№ 24 (2019)

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРОМЫШЛЕННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ДИЗАЙНА»

ВЫСШАЯ ШКОЛА ТЕХНОЛОГИИ И ЭНЕРГЕТИКИ

Кафедра высшей математики

МАТЕМАТИКА
Методические указания и контрольные задания для студентов заочной формы ускоренного обучения, первый семестр

Санкт-Петербург
2018

УДК 51(07)
ББК 22.1р
О-627

Математика: методические указания и контрольные задания для студентов заочной формы ускоренного обучения, I семестр / сост: Н.Л.Белая, Б.Ф.Иванов, И.Э.Апакова, Е.Г.Иванова, Т.Ю.Малова, М.Э.Юдовин. ВШТЭ СПбГУПТД. – СПб., 2019.-52 с.

Приводится теоретический материал с разобранными решениями типичных примеров. Предназначено для студентов заочной формы ускоренного обучения, первый семестр.

Рецензент: зав. кафедрой высшей математики № 1 СПбГЭТУ «ЛЭТИ» д-р физ.-мат.наук Бодунов Н.А.

Подготовлено и рекомендовано к изданию кафедрой высшей математики (протокол № 6 от 06.02.2019 г.).

Утверждено к изданию методической комиссией ВШТЭ СПбГУПТД (протокол № 3 от 07.02.2019 г.).

Редактор и корректор Басова В.А.
Техн. редактор Титова Л.Я. Темплан 2019 г., поз.24

Подп. к печати. Формат 60x84/16. Бумага тип №1.
Печать офсетная. Объем 2,5печ.л.; 2,5 уч.-изд.л.
Тираж 70 экз. Изд. № 24.Цена «С». Заказ

Ризограф Высшей школы технологии и энергетики ВШТЭ
СПбГУПТД, 198095, Санкт-Петербург, ул. Ивана Черных, 4.

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящих методических указаниях рассмотрены вопросы, соответствующие первому семестру заочной индивидуальной формы обучения, дается теоретический материал для подготовки к решению задач из контрольных работ № 1 и № 2 с подробным разбором примеров из указанных контрольных.

Настоящие методические указания написаны для помощи студентам заочной индивидуальной формы обучения в решении заданий, а также для лучшего усвоения ими теоретического материала по указанным темам.

Хотя задания для контрольных работ приведены в соответствующей методичке, здесь приводятся формулировки примеров, таблицы контрольных заданий и список экзаменационных вопросов. Далее следует подробный разбор каждого примера.

Для более детального и глубокого изучения материала по теме «Интегральное исчисление» авторы рекомендуют студентам изучить литературу, приведенную в библиографическом списке.

Задачи для контрольных заданий

1. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии

11-20. Даны координаты вершин пирамиды $A_1\ A_2\ A_3\ A_4$. Найти: 1) длину ребра $A_1\ A_2$; 2) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4; 3) угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$; 4) площадь грани $A_1A_2A_3$; 5) объем пирамиды; 6) уравнение прямой A_1A_2; 7) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$; 8) уравнение высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$. Сделать чертеж.

11. $A_1(4;2;5)$, $A_2(0;7;2)$, $A_3(0;2;7)$, $A_4(1;5;0)$.
12. $A_1(4;4;10)$, $A_2(4;10;2)$, $A_3(2;8;4)$, $A_4(9;6;9)$.
13. $A_1(4;6;5)$, $A_2(6;9;4)$, $A_3(2;10;10)$, $A_4(7;5;9)$.
14. $A_1(3;5;4)$, $A_2(8;7;4)$, $A_3(5;10;4)$, $A_4(4;7;8)$.
15. $A_1(10;6;6)$, $A_2(-2;8;2)$, $A_3(6;8;9)$, $A_4(7;10;3)$.
16. $A_1(1;8;2)$, $A_2(5;2;6)$, $A_3(5;7;4)$, $A_4(4;10;9)$.
17. $A_1(6;6;5)$, $A_2(4;9;5)$, $A_3(4;6;11)$, $A_4(6;9;3)$.
18. $A_1(7;2;2)$, $A_2(5;7;7)$, $A_3(5;3;1)$, $A_4(2;3;7)$.
19. $A_1(8;6;4)$, $A_2(10;5;5)$, $A_3(5;6;8)$, $A_4(8;10;7)$.
20. $A_1(7;7;3)$, $A_2(6;5;8)$, $A_3(3;5;8)$, $A_4(8;4;1)$.

21. Уравнение одной из сторон квадрата: $x+3y-5=0$. Составить уравнение трех остальных сторон квадрата, если точка пересечения его диагоналей $(-1,0)$.

22. Даны уравнения одной из сторон ромба: $x-3y+10=0$ и одной из его диагоналей: $x+4y-4=0$; диагонали ромба пересекаются в точке $(0,1)$. Найти уравнения остальных сторон ромба.

23. Уравнения двух сторон параллелограмма: $x+2y+2=0$ и $x+y-4=0$, а уравнение одной из его диагоналей: $x-2=0$. Найти координаты вершин параллелограмма.

24. Даны две вершины треугольника: $A(-3,3)$ и $B(5,-1)$ и точка $D(4,3)$ – точка пересечения высот треугольника. Составить уравнения его сторон.

25. Даны вершины $A(-3,-2)$, $B(4,-1)$, $C(1,3)$ трапеции $ABCD$ (AD

параллельно BC). Известно, что диагонали трапеции взаимно перпендикулярны. Найти координаты вершины D этой трапеции.

26. Даны уравнения двух сторон треугольника $5x+4y+15=0$ и $4x+y-9=0$. Его медианы пересекаются в точке $(0,2)$. Составить уравнение третьей стороны треугольника.

27. Даны две вершины треугольника : $A(2,-2)$ и $B(3,-1)$ и точка $P(1,0)$ – точка пересечения медиан треугольника ABC. Составить уравнение высоты треугольника, проведенной через третью вершину C.

28. Даны уравнения двух высот треугольника : $x+y=4$ и $y=2x$ и одна из его вершин $A(0,2)$. Составить уравнения сторон треугольника.

29. Даны уравнения двух медиан треугольника : $x-2y+1=0$ и $y-1=0$ и одна из его вершин $(1,3)$. Составить уравнения его сторон.

30. Две стороны треугольника заданы уравнениями : $5x-2y-8=0$ и $3x-2y-8=0$, а середина третьей стороны совпадает с началом координат. Составить уравнение этой стороны.

31. Составить уравнение линии, расстояние каждой точки которой от начала координат и от точки $A(5,0)$ относится как $2:1$.

32. Составить уравнение линии, расстояние каждой точки которой от точки $A(-1,0)$ вдвое меньше расстояния её от прямой $x=-4$.

33. Составить уравнение линии, расстояние каждой точки которой от точки $A(2,0)$ и от прямой $5x+8=0$ относится как $5:4$.

34. Составить уравнение линии, каждая точка которой находится вдвое дальше от точки $A(4,0)$, чем от точки $B(1,0)$.

35. Составить уравнение линии, расстояние каждой точки которой от точки $A(2,0)$ и от прямой $2x+5=0$ относится как $4:5$.

36. Составить уравнение линии, расстояние каждой точки которой от точки $A(3,0)$ вдвое меньше расстояния от точки $B(26,0)$.

37. Составить уравнение линии, каждая точка которой одинаково удалена от точки $A(0,2)$ и от прямой $y-4=0$.

38. Составить уравнение линии, каждая точка которой равноотстоит от оси ординат и от окружности $x^2+y^2=4x$.

39. Составить уравнение линии, каждая точка которой равноудалена от точки $A(2,6)$ и от прямой $y+2=0$.

40. Составить уравнение линии, каждая точка которой отстоит от точки $A(-4,0)$ втрое дальше, чем от начала координат.

2. Введение в математический анализ

Задания 41-50. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя.

41. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-2x}{3x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(x)}{5x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^x$.

42. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+1}{2x^3+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{2+x}-3}{x-7}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x)}{5x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^x$.

43. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x^2-5}{x^3+x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-\sqrt{x}}{x^2-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos(2x)}}{x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+1}{4x}\right)^{2x}$.

44. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+x^2-6}{2x^2-x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\operatorname{arctg} x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{1/x}$.

45. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+6x-5}{5x^2-x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}x(\ln(x+1)-\ln(x))$.

46. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+x+5x^4}{x^4-12x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\operatorname{ctg} 2x}{\sin 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x+1)(\ln(x+3)-\ln x)$.

47. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-2x^2+5x^4}{2+3x^2+x^4}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^2+x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{1-\cos 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-5)(\ln(x-3)-\ln x)$.

48. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+1}{3x^2+x-5}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{5}}{x-3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2(x/2)}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}(7-6x)^{x/(3x-3)}$.

49. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4-2x^3+2}{x^4+3}$; б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{2x+6}}{x^2-5x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{2x\operatorname{tg} 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)^{2x/(x^2-4)}$.

50. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^5-3x^2+9}{2x^5+2x^2+5}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{2x}-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\operatorname{tg} 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to 3}(3x-8)^{2/(x-3)}$.

51-60. Заданы функция $y = f(x)$ и два значения аргумента x_1, x_2. Требуется: 1) установить, является ли данная функция непрерывной или разрывной для каждого из данных значений аргумента; 2) в случае разрыва функции найти ее пределы в точке разрыва слева и справа; 3) сделать схематический чертеж.

51. $f(x) = 9^{1/(2-x)}$, $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.
52. $f(x) = 4^{1/(3-x)}$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.
53. $f(x) = 12^{1/x}$, $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.
54. $f(x) = 3^{1/(4-x)}$, $x_1 = 2$, $x_2 = 4$.
55. $f(x) = 8^{1/(5-x)}$, $x_1 = 3$, $x_2 = 5$.
56. $f(x) = 10^{1/(7-x)}$, $x_1 = 5$, $x_2 = 7$.
57. $f(x) = 14^{1/(6-x)}$, $x_1 = 4$, $x_2 = 6$.
58. $f(x) = 15^{1/(8-x)}$, $x_1 = 6$, $x_2 = 8$.
59. $f(x) = 11^{1/(4+x)}$, $x_1 = -4$, $x_2 = -2$.
60. $f(x) = 13^{1/(5+x)}$, $x_1 = -5$, $x_2 = -3$.

3. Производная и ее приложения

61–70. Найти производные dy/dx данных функций .

61. а) $y = \dfrac{2\sqrt{4x+3}-3}{\sqrt{x^3+x+1}}$; б) $y = e^{\cos x+3x}$;

в) $y = \ln(\sin(2x+5))$; г) $y = x^{\sqrt{x}}$.

62. а) $y = \sqrt{1-x^2}\cos x$; б) $y = 4\sin x/\cos^2 x$;

в) $y = \operatorname{tg}(e^{2x})$; г) $y = x^{1/x}$.

63. а) $y = x\sqrt{1+x^2}$; б) $y = \operatorname{tg}^2 2x$;

в) $y = \arcsin(\sqrt{1-3x})$; г) $y = x^{\ln x}$.

64. а) $y = 3/\sqrt{3-4x+5x^2}$; б) $y = \sin x - x\cos x$;

в) $y = x^5 \ln x$; г) $y = x^{\operatorname{tg} x}$.

65. а) $y = x/\sqrt{4-x^2}$; б) $y = \sin^2 x/(2+3\cos^2 x)$;
в) $y = x\ln x/(x-1)$; г) $y = (\operatorname{tg} x)^{\ln x}$.
66. а) $y = 5\sqrt[5]{x^3+1} + 1/x$; б) $y = \operatorname{tg}^3(x^2+1)$;
в) $y = 3^{\operatorname{arctg} x}$; г) $y = (arctgx)^x$.
67. а) $y = \sqrt[3]{(1+x^2)/(1-x^2)}$; б) $y = \operatorname{tg}^2 x + \ln\cos x$;
в) $y = \operatorname{arctg}(x/(1+\sqrt{1-x^2}))$; г) $y = (x+x^2)^x$.
68. а) $y = \sqrt{x^5+5x^4-5}$; б) $y = \ln\sqrt{(1-\sin x)/(1+\sin x)}$;
в) $y = \operatorname{arctg}\ln x$; г) $y = (\sin x)^{\ln x}$.
69. а) $y = \sqrt[5]{x^2+x+1/x}$; б) $y = 2^x e^{-x}$;
в) $y = \arcsin x/\sqrt{1-x^2}$; г) $y = (\cos x)^x$.
70. а) $y = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^3+1}$; б) $y = \operatorname{tg}^3 x/3 - \operatorname{tg} x + x$;
в) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{3-x}$; г) $y = x^{\cos x}$.

71-80. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

71. $f(x) = x^3 - 12x + 7$; $[0, 3]$.
72. $f(x) = x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 2$; $[0, 2]$.
73. $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \cos x$; $[0, \pi/2]$.
74. $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 2$; $[-3, 1]$.
75. $f(x) = x^3 - 3x + 1$; $[1/2, 2]$.
76. $f(x) = x^4 + 4x$; $[-2, 2]$.
77. $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \sin x$; $[0, \pi/2]$.
78. $f(x) = 81x - x^4$; $[-1, 4]$.
79. $f(x) = 3 - 2x^2$; $[-1, 3]$.
80. $f(x) = x - \sin x$; $[-\pi, \pi]$.

81 – 90. Исследовать методами дифференциального исчисления функции и, используя результаты исследования, построить ее график.

81. $y = \dfrac{4x}{4+x^2}$. 82. $y = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$. 89. $y = \dfrac{4x^3}{x^3-1}$.
83. $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$. 84. $y = \dfrac{x^2}{x-1}$. 90. $y = \dfrac{2-4x^2}{1-4x^2}$.
85. $y = \dfrac{x^3}{x^2+1}$. 86. $y = \dfrac{4x^3+5}{x}$.
87. $y = \dfrac{x^2+5}{x-3}$. 88. $y = \dfrac{x^4}{x^3-1}$.

4. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

91. Дана функция
$$z = \frac{y}{(x^2 - y^2)^5}.$$
Показать, что
$$1/x\frac{\partial z}{\partial x} + 1/y\frac{\partial z}{\partial y} = z/y^2.$$

92. Дана функция
$$z = y^2/(3x) + \arcsin(xy).$$
Показать, что
$$x^2\frac{\partial z}{\partial x} - xy\frac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0.$$

93. Дана функция
$$z = \ln(x^2 + y^2 + 2x + 1).$$
Показать, что
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

94. Дана функция
$$z = e^{xy}.$$
Показать, что
$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2xyz = 0.$$

95. Дана функция
$$z = \ln(x + e^{-y}).$$
Показать, что
$$\frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y}\,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0.$$

96. Дана функция
$$z = x/y.$$
Показать, что
$$x\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

97. Дана функция
$$z = x^y.$$
Показать, что
$$y\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (1 + y\ln x)\frac{\partial z}{\partial x}.$$
98. Дана функция
$$z = xe^{y/x}.$$
Показать, что
$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$
99. Дана функция
$$z = \sin(x + ay).$$
Показать, что
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$
100. Дана функция
$$z = \cos y + (y - x)\sin y.$$
Показать, что
$$(x - y)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y}.$$
101 – 110. Даны: функция $z = f(x, y)$, точка $A(x_0, y_0)$ и вектор $\mathbf{a}$. 1) Найти $\mathrm{grad}(z)$ в точке A; 2) Производную в точке A по направлению $\mathbf{a}$.

101. $z = x^2 + xy + y^2$; $A(1; 1)$, $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$.

102. $z = 2x^2 + 3xy + y^2$; $A(2; 1)$, $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$.

103. $z = \ln(x^2 + 3y^2)$; $A(1; 1)$, $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$.

104. $z = \ln(5x^2 + 4y^2)$; $A(1; 1)$, $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$.

105. $z = 5x^2 + 6xy$; $A(2; 1)$, $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$.

106. $z = \mathrm{arctg}\,(xy^2)$; $A(2; 3)$, $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$.

107. $z = \arcsin(x^2/y^2)$; $A(1; 2)$, $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} - 12\mathbf{j}$.

108. $z = \ln(3x^2 + 4y^2)$; $A(1; 3)$, $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$.

109. $z = 3x^4 + 2x^2y^3$; $A(-1; 2)$, $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$.

110. $z = 3x^2y^2 + 5y^2x$; $A(1; 1)$, $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$.

5. Неопределенный и определенный интегралы

111 – 120. Найти неопределенные интегралы. В двух первых примерах (п. а и б) проверить результаты дифференцированием.

111. а) $\int e^{\sin^2 x} \sin 2x dx$; б) $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx$;

в) $\int \frac{dx}{x^3+8}$; г) $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$.

