траекторию точки.

Решение

Для определения уравнения точки исключаем параметр t из уравнений движения: $t = \frac{x}{3}$. Подставляем это значение в уравнение координаты y: $y = \frac{9}{x}$ – уравнение гиперболы.

Точка движется по ветви гиперболы, расположенной в верхнем правом квадранте, так как при подстановке времени $t > 0$ в уравнения движения обе координаты принимают положительное значение. Движение точки происходит сверху вниз.

Траекторию строим по координатам:

Время t, с	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	∞
X, см	0	1	1,5	3	6	9	∞
Y, см	∞	9	6	3	1,5	1	0

Определяем скорость точки по её проекциям на координатные оси:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = 3\left(\frac{см}{с}\right);$$

$$V_y = \frac{dy}{dt} = -\frac{3}{t^2}\left(\frac{см}{с}\right).$$

Проекции скорости и их значения для точек в заданный момент времени:

при t_1 = 1 с: $V_{x1} = 3\left(\frac{см}{с}\right)$; $V_{y1} = -\frac{3}{1^2} = -3\left(\frac{см}{с}\right)$;

$$V_1 = \sqrt{V_{x1}^2 + V_{y1}^2} = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = 4{,}2\left(\frac{см}{с}\right);$$

при t_2 = 2 с: $V_{x2} = 3\left(\frac{см}{с}\right)$; $V_{y2} = -\frac{3}{2^2} = -\frac{3}{4}\left(\frac{см}{с}\right)$;

$$V_2 = \sqrt{V_{x2}^2 + V_{y2}^2} = \sqrt{3^2 + \left(-\frac{3}{4}\right)^2} = 3{,}1\left(\frac{см}{с}\right).$$

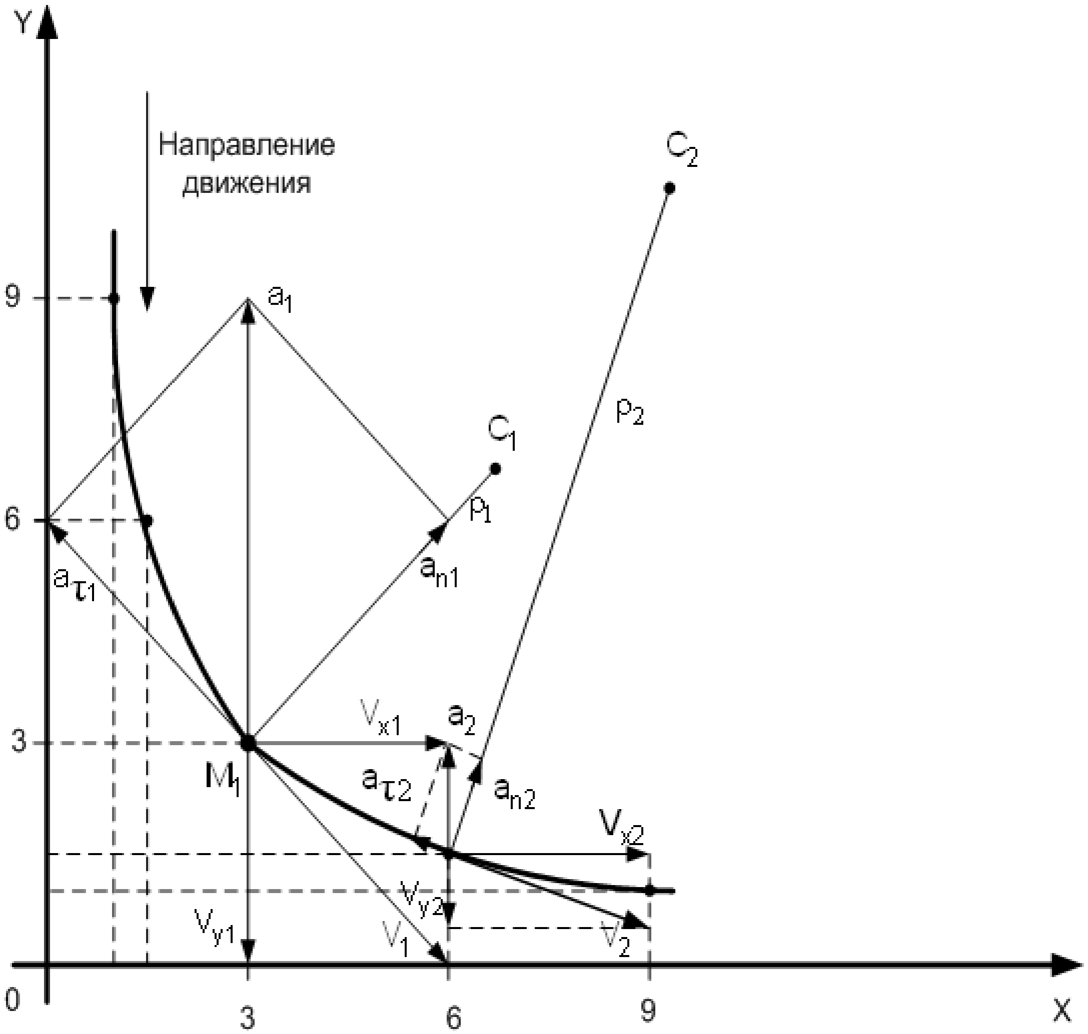


Рисунок 13

Определяем проекции ускорения точки на координатные оси:

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = 0\left(\frac{\text{см}}{\text{с}^2}\right);$$

$$a_y = \dot{V}_y = \ddot{y} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{3}{t^2}\right) = \frac{6}{t^3}\left(\frac{см}{c^2}\right).$$

Проекции ускорения и их значения для точек в заданный момент времени:

при $t_1 = 1$ с: $a_{x1} = 0$; $a_{y1} = \frac{6}{1^3} = 6\left(\frac{см}{c^2}\right)$; $a_1 = \left|a_{y1}\right| = 6\left(\frac{\text{см}}{\text{с}^2}\right)$;

при $t_2 = 2$ с: $a_{x2} = 0$; $a_{y2} = \frac{6}{2^3} = \frac{3}{4}\left(\frac{см}{c^2}\right)$; $a_2 = \left|a_{y2}\right| = \frac{3}{4}\left(\frac{см}{c^2}\right)$.

Для определения касательного и нормального ускорений переходим к естественному способу задания движения точки.

Касательные ускорения:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \frac{d}{dt}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \frac{2\dot{x}\ddot{x} + 2\dot{y}\ddot{y}}{2\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = \frac{V_x a_x + V_y a_y}{V}.$$

При t_1 = 1 с: $a_{\tau 1} = \frac{3\cdot 0 + (-3)\cdot 6}{4,2} = -\frac{18}{4,2} = -4,2\left(\frac{см}{с^2}\right)$;

при t_2 = 2 с: $a_{\tau 2} = \frac{3\cdot 0 - 0,75\cdot 0,75}{3,1} = -0,18\left(\frac{см}{с^2}\right)$.

Нормальные ускорения: $\mathrm{a_n} = \sqrt{\mathrm{a}^2 + \mathrm{a}_\tau^2}$.

При t_1 = 1 с: $a_{n1} = \sqrt{a_1^2 - a_{\tau 1}^2} = \sqrt{6^2 - (-4,2)^2} = 4,2\left(\frac{см}{с^2}\right)$;

при t_2 = 2 с: $a_{n2} = \sqrt{a_2^2 - a_{\tau 2}^2} = \sqrt{0,75^2 - (-0,18)^2} = 0,71\left(\frac{см}{с^2}\right)$.

