МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРОМЫШЛЕННЫХ ТЕХНОЛОГИИ И ДИЗАЙНА

ВЫСШАЯ ШКОЛА ТЕХНОЛОГИИ И ЭНЕРГЕТИКИ

Кафера высшей математики

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Учебное пособие

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2018

УДК 517.5

Элементы теории функции комплексного переменного.
Учебное пособие/сост.: З.Л.Абжандадзе, Н.Л. Белая, Е.Г. Иванова, О.Е. Куляхтина; ВШТЭ СПБГУПТД.–СПб., 2018. -28 с.

Приводится теоретический материал с разнообразными решениями типичных примеров.

Предназначено для студентов направления подготовки 01.03.02 "Прикладная математика и информатика".

Рецензент: зав. кафедры высшей математики №1 СПбГЭТУ «ЛЭТИ» д.ф.-м.н. Бодунов Н.А.

Подготовлено и рекомендовано к печати кафедрой высшей математики ВШЭ Санкт-Петербургского государственного университета промышленных технологии и дизайна (протокол №6 от 06.02.2018).

Утверждено к изданию методической комиссией факультета промышленной энергетики ВШЭ Санкт-Петербургского государственного университета промышленных технологии и дизайна (протокол №3 от 07.02.2018).

Учебное пособие печатается в авторской редакции.

1. Основные понятия. Комплексные числа — обобщение (расширение) понятия вещественных чисел

Дадим сначала традиционное (формальное) определение комплексных чисел. Это определение (представление) возникло на рубеже XVI–XVII веков в связи с практической необходимостью расширения понятия вещественного числа, которое, в свою очередь, прошло длительный и не простой путь исторического развития.

Итак, комплексным числом α назовем специальное выражение вида $a + b\sqrt{-1} = \alpha$, где a, b — вещественные числа, $\sqrt{-1} = i$ — мнимая единица — определяется формальным равенством $i^2 = -1$. Таким образом,

$$\alpha = a + bi, \tag{1}$$

a называется вещественной (действительной) частью комплексного числа, b — мнимая часть и обозначается

$$a = \mathrm{Re}\alpha, \; b = \mathrm{Im}\alpha. \tag{2}$$

Если $b = 0$, то $\alpha = a$ — вещественное число, при $a = 0$ будет $\alpha = ib$ — чисто мнимое число. Выражение (1) называется алгебраической формой комплексного числа.

Суммой (разностью) комплексных чисел $\alpha_1 = a_1 + ib_1$ и $\alpha_2 = a_2 + ib_2$ называется число

$$\beta = a_1 \pm a_2 + i(b_1 \pm b_2). \tag{3}$$

Произведением комплексных чисел $\alpha_1 \cdot \alpha_2 = \beta$ называется число

$$\beta = a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1). \tag{4}$$

Частное от деления двух комплексных чисел $\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} = \beta$ есть число β, обладающее свойством $\beta \cdot \alpha_2 = \alpha_1$.

Два комплексных числа равны $\alpha_1 = \alpha_2$ тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2, \; b_1 = b_2$. Комплексное число равно нулю: $\alpha = 0$ если $a = b = 0$.

Теперь действия сложения и умножения комплексных чисел можно выполнять как с многочленами:

$$\begin{aligned}\alpha_1\alpha_2 = (a_1 + ib)(a_2 + ib) = a_1 a_2 + i^2 b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1) = \\ = a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1).\end{aligned} \tag{5}$$

Пусть, например, $\alpha_1 = 1 + 2i$, $\alpha_2 = 2 - 3i$, тогда

$$\alpha_1\alpha_2 = (1+2i)(2-3i) = 2 + 3i + 4i - 6i^2 = 8 + i.$$

Комплексное число $\overline{\alpha} = a - ib$ называется сопряженным числу $\alpha = a + ib$. Из определения сопряженного числа следует

$$\overline{\alpha_1 + \alpha_2} = \overline{\alpha_1} + \overline{\alpha_2}, \ \overline{\alpha_1\alpha_2} = \overline{\alpha_1}\ \overline{\alpha_2}.$$

Вещественное число $|\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2} \geqslant 0$ называется модулем (абсолютной величиной) α. Очевидно, что

$$\alpha\overline{\alpha} = a^2 + b^2 = |\alpha|^2, \ -|\alpha| \leqslant \mathrm{Re}\alpha \leqslant |\alpha|, \ -|\alpha| \leqslant \mathrm{Im}\alpha \leqslant |\alpha|.$$

Отсюда легко установить следующие важные неравенства:

$$|\alpha_1 + \alpha_2| \leqslant |\alpha_1| + |\alpha_2|, \ |\alpha_1 - \alpha_2| \geqslant |\alpha_1| - |\alpha_2|, \qquad (6)$$

Величину $z = x + iy$, где x, y — вещественные переменные, называют комплексным переменным.

2. Геометрическая интерпретация и тригонометрическая форма комплексного числа

Из аналитической геометрии известно что любой упорядоченной паре вещественных чисел соответствует точка на плоскости с введенной системой координат. Говорят, что между множеством комплексных чисел $z = x + iy$ и множеством точек плоскости с координатами (x, y) установлено взаимно-однозначное соответствие (рис. 1).

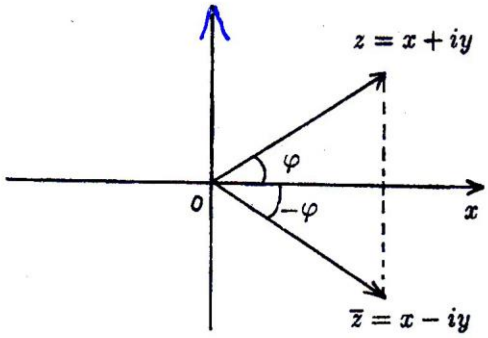

Рис. 1

Ось Ox называют вещественной, а ос Oy — мнимой осями комплексной плоскости. Если положить $x = \infty$ или $y = \infty$, т. е. точки (∞, b), (a, ∞), (∞, ∞) называют бесконечно удаленной точкой плоскости комплексного переменного.