112. а) $\int \frac{x dx}{(x^2+4)^6}$; б) $\int e^x \ln(1+3e^x) dx$;

в) $\int \frac{2x^2-3x+1}{x^3+1} dx$; г) $\int \frac{dx}{\sin x + \operatorname{tg} x}$.

113. а) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^8}}$; б) $\int x 3^x dx$;

в) $\int \frac{(3x-7)dx}{x^3+4x^2+4x+16}$; г) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{(x+3)^2}}$.

114. а) $\int \frac{dx}{\cos^2 x(3\operatorname{tg} x+1)}$; б) $\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$;

в) $\int \frac{dx}{x^3+x^2+2x+2}$; г) $\int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}} dx$.

115. а) $\int \frac{\cos 3x dx}{4+\sin 3x}$; б) $\int x^2 e^{3x} dx$;

в) $\int \frac{x^2 dx}{x^3+5x^2+8x+4}$; г) $\int \frac{\cos x dx}{1+\cos x}$.

116. а) $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}$; б) $\int x \arcsin(1/x) dx$;

в) $\int \frac{(x+3)dx}{x^3+x^2-2x}$; г) $\int \frac{(\sqrt[4]{x}+1)dx}{(\sqrt{x}+4)\sqrt[4]{x^3}}$.

117. а) $\int \frac{(x+\operatorname{arctg} x)dx}{1+x^2}$; б) $\int x \ln(x^2+1) dx$;

в) $\int \frac{(x^3-3)dx}{x^4+5x^2+6}$; г) $\int \frac{\sqrt{x+5}dx}{1+\sqrt[3]{x+5}}$.

118. а) $\int \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x} dx}{\sqrt{x}(1+x)}$; б) $\int x \sin x \cos x dx$;

в) $\int \frac{x^2 dx}{x^4-81}$; г) $\int \frac{dx}{3\cos x+4\sin x}$.

119. а) $\displaystyle\int \frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{3+2\cos x}}$; б) $\displaystyle\int x^2\sin 4x dx$;

в) $\displaystyle\int \frac{(x^2-x+1)dx}{x^4+2x^2-3}$; г) $\displaystyle\int \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[6]{+}1)dx}{\sqrt[3]{x^2}}$.

120. а) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{4+\ln x}dx}{x}$; б) $\displaystyle\int x^2\ln^2 x dx$;

в) $\displaystyle\int \frac{(x^3-6)dx}{x^4+6x^2+8}$; г) $\displaystyle\int \frac{dx}{2\sin x+\cos x+2}$.

121 – 130. Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость.

121. $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$. 122. $\displaystyle\int_{-\infty}^{-3}\frac{dx}{(x^2+1)^2}$.

123. $\displaystyle\int_{-1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x+1}$. 124. $\displaystyle\int_0^1\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^3}}$.

125. $\displaystyle\int_1^2\frac{dx}{(x-1)^2}$. 126. $\displaystyle\int_{-3}^2\frac{dx}{(x+3)^2}$.

127. $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}$. 128. $\displaystyle\int_0^3\frac{dx}{(x-2)^2}$.

129. $\displaystyle\int_0^4\frac{dx}{(x-3)^2}$. 130. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+5}$.

131. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y=3x^2+1$ и прямой $y=3x+7$.

132. Вычислить площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(0\le t\le 2\pi)$ и осью Ox.

133. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $r=3(1+\cos\varphi)$.

134. Вычислить площадь фигуры, ограниченной четырехлепестковой розой $r=4\sin 2\varphi$.

135. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной параболами $y=x^2$ и $y=\sqrt{x}$.

136. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной полуэллипсом $y=3\sqrt{1-x^2}$, параболой $y=\sqrt{1-x}$ и осью Oy.

137. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной кривыми $y=2/(1+x^2)$ и $y=x^2$.

138. Вычислить длину дуги полукубической параболы $y = \sqrt{(x-2)^3}$ от точки $A(2;0)$ до точки $B(6;8)$.

139. Вычислить длину кардиоиды $r = 3(1-\cos\varphi)$.

140. Вычислить длину одной арки циклоиды $x = 3(t-\sin t)$, $y = 3(1-\cos t)$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$.

Таблицы контрольных заданий

В первом семестре студенты выполняют контрольную работу № 1 .

Во втором семестре студенты выполняют контрольную работу № 2.

Вариант	Контрольная работа № 1					
1	11	21	31	41	51	61
2	12	22	32	42	52	62
3	13	23	33	43	53	63
4	14	24	34	44	54	64
5	15	25	35	45	55	65
6	16	26	36	46	56	66
7	17	27	37	47	57	67
8	18	28	38	48	58	68
9	19	29	39	49	59	69
10	20	30	40	50	60	70

Вариант	Контрольная работа № 2						
1	71	81	91	101	111	121	131
2	72	82	92	102	112	122	132
3	73	83	93	103	113	123	133
4	74	84	94	104	114	124	134
5	75	85	95	105	115	125	135
6	76	86	96	106	116	126	136
7	77	87	97	107	117	127	137
8	78	88	98	108	118	128	138
9	79	89	99	109	119	129	139
10	80	90	100	110	120	130	140

Правила оформления контрольных работ

При выполнении контрольных работ надо строго придерживаться указанных ниже правил. Работы, выполненные без соблюдения этих правил не зачитываются и возвращаются студенту для переработки.

1. Каждая контрольная работа выполняется в отдельной тетради чернилами любого цвета, кроме красного. В работе следует оставлять поля для замечаний рецензента.

2. На обложке тетради должны быть ясно написаны фамилия студента, его инициалы, учебный номер (шифр), номер контрольной работы, название дисциплины; здесь же следует указать дату отсылки работы в институт и почтовый адрес студента. В конце работы следует поставить дату ее выполнения и расписаться.

3. В работу должны быть включены все задачи, указанные в задании, в соответствии с положенным вариантом. Контрольные работы, содержащие не все задания, а также задания не своего варианта, не зачитываются.

4. Решения задач надо располагать в порядке номеров, указанных в заданиях, сохраняя номера задач.

5. Перед решением каждой задачи надо выписать полностью ее условие.

6. Решения задач следует излагать подробно и аккуратно, объясняя все действия по ходу решения и делая необходимые чертежи.

7. После получения прорецензированной работы студент должен исправить в ней все отмеченные рецензентом ошибки.

8. К сдаче зачета или экзамена допускаются только те студенты, у которых зачтены контрольные работы.

Список основных теоретических вопросов, изучаемых в первом семестре

1. Определители второго порядка. Формула вычисления определителя третьего порядка путем разложения по первой строке.
2. Расстояние между двумя точками на плоскости. Координаты середины отрезка.
3. Уравнение прямой: общее и с угловым коэффициентом.

4. Уравнение прямой, проходящей через заданную точку, с заданным угловым коэффициентом; уравнение прямой, проходящей через две заданные точки.
5. Условия параллельности и перпендикулярности прямых.
6. Окружность. Каноническое уравнение, изображение.
7. Эллипс. Каноническое уравнение, изображение.
8. Векторы. Определение, равенство, операции над векторами.
9. Векторы i, j, k. Координаты вектора, действия над векторами в координатной форме, условие коллинеарности.
10. Скалярное произведение: определение, выражение через координаты, условия перпендикулярности.
11. Векторное произведение: определение, выражение через координаты.
12. Общее уравнение плоскости, геометрический смысл коэффициентов.
13. Канонические уравнения прямой в пространстве. Геометрический смысл коэффициентов.
14. Предел числовой последовательности.
15. Определение предела функции.
16. Первый и второй замечательные пределы.
17. Определение непрерывной функции. Примеры разрывных функций.
18. Определение производной. Её геометрический и физический смысл.
19. Правила дифференцирования.
20. Таблица производных. Примеры.
21. Производная сложной функции. Примеры.

Список основных теоретических вопросов, изучаемых во втором семестре

1. Возрастание и убывание функции.
2. Экстремум функции одной переменной, необходимое условие экстремума.
3. Достаточное условие экстремума функции одной переменной.
4. Функции двух переменных. Частные приращения. Частные производные.
5. Частные производные второго порядка, теорема о равенстве смешанных

производных.
6. Экстремумы функции двух переменных. Необходимое условие экстремума функции двух переменных.
7. Градиент функции.
8. Первообразная: определение, свойства.
9. Неопределённый интеграл: определение, свойства.
10. Таблица неопределённых интегралов.
11. Замена переменной в неопределённом интеграле.
12. Интегрирование по частям в неопределённом интеграле.
13. Определённый интеграл: определение, геометрический смысл.
14. Свойства определённого интеграла. Формула Ньютона-Лейбница.
15. Интегрирование по частям в определённом интеграле.
16. Замена переменной в определённом интеграле.
17. Площадь плоской фигуры.

НЕОБХОДИМЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ФОРМУЛЫ И ВЫРАЖЕНИЯ.

В этом разделе в виде краткого справочника приведены теоретические материалы, необходимые для решения контрольных работ за первый семестр.

Определителем второго порядка называют число, вычисляемое по следующему правилу:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \quad . \tag{1}$$

Определителем третьего порядка называют число, вычисляемое по следующему правилу:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \tag{2}$$

Это же выражение называется «разложением определителя третьего порядка по первой строке».

Длина отрезка AB :

$$d = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2 + \left(z_B - z_A\right)^2}\ , \tag{3}$$

где x_A, y_A, z_A - координаты точки A , а x_B, y_B, z_B - координаты точки B соответственно.

Общее уравнение прямой на плоскости:

$$ax + by + c = 0\ . \tag{4}$$

Уравнение прямой с угловым коэффициентом:

$$y = kx + b\ . \tag{5}$$

Здесь k - *угловой коэффициент*, равный тангенсу угла наклона прямой к оси x :

$$k = tg\alpha\ ,$$

а параметр b равен отрезку, отсекаемому прямой на оси y .

Условия параллельности и перпендикулярности прямых:

Если прямая l_1 параллельна прямой l_2 , то их угловые коэффициенты равны:

$$k_1 = k_2\ . \tag{6}$$

Если прямая l_1 перпендикулярна прямой l_2 , то их угловые коэффициенты связаны соотношением:

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}\ . \tag{7}$$

Уравнение прямой A_1A_2, проходящей через две заданные точки $A_1(x_1, y_1)$ и $A_2(x_2, y_2)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \quad . \tag{8}$$

Уравнение прямой A_1A_2, проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0)$ с данным угловым коэффициентом k:

$$y-y_0=k(x-x_0) \quad . \tag{9}$$

Вектор – это направленный отрезок прямой, обозначается $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$.

Длиной или *модулем* вектора $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ называется длина отрезка AB и обозначается $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\vec{a}\right|=d$.

Координатами вектора $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ называется тройка чисел:

$$\begin{aligned} a_x &= x_B - x_A \\ a_y &= y_B - y_A \\ a_z &= z_B - z_A \quad , \end{aligned} \tag{10}$$

и вектор через координаты обозначается:

$$\vec{a}=(a_x, a_y, a_z).$$

Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\alpha \quad ,$$

где α - угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Через координаты вектора скалярное произведение находится по формуле:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z \quad , \tag{11}$$

где $\left(a_x, a_y, a_z\right)$ - координаты вектора $\vec{a}$, $\left(b_x, b_y, b_z\right)$ - координаты вектора $\vec{b}$.

Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ находится по формуле:

$$\cos\alpha=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} \quad . \tag{12}$$

Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется новый вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий трем условиям:

1) $|\vec{c}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\alpha$;
2) вектор $\vec{c}$ перпендикулярен плоскости, в которой расположены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
3) направление вектора $\vec{c}$ выбрано так, что наблюдатель, глядя с конца вектора $\vec{c}$ на плоскость, в которой расположены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, видит кратчайший поворот от первого сомножителя ко второму против часовой стрелки.

Векторное произведение вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ обозначают: $\vec{a}\times\vec{b}$ и вычисляют по формуле:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix} \quad , \tag{13}$$

где a_x, a_y, a_z - координаты вектора $\vec{a}$, b_x, b_y, b_z - координаты вектора $\vec{b}$.

Смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} . \tag{14}$$

Общее уравнение плоскости в пространстве:

$$Ax + By + Cz + D = 0 . \tag{15}$$

Вектор $\vec{n} = (A, B, C)$ называется *нормальным вектором плоскости* или *нормалью к плоскости*.

Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 , \tag{16}$$

где x_1, y_1, z_1 - координаты точки A_1,

x_2, y_2, z_2 - координаты точки A_2,

x_3, y_3, z_3 - координаты точки A_3.

Каноническое уравнение прямой в пространстве:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} . \tag{17}$$

Здесь $M_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$ - точка, лежащая на нашей прямой, $M\left(x, y, z\right)$ - произвольная точка на этой же прямой, $\vec{S} = \left(m, n, p\right)$ - *направляющий вектор прямой*.

Уравнение прямой в пространстве, проходящей через две точки $A_1(x_1, y_1, z_1)$ и $A_2(x_2, y_2, z_2)$, находится по формуле:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \tag{18}$$

Угол между прямой и плоскостью находится по формуле:

$$\sin\varphi = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}, \tag{19}$$

где A, B, C - координаты нормали к плоскости, а m, n, p - координаты направляющего вектора прямой.

Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_3}$, находится по формуле:

$$S_n = \left|A_1A_2 \times A_1A_3\right| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}. \tag{20}$$

Объём параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ ищем по формуле:

$$V_{пар} = \pm\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{21}$$

Знак берётся так, чтобы объём V был положительным.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данной плоскости, ищется по формуле:

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C}, \tag{22}$$

где $M_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$ - точка, через которую проходит прямая, а A, B, C координаты нормального вектора плоскости.

Кривые второго порядка.

Алгебраическое уравнение второй степени в общем виде:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

Возможны лишь следующие случаи:

Уравнение не определяет ни одной точки на плоскости. Например:

$$x^2 + y^2 + 1 = 0.$$

Уравнение может определять одну точку на плоскости. Например, уравнение

$$\left(x-1\right)^2 + \left(y-2\right)^2 = 0$$

определяет единственную точку (1, 2).

Уравнение может определять две прямые. Например, уравнение

$$\left(y-2x+1\right)\left(y-2x+2\right)=0$$

определяет две параллельные прямые: $y-2x+1=0$; $y-2x+2=0$.

Уравнение может определять окружность:

$$\left(x-1\right)^2 + \left(y-2\right)^2 = 5^2.$$

Кроме того, уравнение может определять одну из кривых: эллипс, гиперболу или параболу, смещенную относительно начала координат и повернутую на некоторый угол.

Каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{23}$$

Каноническое уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{24}$$

Каноническое уравнение параболы:

$$y^2 = 2px. \tag{25}$$

Определение 1. Число A называется *пределом функции* $y = f(x)$ при x, стремящемся к a, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, будет выполняться неравенство:

$$0 < |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Тот факт, что число A является пределом функции $y = f(x)$ при x, стремящемся к a, записывается следующим образом:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

Определение 2. Число A_1 называется *пределом функции* $y = f(x)$ *слева* при x, стремящемся к a, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $x \in (a - \delta, a)$ будет выполняться неравенство:

$$0 < |f(x) - A_1| < \varepsilon \quad .$$

Тот факт, что число A_1 является пределом функции $y = f(x)$ слева при x, стремящемся к a, записывается следующим образом:

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = A_1.$$

Определение 3. Число A_2 называется *пределом функции* $y = f(x)$ *справа* при x, стремящемся к a, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $x \in (a, a + \delta)$, будет выполняться неравенство:

$$0 < \left| f\left(x\right) - A_1 \right| < \varepsilon .$$

Тот факт, что число A_2 является пределом функции $y = f\left(x\right)$ слева при x, стремящемся к a, записывается следующим образом:

$$\lim_{x \to a+0} f\left(x\right) = A_2 .$$

Первый замечательный предел:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{26}$$

Второй замечательный предел:

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e . \tag{27}$$

Приведём ещё два важных предела, которые понадобятся при решении примеров:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{A}{x} = 0 , \tag{28}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{A}{\varepsilon} = \infty . \tag{29}$$

Здесь A - любое число.

Определение 4. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* $x = a$, если существует конечный предел функции в этой точке и он равен значению функции в этой точке:

$$\lim_{x \to a} f\left(x\right) = A = f\left(a\right).$$

Если предел не существует, или не равен значению функции в данной точке, или равен бесконечности (хотя бы один из пределов слева или справа), то функция в этой точке имеет *разрыв.*

Определение 5. Точка разрыва называется *точкой разрыва первого рода*, если существуют конечные пределы слева и справа.

Определение 6. Точка разрыва называется *точкой разрыва второго рода*, если хотя бы один из односторнних пределов (слева или справа) не существует или равен бесконечности.