Определяем радиус кривизны траектории в заданные моменты времени:

$$a_n = \frac{a^2}{\rho};\ \rho = \frac{V^2}{a_n}.$$

При t_1 = 1 с: $\rho_1 = \frac{V_1^2}{a_{n1}} = \frac{4,2^2}{4,2} = 4,2(см)$.

При t_2 = 2 с: $\rho_2 = \frac{V_2^2}{a_{n2}} = \frac{3,1^2}{0,71} = 13,5(см)$.

Все результаты решения показаны на чертеже (рис. 13).

Ответ: при t_1 = 1 с: $V_1 = 4,2\left(\frac{см}{с}\right)$, $a_1 = 6\left(\frac{см}{с^2}\right)$, $a_{\tau 1} = -4,2\left(\frac{см}{с^2}\right)$,

$a_{n1} = 4,2\left(\frac{см}{с^2}\right)$, $\rho_1 = 4,2(см)$; при t_2 = 2 с: $V_2 = 3,1\left(\frac{см}{с}\right)$,

$a_2 = \frac{3}{4}\left(\frac{см}{с^2}\right)$, $a_{\tau 2} = -0,18\left(\frac{см}{с^2}\right)$, $a_{n2} = 0,71\left(\frac{см}{с^2}\right)$, $\rho_2 = 13,5(см)$.

Задача 2.1.2

В соответствии с заданными уравнениями движения определить траекторию движения точки, а для момента времени t_1 – положение точки на траектории. Найти ее скорость, полное, касательное и нормальное ускорения, а также радиус кривизны траектории. Данные, необходимые для вычисления, приведены в табл. 4. Координаты даны в метрах, время - в секундах.

№	$x = x(t)$	$y = y(t)$;
1	$x = at^2 + bt + c$	$y = et + f$
2	$x = bt$	$y = dt^2 + ft + e$
3	$x = c\cos(\pi t)$	$y = e\sin(\pi t)$
4	$x = at + b$	$y = -\dfrac{e}{t+f}$
5	$x = a\cos\left(\dfrac{\pi t}{b}\right)$	$y = d\sin\left(\dfrac{\pi t}{b}\right)$
6	$x = at^2 + b$	$y = et + d$
7	$x = t^2 - bt + c$	$y = t + e$
8	$x = a\cos\left(\dfrac{\pi t}{c}\right)$	$y = f\sin\left(\dfrac{\pi t}{c}\right)$
9	$x = -ct - b$	$y = -\dfrac{f}{t+e}$
10	$x = a\cos\left(\dfrac{\pi t}{c}\right) + b$	$y = e\sin\left(\dfrac{\pi t}{c}\right)$
11	$x = at^3 + bt + c$	$y = ft + e$
12	$x = at + b$	$y = dt^2 + e$
13	$x = a\cos\left(\dfrac{\pi t^2}{c}\right)$	$y = \sin\left(\dfrac{\pi t^2}{c}\right)$
14	$x = bt + c$	$y = -\dfrac{e}{ft+d}$
15	$x = b\cos\left(\dfrac{\pi t}{c}\right)$	$y = d\sin\left(\dfrac{\pi t}{c}\right)$
16	$x = at + c$	$y = ft^3 + e$
17	$x = at + b$	$y = dt^2 + f$
18	$x = b\cos(\pi t)$	$y = e\sin(\pi t)$
19	$x = -t - c$	$y = -\dfrac{d}{t+f}$
20	$x = a\cos\left(\dfrac{\pi t}{c}\right) + a$	$y = e\sin\left(\dfrac{\pi t}{c}\right)$
21	$x = at + b$	$y = dt^4 + et + f$
22	$x = t^2$	$y = \dfrac{f}{e}t - d$

23	$x = b\cos\left(\frac{\pi t}{c}\right)$	$y = e\sin\left(\frac{\pi t}{c}\right)$
24	$x = -ct + b$	$y = -\frac{f}{t + d}$
25	$x = b\cos\left(\frac{\pi t}{a}\right) - c$	$y = d\sin\left(\frac{\pi t}{a}\right)$
26	$x = t^3 + b$	$y = t \quad - e$
27	$x = t^2 + a$	$y = t + d;$
28	$x = a\cos(b\pi t)$	$y = d\sin(b\pi t)$
29	$x = bt$	$y = -\frac{d}{ft + e}$
30	$x = -\cos\left(\frac{\pi t^2}{c}\right) - b$	$y = d\sin\left(\frac{\pi t^2}{c}\right) + f$

Таблица 4 – Исходные данные

№	a	b	c	d	e	f	t_1
0	4	1	5	9	6	2	0,3
1	9	5	7	1	3	4	0,6
2	8	9	4	3	5	1	0,8
3	5	7	1	6	9	8	0,1
4	7	4	8	2	1	3	0,7
5	9	6	3	5	4	7	0,9
6	3	8	2	4	6	5	0,2
7	1	2	6	7	8	9	0,4
8	2	3	9	8	7	4	0,5
9	6	9	4	3	2	8	0,8

2.2. Определение скоростей и ускорений точек твердого тела при поступательном и вращательном движении

Задача 2.2.1

Зубчатая передача приводится в движение грузом 1, подвешенным к колесу 2. На одной оси с колесом 2 укреплено колесо 3, которое сцепляется с колесом 4 (рис. 14).

Определить скорость и ускорение точки М на ободе колеса 4 в момент времени t=1 с. Груз движется по закону: $x = 5t^2 + 10t\,(см)$. Радиусы колёс соответственно: r_2 = 10 см, r_3 = 6 см, r_4 = 8 см.

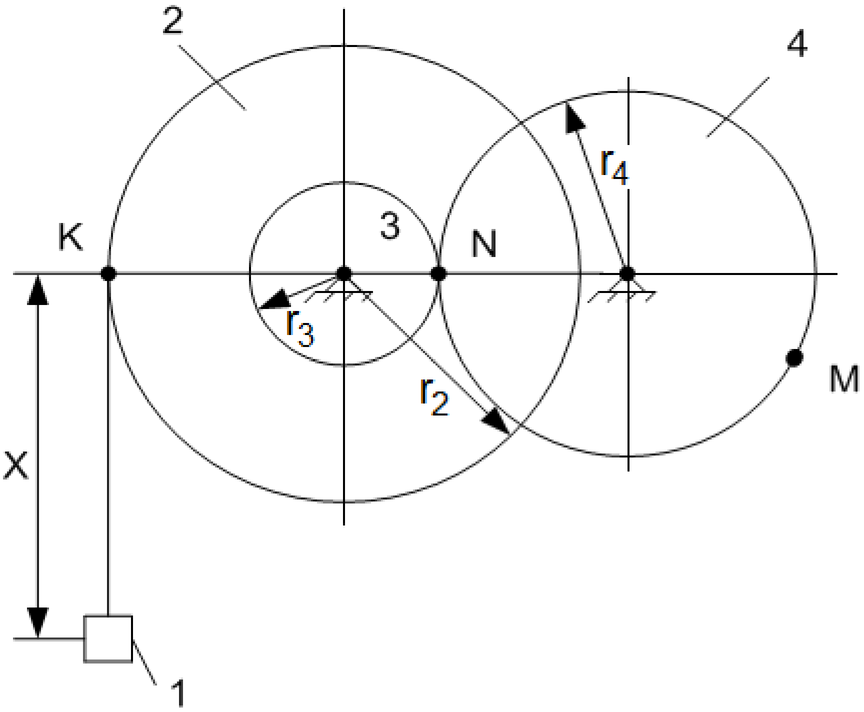


Рисунок 14

Решение

Скорость и ускорение груза 1 будут совпадать со скоростью и вращательным ускорением точки К на ободе колеса 2, с которого сходит нить, к которой подвешен груз:

$$V_K = \frac{dx}{dt} = 10t + 10\left(\frac{см}{с}\right); \quad a_K^{вр} = a_1 = \frac{dV_K}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = 10\left(\frac{см}{с^2}\right).$$