Из рис. 1 видно, что комплексному числу z можно сопоставить радиус–вектор r, длина которого равна $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, ф угол φ между ним и направлением Ox определяется соотношением $\mathrm{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}$; тогда

$$z = x + iy = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{7}$$

Выражение (7) называется тригонометрической формой комплексного числа z, $r = |z|$ его модуль, φ — аргумент. Найдем произведение

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (r_1\cos\varphi_1 + ir_1\sin\varphi_1)(r_2\cos\varphi_2 + ir_2\sin\varphi_2) = \\ &= r_1 r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + \\ &+ i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \cos\varphi_2\sin\varphi_1)) = \\ &= r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \end{aligned}$$

Отсюда видно

$$\begin{aligned} |z_1 z_2| &= r_1 r_2 = |z_1||z_2|, \\ \arg(z_1 z_2) &= \varphi_1 + \varphi_2 = \arg(z_1) + \arg(z_2). \end{aligned}$$

Применяя полученное правило n раз, к одному числу z получим

$$z^n = z \cdot z \cdots z = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

или

$$|z^n| = |z|^n, \ \arg z^n = n\arg z. \tag{8}$$

Это — формула Муавра. Из нее легко найти выражение $\sqrt[n]{\alpha} = z$. Тогда $\alpha = z^n$, $|\alpha| = |z|^n$, $\arg\alpha + 2k\pi = n\arg z$, откуда

$$|\sqrt[n]{\alpha}| = |\alpha|^{\frac{1}{n}}, \ \arg\sqrt[n]{\alpha} = (\arg\alpha + 2k\pi)/n, \ k = 0, 1, ..., (n-1)$$

$$\sqrt[n]{\alpha} = |\alpha|^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \text{ где } \varphi = \arg\alpha. \tag{9}$$

Таким образом, мы получим n различных значений корня n-й степени из числа $\alpha \neq 0$.

Пусть, например, $\alpha = 1: \ |\alpha| = 1, \arg 1 = 0$,

$$\sqrt[n]{1} = 1 \cdot \left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right), \ k = 0, 1, ..., (n-1).$$

При $n = 2: \ \sqrt{1} = \cos\frac{2k\pi}{2} + i\sin\frac{2k\pi}{2}$ — два значения $\sqrt{1} = 1$ $(k_0 = 0)$ и $\sqrt{1} = -1$ $(k_1 = 1)$.

При произвольном n значения $\sqrt{1}$ располагаются на окружности радиусом 1 с центром в начале координат, деля ее на n равных частей (рис. 2) .

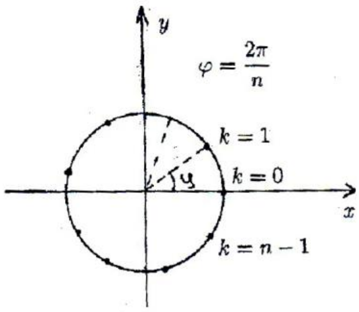

Рис. 2

3. Функции комплексного переменного

Рассмотрим два множества комплексных чисел D и G. Функцией комплексного переменного называется отображение D в G, т. е. любому числу z из D ставится в соответствие число w из G и пишут $w = f(z)$. Говорят, w — образ z и z — прообраз w. Областью определения функции называется множества D, G — область значений функции. Функция $f(z)$ называется однозначной, если каждому значению переменного z из D соответствует единственное число w из G. Если из $z_1 \neq z_2$ следует $f(z_1) \neq f(z_2)$, то такая функция называется однолистной. В этом случае существует обратная функция $f^{-1}(w) = z$. Пример однолистной функции — линейная $w = az + b$, $a \neq 0$, обратная функция $z = \frac{w}{a} - \frac{b}{a}$. Не однолистная функция $w = \sqrt[n]{z}$. Здесь каждому значению $z \neq 0$ соответствует n значений w.

Пределом функции $f(z)$ при $z \to z_0$ называется число w_0, если при $|z - z_0| \to 0$ будет $|w - w_0| \to 0: \ \lim f(z) = w_0, \ z \to z_0$.

Функция $w = f(z)$ называется непрерывной в точке $z = z_0$, если

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Функция, непрерывная во всех точках множества D, называется непрерывной на D.

Например, функции $w = az + b$, $w = z^n$ непрерывны на всей плоскости комплексного переменного.

Производной функции $f(z)$в точке $z = z_0$ называется предел отношения приращения функции к приращению переменного:

$$f' = \lim_{\triangle z \to 0} \frac{\triangle f(z)}{\triangle z} = \lim_{z_1 \to z_0} \frac{f(z_1) - f(z_0)}{z_1 - z_0}. \tag{10}$$

Если передел существует, то функция называется дифференцируемой в данной точке; если это свойство имеет место в каждой точке множества D, то говорят что функция $f(z)$ дифференцируема на множестве D.

К примеру, функция $w = z^2$ дифференцируема на комплексной плоскости:

$$w' = \lim_{\triangle z \to 0} \frac{(z + \triangle z)^2 - z^2}{\triangle z} = \lim_{\triangle z \to 0} (2z + \triangle z) = 2z.$$

Легко установить, что $(z^n)' = nz^{n-1}$, $n = 1, 2, ...$

Рассмотрим функцию $w = |z|$. Составим отношение

$$\begin{aligned} \frac{\triangle |z|}{\triangle z} = \frac{|z + \triangle z| - |z|}{\triangle z} &= \frac{|z + \triangle z|^2 - |z|^2}{\triangle z(|z + \triangle z| + |z|^2} = \\ &= \frac{(x + \triangle x)^2 + (y + \triangle y)^2 - x^2 - y^2}{\triangle z(|z + \triangle z| + |z|)} = \\ &= \frac{(2x + \triangle x) \triangle x + (2y + \triangle y) \triangle y}{\triangle z(|z + \triangle z| + |z|)}. \end{aligned}$$

Предел этого выражения при $\triangle z = \triangle x + i\triangle y \to 0$ параллельно вещественной оси ($\triangle y = 0$), т. е. $\triangle z = \triangle x$ равен $\frac{x}{|z|}$; при $\triangle z \to 0$ параллельно мнимой оси ($\triangle x = 0$), т. е. $\triangle z = i \triangle y$ будет

$$\frac{y}{(i|z|)} = -i \frac{y}{|z|}.$$

Видно, что получаем различные числа, т.е. предел не существует ни в одной точке комплексной плоскости. Функция $|z|$ не дифференцируема на комплексной плоскости.

