МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРОМЫШЛЕННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ДИЗАЙНА»

ВЫСШАЯ ШКОЛА ТЕХНОЛОГИИ И ЭНЕРГЕТИКИ

Н.Л.Белая, Е.Г.Иванова

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Учебно-методическое пособие
для студентов всех форм обучения

Санкт-Петербург
2018

ББК 22.1р
УДК 51(07)
О-627

Дифференциальные уравнения: учебно-методическое пособие для студентов всех форм обучения; Н.Л. Белая, Е.Г. Иванова. ВШТЭ СПбГУПТД. – СПб., 2018.-21 с.

В пособии приводится теоретический материал и рассматриваются решения типичных примеров. Предназначено для студентов технических специальностей всех форм обучения.

Рецензент: зав.кафедрой высшей математики № 1 СПбГЭТУ «ЛЭТИ», д-р физ.-мат. наук. Н.А.Бодунов

Подготовлено и рекомендовано к изданию кафедрой высшей математики ВШЭ СПбГУПТД (протокол № 2 от 1.10.2018 г.).

Утверждено к изданию методической комиссией ВШТЭ СПбГУПТД (протокол №1 от 2.10.2018 г.).

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом ВШТЭ СПбГУПТД в качестве учебно-методического пособия.

Редактор и корректор Басова В.А.
Техн. редактор Титова Л.Я. Темплан 2018 г., поз.66

Подп. к печати 20.10.2018 г. Формат 60x84/16. Бумага тип №1.
Печать офсетная. Объем 1,25 печ.л.; 1,25 уч.-изд.л.
Тираж 70 экз. Изд. № 66. Цена «С». Заказ

Ризограф Высшей школы технологии и энергетики СПбГУПТД, 198095, Санкт-Петербург, ул. Ивана Черных, 4.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящем пособии рассмотрены теоретические вопросы, соответствующие первому разделу второго семестра заочной индивидуальной формы обучения: элементы дифференциальных уравнений. Дается материал для подготовки к решению задач по дифференциальным уравнениям из контрольной работы №3. Рассматриваются типовые задания контрольных работ.

Настоящее пособие написано для помощи студентам заочной индивидуальной формы обучения в решении задач, а также лучшего усвоения ими теоретического материала по указанным темам и помощи в сдаче экзаменов и зачетов.

Для более детального и глубокого изучения материала по теме «Дифференциальные уравнения» авторы рекомендуют студентам изучить литературу, приведенную в библиографическом списке.

1. Основные определения

Определение 1: Дифференциальным уравнением называются уравнения, связывающие независимую переменную $\boldsymbol{x}$, искомую функцию $\boldsymbol{y}$, и ее производные до n-ного порядка:

$$F(x, y, y', y''\ldots y^{(n)})=0. \qquad (1.1)$$

Определение 2: Порядком дифференциального уравнения называют порядок наивысшей производной.

Определение 3: Решением дифференциального уравнения называется такая функция $y=y(x)$, которая при подстановке в уравнение (1.1) дает истинное равенство.

Определение 4: Дифференциальным уравнением 1-го порядка называется уравнение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию y и ее первую производную:

$$F(x, y, y')=0. \qquad (1.2)$$

Определение 5: Общим решением дифференциального уравнения первого порядка называется функция:

$$y=\varphi(x, C) \qquad (1.3)$$

Замечание: Константа С появляется при интегрировании уравнения 1-го порядка.

При решении дифференциального уравнения первого порядка имеем бесконечно много решений. Но если задать некоторые начальные условия, то получаем единственное решение.

Задача Коши - это задача решения дифференциального уравнения 1-го порядка $F(x, y, y')=0$ с начальными условиями: $y(x_0)=y_0$.

Решение задачи Коши единственно.

Пример: Решить уравнение $y'=2x$. Для решения проинтегрируем уравнение, получаем: $y=\int 2x\,dx=x^2+C$.

2. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Определение 1: Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными – это уравнение вида:

$$\boldsymbol{y'=f(x)\cdot g(y)}. \qquad (2.1)$$

Для решения запишем производную в виде:

$$y' = \frac{dy}{dx} \quad . \qquad (2.2)$$

Тогда уравнение (1) примет вид:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \quad . \qquad (2.3)$$

Проинтегрируем левую и правую части уравнения (2.3):

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx \; . \qquad (2.4)$$

Получаем решение уравнения (1) в неявном виде.

Кроме вида (1), уравнения с разделяющимися переменными могут задаваться следующим образом:

$$P_1(x)\cdot Q_1(y)dx+P_2(x)\cdot Q_2(y)dy=0. \qquad (2.5)$$

Переносим в левую часть все, что относится к переменной $\boldsymbol{x}$, а в правую сторону, все, что относится к $\boldsymbol{y}$. Получим следующее выражение:

$$\int \frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx = -\int \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy \; . \qquad (2.6)$$

Интегрируя, получаем решение уравнения.

Многие другие типы дифференциальных уравнений приводят к уравнениям с разделяющимися переменными, например, однородные уравнения вида: $y' = f(\frac{y}{x})$ (*) . В этом случае делаем замену переменной: $y = z\cdot x$**,** тогда $y' = z'\cdot x + z$ и уравнение (*) примет вид: $z'\cdot x + z = f(z)$. Переносим в правую часть *z,* получим $z'\cdot x = f(z) - z$, т.е. уравнение с разделяющимися переменными. Получаем решение $\int \frac{dz}{f(z)-z} = \int \frac{dx}{x}$.

3. Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка

Определение 1: Дифференциальные уравнения вида

$$y' + f(x)y = q(x) \tag{3.1}$$

называются линейными.

Решение линейных уравнений:

Пусть

$$\boldsymbol{y=uv,} \tag{3.2}$$

где функцию $\boldsymbol{v}$ выбираем специальным образом, а $\boldsymbol{u}$ в зависимости от $\boldsymbol{v}$. Тогда

$$\boldsymbol{y'=u'v+uv'} \tag{3.3}$$

Подставив (3.2), (3.3) в уравнение (3.1), получим

$$\boldsymbol{u'v+uv'+f(x)uv=q(x).} \tag{3.4}$$

Объединяем второе и третье слагаемые

$$\boldsymbol{u'v+u(v'+f(x)v)=q(x).} \tag{3.5}$$

Выбираем $\boldsymbol{v}$ таким образом, чтобы выражение в скобке было равно 0.

$$\boldsymbol{v'+f(x)v=0} \tag{3.6}$$

Следовательно, $\boldsymbol{v'=-f(x)v}$. Интегрируем это уравнение, как уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dv}{dx} = -f(x)v\,; \tag{3.7}$$

$$\frac{dv}{v} = -f(x)dx\,; \tag{3.8}$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int f(x)dx\,. \tag{3.9}$$

Интегрируя обе части, получаем: $\boldsymbol{v=v(x).}$

Подставляя в уравнение (5), с учетом (6), получаем:

$$\boldsymbol{u'v=q(x).} \tag{3.10}$$

Интегрируя (10), получаем решение $\boldsymbol{u=u(x).}$ В итоге получаем решение: $\boldsymbol{y=u(x)v(x).}$

4. Дифференциальные уравнения 2-го порядка.

Определение 1: Дифференциальным уравнением 2-го порядка называется уравнение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию y, ее первую и вторую производные:

$$\boldsymbol{F(x, y, y', y'')=0}. \tag{4.1}$$

Определение 2: Общим решением дифференциального уравнения второго порядка называется функция:

$$\boldsymbol{y=\varphi(x, C_1, C_2)}. \tag{4.2}$$

Замечание: Константы C_1, C_2 появляются при двукратном интегрировании уравнения 2-го порядка.

При решении дифференциального уравнения второго порядка имеем бесконечно много решений. Но если задать некоторые начальные условия, то получаем единственное решение.