Так как колёса 2 и 3 имеют одну ось вращения, то угловая скорость и угловое ускорение у них одинаковые:

$$\omega_{2-3} = \frac{V_k}{r_2} = \frac{10t+10}{10} = t+1\left(c^{-1}\right);$$

$$\varepsilon_{2-3} = \frac{a_k^{вр}}{r_2} = \frac{10}{10} = 1\left(c^{-2}\right).$$

Точка N – точка соприкосновения колёс 3 и 4. Скорость этой точки и вращательное ускорение для колес 3 и 4 будут одинаковые:

$$V_N = \omega_{2-3} \cdot r_3 = \omega_4 \cdot r_4;$$

отсюда $\omega_4 = \dfrac{\omega_{2-3} \cdot r_3}{r_4} = \dfrac{(t+1)\cdot 6}{8} = \dfrac{(t+1)\cdot 3}{4}\left(c^{-1}\right);$

$$a_N^{вр} = \varepsilon_{2-3} \cdot r_3 = \varepsilon_4 \cdot r_4;$$

$$\varepsilon_4 = \frac{\varepsilon_{2-3} \cdot r_3}{r_4} = \frac{1 \cdot 6}{8} = \frac{3}{4}\left(c^{-2}\right).$$

Скорость точки М:

$$V_M = \omega_4 \cdot r_4 = \frac{(t+1) \cdot 3}{4} \cdot 8 = 6t + 6\left(\frac{см}{c}\right);$$

в момент t=1c:

$$V_{M1} = 6 + 6 = 12\left(\frac{см}{c}\right).$$

Ускорение точки М:

$$a_M^{вр} = \varepsilon_4 \cdot r_4 = \frac{3}{4} \cdot 8 = 6\left(\frac{см}{c^2}\right);$$

$$a_M^{ц} = \omega_4^2 \cdot r_4 = \left(\frac{(t+1) \cdot 3}{4}\right)^2 \cdot 8 = \frac{9(t+1)^2}{2}\left(\frac{см}{c^2}\right);$$

в момент t=1c:

$$a_{M1}^{ц} = \frac{9 \cdot 2^2}{2} = 18\left(\frac{см}{c^2}\right);$$

$$a_M = \sqrt{\left(a_M^{вр}\right)^2 + \left(a_M^{ц}\right)^2} = \sqrt{6^2 + 18^2} = 18{,}97\left(\frac{см}{с^2}\right).$$

Ответ:

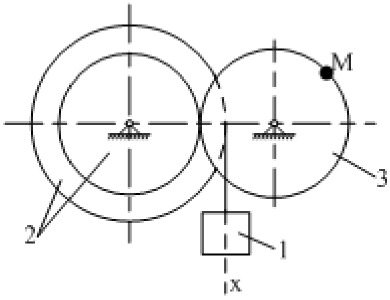
$$V_M = 12\left(\frac{см}{c}\right),\ a_M = 18{,}97\left(\frac{см}{с^2}\right).$$

Задача 2.2.2

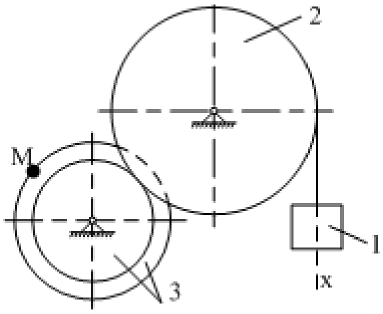
Для представленных на схемах грузоподъемных механизмов определить угловую скорость и угловое ускорение тела 3, необходимые для того, чтобы перемещать груз со скоростью V и ускорением a. Определить и показать на рисунке скорость и ускорение точки М барабана.

Данные, необходимые для вычисления, приведены в табл. 5.