Легко установить следующие свойства дифференцируемых функций:

$$[\alpha f(z) \pm \beta g(z)]' = \alpha f'(z) \pm \beta g'(z),$$
$$(f(z)g(z))' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z),$$
$$\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}, \; g(z) \neq 0.$$

Установим условия, при которых существует производная функции комплексного переменного. Функцию $f(z)$ можно представить в виде

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y),$$

где $u(x,y)$ — вещественная часть, $v(x,y)$ — мнимая часть $f(z)$. Считаем, что $u(x,y)$, $v(x,y)$ имеют непрерывные частные производные на рассматриваемом множестве D. Допустим производная $f'(z)$ существует. При $\triangle z = \triangle x$ $(\triangle y) = 0$ имеем

$$\begin{aligned}
f'(z) &= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(z+\triangle x) - f(z)}{\triangle x} = \\
&= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{u(x+\triangle x, y) + iv(x+\triangle x, y) - u(x,y) - iv(x,y)}{\triangle x} = \\
&= \lim_{\triangle x \to 0} \left[\frac{u(x+\triangle x, y) - u(x,y)}{\triangle x} + i\frac{v(x+\triangle x, y) - v(x,y)}{\triangle x}\right] = \\
&= \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + i\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}.
\end{aligned}$$

При чисто мнимом приращении $\triangle z = i \triangle y$ $(\triangle x = 0)$

$$\begin{aligned}
f'(z) &= \lim_{\triangle y \to 0} \frac{f(z+i\triangle y) - f(z)}{i\triangle y} = \\
&= \left[\frac{u(x, y+\triangle y) - u(x,y)}{i\triangle y} + \frac{v(x, y+\triangle y) - v(x,y)}{\triangle y}\right] = \\
&= \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} - i\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}.
\end{aligned}$$

Два комплексных числа равны, когда равны их вещественные и мнимые части:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial v(x,y)}{\partial y};\ \frac{\partial v(x,y)}{\partial x}=-\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}. \tag{11}$$

Легко установить и обратное утверждение, т. е. если выполнены равенства (11) и функции $u(x,y)$, $v(x,y)$ имеют полные дифференциалы, то этого достаточно, чтобы существовала производная $f'(z)$. Тогда для функций z, z^2, z^n нетрудно установить, что условия (11) выполнены, следовательно, эти функции дифференцируемы на комплексной плоскости, что выше было получено по определению производной. Соотношения (11) называются условиями Коши–Римана.

Заметим еще, что если функция $f(z)$ дифференцируема, то она непрерывна. Это сразу следует из равенства

$$f'(z)=\lim_{\triangle z\to 0}\frac{\triangle f(z)}{\triangle z},\ \text{т. к. } \triangle f(z)=f'(z)\cdot\triangle z+o(\triangle z), \tag{12}$$

где $o(\triangle z)$ — бесконечно малая по отношению к $\triangle z$ величина, и из условия $\triangle z\to 0$ получаем $\triangle f(z)\to 0$. В выражении (12) величина $f'(z)\cdot\triangle z=df(z)$ называется дифференциалом функции $f(z)$.

Функция $f(z)$, у которой существует производная в каждой точке множества D называется регулярной на множестве D. Часто такую функцию также называют аналитической.

Сложной функцией $\mathfrak{T}(z)$ функция от функции, т. е. $\mathfrak{T}(z)=g[f(z)]$, так что переменной для функции $g(w)$ является другая функция $w=f(z)$. Если функции $f(z)$ и $g(w)$ регулярны на своих областях определения, то и сложная функция $\mathfrak{T}(z)$ регулярна, причем

$$\mathfrak{T}'(z)=g'(w)\cdot f'(z). \tag{13}$$

Это равенство сразу следует из рассмотрения приращений:

$$\mathfrak{T}(z+\triangle z)-\mathfrak{T}(z)=g[f(z+\triangle z)]-g[f(z)]=g'(w)\triangle w+o(\triangle w).$$

Разделив почленно последнее равенство на $\triangle z$ и устремив $\triangle z\to 0$, приходим к соотношению (13).

Если функция $w = f(z)$ определена, однолистна и регулярна на D, причем $f'(z) \neq 0$, то тогда существует регулярная обратная функция $g(w) = z$, причем

$$g'(w) = \frac{1}{f'(z)}. \tag{14}$$

4. Интеграл от функции комплексного переменного

Непрерывной кривой на комплексной плоскости называется геометрическое место точек, определяемых уравнением

$$z = z(t) = x(t) + iy(t). \tag{15}$$

где $x(t)$, $y(t)$ — непрерывные функции при t из промежутка $[a, b]$. Непрерывная кривая — связное множество. Кривая называется гладкой, если в каждой точке существует касательная.

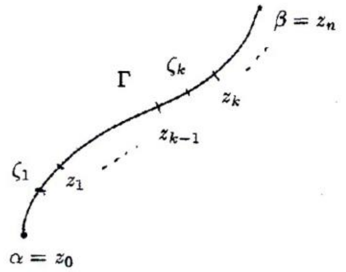

Рис. 3

Итак, пусть Γ — гладкая кривая (рис. 3). Концы кривой обозначим $z = \alpha$ и $z = \beta$. Пусть функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ определена и непрерывна кривой Γ. Разобъем кривую Γ на n участков точками $z_0 = \alpha, z_1, z_2, ..., z_n = \beta$. Участки кривой между точками z_{k-1}, z_k обозначим γ_k, а прямолинейные отрезки, соединяющие эти точки обозначим $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$. На каждом участке γ_k возмем точку ζ_k.

Сумма

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k) \bigtriangleup z_k, \tag{16}$$

называется интегральной для функции $f(z)$.

Если существует предел последовательности интегральных сумм $\{S_n\}$ при $n \to \infty$, так что $\Delta z_k \to 0$, $k = 1, 2, ..., n$, не зависящий ни от способа разбиения кривой Γ на участки γ_k, ни от выбора точек ζ_k на γ_k, то этот предел называется интегралом от функции $f(z)$ по кривой Γ и обозначается

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\bigtriangleup z_k. \tag{17}$$

Положим $\zeta_k = \xi_k + i\eta_k$, $\bigtriangleup z_k = \bigtriangleup x_k + i\bigtriangleup y_k$ и выделим в интегральной сумме (16) вещественную и мнимую части:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n}\left[u(\xi_k,\eta_k) + iv(\xi_k,\eta_k)\right](\bigtriangleup x_k + i\bigtriangleup y_k) = \\ &= \sum_{k=1}^{n}\left[u(\xi_k,\eta_k)\bigtriangleup x_k - v(\xi_k,\eta_k)\bigtriangleup y_k\right] + \\ &+ i\sum_{k=1}^{n}\left[u(\xi_k,\eta_k)\bigtriangleup y_k - v(\xi_k,\eta_k)\bigtriangleup x_k\right]. \end{aligned} \tag{18}$$

Так как по условию функции $u(x,y)$, $v(x,y)$ непрерывны и Γ гладкая кривая, то существует предел указанных сумм при $n\to\infty$ ($\bigtriangleup x_k\to 0$, $\bigtriangleup y_k\to 0$, $k=1,2,...,n$), которые называются криволинейными интегралами второго рода и

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = \int\limits_{\Gamma} u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int\limits_{\Gamma} u(x,y)dy + v(x,y)dx. \tag{19}$$

Равенство (19) сводит вопросы о существовании и вычислении интеграла от функции комплексного переменного к тем же вопросам для двух криволинейных интегралов функций вещественных переменных.