Сложная производная вычисляется по формуле:

$$f'_x\left(u(x)\right) = f'_u(u)\cdot u'_x. \tag{30}$$

Теорема 1. Если дифференцируемая на интервале (a,b) функция $y = f(x)$ возрастает (убывает), то $f'(x) \geq 0$ $\left(f'(x) \leq 0\right)$.

Верно и обратное: если $f'(x) \geq 0$ $\left(f'(x) \leq 0\right)$ то функция $y = f(x)$ возрастает (убывает).

Теорема 2. Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке x_0, то её производная в этой точке равна нулю:

$$f'(x_0) = 0.$$

Теорема 3. Если непрерывная функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0 и при переходе через неё (слева направо) производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус, то точка x_0 есть точка максимума, с минуса на плюс – точка минимума.

Теорема 4. Если в точке x_0 первая производная функции $y = f(x)$ равна нулю: $f'(x_0) = 0$, а вторая производная в точке x_0 существует и отлична от нуля, то при $f''(x_0) < 0$ в точке x_0 функция

$y = f(x)$ имеет максимум, а при $f''(x_0) > 0$ в точке x_0 функция $y = f(x)$ имеет минимум.

Другими словами, если $f''(x_0) < 0$, то функция вогнута; если $f''(x_0) > 0$, то функция выпукла.

Определение 7. Число M называется наибольшим значением функции $y = f(x)$ на отрезке $[a,b]$, если для всех $x \in [a,b]$ выполняется неравенство $f(x) \le M$.

Аналогично, число N называется наименьшим значением функции $y = f(x)$ на отрезке $[a,b]$, если для всех $x \in [a,b]$ выполняется неравенство $f(x) \ge N$

Наибольшее и наименьшее значения функции достигаются в точках экстремума или на концах промежутка.

Определение 8. Асимптотой кривой называется прямая, расстояние до которой от точки, лежащей на кривой, стремится к нулю при неограниченном удалении от начала координат этой точки по кривой.

Если $x = \varphi(t), \quad dx = \varphi'(t)\,dt$, то имеем формулу *интегрирования подстановкой для неопределённого интеграла* :

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt . \qquad (31)$$

Универсальная тригонометрическая подстановка:

$$tg\frac{x}{2} = t, \quad dx = \frac{2}{1+t^2}dt,$$
$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} . \qquad (32)$$

Определение 9. Функция $F\left(x\right)$ называется первообразной к $y=f\left(x\right)$, если $F'\left(x\right)=f\left(x\right)$.

Теорема 5 (Формула Ньютона – Лейбница). Если функция $y=f\left(x\right)$ непрерывна на отрезке $\left[a,b\right]$ и $F\left(x\right)$ - какая-либо её первообразная на $\left[a,b\right]$ то имеет место формула:

$$\int_a^b f\left(x\right)dx=F\left(b\right)-F\left(a\right)$$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №1

Примеры №№ 11-20

Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$: $A_1\left(1,2,-3\right)$, $A_2\left(2,-1,3\right)$, $A_3\left(1,4,0\right)$, $A_4\left(-1,5,8\right)$.

1. Длину ребра A_1A_2 находим, используя формулу (3), как расстояние между двумя точками:

$$\left|A_1A_2\right|=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2+\left(z_2-z_1\right)^2}.$$

Так как $A_1\left(1,2,-3\right)$ $A_2\left(2,-1,3\right)$, то

$$\left|A_1A_2\right|=\sqrt{\left(2-1\right)^2+\left(-1-2\right)^2+\left(3-\left(-3\right)\right)^2}=\sqrt{1+9+36}=\sqrt{46}\ \left(ед\right).$$

2. Найдём угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4.

Сначала вычисляем координаты векторов по формуле (10):

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \left(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\right) = \left(1,-3,6\right);$$

$$\overrightarrow{A_1A_4} = \left(x_4 - x_1, y_4 - y_1, z_4 - z_1\right) = \left(-2,3,11\right) \quad ,$$

а затем их скалярное произведение, используя формулу (11):

$$\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_4} = 1\cdot\left(-2\right) + \left(-3\right)\cdot 3 + 6\cdot 11 = 55.$$

Длина ребра A_1A_2 вычислена в п.1 $\left|A_1A_2\right| = \sqrt{46} \approx 6,8\left(ед\right)$.

Вычислим длину ребра A_1A_4 аналогично.

$$\left|A_1A_4\right| = \sqrt{\left(-1-1\right)^2 + \left(5-2\right)^2 + \left(8+3\right)^2} = \sqrt{4+9+121} = \sqrt{134} \approx 11,6\left(ед\right).$$

Длина ребра A_1A_2 совпадает с длиной вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$, а длина ребра A_1A_4 совпадает с длиной вектора $\overrightarrow{A_1A_4}$. Подставим полученные данные в формулу (12):

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_4}}{\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right| \cdot \left|\overrightarrow{A_1A_4}\right|} = \frac{55}{\sqrt{46}\sqrt{134}} \approx 0,7.$$

Окончательно получаем:

$$\alpha = arccos\left(0,7\right) \approx 0,7954.$$

3. Угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$. Для начала запишем уравнение прямой A_1A_4 , используя формулу (17). Направляющим вектором может быть вектор, соединяющий две точки на прямой, например, $\overrightarrow{A_1A_4}$. Из пункта 2 возьмем координаты этого вектора:

$$\overrightarrow{A_1A_4} = \left(-2,3,11\right) \; .$$

Таким образом, $m = -2, n = 3, \; p = 11$.

Окончательно уравнение прямой A_1A_4 имеет вид:

$$\frac{x-1}{-2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+3}{11}.$$

Составим уравнение плоскости $A_1A_2A_3$, пользуясь формулой (16).

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+3 \\ 1 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}=\left(x-1\right)\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}-\left(y-2\right)\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}+\left(z+3\right)\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=$$

$$=\left(x-1\right)\left(-9-12\right)-\left(y-2\right)\left(3-0\right)+\left(z+3\right)\left(2-0\right)=$$

$$-17x-3y+2z+29=0$$

Угол между прямой и плоскостью определяется по формуле (19): Подставляя в неё наши данные, получаем:

$$\sin\varphi=\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}=$$

$$=\frac{\left(-17\right)\cdot\left(-2\right)+\left(-3\right)\cdot 3+2\cdot 11}{\sqrt{\left(-17\right)^2+\left(-3\right)^2+2^2}\cdot\sqrt{\left(-2\right)^2+3^2+11^2}}\approx 0,23.$$

Таким образом,

$$\varphi=\arcsin(0,23)\approx 0,232.$$

4. Площадь грани $A_1A_2A_3$ - $S_{A_1A_2A_3}$ - это площадь треугольника, построенного на векторах $\overrightarrow{A_1A_2}$; и $\overrightarrow{A_1A_3}$. Площадь треугольника равна половине площади параллелограмма, построенного на этих же векторах:

$$S_{A_1A_2A_3}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}\right|.$$

Для вычисления площади найдем:

1) координаты векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_3}$ (см. п.2) :

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \left(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\right) = \left(1, -3, 6\right),$$

$$\overrightarrow{A_1A_3} = \left(x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1\right) = \left(0, 2, 3\right).$$

2) векторное произведение $\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}$, пользуясь формулой (13) :

$$\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -3 & 9 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -27\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}\ .$$

3) длину векторного произведения $\left|\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}\right|$ по формуле (3) :

$$\left|\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}\right| = \sqrt{\left(-27\right)^2 + \left(-3\right)^2 + 2^2} = \sqrt{742}\ .$$

Тогда площадь грани

$$S_{A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{742} \approx 8,7\left(ед^2\right).$$

5. Объем пирамиды $A_1A_2A_3A_4$ равен 1/6 объема параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$. Находим координаты векторов по формуле (10):

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \left(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\right) = \left(1, -3, 6\right);$$

$$\overrightarrow{A_1A_3} = \left(x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1\right) = \left(0, 2, 3\right);$$

$$\overrightarrow{A_1A_4} = \left(x_4 - x_1, y_4 - y_1, z_4 - z_1\right) = \left(-2, 3, 11\right).$$

Объем параллелепипеда, построенного на векторах, равен смешанному произведению этих векторов (формула (14)):

$$\overrightarrow{A_1A_2}\,\overrightarrow{A_1A_3}\,\overrightarrow{A_1A_4} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 11 \end{vmatrix} = 55\left(ед^3\right).$$

Окончательно объем пирамиды

$$V_{пир} = \frac{1}{6}\overrightarrow{A_1A_2}\,\overrightarrow{A_1A_3}\,\overrightarrow{A_1A_4} = \frac{55}{6}\left(ед^3\right) \approx 9{,}17\left(ед^3\right).$$

6. Уравнение прямой A_1A_2 ищут по формуле (18)

$$\frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{p}.$$

где $\left(x_1, y_1, z_1\right)$ – координаты точки, через которую проходит прямая.