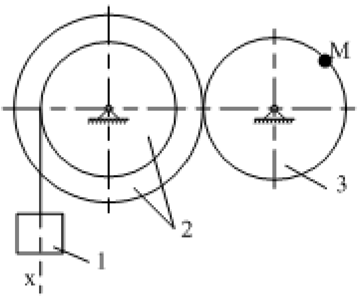
1



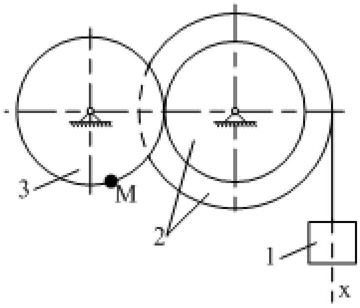
2



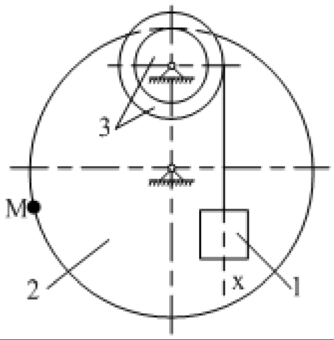
3



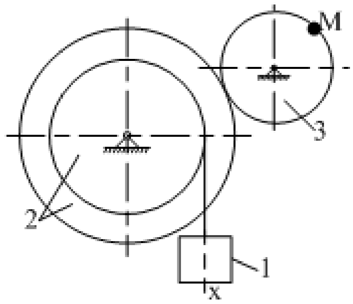
4



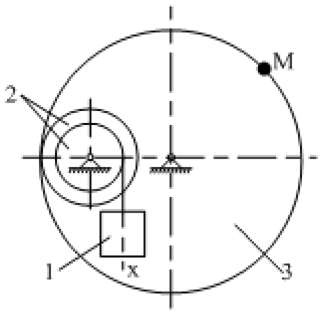
5



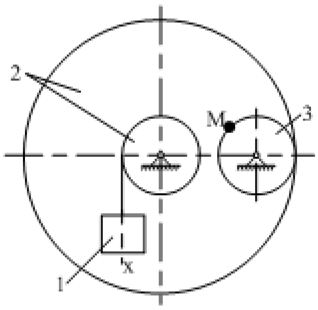
6



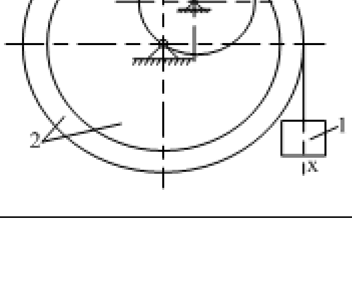
7



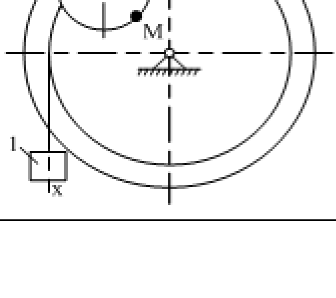
8



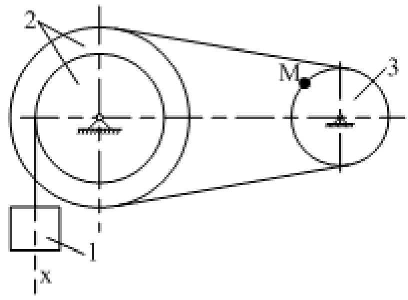
9



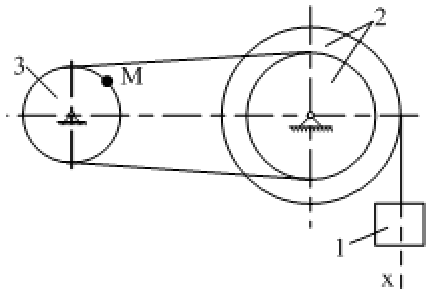
10



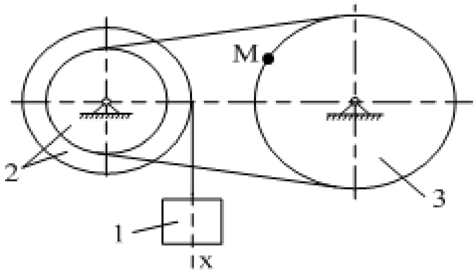
11



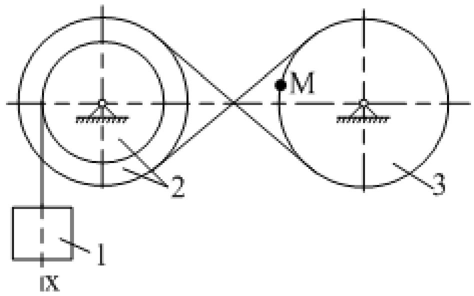
12



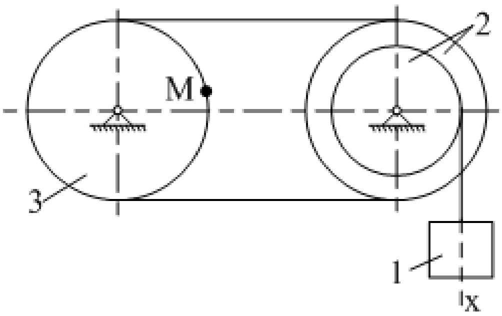
13



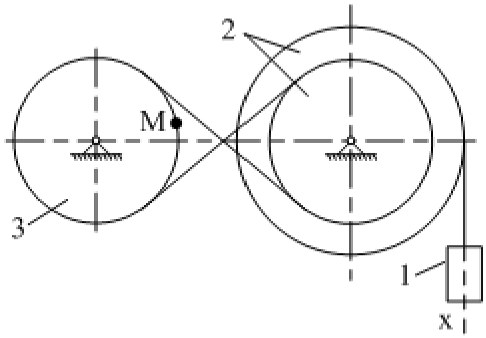
14



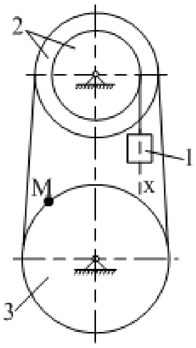
15



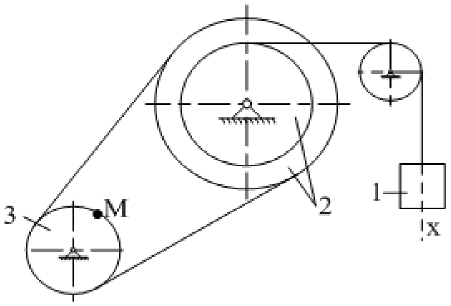
16



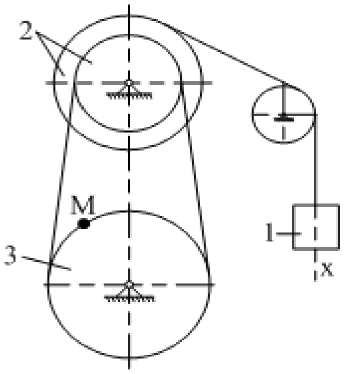
17



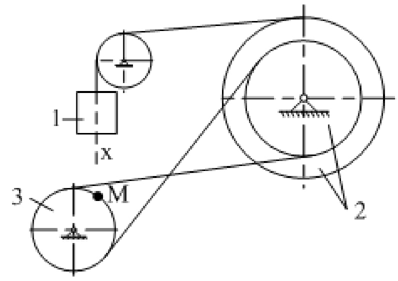
18



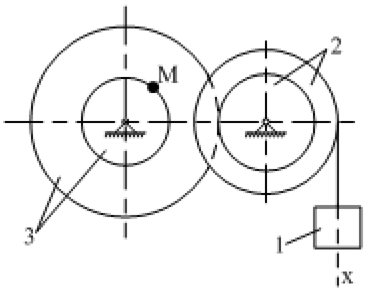
19



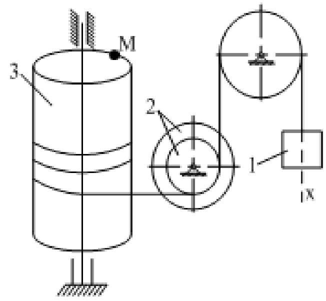
20



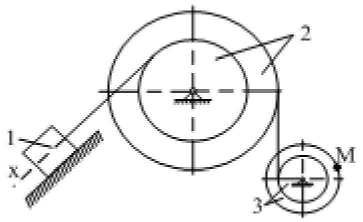
21



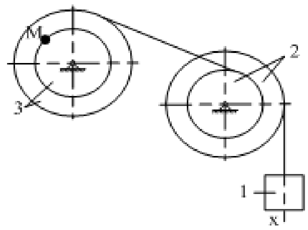
22



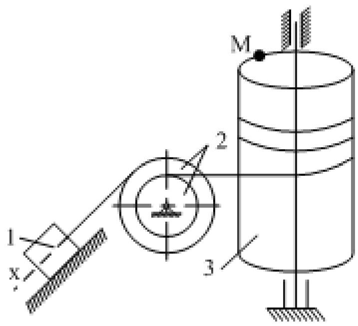
23



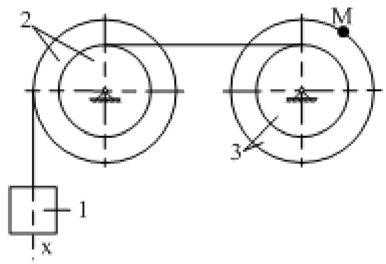
24



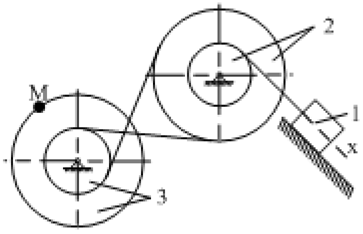
25



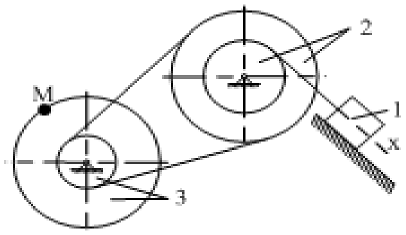
26



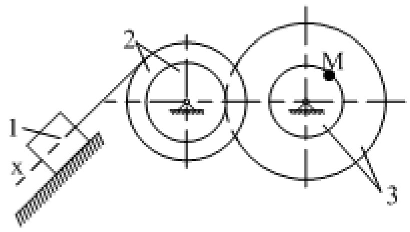
27



28



29



30

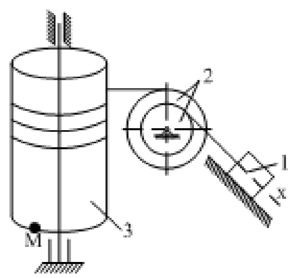


Таблица 5 – Исходные данные

№	V_1	a_1	R_2	r_2	R_3	r_3
	м/с	м/с^2	м	м	м	м
0	0,10	0,75	0,40	0,15	0,60	0,35
1	0,25	0,70	0,80	0,20	0,70	0,25
2	0,35	0,90	0,60	0,50	0,50	0,30
3	0,50	0,55	0,55	0,35	0,45	0,20
4	0,40	0,75	0,75	0,20	0,75	0,55
5	0,15	0,80	0,65	0,50	0,80	0,45
6	0,30	0,45	0,45	0,35	0,65	0,30
7	0,55	0,60	0,55	0,40	0,40	0,15
8	0,45	0,75	0,70	0,20	0,50	0,20
9	0,20	0,50	0,50	0,25	0,75	0,60

2.3. Кинематический анализ плоского стержневого механизма

Задача 2.3.1

Кривошип ОА длиной 20 см вращается равномерно со скоростью $\omega_0 = 10\dfrac{рад}{с}$ и приводит во вращение шатун АВ длиной 100 см; ползун В движется по вертикали (рис. 15).