Пользуясь свойствами интеграла от функции $f(z)$, можно доказать следующую теорему Коши:

Теорема. *Если функция $f(z)$ регулярна в ограниченной области D и непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$, Γ — граница D (или любая замкнутая кривая в D), то*

$$\int\limits_{\Gamma} f(t)dt = 0. \tag{20}$$

Рассмотрим например, интеграл по окружности C_R от степенной функции z^n

$$\int\limits_{C_R} z^n dz.$$

Так как функция z^n регулярна на комплексной плоскости при $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, кроме точки $z = 0$ при $n < 0$, то интеграл от нее по любой замкнутой кусочно-гладкой кривой, не обходящей вокруг начала координат, равен нулю. Если $n \geqslant 0$, то по тем же причинам интеграл от z^n по любой кривой указанного типа (в том числе по обходящей точку $z = 0$ и проходящей через нее) равен нулю.

В случае $n < 0$ и точка $z = 0$ лежит во внутренней части плоскости, ограниченной кривой Γ, построим окружность $C_\rho(0)$ так, чтобы она лежала внутри Γ и не пересекалась с ней, и рассмотрим область D, ограниченную кривыми Γ и $C_\rho(0)$ (рис. 4). В области D функция z^n регулярна, поэтому

$$\int\limits_{\Gamma} z^n dz - \int\limits_{C_\rho(0)} z^n dz = 0. \tag{21}$$

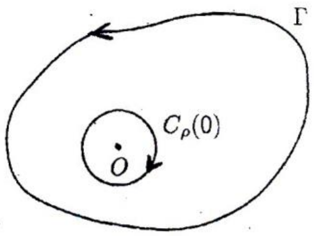

Рис. 4

Для второго слагаемого в (21) мы имеем, сделав замену $z = \rho e^{i\varphi}$, $z'(\varphi) = i\rho e^{i\varphi}$, $(n \neq -1)$

$$\int\limits_{C_\rho} z^n dz = i\rho^{n+1} \int\limits_0^{2\pi} e^{i(n+1)\varphi} d\varphi =$$

$$= \frac{1}{n+1}\rho^{n+1} e^{i(n+1)\varphi}\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{n+1}\rho^{n+1}\left[e^{i(n+1)2\pi} - 1\right] = 0.$$

Если $n = -1$, то $\int\limits_{C_\rho} \frac{dz}{z} = i \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i$ Таким образом,

$$\int\limits_{C_\rho(0)} z^n dz = \begin{cases} 0, & n \neq -1 \\ 2\pi i, & n = -1. \end{cases} \tag{22}$$

Возвращаясь теперь к выражению (21), имеем:

$$\int\limits_{\Gamma} z^n dz = \begin{cases} 0, & n \neq -1 \\ 2\pi i, & n = -1. \end{cases} \tag{23}$$

Когда кривая Γ проходит через начало координат $O \in \Gamma$ и $n \geqslant 0$ интеграл равен 0; в случае $n < 0$ интеграл не определен.

Опираясь на теорему Коши (20) и рассмотренный пример, можно установить следующее соотношение (интегральная формула Коши):

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(t)}{t-z} dt = \begin{cases} 0, & z \notin \overline{D} \\ f(z), & z \in D. \end{cases} \tag{24}$$

Здесь $f(t)$ регулярна в D и непрерывна в замыкании $\overline{D}$ с кусочно-гладкой границей Γ. Левую часть равенства (24) часто называют интегралом Коши.

Если кривая Γ не замкнутая и точка z не лежит на Γ, то тогда интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(t)}{t-z} dt = F(z)$$

является функцией переменного z и называется интегралом типа Коши. Эта функция обладает рядом замечательных свойств и играет существенную роль в теоретических и практических приложениях функций комплексного переменного. Так, функция $F(z)$ является регулярной на всей комплексной плоскости, кроме точек на кривой Γ. Существуют производные любого порядка n $(n = 1, 2, ...)$, причем

$$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}} dt. \tag{25}$$

С ее помощью устанавливается, что любая регулярная функция в односвязной области является бесконечно дифференцируемой.

5. Степенные ряды и регулярные функции

Степенные ряды на множестве комплексных чисел определяется так же, как и в множестве вещественных чисел, т. е. как обобщение понятия суммы при бесконечном увеличении числа слагаемых:

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k. \tag{26}$$

Постоянные комплексные числа a_k называются коэффициентами ряда, $S_n = a_0 + a_z + \ldots + a_n z^n$ называется частной суммой ряда. Другие определения совершенно аналогичны соответствующим понятиям для случая вещественных степенных рядов. Из выражения (26) видно, что у любого степенного ряда непустая область сходимости D, т. к. при $z = 0$ сумма ряда равна a_0.

Рассмотрим, например, ряд

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} k^k z^k.$$

Здесь $a_0 = 1$, $a_k = k^k$, $k = 1, 2, \ldots$ Для ряда из модулей $|a_k z^k| = |z|^k k^k$ по признаку Коши видим, что этот ряд расходится при любом $z \neq 0$, т. к. $\sqrt[k]{|a_k z^k|} = k \cdot |z| \to \infty$, $k \to \infty$. Наоборот, тем же способом легко установить, что ряд

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^k}$$

сходится при любом z, т. к.

$$\lim_{k\to\infty} |a_k z^k|^{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{|z|}{k} = 0 < 1.$$

Во втором случае говорят, что ряд сходится абсолютно на всей комплексной плоскости.

Для степенного ряда (26) существует число R такое, что при $z : |z| < R$ ряд абсолютно сходится; при $|z| > R$ ряд расходится; это число (вещественное) называется радиусом сходимости степенного ряда, а множество комплексных чисел z, удовлетворяющих условию $|z| < R$ называется кругом сходимости степенного ряда.

Можно показать, что внутри круга сходимости сумма степенного ряда является регулярной функцией, причем ряд

$$a_1 + 2a_2 z + ... = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}. \qquad (27)$$

полученный из (26) почленным дифференцированием, имеет тот же радиус сходимости R (и круг сходимости).