Задача Коши - это задача решения дифференциального уравнения 1-го порядка:

$$\boldsymbol{F(x, y, y', y'')=0}.$$

С начальными условиями:

$$\boldsymbol{y(x_0)=y_0}.$$

$$\boldsymbol{y'(x_0)=y'_0}.$$

Решение задачи Коши единственно.

Пример: Решить уравнение $\boldsymbol{y''=6x}$. Для решения проинтегрируем уравнение, получаем: $\boldsymbol{y'=\int 6xdx=3x^2+C_1}$, чтобы получить ***y,*** проинтегрируем последнее уравнение: $\boldsymbol{y=\int(3x^2+C_1)dx=x^3+C_1x+C_2}$. Ответ: $\boldsymbol{y=x^3+C_1x+C_2}$.

5. Линейные однородные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами

Определение 1: Дифференциальные уравнения вида

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{5.1}$$

где p,q –константы, называются линейными однородными дифференциальными уравнениями 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

Решения уравнения (1) ищутся в виде $y = e^{kx}$ или $y = xe^{x}$.

Подставим $y = e^{kx}$, $y = ke^{kx}$, $y = k^2 e^{kx}$ в уравнение (5.1).

Получаем:

$$k^2 e^{x} + pke^{x} + qe^{x} = 0. \tag{5.2}$$

Если уравнение (2) разделить на e^{x}, то получим уравнение

$$k^2 + pk + q = 0. \tag{5.3}$$

Уравнение (3) называется характеристическим уравнением (1).

Решаем уравнение (3).

$$k_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{D}}{2}, \tag{5.4}$$

где $D = p^2 - 4q$.

Решение уравнения (1) зависит от знака дискриминанта.

Рассмотрим три случая.

1) $D > 0$. В этом случае $k_1 \neq k_2$, а решение уравнения (1) будет иметь вид:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}. \tag{5.5}$$

2) $D=0$. В этом случае $k_1 = k_2 = k$, а решение уравнения (1) будет иметь вид:

$$y = e^{kx}(C_1 x + C_2). \tag{5.6}$$

3) $D<0$. В этом случае вещественных решений нет, все корни комплексные: $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, а решение уравнения (1) будет иметь вид:

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

Замечание: Мы знаем, что нельзя извлекать корни из вещественных чисел, но на множестве комплексных чисел такие корни существуют, и $\sqrt{-1} = i$, где i – мнимая единица.

6. Линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами и со специальной правой частью

Определение 1: Дифференциальные уравнения вида

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{6.1}$$

где p,q,–константы, а f(x) – функция специального вида, называются линейными дифференциальными уравнениями 2-го порядка с постоянными коэффициентами и со специальной правой частью.

Решение уравнения (1) ищется в виде: $Y = y_0 + y_ч$, (6.2)

где y_0 –решение соответствующего однородного уравнения $y'' + py' + qy = 0$, а $y_ч$ – одно решение неоднородного уравнения, которое зависит от вида правой части. Рассмотрим, как зависит вид решения от вида правой части.

1) Пусть $f(x) = P_n(x)e^{ax}$. Тогда рассмотрим три случая:

1.1) ***a*** не совпадает с корнями характеристического уравнения, т.е. $a \neq k_1, a \neq k_2$. Тогда $y_ч = Q_n(x)e^{ax}$, где Q_n - полином n-ой степени с неопределенными коэффициентами.

1.2) ***a*** совпадает с одним из корней характеристического уравнения, т.е. $a = k_1$ или $a = k_2$. Тогда $y = xQ_n(x)e^{ax}$, где Q_n - полином n-ой степени с неопределенными коэффициентами.

1.3) ***a*** совпадает с обоими корнями характеристического уравнения, т.е. $a = k_1 = k_2$. Тогда $y = x^2 Q_n(x)e^{ax}$, где Q_n - полином n-ой степени с неопределенными коэффициентами.

2) Пусть $f(x) = e^{ax}(P_n(x)\cos bx + Q_l(x)\sin bx)$.