Найти: угловую скорость и угловое ускорение шатуна, а также ускорение ползуна В в момент, когда кривошип и шатун взаимно перпендикулярны и образуют с горизонтальной осью углы $\alpha = 45^0$ и $\beta = 45^0$.

Решение

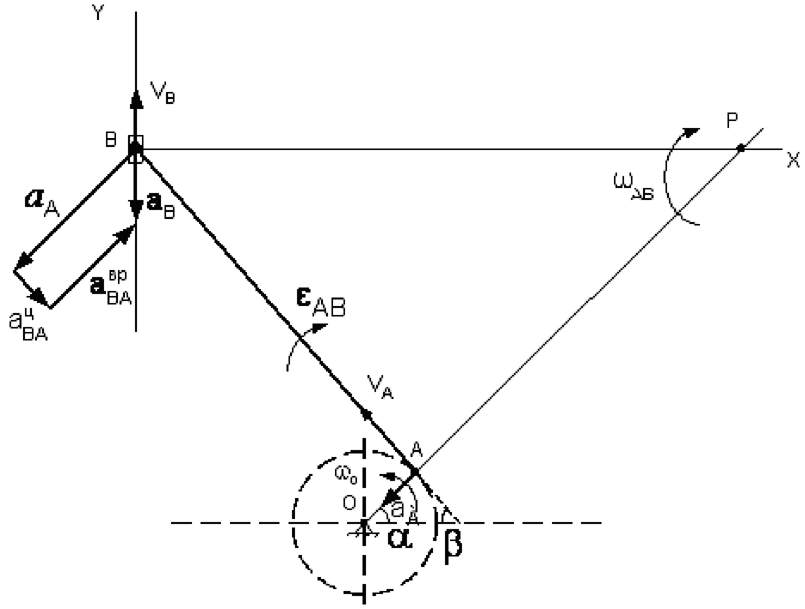


Рисунок 15

1. Определяем скорость точки А:

$$V_A = \omega_0 \cdot OA = 10 \cdot 20 = 200\left(\frac{см}{с}\right).$$

V_A направлена по перпендикуляру к ОА и согласована с направлением ω_0.

2. Определяем скорость точки В.

Шатун АВ совершает плоское движение. МЦС находится на пересечении перпендикуляров к скоростям точек А и В.

Угловая скорость звена АВ:

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_A}{AB} = \frac{200}{100} = 2\left(\frac{рад}{с}\right);$$

ω_{AB} направлена по часовой стрелке;

$$V_B = \omega_{AB} \cdot BP = 2 \cdot 100\sqrt{2} = 282{,}8\left(\frac{см}{с}\right);$$

V_B направлена по направляющей вверх.

3. Определяем ускорение точки А:

$$\overline{a}_A = \overline{a}^{ц}_A + \overline{a}^{вр}_A;$$

$$a_A^{ц} = \omega_0^2 \cdot AO = 10^2 \cdot 20 = 2000\left(\frac{см}{c^2}\right).$$

$a_A^{вр}$ направлено к оси вращения звена АО:

$$a_A^{вр} = \varepsilon_0 \cdot AO = 0,$$

так как $\omega_0 = const$, $\varepsilon_0 = \dfrac{d\omega_0}{dt} = 0$,

$$a_A = \sqrt{\left(a_A^{ц}\right)^2 + \left(a_A^{вр}\right)^2} = 2000\left(\frac{см}{c^2}\right).$$

4. Определяем ускорения точки В.

Принимаем за полюс точку А и пользуясь теоремой об ускорениях плоской фигуры, запишем:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^{ц} + \bar{a}_{BA}^{вр}. \qquad (25)$$

Центростремительное ускорение во вращательном движении точки вокруг полюса А:

$$a_{BA}^{ц} = \omega_{AB}^2 \cdot AB = 2^2 \cdot 100 = 400\left(\frac{см}{c^2}\right).$$

Вращательное ускорение:

$$a_{BA}^{вр} = \varepsilon_{AB} \cdot AB.$$

Чтобы найти ε_{AB} , воспользуемся графическим построением (рис. 16):

- отложим из точки В ускорение полюса А: $\bar{a}_A$;

- из конца вектора $\bar{a}_A$ отложим $\bar{a}_{AB}^{ц}$ в направлении оси от точки В к полюсу А;

- из конца $\bar{a}_{AB}^{ц}$ проведём направление $\bar{a}_{AB}^{вр}$ до пересечения с направлением $\bar{a}_B$;

- $\bar{a}_B$ направлено по вертикали;

- $\bar{a}_{AB}^{вр}$ перпендикулярно $\bar{a}_{AB}^{ц}$.

Расставим стрелки согласно векторному равенству (25).

Векторное равенство (25) содержит 2 неизвестных алгебраических значения a_B и $\mathrm{a}_{\mathrm{BA}}^{\mathrm{вр}}$.

Спроецируем векторное равенство (25) на две взаимно перпендикулярные оси X и Y.

На ось X:

$$0 = -a_A \cdot \cos 45^o + a_{BA}^{ц} \cdot \cos 45^o + a_{BA}^{вр} \cdot \cos 45^o.$$

Отсюда

$$a_{BA}^{вр} = a_A - a_{BA}^{ц} = 2000 - 400 = 1600\ см/с^2.$$

Угловое ускорение:

$$\varepsilon_{AB} = \frac{a_{BA}^{вр}}{AB} = \frac{1600}{100} = 16\ рад/с^2.$$

Угловое ускорение направлено в такую сторону, в которую вектор $\overline{a}_{BA}^{вр}$, помещённый в точку B, стремится повернуть плоскость относительно полюса A, то есть по часовой стрелке.

На ось Y:

$$-a_B = -a_A \cos 45^o - a_{BA}^{ц} \cos 45^o + a_{BA}^{вр} \cos 45^o.$$

Отсюда

$$a_B = \left(a_A + a_{BA}^{ц} - a_{BA}^{вр}\right)\cos 45^o = \left(2000 + 400 - 1600\right)\cdot 0,707 = 565,6\ см/с^2.$$

5. Определяем скорость точки B, пользуясь теоремой о скоростях точек плоской фигуры:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA} \qquad (26)$$

где $\vec{V}_{BA}$ – вращательная скорость точки B при вращении вокруг полюса A:

$$V_{BA} = \omega_{AB} AB,$$

$\vec{V}_{BA}$ направлена перпендикулярно радиусу вращения AB.