Рассмотрим следующий пример, играющий в теории функций комплексного переменного существенную роль

$$1 + z + \frac{z^2}{2!} + ... \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}. \qquad (28)$$

С помощью признака Даламбера легко установить, что кругом сходимости этого ряда является вся плоскость комплексного переменного ($R = \infty$.) Мы знаем, что при вещественном $z = x$ суммой этого ряда является показательная (экспоненциальная) функция

$$e^x = \exp x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \ (0! = 1).$$

Поэтому сумму ряда (28) также называют показательной функцией комплексного переменного z :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z = \exp z. \qquad (29)$$

Нетрудно проверить, что все свойства показательной функции выполняются и в комплексном случае, например (z и t комплексные)

$$e^z e^t = e^{z+t}, \ e^0 = 1, \ e^{-z} = \frac{1}{e^z}, \ e^{t-z} = \frac{e^t}{e^z}. \qquad (30)$$

Заменим z на iz, подставим в (29), сгруппируем в левой части члены, содержащие множители i, не содержащие их и вспомнив известные разложения в ряды функцией $\sin x, \ \cos x$,

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}, \ \sin z = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{z^{2k-1}}{(2k-1)!} \qquad (31)$$

мы придем к знаменитой формуле Эйлера

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z. \tag{32}$$

Заменяя в (32) z на $(-z)$ и почленно складывая и вычитая (32) эти равенства, придем к следующим соотношениям, также носящим название формулы Эйлера:

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}),\ \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}). \tag{33}$$

Выражение (33) позволяет установить основные соотношения, которым подчиняются тригонометрические функции, например

$$\cos(z+t) = \cos z \cos t - \sin z \sin t,\ \cos^2 z + \sin^2 z = 1$$

и т. д., а также получить новые соотношения

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y), \tag{34}$$

$$e^{z+2k\pi i} = e^z(\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi) = e^z, \tag{35}$$

т. е. $\exp z$ имеет чисто мнимый период $T = 2\pi i$. Полагая в (33) $z = iy$, найдем, что $\cos z$, $\sin z$ являются неограниченными функциями.

По аналогии вводятся функции

$$\mathrm{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z},\ \mathrm{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Из равенств (7) и (34) получаем показательную форму комплексного числа:

$$z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi) = re^{i\varphi}, \tag{36}$$

где r, φ — модуль и аргумент числа z.

Исходя из определения (29) и пользуясь свойством степенных рядов (32), легко установить, что функции e^z, $\cos z$, $\sin z$ являются регулярными и имеем:

$$[e^z]' = e^z,\ (\cos z)' = -\sin z,\ (\sin z)' = \cos z.$$

Отметим еще, что формула (9) с учетом (36) принимает вид

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \cdot e^{i\frac{\varphi + 2k\pi}{n}},\ k = 0, 1, ..., (n-1). \tag{37}$$

6. Ряды Тейлора и Лорана и теория вычетов

Рассмотрим вопрос о разложении регулярной функции в степенной ряд. Оказывается, что любая регулярная функция $f(z)$ может быть представлена в виде

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \tag{38}$$

где z_0 — произвольная точка в области определения (регулярности) функции D (рис. 5) .

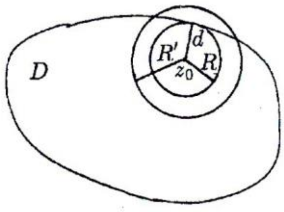

Рис. 5

Коэффициенты ряда определяются формулой

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(t)}{(t - z_0)^{k+1}} dt, \tag{39}$$

где, в свою очередь, C — окружность радиуса $\delta < d$, с центром в точке z_0; d — расстояние от z_0 до границы D; радиус сходимости ряда (38) R не меньше d, в частном случае может быть $R > d$ (на рис. 5 R' — радиус сходимости ряда (38)).

Ряд (38) называется рядом Тейлора для функции $f(z)$. Таким образом, рассмотренные выше представления (29),(32) можно считать разложениями функций $\exp z$, $\cos z$, $\sin z$ в ряды Тейлора в окрестности точки z_0, причем $R = \infty$.

Точки комплексной плоскости, в которых функция $f(z)$ перестает быть регулярной (производная не существует или функция не определена), называются особыми для $f(z)$. Так для функции $\dfrac{1}{z}$ особая точка $z_0 = 0$, для $f(z) = |z|$ все точки комплексной плоскости особые.

Особая точка z_0 называется изолированной, если существует некоторая окрестность этой точки (круг с центром в z_0,) в которой нет других особых точек. Если точку z_0 можно окружить двумя окрестностями так, что в кольце между этими окружностями функция $f(z)$ регулярна, то тогда справедливо следующее представление:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z-z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k + \sum_{k=-1}^{-\infty} a_k(z-z_0)^k, \quad (40)$$

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(t)}{(t-z_0)^{k+1}}dt, \ k = 0, \pm 1, \pm 2, ... \quad (41)$$

где C — окружность (или другая замкнутая гладкая кривая), обходящая вокруг точки z_0 по указанному кольцу.

Выражение (40) с коэффициентами a_k, определяемыми формулами (41), называется рядом Лорана для функции $f(z)$. Разложения (38) и (40) являются единственными, т. е. коэффициенты a_k, определяются формулами (39) и (41) единственным образом.

Пример. Функция $\dfrac{1+z}{z(z-1)}$ регулярна в кольце с центром в начале координат $z = 0$ большего радиуса 1, меньшего — нуль (круг с выколотым центром). Если ее представить в виде суммы простейших дробей и воспользоваться формулой для геометрической прогрессии, то получим ряд Лорана:

$$\frac{1+z}{z(z-1)} = -\frac{1}{z} - \frac{2}{1-z} = -\frac{1}{z} - 2\sum_{k=0}^{\infty} z^k.$$

Здесь ряд $\sum_{k=-1}^{-\infty} = -\frac{1}{z}$ (главная часть ряда Лорана) состоит из одного слагаемого; сумма $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ (регулярная часть ряда Лорана) — бесконечна, т. е. $a_{-1} = -1$, $a_k = 0$ при $k = -2, -3, ..., a_0 = a_1 = a_2 = ... = -2$ ($a_k = -2$ при $k = 0, 1, 2, ...$) Эти числа можно получить непосредственно вычислением по формулам (39) и (41), однако это — более громоздкий путь.

По виду разложения функции в ряд Лорана в окрестности изолированной особой точки эти точки подразделяются на три типа: устранимая, полюс, существенно особая точка. Для устранимой точки z_0 главная часть ряда Лорана равна нулю (все $a_k = 0, \ k = -1, -2, ...,$) т. е.:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k. \quad (42)$$

В случае полюса главная часть имеет конечное число слагаемых:

$$f(z) = \sum_{k=-1}^{-m} a_k(z-z_0)^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k, \ m > 0, \qquad (43)$$

причем, хотя бы один из коэффициентов $a_{-1}, a_{-2}, ..., a_{-m}$ отличен от нуля. В рассмотренном выше примере точка $z_0 = 0$ является полюсом для функции $\frac{1+z}{z(z-1)}$. Если в главной части разложения (40) бесконечное число слагаемых, то такая точка называется существенно особой точкой.