Тогда рассмотрим два случая:

2.1) $a + bi$ не совпадает с корнями характеристического уравнения, если они комплексные ($k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$), т.е. $a + bi \neq \alpha + \beta i$. Тогда частное решение примет вид:

$$y_ч = e^{ax}(R_m(x)\cos bx + T_m(x)\sin bx),$$

где $R_m(x)$ и $T_m(x)$ полиномы m-ной степени с неопределенными коэффициентами, а $m = \max(n, l)$.

2.2) $a + bi$ совпадает с корнями характеристического уравнения, если они комплексные ($k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$), т.е. $a + bi = \alpha + \beta i$. Тогда частное решение примет вид:

$$y_ч = xe^{ax}(R_m(x)\cos bx + T_m(x)\sin bx),$$

где $R_m(x)$ и $T_m(x)$ полиномы m-ой степени с неопределенными коэффициентами, а $m = \max(n, l)$.

Приложение

Примеры задач по дифференциальным уравнениям

Пример 1

Рассмотрим уравнение с разделяющимися переменными

$y'\cos x = (y+1)\sin x$, разделим обе части уравнения на $\cos x$, получаем:

$$y' = (y+1)\cdot\frac{\sin x}{\cos x}.$$

Представим $y' = \dfrac{dy}{dx}$, получаем:

$$\frac{dy}{dx} = (y+1)\cdot\frac{\sin x}{\cos x}.$$

Переносим в левую часть $\boldsymbol{y}$; а $\boldsymbol{x}$ – в правую.

$$\frac{dy}{y+1} = \frac{\sin x}{\cos x}dx.$$

Интегрируем правую и левую части:

$$\int\frac{dy}{y+1} = \int\frac{\sin x}{\cos x}dx,$$

получаем:

$$\ln|y+1| = -\int\frac{d\cos x}{\cos x};$$

$\ln|y+1| = -\ln|C\cdot tgx|$, или $y+1 = \dfrac{1}{C\cdot tgx}$.

Следовательно, решение уравнения будет иметь вид:

$$y+1 = \frac{1}{C\cdot tgx}.$$

Пример 2

Рассмотрим уравнение с разделяющимися переменными, записанное в виде: $tgx \cdot \sin^2 y \cdot dx + \cos^2 x \cdot ctgy \cdot dy = 0$.

Переносим в правую часть $\cos^2 x \cdot ctgy \cdot dy$, получаем:

$$tgx \cdot \sin^2 y \cdot dx = -\cos^2 x \cdot ctgy \cdot dy,$$

Все, относящееся к x, оставляем в правой части, а к y – в левую часть:

$$\frac{tgx \cdot dx}{\cos^2 x} = -\frac{ctgy \cdot dy}{\sin^2 y} ctgy.$$

Интегрируя это уравнение

$$\int \frac{tgx \cdot dx}{\cos^2 x} = -\int \frac{ctgy \cdot dy}{\sin^2 y},$$

получаем решение:

$$tg^2 x = ctg^2 y + C.$$

Пример 3

Рассмотрим однородное уравнение, приводящее к уравнению с разделяющимися переменными:

$y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$. Делаем замену переменной: $y = z \cdot x$, тогда $y' = z' \cdot x + z$. Тогда $z' \cdot x + z = e^z + z$. Тогда z в левой и правой части сокращаются, получаем уравнение с разделяющимися переменными:

$\frac{dz}{e^z} = \frac{dx}{x}$, или $\int e^{-z} dz = \int \frac{dx}{x}$. Получаем решение: $e^{-z} = \ln\left|\frac{C}{x}\right|$, или

$z = -\ln\ln\left|\frac{C}{x}\right|$. Получаем окончательное решение:

$$y = -x \cdot \ln\ln\left|\frac{C}{x}\right|.$$

Пример 4

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение I порядка.