Построим графически равенство (26):

- отложим из точки B скорость полюса $\overline{V}_A$;

- из конца вектора $\overline{V}_A$ проведём направление $\overline{V}_{AB}$ до пересечения с направлением $\overline{V}_B$.

Расставим стрелки согласно равенству (26).

Спроецируем векторное равенство (26) на две взаимно перпендикулярные оси X и Y.

На ось X:

$$0 = -V_A \cos 45^o + V_{BA} \cos 45^o.$$

Отсюда $\mathrm{V_A = V_{BA}}$.

Угловая скорость ω_{AB}:

$$\omega_{AB} = \frac{V_{BA}}{AB} = \frac{V_A}{AB} = \frac{200}{100} = 2\left(\frac{рад}{с}\right).$$

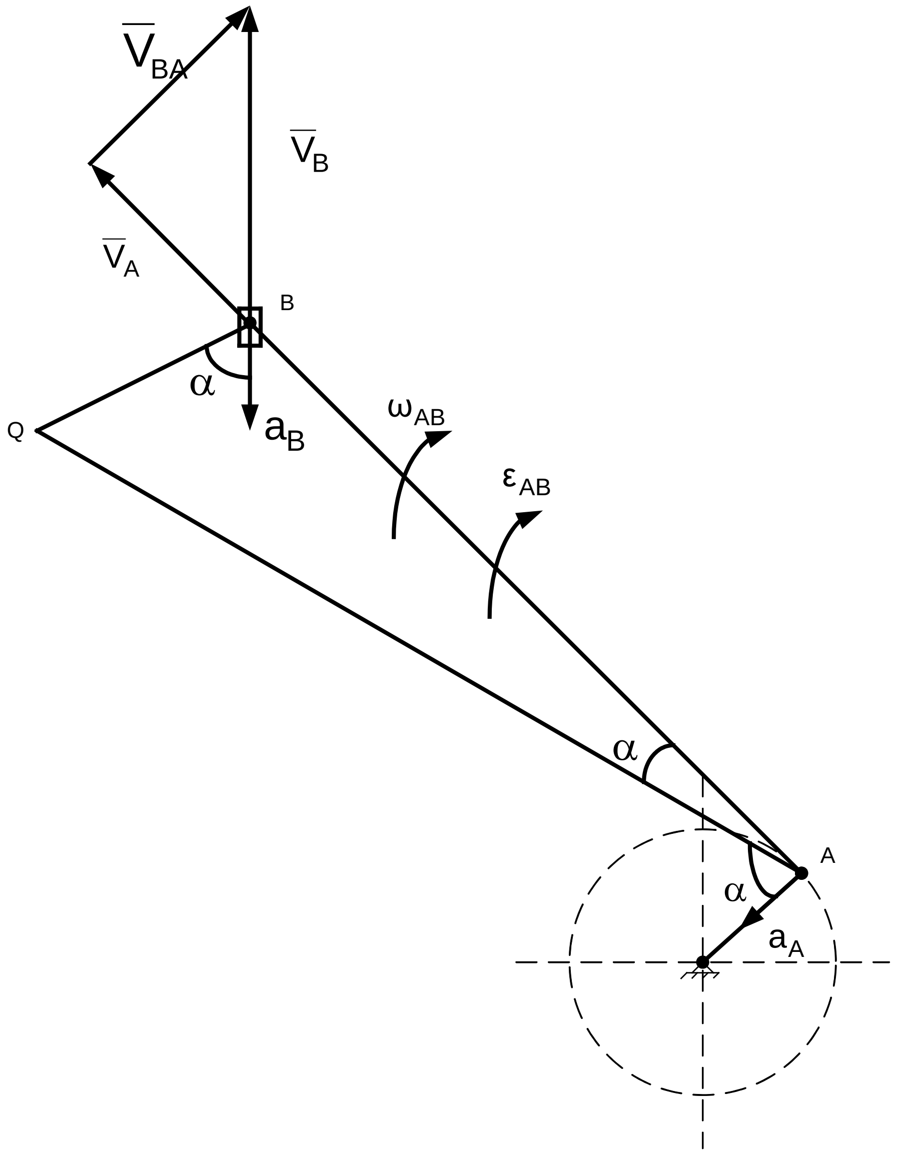


Рисунок 16

На ось Y:

$$V_{By} = V_A \cos 45^o + V_{BA} \cos 45^o = 2V_A \cos 45^o = 2 \cdot 200 \cdot 0,707 = 282,8\ см/с.$$

6. Определяем ускорение точки В, пользуясь мгновенным центром ускорений:

$$a_B = QB\sqrt{\omega^2 + \varepsilon^2}\ .$$

Тангенс угла между отрезком AQ, соединяющим точку A с мгновенным центром ускорений:

$$tg\alpha = \frac{\varepsilon_{AB}}{\omega_{AB}^2} = \frac{16}{2^2} = 4;$$

$$\alpha = 75,96^o.$$

Угол α откладывается от оси ускорения точки A по часовой стрелке, то есть также, как угловое ускорение ε_{AB}.

Расстояние от точки A до мгновенного центра ускорений *AQ:*

$$AQ = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon_{AB}^2 + \omega_{AB}^4}} = \frac{2000}{\sqrt{16^2 + 2^4}} = 121,27 \ см.$$

Для определения расстояния от точки B до мгновенного центра ускорений рассмотрим треугольник ABQ:

$$\angle QAB = 90^0 - \alpha = 90^0 - 75,96^0 = 14,04^0.$$

По теореме косинусов:

$$QB = \sqrt{AB^2 + AQ^2 - 2 \cdot AB \cdot AQ \cdot \cos\left(90^O - \alpha\right)} =$$

$$= \sqrt{100^2 + 121,27^2 - 2 \cdot 100 \cdot 121,27 \cdot 0,97} = 34,35 \ см.$$

Ускорение точки B определяется из соотношения:

$$\frac{a_A}{AQ} = \frac{a_B}{BQ},$$

откуда $\mathrm{a_B} = \frac{\mathrm{a_A}}{AQ} \cdot BQ = \frac{2000}{121,27} \cdot 34,35 = 566,5 \, \text{см / с}^2.$

Для определения направления $\overline{a}_B$ откладываем угол α оси отрезка QB в направлении, противоположном направлению ε_{AB}, т. е. против хода часовой стрелки.

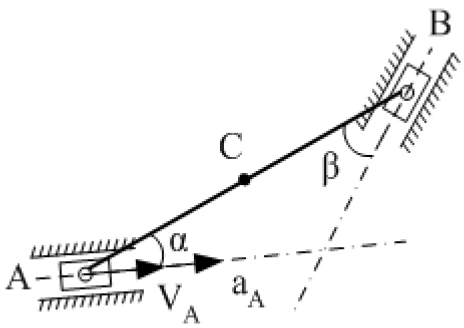
Ответ:

$$\varepsilon_{AB} = 16 \ рад / c^2, \ \omega_{AB} = 2\left(\frac{рад}{c}\right), \ \mathrm{a_B} = 566,5 \, \text{см / с}^2.$$

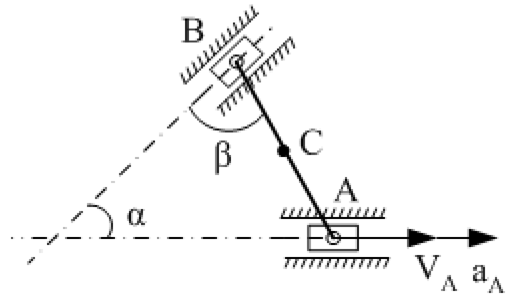
Задача 2.3.2

Для представленных на схемах механизмов определить скорость и ускорение точек B и C шатуна AB. Данные, необходимые для вычисления, приведены в табл. 6.