Так для функции $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ точка $z = 0$ является устранимой, т. к. согласно формулам (32) имеем

$$\frac{\sin z}{z} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k+1)!}.$$

Для функции $\exp^{\frac{1}{z-z_0}}$ точка z_0 является существенно особой, т. к. согласно (29) будет

$$e^{\frac{1}{z-z_0}} = 1 + \frac{1}{z-z_0} + \frac{1}{2!(z-z_0)^2} + ... + \frac{1}{n!(z-z_0)^n} + ...,$$

т. е. главная часть ряда Лорана содержит бесконечное число слагаемых.

Значительную роль в приложениях ТФКП играет коэффициент первого члена в главной части ряда Лорана. Он называется вычетом функции $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 и обозначается

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} f(t)dt, \qquad (44)$$

где γ — произвольная кусочно-гладкая замкнутая кривая (чаще окружность) без самопересечений, обходящая точку z_0 в области регулярности функции $f(z)$.

Из равенства (42) следует, что в случае устранимой особой точки z_0, $\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = 0$. То же свойство справедливо для любой правильной (не особой) точки. Из (43) можно получить, что в случае полюса

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^{(m-1)}}{dz^{m-1}} \left[f(z)\cdot(z-z_0)^m\right], \qquad (45)$$

где m — порядок полюса — показатель степени $z - z_0$ в первом отличном от нуля, члена главной части ряда Лорана, т. е. $a_{-m} \neq 0$, $a_{-m-1} = a_{-m-2} = \ldots = 0$ (см. (43)).

В случае существенно особой точки вычет следует вычислять по определению (44).

Часто функцию $f(z)$ удобно представить в виде

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m},$$

где m — порядок полюса z_0, $\varphi(z_0) \neq 0$. Тогда формула (45) упрощается:

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^{(m-1)}\varphi(z)}{dz^{m-1}}. \qquad (46)$$

Для простого полюса ($m = 1$) имеем $\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \varphi(z_0)$. Иногда $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где $\varphi(z_0) \neq 0$, $\psi(z_0) = 0$, $\psi'(z_0) \neq 0$, т. е. z_0 — простой полюс $f(z)$. Тогда

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \qquad (47)$$

Примеры.

1. $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$; $z = 0$ — устранимая особая точка, $\operatorname*{res}_{z=0} \dfrac{\sin z}{z} = 0$.

2. $f(z) = \dfrac{\cos z}{z}$; $z = 0$ — простой полюс, $m = 1$, т. к.

$$\varphi(z) = \cos z|_{z=0} = 1,\ \psi(z) = z,\ \psi(0) = 0,\ \psi'(0) = 1,$$

$$\operatorname*{res}_{z=0} \frac{\cos z}{z} = \frac{\cos 0}{1} = 1.$$

3. $f(z) = \dfrac{2z}{(z+1)(z^2+1)}$. Особые точки $z_1 = -1$, $z_2 = i$, $z_3 = -i$ — простые полюсы. Рассмотрим сначала $z_1 = -1$.

$$\varphi(z)\frac{2z}{z^2+1}\bigg|_{z=-1} = -1,\ \psi(z) = z+1,\ \psi'(z) = 1$$

$$\operatorname*{res}_{z=-1} \frac{2z}{(z+1)(z^2+1)} = -1.$$

Пусть теперь $z_{23} = \pm i$, $\varphi(z) = \frac{2z}{z+1}$, $\psi(z) = z^2+1$, $\psi(\pm i) = 0$, $\psi'(i) = 0$, $\psi'(z) = 2z$, $\psi'(\pm i) = \pm 2i$,

$$\operatorname*{res}_{z=i} \frac{2z}{(z+1)(z^2+1)} = \frac{2i}{(i+1)2i} = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2};$$

$$\operatorname*{res}_{z=-i} \frac{2z}{(z+1)(z^2+1)} = \frac{-2i}{(1-i)(-2i)} = \frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{2}.$$

Теорема вычетов широко применяется в различных разделах математики, механики, теоретической физики. Рассмотрим, например, задачу вычисления некоторых определенных интегралов, нерешаемую другими методами, либо существующие методы очень сложны и громоздки.

1. Пусть требуется найти $\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(2+\cos\varphi)^2} = I_1$. Сделаем замену переменного $t = \exp(i\varphi)$; тогда $dt = i\exp(i\varphi)d\varphi$, и интеграл I_1 переходит в интеграл функции комплексного переменного t по окружности C радиуса 1 с центром в точке $t = 0$, причем для вычисления $\cos\varphi$ воспользуемся формулой (33):

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) = \frac{t + \frac{1}{t}}{2} = \frac{t^2+1}{2t}, \ d\varphi = \frac{1}{i}e^{-i\varphi}dt = \frac{dt}{it}.$$

Итак,

$$I_1 = \frac{i}{4}\int\limits_C \frac{tdt}{(t^2+4t+1)^2}.$$

Согласно теории вычетов, интеграл по замкнутой кривой C равен сумме вычетов в изолированных особых точках, лежащих внутри контура C, умноженной на $2\pi i$. Поскольку внутри круга, ограниченного окружностью C, лежит одна особая точка функции $\frac{t}{(t^2+4t+1)^2}$ — полюс порядка $m = 2$, $t_1 = -2+\sqrt{3}$ (вторая особая точка $t_2 = -2-\sqrt{3}$ лежит вне указанного круга), то

$$I_1 = \frac{4}{i}\cdot 2\pi i \operatorname*{res}_{t=t_1} \frac{t}{(t^2+4t+1)^2} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}},$$

где по формуле (46)

$$\operatorname*{res}_{t=t_1} \frac{t}{(t^2+4t+1)^2} = \lim_{t\to t_1} \frac{d}{dt}\left(\frac{t}{(t-t_2)^2}\right) = \lim_{t\to t_1} \frac{-t-t_2}{(t_1-t_2)^3} =$$
$$= -\frac{t_1+t_2}{(t_1-t_2)^3} = \frac{1}{6\sqrt{3}}.$$

2. В качестве второго примера рассмотрим несобственный интеграл $I_2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1}$. Введем следующий контур Γ, состоящий из отрезка вещественной оси $[-R, R]$ и полуокружности C' с центром в точке $(0,0) = t = 0$ (рис. 6) .