$x^2 y' = 2xy + 3$. Приведем это уравнение к виду: $y' + f(x)y = q(x)$. Для этого перенесем в левую часть $2xy$ и разделим на x^2. Получаем: $y' - 2\frac{y}{x} = \frac{3}{x^2}$ (*).

Выбираем $y = u \cdot v$, тогда $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$. Подставляем в (*), получаем:

$$u' \cdot v + u \cdot v' - 2\frac{u \cdot v}{x} = \frac{3}{x^2},$$

Объединяем второе и третье слагаемое левой части:

$$u' \cdot v + u \cdot (v' - 2\frac{\cdot v}{x}) = \frac{3}{x^2}. \text{ (**)}$$

Функцию $v = v(x)$ выбираем таким образом, что выражение в скобке равно 0, т.е. $v' - 2\frac{v}{x} = 0$. Это уравнение с разделяющимися переменными, решаем его:

$v' = 2\frac{v}{x}$ или $\frac{dv}{dx} = 2\frac{v}{x}$, разделяем переменные: $\frac{dv}{v} = 2\frac{dx}{x}$,

интегрируем обе части уравнения: $\int\frac{dv}{v} = 2\int\frac{dx}{x}$, следовательно, $\ln v = 2\ln x$ или $v = x^2$.

Возвращаемся к уравнению (**). Так как выражение в скобке равно 0, то $u'v = \frac{3}{x^2}$, подставим полученную функцию $v = x^2$. Тогда получаем $u'x^2 = \frac{3}{x^2}$. Отсюда получаем: $u' = \frac{3}{x^4}$. Тогда $u = \int\frac{3}{x^4}dx = -\frac{1}{x^3} + C$. Окончательно получаем решение уравнения:

$$y = u \cdot v = x^2(-\frac{1}{x^3} + C) = -\frac{1}{x} + Cx^2.$$

Замечание: В следующих примерах рассмотрим линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами с различными дискриминантами.

Пример 5

1) Случай, когда D>0.

Рассмотрим: $y'' + 3y' + 2y = 0$. Запишем соответствующее характеристическое уравнение: $k^2 + 3k + 2 = 0$. $D = 3^2 - 4\cdot 2 = 1$, а корни уравнения, $k_1 = -1; k_2 = -2$, вещественные и различные. Тогда решение уравнения будет иметь вид: $y = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{-3x}$.

2) **С**лучай, когда D=0.

Рассмотрим $y'' + 6y' + 9y = 0$. Характеристическое уравнение: $k^2 + 6k + 9 = 0$, $D = 6^2 - 4 \cdot 9 = 0$, а корни $k_1 = k_2 = -3$ - вещественные и равные. Тогда решение уравнения будет иметь вид: $y = (C_1 \cdot x + C_2) \cdot e^{-3x}$.

3) Случай, когда D<0.

Рассмотрим $y'' + 4y' + 5y = 0$. Характеристическое уравнение: $k^2 + 4k + 5 = 0$, $D = (-4)^2 - 4 \cdot 5 = -4$, $\sqrt{D} = \sqrt{-4} = 2i$, а корни уравнения – комплексные: $k_{1,2} = \dfrac{-4 \pm 2i}{2}, k_{1,2} = -2 \pm i$. Тогда решение уравнения будет иметь вид: $y = e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$.

Замечание: В следующих примерах рассмотрим линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами со специальной правой частью.

Пример 6

$y'' + 4y' - 12y = 8 \sin 2x$ (*), при начальных условиях $y(0) = 0, y'(0) = 0$.

Решаем сначала соответствующее однородное уравнение: $y'' + 4y' - 12y = 0$, характеристическое уравнение будет иметь вид: $k^2 + 4k - 12 = 0$, корни: $k_1 = -6; k_2 = 2$, а общее решение однородного уравнения $y_0 = C_1 \cdot e^{-6x} + C_2 \cdot e^{2x}$.