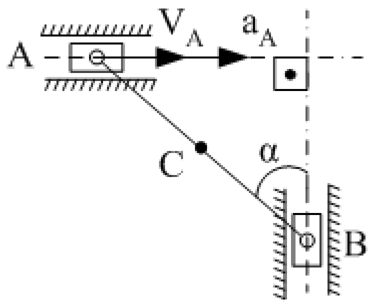
1


B
C
β
α
A
V_A
a_A

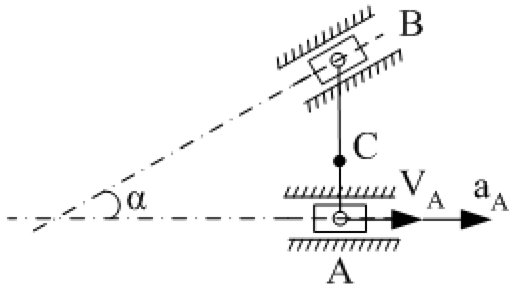
2


B
C
β
α
A
V_A
a_A

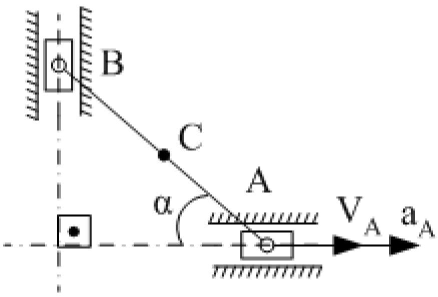
3


A
V_A
a_A
C
α
B

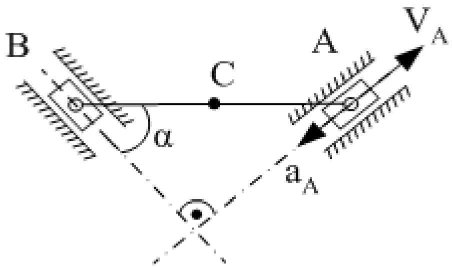
4


B
C
α
V_A
a_A
A

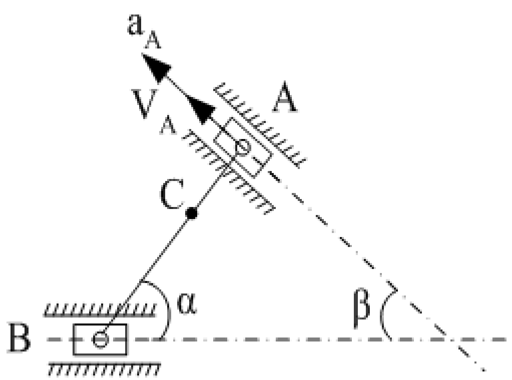
5


B
C
A
α
V_A
a_A

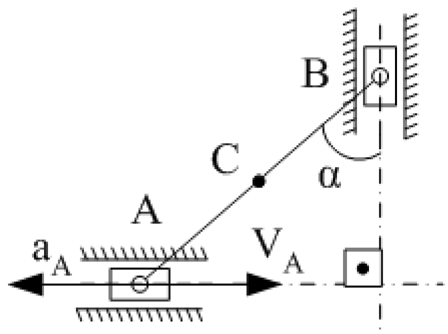
6


B
C
A
V_A
α
a_A

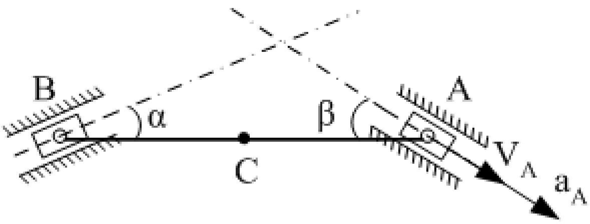
7


a_A
V_A
A
C
α
β
B

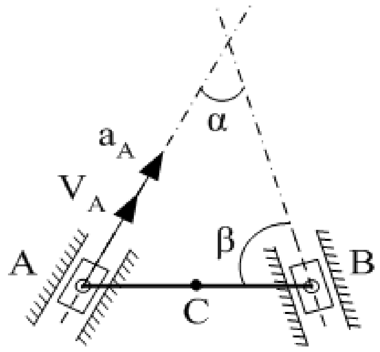
8


B
C
α
A
a_A
V_A

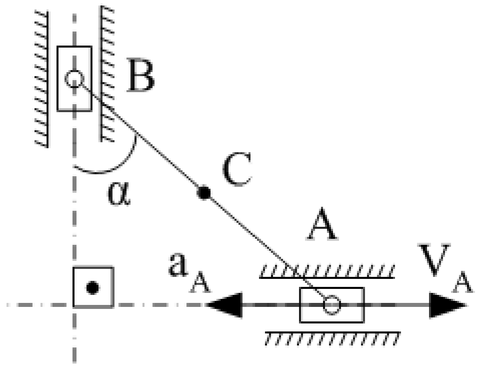
9



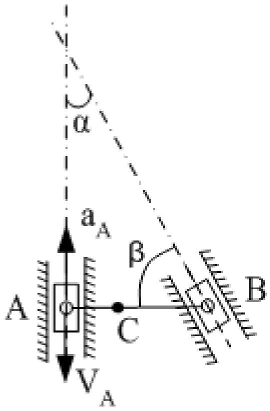
10



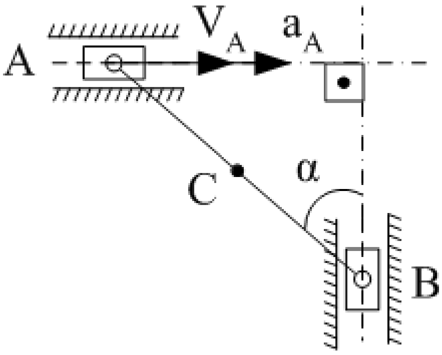
11



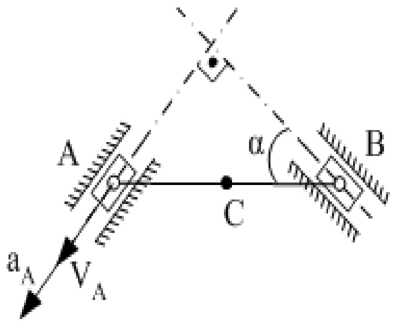
12



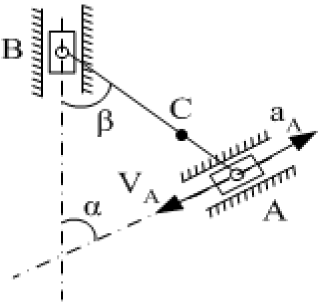
13



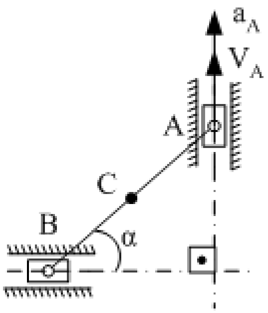
14



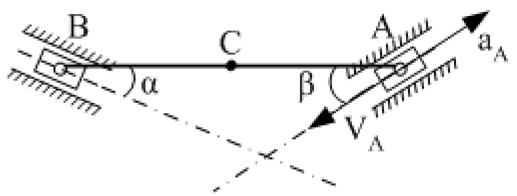
15



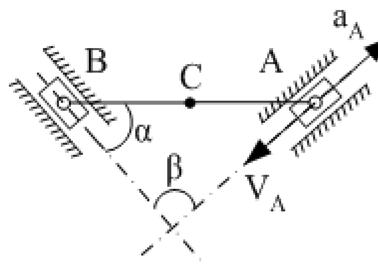
16



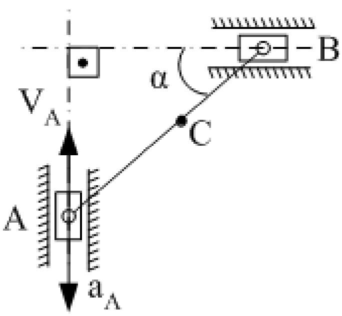
17



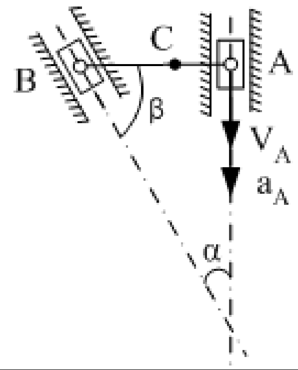
18



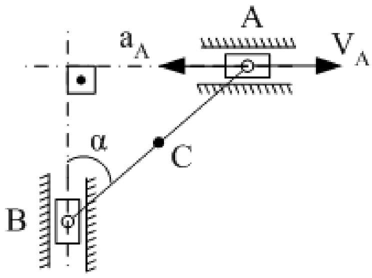
19



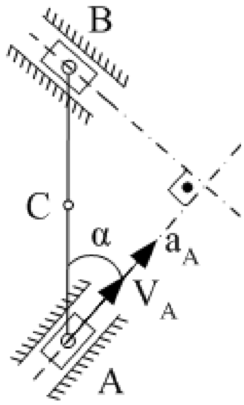
20



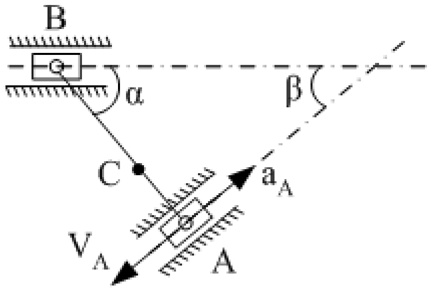
21



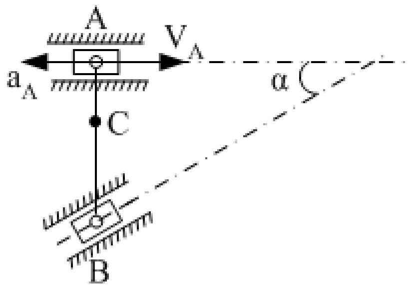
22



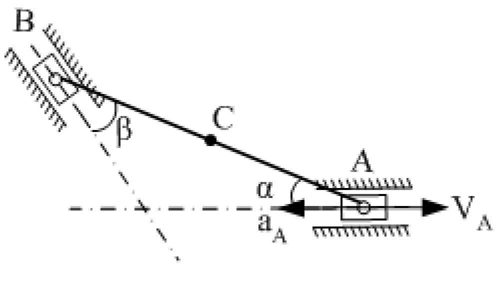
23



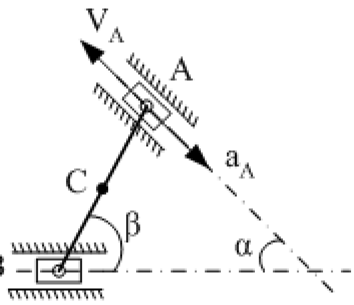
24



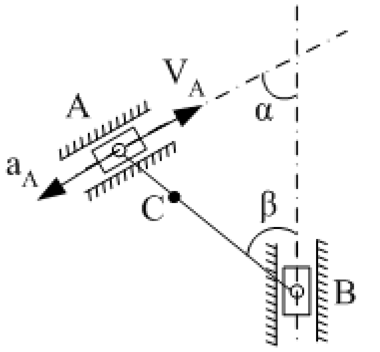
25



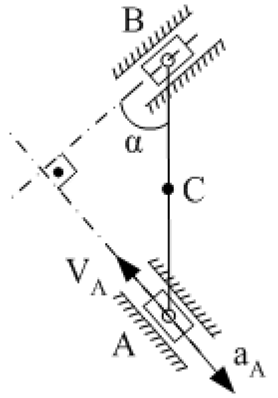
26



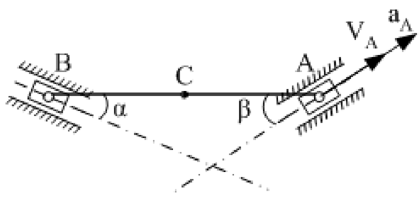
27



28



29



30

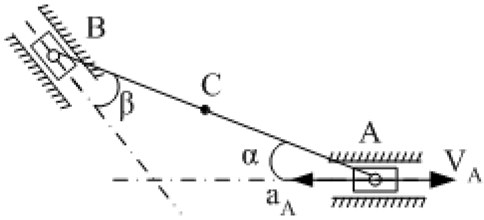


Таблица 6 – Исходные данные

№	V_A	a_A	AB	$AC = \dfrac{BC}{AB}$	α	β
	м/с	м/с^2	м	-	град	град
0	1,0	3,0	2,0	0,3	20	40
1	3,0	3,5	3,0	0,7	30	40
2	2,0	2,5	2,5	0,4	40	20
3	2,5	4,0	2,5	0,6	50	20
4	1,5	3,5	2,0	0,7	70	10