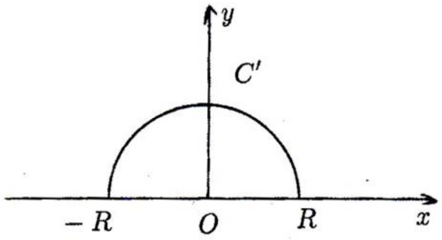

Рис. 6

Радиус R возьмем настолько большим, чтобы особые точки функции $\frac{1}{z^4+1}$, находящиеся в верхней полуплоскости, содержались в полукруге, ограниченной кривой Γ. Можно показать, что интеграл по полуокружности при неограниченном увеличении радиуса $R \to \infty$ стремится к нулю:

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{C'} \frac{dz}{z^4+1} = 0.$$

Тогда

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z^4+1} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1}.$$

Согласно теории вычетов (аналогично примеру 1) имеем

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z^4+1} = 2\pi \sum_{k=0}^{1} \operatorname*{res}_{z=z_k} \frac{1}{z^4+1},$$

где z_0, z_1 — особые точки функции $\frac{1}{z^4+1}$. Их две (две другие лежат в нижней полуплоскости). Из выражения (37) получаем (решая уравнение $z^4+1=0$) $z_k = e^{i\frac{\pi+2k\pi}{4}}$, $k = 0, 1$; $\arg(-1) = \pi$.

То есть мы имеем два простых полюса ($m = 1$). Согласно (47) где $\varphi(z) = 1,\ \psi(z) = z^4 + 1,\ \psi'(z) = 4z^3$;

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} \frac{1}{z^4+1} = \frac{1 \cdot z_0}{4z_0^3 \cdot z_0} = \frac{z_0}{4z_0^4} = -\frac{1}{4} e^{i\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{4}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right) =$$
$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right);$$

$$\operatorname*{res}_{z=z_1} \frac{1}{z^4+1} = \frac{z_1}{4z_1^4} = -\frac{1}{4} e^{i\frac{\pi+2\pi}{4}} = -\frac{1}{4}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i \sin\frac{3\pi}{4}\right) =$$
$$= -\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$$

Суммируя полученные результаты, окончательно получаем

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z^4+1} = -\frac{1}{4} \cdot 2\pi i \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

и

$$I_2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Приложения

1. Современное определение комплексного числа

Комплексным числом α называется упорядоченная пара вещественных чисел $\alpha = (a, b)$. "Упорядоченная" в том смысле, что изменение порядка этих чисел приводит к другой паре (к другому комплексному числу): $(a, b) \neq (b, a)$. Буквой $\mathbb{C}$ обычно обозначается множество комплексных чисел (вся совокупность упорядоченных пар). Два комплексных числа $\alpha_1 = (a_1, b_1)$ и $\alpha_2 = (a_2, b_2)$ равны в том и только в том случае, если $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$. При этом первое число a называется вещественной частью комплексного числа α и обозначается $\mathrm{Re}\alpha$, второе — мнимой частью $\alpha : b = \mathrm{Im}\alpha$. Комплексное число $(a, 0)$ отождествляется с вещественным числом $a = (a, 0)$; число $(0, 1)$ имеет специальное название — мнимая единица и обозначается $i = (0, 1)$; если $a = 0$, $b \neq 0$, то комплексное число $(0, b) = b \cdot (0, 1) = bi$ называется чисто мнимым.

Суммой (разностью) комплексных чисел называется число

$$\beta = \alpha_1 \pm \alpha_2 = (a_1 \pm a_2, b_1 \pm b_2). \tag{48}$$

Произведением комплексных чисел называется число

$$\beta = \alpha_1 \cdot \alpha_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1). \tag{49}$$

Частное при делении комплексных чисел определяется посредством обратной операции — умножения: $\beta = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$, т.е. β — такое число, которое будучи умноженным на делитель дает делимое: $\beta \cdot \alpha_2 = \alpha_1$. Согласно (2) имеем

$$\begin{aligned} aa_2 - bb_2 &= a_1, \\ ab_2 + ba_2 &= b_1. \end{aligned} \tag{50}$$

Систему двух уравнений (50) для определения a и b, определитель которой $a^2 + b^2 \neq 0$, (т.е.или $a_2 \neq 0$, или $b_2 \neq 0$, или $a \neq 0$, $b \neq 0$) можно однозначно разрешить при любых a_1, b_1. Таким образом , деление возножно, если делитель отличен от нуля: $\alpha_2 = (a_2, b_2) \neq 0 = (0, 0)$. Результат деления тогда определяется однозначно.

Итак, любое комплексное число можно записать следующим образом:

$$\alpha = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + ib$$

— алгебраическая форма комплексного числа, ранее нами введенная формально (по определению.)

2. Принцип аргумента регулярной функции

Рассмотрим функцию $f(z)$, регулярную в некоторой ограниченной области D с кусочно-гладкой границей Γ. Допустим, что у $f(z)$ в области D имеется конечное число изолированных особых точек — z_q, $q = 1, 2, ..., P$ — простых полюсов. Пусть, кроме того, функция $f(z)$ в N точках в области D обращается в нуль $f(z_k) = 0$, $k = 1, 2, ..., N$, кратность нулей z_k равна 1 (простые нули). С помощью вычисления интеграла по контуру Γ можно показать, что имеет место следующее соотношение:

$$N - P = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f'(t)}{f(t)} dt. \tag{51}$$

Эта формула верна и в том случае, если некоторое полюсы имеют порядок $m_q > 1$ и кратность нулей $n_k > 1$. Тогда под числами P и N понимаются количество полюсов с учетом их порядков и количество нулей с учетом их кратности:

$$P = \sum_{q=1}^{p} m_q, \; N = \sum_{k=1}^{l} n_k,$$

где p, l — число полюсов z_q и нулей z_k соответственно.

Отношение $\frac{f'(t)}{f(t)}$ называется логарифмической производной функции $f(z)$ на кривой Γ (t— точки на Γ), тогда $\frac{f'(t)}{f(t)} = d \ln f(t)$. Если в логарифмической функции выделить вещественную и мнимую части, то будем имет

$$N - P = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} d \ln f(t) = 12\pi i \int\limits_{\Gamma} d \ln |f(t)| + 12\pi \int\limits_{\Gamma} d \arg f(t). \tag{52}$$

Первое слагаемое в правой части (52) есть интеграл по замкнутой кривой Γ от дифференциала однозначной вещественной функции $\ln |f(t)|$ — равно нулю. Второе слагаемое — интеграл по замкнутой кривой Γ от дифференциала неоднозначной функции $\arg f(t)$ — представляет собою полное изменение (вариацию) этой функции при обходе кривой Γ (в положительном направлении.) Введем обозначение

$$\int\limits_{\Gamma} d \arg f(t) = \mathrm{Var}[\arg f(t)].$$

Из (52) при учете последних рассуждений имеем

$$12\pi \mathrm{Var}[\arg f(t)] = N - P, \tag{53}$$

т. е. вариация аргумента функции $f(t)$ при обходе замкнутой кривой Γ равна разности между числом нулей и количеством полюсов $f(z)$, с учетом их кратности и порядка в области D, умноженной на 2π. Это — принцип аргумента регулярной функции.