В нашем примере это точка $A_1\left(1,2,-3\right)$; $S=\left(m,n,p\right)$ – координаты направляющего вектора прямой.

У нас прямая проходит через две точки, тогда

$$m = x_2 - x_1 = 2-1 = 1,$$

$$n = y_2 - y_1 = -1-2 = -3,$$

$$p = z_2 - z_1 = 3-\left(-3\right) = 6.$$

Итак, получим уравнение прямой A_1A_2 :

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+3}{6}.$$

7. Уравнение плоскости $A_1A_2A_3$ было найдено в п.3:

$$-17x - 3y + 2z + 29 = 0.$$

8. Уравнение высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$. Это фактически задача о нахождении уравнения прямой , проходящей через заданную точку (вершина A_4) перпендикулярно заданной плоскости (плоскость $A_1A_2A_3$) . Воспользуемся формулой (22):

$$\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{C}.$$

Подставляем координаты точки $A_4(-1,5,8)$ и координаты нормали плоскости $A_1A_2A_3$ $\vec{n}=(-17,-3,2)$, получаем уравнение высоты:

$$\frac{x+1}{-17}=\frac{y-5}{-3}=\frac{z-8}{2}.$$

9. Чертёж. Вспоминаем косоугольную проекцию (школьный курс) и рисуем как получится.

Примеры №№ 21-30

Рассмотрим один из вариантов задачи.

Даны вершины $A(2,3)$, $B(9,4)$, $C(6,8)$ трапеции $ABCD$, причём $AD\parallel BC$. Известно, что диагонали трапеции взаимно перпендикулярны. Найти координаты вершины D этой трапеции.

Эта задача на тему «прямая на плоскости». Уравнение прямой BC ищут, используя формулу (8):

$$\frac{x-9}{6-9}=\frac{y-4}{8-4}.$$

Преобразуем уравнение к общему виду прямой на плоскости (см. формулу (4)):

$$4x+3y-48=0.$$

Уравнение стороны AD пишется как уравнение прямой, проходящей через точку A параллельно стороне BC. Нам потребуется угловой коэффициент прямой BC. Проведём преобразования:

$$4x+3y-48=0,$$

$$3y=-4x+48,$$

$$y=\frac{-4x+48}{3},$$

$$y=-\frac{4}{3}x+\frac{48}{3}.$$

Посмотрев на формулу (5), получаем, что угловой коэффициент прямой BC $k_{BC}=-\dfrac{4}{3}$. По условию параллельности сторон (формула (6)):

$$k_{AD}=k_{BC}=-\frac{4}{3}.$$

Далее, пользуясь формулой (9), получаем:

$$y-3=-\frac{4}{3}(x-2).$$

Снова приводим к виду (4):

$$y-3+\frac{4}{3}x-\frac{8}{3}=0,$$

упрощаем выражение, получаем ответ:

$$4x+3y-17=0.$$

Примеры №№ 31-40

Это задание на тему «Кривые второго порядка». Как делается , разберем на окружности. Дано: составить уравнение линии, каждая точка которой удалена от точки $A(5,1)$ ровно на 6 единиц. Обозначим точку нашей кривой $M(x,y)$. Расстояние между двумя точками - это формула (3), записанная для плоскости:

$$d=\sqrt{\left(x_M-x_A\right)^2+\left(y_M-y_A\right)^2}\ .$$

Подставляем данные:

$$\sqrt{(x-5)^2+(y-1)^2}=6\,,$$

возводим в квадрат:

$$(x-5)^2+(y-1)^2=6^2\ .$$

У нас сразу получается каноническое уравнение окружности. В менее простой задаче надо провести ряд алгебраических преобразований и получить одно из уравнений: эллипса (формула (23)), гиперболы (формула (24)), параболы (формула (25)).

Примеры №№ 41-50

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+7x+2}{9x^2+3x+4}$

Прямая подстановка даёт неопределённость типа $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Находим старшую степень переменной x и выносим соответствующее слогаемое за скобки:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+7x+2}{9x^2+3x+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1+\dfrac{7}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(9+\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{7}{x}+\dfrac{2}{x^2}}{9+\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{x^2}}\,.$$

В последнем действии сократились x^2. Кроме того, слагаемые вида $\frac{A}{x}$ при $x \to \infty$ стремятся к нулю (формула (28)). То же верно и для $\frac{A}{x^2}$. Переходя к пределу, получаем:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{7}{x}+\frac{2}{x^2}}{9+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}=\frac{1}{9}.$$

б) $$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-6x+9}{x-3}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

При непосредственной подстановке получаем неопределённость вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Находим в числителе корни квадратного уравнения $x_1=x_2=3$, раскладываем числитель на множители, получаем:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-6x+9}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)^2}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x-3)=0.$$

Ещё один вариант из этого пункта б):

$$\lim_{x\to 2}\frac{2-\sqrt{8-x^2}}{x-2}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

Опять неопределённость вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Домножаем и числитель, и знаменатель на выражение, сопряжённое выражению с корнем, в нашем случае на $2+\sqrt{8-x^2}$. Получаем:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2-\sqrt{8-x^2}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(2-\sqrt{8-x^2}\right)\left(2+\sqrt{8-x^2}\right)}{\left(2+\sqrt{8-x^2}\right)(x-2)}\lim_{x\to 2}\frac{4-8+x^2}{\left(2+\sqrt{8-x^2}\right)(x-2)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{\left(2+\sqrt{8-x^2}\right)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{\left(2+\sqrt{8-x^2}\right)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)}{\left(2+\sqrt{8-x^2}\right)}\quad .$$

Переходим к пределу при $x\to 2$:

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)}{\left(2+\sqrt{8-x^2}\right)}=\frac{2+2}{2+\sqrt{8-2^2}}=\frac{4}{4}=1\quad .$$

в) Задание на первый замечательный предел (формула (26)) и тригонометрические формулы из программы средней школы. В качестве примера рассмотрим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}\cos x=\lim_{x\to 0}\frac{5\sin 5x}{5x}\lim_{x\to 0}\cos x=$$

$$\lim_{x\to 0}5\left(\frac{\sin 5x}{5x}\right)\lim_{x\to 0}\cos x=5\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 5x}{5x}\right)\lim_{x\to 0}\cos x.$$

Первый предел равен единице по формуле (26), второй - тоже единице (прямая подстановка), окончательно предел равен $5\cdot 1\cdot 1=5.$

г) Это задание на второй замечательный предел (формула (27)) и алгебраические преобразования из курса средней школы. Рассмотрим :

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x-1}\right)^x\quad .$$

Обозначим $x-1=y$, тогда $x+5=y+6$, $x=y+1$. Подставляем:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x-1}\right)^{x}=\lim_{y\to\infty}\left(\frac{y+6}{y}\right)^{y+1}=\lim_{y\to\infty}\left(\frac{y}{y}+\frac{6}{y}\right)^{y+1}=$$

$$=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{6}{y}\right)^{y+1}=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{6}{y}\right)^{y}\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{6}{y}\right)^{1}.$$

Для получения последнего равенства использовали формулу $a^{m+n}=a^m a^n$ и свойства пределов. Далее :

$$\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{6}{y}\right)^{y}\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{6}{y}\right)^{1}=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{6}{y}\right)^{\frac{y}{6}6}\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{6}{y}\right)^{1}=$$

$$=\left(\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{6}{y}\right)^{\frac{y}{6}}\right)^{6}\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{6}{y}\right)^{1}.$$

Предел в первой скобке равен e по формуле (27), второй предел равен единице (прямая проверка), и окончательно предел равен e^6 .

Примеры №№51-60

Задана функция $f(x)=5^{\frac{1}{x+2}}$ и два её аргумента $x_1=+1$, $x_2=-2$. Требуется :

1. Установить, является ли данная функция непрерывной или разрывной для каждого из данных значений аргумента.

2. В случае разрыва функции найти её пределы в точках разрыва слева и справа.
3. Сделать схематический чертёж.