5	3,5	2,0	4,0	0,4	20	60
6	3,0	2,0	3,0	0,5	60	10
7	4,0	2,5	3,5	0,6	30	20
8	2,5	4,0	2,0	0,5	50	20
9	3,5	3,0	2,5	0,3	40	30

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Александров, А. В. Сопротивление материалов [Текст] : учебник для вузов / А. В. Александров, В. Д. Потапов, Б. П. Державин. – 4-е изд., испр. – М.: Высшая школа, 2004. – 560 с.
2. Мещерский, И. В. Сборник задач по теоретической механике [Текст]: учебное пособие / И. В. Мещерский. – 51-е изд.– СПб.: Лань, 2012. – 448 с.
3. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике [Текст]: учебное пособие / Под ред. А. А. Яблонского. – 18-е изд. – М.: КноРус, 2011. – 386 с.
4. Тарг, С. М. Краткий курс теоретической механики: [Текст] : учебник для вузов / С. М. Тарг. – 18-е изд. – М.: Высшая школа, 2010. – 416 с.
5. Яблонский, А. А. Курс теоретической механики [Текст] : учебник для студентов высших учебных заведений, обучающихся по техническим специальностям / А. А. Яблонский, В. М. Никифорова. – 16-е изд., стер. – Москва : КноРус, 2011. – 603 с.

Учебное издание

Головко Виктор Евгеньевич
Кауров Павел Викторович
Клюшкин Иван Владимирович
Батенев Александр Павлович

Теоретическая механика
Часть 1. Статика и кинематика

Редактор и корректор Е. О. Тарновская
Техн. редактор Д. А. Романова

Учебное электронное издание сетевого распространения

Системные требования:
электронное устройство с программным обеспечением
для воспроизведения файлов формата PDF

Режим доступа: http://publish.sutd.ru/tp_get_file.php?id=202016, по паролю.
- Загл. с экрана.

Дата подписания к использованию 07.06.2022 г. Изд. № 6/21

Высшая школа технологии и энергетики СПбГУПТД
198095, СПб., ул. Ивана Черных, 4.