С помощью принципа аргумента можно получить простое доказательство основной теоремы алгебры: многочлен степени n с комплексными коэффициентами

$$P_n(z) = \sum_{k=0} n a_k z^k, \ a_n \neq 0, \ n > 0$$

имеет на комплексной плоскости n нулей.

3. Конформное отображение

Пусть функция $w = f(z)$ однолистна (осуществляет взаимнооднозначное отображение множества D в G) и регулярна в области D. Рассмотрим такую точку z_0 в D, что $f^{z_0} \neq 0$. Точке z_0 из D соответствует точка $f(z_0) = w_0$ в множестве G. Пусть некоторая гладкая кривая Γ_1 проходит в D через точку z_0. Вследствие однозначности отображения Γ_1 переходит в некоторую гладкую кривую γ_1 на множестве G плоскости комплексного переменного w, проходящую через точку w_0 (рис. 7),

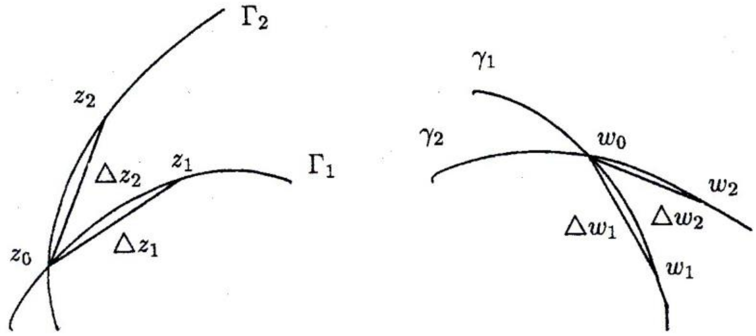

Рис. 7

т. е. можно считать $\gamma_1 = f(\Gamma_1)$.

Рассмотрим еще две кривые Γ_2 и $\gamma_2 = f(\Gamma_2)$, проходящие через те же точки z_0 и $w_0 = f(z_0)$ и не совпадающие с Γ_1 и γ_1. Выберем точки z_1 на Γ_1 и z_2 на Γ_2, они отображаются в точки w_1 на γ_1 и w_2 на γ_2. Будем перемещать точки z_1 и z_2 по кривым Γ_1 и Γ_2, приближая их к точке z_0 так, что $\triangle z_1 = z_1 - z_0 \to 0$ и $\triangle z_2 = z_2 - z_0 \to 0$. Ввиду непрерывности отображения точки w_1 и w_2 будут приближаться к w_0 и $\triangle w_1 = w_1 - z_0 \to 0$, $\triangle w_2 = w_2 - w_0 \to 0$.

По определению производной

$$f'(z_0) = \lim_{\triangle z_1 \to 0} \frac{\triangle w_1}{\triangle z_1} = \lim_{\triangle z_2 \to 0} = \frac{\triangle w_2}{\triangle z_2} = re^{i\alpha}, \tag{54}$$

где $r|f'(z_0)|$, $\alpha = \arg f'(z_0)$; по условию $r \neq 0$. Равенство (54) можно быть переписано в равносильной форме

$$|\triangle w_1| = r|\triangle z_1| + o_1(|\triangle z_1|), \ |\triangle w_2| = r|\triangle z_2| + o_1(|\triangle z_2|), \tag{55}$$

$$\alpha = \arg \frac{\triangle w_1}{\triangle z_1} + o_3(|\triangle z_1|) = \arg \frac{\triangle w_2}{\triangle z_2} + o_4(|\triangle z_2|)$$

или

$$\alpha = \arg \triangle w_1 - \arg \triangle z_1 + o_3(|\triangle z_1|) = \arg \triangle w_2 - \arg \triangle z_2 + o_4(|\triangle z_2|), \tag{56}$$

где $o_k(|\triangle z_j|)$ — бесконечно малые величины более высокого порядка, чем $|\triangle z_j|)$, $k = 1, ..., 4$, $j = 1, 2$.

Так как Γ_1, Γ_2 — произвольные кривые, то можно сделать следующие общие выводы.

Из равенств (55) следует, что линейные отрезки — модули приращений переменного z и его образы — переменного w в точках z_0 и w_0 с точностью до бесконечно малых величин более высокого порядка прямо пропорциональны, причем коэффициент пропорциональности $r = |f'(z_0)|$ не зависит от направления приращений. Этот факт выражается приближенным равенством

$$|\triangle w| \simeq r|\triangle z|,$$

при этом погрешность здесь будет тем меньше, чем меньше отрезки $|\triangle z|$ и $|\triangle w|$. Другими словами, при отображении $w = f(z)$ геометрические фигуры в достаточно малой окрестности точки

z_0 преобразуются в подобные геометрические фигуры в окрестности точки w_0. Коэффициент подобия — масштаб преобразования — равен r. Эту величину называют коэффициентом растяжения в точке z_0. Коэффициент растяжения не зависит от направления отрезка. Это свойство называется постоянством расстояния.

Соотношение (56) перепишем в виде

$$\arg \Delta w_1 - \arg \Delta w_2 \simeq \arg \Delta z_1 - \arg \Delta z_2, \tag{57}$$

т. е. с точностью до бесконечно малых величин более высокого порядка разность углов, которые составляют векторы Δw_1 и Δw_2 в плоскости w и векторы Δz_1 и Δz_2 в плоскости z с положительными направлениями соответствующих осей, совпадает. Если в (57) перейти к пределу при $\Delta z_1 \to 0$, $\Delta z_2 \to 0$ и обозначить $\varphi_1 = \lim \arg \Delta z_1$, $\Delta z_1 \to 0; \varphi_2 = \lim \arg \Delta z_2$, $\Delta z_2 \to 0$ — углы наклона касательных к кривым Γ_1 и Γ_2 в точке z_0; аналогично для касательных к кривым γ_1 и γ_2 в точке w_0 :

$$\Phi_1 = \lim_{\Delta w_1 \to 0} \arg \Delta w_1, \ \Phi_2 = \lim_{\Delta w_2 \to 0} \arg \Delta w_2,$$

то получаем

$$\Phi_1 - \Phi_1 = \varphi_1 - \varphi_2,$$

т. е. углы между кривыми образа, пересекающимися в точках z_0 и $w_0 = f(z_0)$, равны как по величине, так и по направлению. Этот факт называется свойством сохранения углов.

Полученные результаты позволяют выяснить геометрический смысл производной функции $f(z)$ — модуль производной является коэффициентом подобия линейных элементов в окрестности точек z_0 и w_0, а аргумент производной — углом поворота плоскости комплексного переменного z при отображении в плоскость w в окрестности точек z_0 и w_0.

Отображение области D плоскости комплексного переменного z на область G плоскости комплексного переменного w, при котором в каждой точке имеют место свойства постоянства растяжения и сохранения углов, называется конформным.