Рассмотрим решение задачи. Подставляем в функцию значение аргумента $x_1 = +1$:

$$f(1) = 5^{\frac{1}{1+2}} = 5^{\frac{1}{3}} \ .$$

Найдём предел функции в этой точке :

$$\lim_{x \to 1} 5^{\frac{1}{1+2}} = 5^{\frac{1}{3}} \ .$$

Предел функции существует и равен значению функции в этой точке. Значит в данном случае разрыва нет (см. определение 4) Подставляя в функцию значение аргумента $x_2 = -2$ в степени получаем деление на ноль. В этой точке функция не существует. Найдём односторонние пределы (см. определения 2 и 3, а также формулы (28) и (29)) :

$$\lim_{x \to -2-0} 5^{\frac{1}{-2-0+2}} = 5^{\frac{1}{-0}} = 5^{-\infty} = 0,$$

$$\lim_{x \to -2+0} 5^{\frac{1}{-2+0+2}} = 5^{\frac{1}{0}} = 5^{\infty} = \infty.$$

Следовательно, в точке $x_2 = -2$ имеется разрыв, и это разрыв второго рода (см. определение 6).

Что касается чертежа, то это материал средней школы и здесь не рассматривается.

Примеры №№ 61-70

Найти производные данных функций. Таблица производных и правила дифференцирования общедоступны и входят в школьный курс, так что здесь не приводятся.

Первые три примера на дифференцирование сложной функции (см. формулу (30)) рассмотрены схематично.

а) $y=\dfrac{x^2}{(2x-3)^5}$, найти y' .

$$y'=\left(\frac{x^2}{(2x-3)^5}\right)'=\frac{\left(x^2\right)'\cdot(2x-3)^5-x^2\cdot\left((2x-3)^5\right)'}{\left((2x-3)^5\right)^2}=$$

$$=\frac{2x\cdot(2x-3)^5-x^2\cdot 5(2x-3)^4\cdot 2}{(2x-3)^{10}}.$$

б) $y=\dfrac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}$, найти y' .

$$y'=\left(\frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}\right)'=\frac{\left(\sin^3 x\right)'\cdot\left(1+\cos^2 x\right)-\sin^3 x\cdot\left(1+\cos^2 x\right)'}{\left(1+\cos^2 x\right)^2}=$$

$$=\frac{3\sin^2 x(\cos x)\cdot\left(1+\cos^2 x\right)-\sin^3 x\cdot(0+2\cos x\sin x)}{\left(1+\cos^2 x\right)^2}.$$

в) $y=\ln x\cdot\dfrac{x-2}{x}$, найти y' .

$$y' = \left(\ln x \cdot \frac{x-2}{x} \right)' = (\ln x)' \cdot \frac{x-2}{x} + \ln x \cdot \left(\frac{x-2}{x} \right)' =$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \frac{x-2}{x} + \ln x \cdot \frac{1 \cdot x - (x-2) \cdot 1}{x^2}.$$

г) Рассмотрим последний пример.

Дано $y = (\sin x)^{tgx}$, найти y'. Для начала прологарифмируем исходную функцию по основанию e:

$$\ln y = \ln (\sin x)^{tgx} = tgx \cdot \ln(\sin x).$$

Теперь вычислим производную от неявной функции (теорию – самостоятельно):

$$(\ln y)' = \frac{1}{y} \cdot y' = (tgx)' \cdot \ln(\sin x) + tgx \cdot (\ln(\sin x))' =$$

$$= \frac{1}{\cos x} \cdot \ln(\sin x) + tgx \cdot \frac{1}{\sin x} (\sin x)' =$$

$$= \frac{1}{\cos x} \cdot \ln(\sin x) + tgx \cdot \frac{1}{\sin x} \cos x.$$

Находим y':

$$y' = \left(\frac{1}{\cos x} \cdot \ln(\sin x) + tgx \cdot \frac{1}{\sin x} \cos x \right) \cdot y.$$

И окончательно, вместо y ставим его значение из условия задачи:

$$y' = \left(\frac{1}{\cos x} \cdot \ln(\sin x) + tgx \cdot \frac{1}{\sin x} \cos x \right) \cdot (\sin x)^{tgx}.$$

Это ответ.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

Примеры №№ 71-80

Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = x^2 - 10x$ на отрезке $[1, 6]$.

Нам понадобятся теоремы 1-4 и определение 7. Находим производную от функции

$$y' = \left(x^2 - 10x\right)' = 2x - 10 .$$

Приравниваем её к нулю (теорема 2)

$$y' = 2x - 10 = 0 .$$

Получаем корень $x = 5$. Находим значение функции в этой точке и на концах интервала (определение 7)

$$y_1 = 1^2 - 10 \cdot 1 = 1 - 10 = -9$$

$$y_2 = 5^2 - 10 \cdot 5 = 25 - 50 = -25$$

$$y_3 = 6^2 - 10 \cdot 6 = 36 - 60 = -24$$

Таким образом, наибольшее значение достигается на левой границе интервала $x = 1, \quad y_1 = -9$, наименьшее - в точке экстремума $x = 5, \quad y_2 = -25$.

Примеры №№ 81-90

Исследование функции $y = f\left(x\right)$. Понадобятся теоремы 1-4.

План работы:

1. Находим область допустимых значений. Другими словами, это те x, на которых задана наша функция. Например, для $y = \ln x$ это промежуток

$x \in (0, \infty)$, а функция $y = \dfrac{1}{x-2}$ в точке $x = 2$ не существует, то есть $x \in (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$.

2. Находим область определения функции, то есть промежуток задания переменной y . Например , для функции $y = e^x$ это интервал $y \in (0, +\infty)$.

3. Вычисляем производную от $y = f(x)$, затем приравниваем её к нулю (теорема 2):

$$y' = f'(x) = 0.$$

Получаем корни производной.

Напомним, что корни функции – это те значения x , при которых функция пересекает ось ox . В этих точках функция меняет знак. Корней может быть несколько (у вас - не более трёх) или не быть вообще.

4. Находим интервалы возрастания и убывания функции (теорема 1).

5. Вычисляем вторую производную, приравниваем к нулю, находим корни.

6. Находим промежутки выпуклости и вогнутости функции (теорема 4).

7. Находим асимптоты(определение 8) по формулам:

$$y = kx + b;$$

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x};$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - kx \right).$$

Заметим, что при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$ могут быть разные пределы. Вы с этим сталкивались в предыдущей контрольной. Таким образом, асимптот может быть несколько.

8. Смотрим п.1. Если есть точки разрыва (точки, где функция не существует), то надо найти пределы слева и справа в этой точке (определения 2 и 3).

9. Собираем всё вместе и строим график.

Примеры №№91-100

Нахождение частных производных первого и второго порядка.

Дана функция $z=\ln\left(y+x^2\right)$, показать, что

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}-2\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{4y}{\left(y+x^2\right)^3}.$$

В задаче дана функция от двух переменных x и y. Соответственно имеются две производные . Они называются частными производными от переменных x и y соответственно и обозначаются :

$$\frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial y}.$$

При нахождении частной производной по x надо помнить, что в этом случае переменная y считается постоянной. Итак,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\ln\left(y+x^2\right)\right)=\frac{1}{y+x^2}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(y+x^2\right)=\frac{2x}{y+x^2}.$$

Аналогично, разыскивая производную по переменной y, переменную x считаем постоянной.

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\ln\left(y+x^2\right)\right)=\frac{1}{y+x^2}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(y+x^2\right)=\frac{1}{y+x^2}.$$

Производных второго порядка у нас уже четыре.

Производная второго порядка от функции z по переменной x :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2x}{y+x^2}\right)=\frac{(2x)'\cdot\left(y+x^2\right)-(2x)\cdot\left(y+x^2\right)'}{\left(y+x^2\right)^2}=$$

$$=\frac{2\cdot\left(y+x^2\right)-(2x)\cdot(2x)}{\left(y+x^2\right)^2}=\frac{2y-2x^2}{\left(y+x^2\right)^2}\quad.$$

Смешанная производная второго порядка по переменным yx :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2x}{y+x^2}\right)=2x\cdot(-1)\left(y+x^2\right)^{-2}\cdot 1=-\frac{2x}{\left(y+x^2\right)^2}.$$

Смешанная производная второго порядка по переменным xy :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{y+x^2}\right)=(-1)\left(y+x^2\right)^{-2}\cdot(2x)=-\frac{2x}{\left(y+x^2\right)^2}.$$

И последняя производная - производная второго порядка по переменной y :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y+x^2}\right)=(-1)\left(y+x^2\right)^{-2}=-\frac{1}{\left(y+x^2\right)^2}\quad.$$

Теперь просто подставляем и проверяем.