Для того чтобы записать частное решение неоднородного уравнения (*), рассмотрим правую часть (*). $f(x) = 8\sin 2x$, тогда частное решение (*) будет иметь вид: $y_ч = A\cos 2x + B\sin 2x$, где A, B – неопределенные коэффициенты. Для того чтобы их найти, находим первую и вторую производные и подставляем их в уравнение (*).

$$y_ч' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x,$$

$$y_ч'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x.$$

$$\begin{aligned}&-4A\cos 2x - 4B\sin 2x + \\ &4(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x) \\ &-12(A\cos 2x + B\sin 2x) = 8\sin 2x\end{aligned}.$$

Собирая коэффициенты перед $\sin 2x, \cos 2x$, получим:

$$-8(2A - B)\cos 2x - 8(2B - A)\sin 2x = 8\sin 2x.$$

Разделив на (-8), получим:

$$(2A - B)\cos 2x + (2B - A)\sin 2x = -\sin 2x.$$

Приравнивая коэффициенты при $\sin 2x, \cos 2x$, получим

$$2A - B = 0; 2B - A = -1.$$

Решая полученную систему уравнений, получим $A = -\dfrac{1}{3}; B = -\dfrac{2}{3}$.

Подставив полученные коэффициенты в частное решение, получим:

$$y_ч = -\frac{1}{3}\cos 2x - \frac{2}{3}B\sin 2x,$$

и общее решение (*) будет записываться в виде:

$$Y(x) = C_1 e^{6x} + C_2 e^{-2x} - \frac{1}{3}\cos 2x - \frac{2}{3}\sin 2x. \quad (**)$$

Для нахождения констант C_1 , C_2 рассмотрим начальные условия $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$. Для это найдем производную от общего решения.

$$Y'(x) = 6C_1 e^{6x} - 2C_2 e^{-2x} + \frac{2}{3}\sin 2x - \frac{4}{3}\cos 2x. \quad (***)$$

Подставим в (**) и (***) $x=0$. Получаем:

$$Y(0) = C_1 e^{6\cdot 0} + C_2 e^{-2\cdot 0} - \frac{1}{3}\cos 0 - \frac{2}{3}\sin 0 =$$

$$= C_1 + C_2 - \frac{1}{3} = 0;$$

;

$$Y'(0) = 6C_1 e^{6\cdot 0} - 2C_2 e^{-2\cdot 0} + \frac{2}{3}\sin 0 - \frac{4}{3}\cos 0 =$$

$$= 6C_1 - 2C_2 - \frac{4}{3} = 0.$$

Получаем систему уравнений:

$\begin{cases} C_1 + C_2 = \frac{1}{3} \\ 3C_1 - C_2 = \frac{2}{3} \end{cases}$, решая эту систему, получаем $C_1 = \frac{1}{4}, C_2 = \frac{1}{12}$.

И, окончательно, решение уравнения (*) при начальных условиях в форме Коши, будет иметь вид:

$$Y(x)=\frac{1}{4}e^{6x}+\frac{1}{12}e^{-2x}-\frac{1}{3}\cos 2x-\frac{2}{3}\sin 2x.$$

Пример 7

$y''+y'-6y=x\cdot e^{2x}$ (*).

Решим сначала соответствующее однородное уравнение:

$y''+y'-6y=0$, $k_1=-3; k_2=2$, а решение будет: $y_0=C_1\cdot e^{-3x}+C_2\cdot e^{2x}$.

Для того чтобы записать частное решение неоднородного уравнения, рассмотрим правую часть (*) $f(x)=x\cdot e^{2x}$, в этой правой части $e^{ax}=e^{2x}\Rightarrow a=2=k_2$, тогда частное решение (*) будет иметь вид: $y_ч=x\cdot e^{2x}(Ax+B)$, где A, B – неопределенные коэффициенты. Находим первую и вторую производные от частного решения:

$$y_ч=e^{2x}(Ax^2+Bx).$$

$$y'_ч=e^{2x}(2Ax^2+2(A+B)x+B),$$

$$y''_ч=2e^{2x}(2Ax^2+2(2A+B)x+A+2B).$$

Подставим частное решение и его производные в уравнение (*):

$$2e^{2x}(2Ax^2+2(2A+B)x+A+2B)+$$
$$e^{2x}(2Ax^2+2x(A+B)+B)-6e^{2x}(Ax^2+Bx)=x\cdot e^{2x}.$$