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}-2\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=$$

$$=\frac{2x}{y+x^2}\left(-\frac{2x}{\left(y+x^2\right)^2}\right)-2\frac{1}{y+x^2}\cdot\frac{2y-2x^2}{\left(y+x^2\right)^2}=-\frac{4y}{\left(y+x^2\right)^3}\qquad -$$

что и требовалось доказать.

Примеры №№ 101-110

Дана функция $z = 2x - 3xy$, точка $A(-1,3)$ и вектор $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j}$

Найти $grad(z)$ в точке $A(-1,3)$ и производную по направлению $\vec{a}$ от функции z в точке $A(-1,3)$.

Напомним,

$$grad(z) = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \vec{j} .$$

Вспоминаем предыдущую задачу и находим:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(2x - 3xy) = 2 - 3y ,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2x - 3xy) = 0 - 3x = -3x .$$

Вычисляем эти производные при $x = -1, \quad y = 3$:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{A(-1,3)} = 2 - 3 \cdot 3 = -7 ,$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{A(-1,3)} = -3(-1) = 3 .$$

Подставляем:

$$\left.grad(z)\right|_{A(-1,3)} = -7\vec{i} + 3\vec{j} .$$

Производная по направлению находится по формуле:

$$\frac{\partial z}{\partial e} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \sin\alpha .$$

Здесь $\vec{e}$ - единичный вектор, имеющий то же направление, что и вектор $\vec{a}$.

Найдём его:

$$\vec{e}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{\vec{i}-\vec{j}}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{\vec{i}-\vec{j}}{\sqrt{2}}=\frac{\vec{i}}{\sqrt{2}}+\left(\frac{-\vec{j}}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i}-\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}\,.$$

Направляющие косинусы являются координатами вектора $\vec{e}$.

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \sin\alpha=-\frac{1}{\sqrt{2}}\ .$$

Подставляя, получаем:

$$\frac{\partial z}{\partial e}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\partial z}{\partial y}\frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Значения производных в точке мы уже вычислили раньше. Окончательно:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial e}\right|_{A(-1,3)}=-7\frac{1}{\sqrt{2}}-3\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{10}{\sqrt{2}}\ .$$

Примеры №№ 111-120

Вычисление неопределённых интегралов. Обширная тема, заслуживающая отдельного разговора, здесь - краткие подсказки:

а) пример на замену переменных (формула 31);

б) решается с применением формулы интегрирования по частям

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du\ ;$$

в) интегрирование рациональных дробей;

г) универсальная тригонометрическая подстановка (формула 32).

К сожалению, объём методички не позволяет подробно разобрать решения данных интегралов. С другой стороны, по указанным темам имеется большое количество учебников и пособий, и затруднений решение задач вызвать не должно.

Примеры №№ 121-130

Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость.

$$\int_2^7 \frac{dx}{(x-2)^5} .$$

Подинтегральная функция не существует при $x=2$. Имеем несобственный интеграл второго рода. Вычисляем:

$$\int_2^7 \frac{dx}{(x-2)^5} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{2+\varepsilon}^7 \frac{dx}{(x-2)^5} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{2+\varepsilon}^7 (x-2)^{-5}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left.\frac{(x-2)^{-5+1}}{-5+1}\right|_{2+\varepsilon}^7 =$$

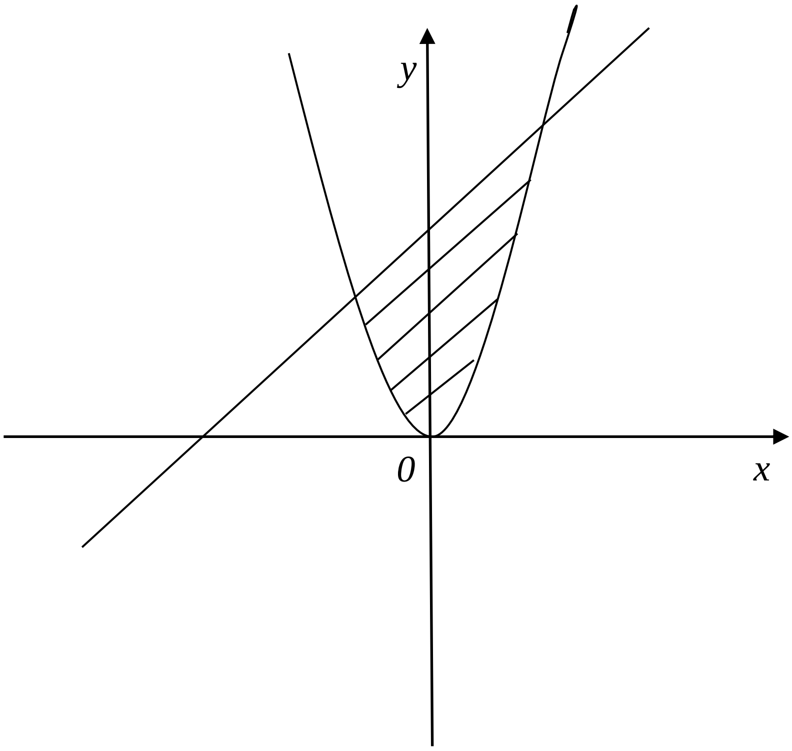
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\left.-\frac{1}{4}\frac{1}{(x-2)^4}\right|_{2+\varepsilon}^7\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{4}\frac{1}{(7-2)^4} - \left(-\frac{1}{4}\frac{1}{(2+\varepsilon-2)^4}\right)\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5^4} + \frac{1}{4}\frac{1}{(\varepsilon)^4}\right) = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5^4} + \infty = \infty .$$

Здесь использовали определение 9, теорему 5.

Примеры №№ 131-140

Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y=5x^2$ и прямой $y=x+3$. Для начала сделаем чертёж:



Нижней границей выделенной площади является парабола $y = 5x^2$, верхней – прямая $y = x + 3$. Находим точки пересечения кривых:

$$\begin{cases} y = 5x^2 \\ y = x + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 3 = 5x^2 \\ y = x + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x^2 - x - 3 = 0 \\ y = x + 3 \end{cases}.$$

Решаем квадратное уравнение, получаем корни:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{61}}{2 \cdot 5} \approx 0,1 \pm 0,78;$$
$$x_1 \approx 0,88, \quad x_2 \approx -0,68 \quad .$$

Получили пределы интегрирования. Дальше считаем саму площадь:

$$s_{\text{фигуры}}=\int\limits_{\frac{1-\sqrt{61}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{61}}{2}}\left(\left(x+3\right)-\left(5x^2\right)\right)dx=\int\limits_{\frac{1-\sqrt{61}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{61}}{2}}\left(-5x^2+x+3\right)dx=$$

$$=\left(-5\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+3x\right)\Bigg|_{\frac{1-\sqrt{61}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{61}}{2}}\approx\left(-5\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+3x\right)\Bigg|_{-0,68}^{0,88}\approx$$

$$\approx\left(-5\frac{\left(0,88\right)^3}{3}+\frac{\left(0,88\right)^2}{2}+3\cdot 0,88\right)-$$

$$-\left(-5\frac{\left(-0,68\right)^3}{3}+\frac{\left(-0,68\right)^2}{2}+3\cdot\left(-0,68\right)\right)\approx$$

$$\approx 1,89-1,28=0,61\left(ед\right)^2 .$$

Библиографический список

1. Задачи и упражнения по математическому анализу для ВТУЗОВ. под ред. Б.П. Демидовича - М.: «Интеграл-Пресс», 1997.

2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для ВТУЗОВ, т. 2. – М.: «Наука», 2010.

3. Лунгу К.Н., Письменный Д.Т., Федин С.Н., Шевченко Ю.А. Сборник задач по высшей математике. С контрольными работами. – М.: «Айрис-Пресс», 2008.

4. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. Полный курс. – М.: Айрис-Пресс, 2009.

5. Кузнецов Л.А., Сборник заданий по высшей математике. – СПб., М., Краснодар, «Лань» 2005.

6. Гмурман В.Е., Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М., «Высшая школа» 2002.

7. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М., Высшее образование, 2008.

СОДЕРЖАНИЕ