Разделив обе части уравнения e^{2x}, получим:

$$2(2Ax^2+2(2A+B)x+A+2B)+$$
$$(2Ax^2+2x(A+B)+B)-6(Ax^2+Bx)=x.$$

В результате получаем: $10Ax+2A+5B=x$. Приравнивая коэффициенты при равных степенях, получаем: $10A=1; 2A+5B=0$. Отсюда находим неопределенные коэффициенты: $A=0.1; B=-0.04$. Частное решение примет вид:

$y_ч = x\cdot e^{2x}(0.2x-0.04)$. И, окончательно, находим общее решение:

$$Y=C_1e^{-3x}+C_2e^{2x}+x\cdot e^{2x}(0.2x-0.04).$$

Библиографический список

1. Задачи и упражнения по математическому анализу для ВТУЗов/ под ред. Б.П.Демидовича. - М.: Интеграл-Пресс, 1997.

2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для ВТУЗов – М.: Наука, 2010.

3. Сборник задач по высшей математике. I курс: С контрольными работами/ сост.: К.Н. Лунгу, Д.Т.Письменный, С.Н.Федин, Ю.А. Шевченко – М.: Айрис-Пресс, 2008.

4. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. Полный курс. – М.: Айрис-Пресс, 2009.

5. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике. – СПб., М., Краснодар: Лань, 2005.

Оглавление

2. РЯДЫ.

2.1 Числовые ряды.

Определение 1: Рядом называется бесконечная сумма чисел

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, . \qquad (2.1.1)$$

Числа $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n \cdots$ называются членами ряда (2.1.1).

Определение 2: Сумму ***n*** первых членов ряда называют частичной суммой ряда:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \, . \qquad (2.1.2)$$

Определение 3: Если существует конечный предел частичной суммы ряда,

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n \, , \qquad (2.1.3)$$

то говорят, что ряд (1) ***сходится***, а S – сумма ряда.

Определение 4: Если

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \infty \, , \qquad (2.1.4)$$

то ряд (1) называется расходящимся.

Пример: Рассмотрим ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$, Этот ряд состоит из членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом $b_1 = \frac{1}{2}$ и знаменателем $q = \frac{1}{2}$. Найдем сумму по формуле: $S = \frac{b_1}{1-q}$. Для данного примера получаем $S = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$. Сумма ряда, являющегося бесконечно убывающей геометрической прогрессией, равна 1.

__2.2 Необходимый признак сходимости ряда.__

Пусть дан числовой ряд

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad (2.2.1)$$

__Необходимый признак сходимости ряда:__ Если числовой ряд (2.2.1) сходится, то ***n***-ный член ряда стремится к 0, т.е. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

__Замечание1:__ Обратное верно не всегда: если $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд может быть как сходящимся, так и расходящимся.

__Пример1:__ Рассмотрим ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \qquad (2.2.2)$$

называемый гармоническим.

Хотя $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, тем не менее, ряд является расходящимся.

Пример2: Рассмотрим ряд

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\,, \qquad (2.2.3)$$

В этом ряде $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$ и ряд является сходящимся.

Замечание 2: Стремление к ***0*** ***n***-ного члена ряда не означает сходимость ряда, но при этом, если $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq 0$, то ряд является расходящимся.

Ответ на вопрос о сходимости числового ряда (1) дают достаточные признаки сходимости. Один из самых применимых признаков является признак Даламбера.

2.3 Признак сходимости Даламбера.

Для числового ряда

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}a_n \qquad (2.3.1)$$

Рассмотрим $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$.

Сходимость ряда зависит от значения $\boldsymbol{l}$.

Если $\begin{cases} l < 1, сходится \\ l > 1, расходится \\ l = 1, ? \end{cases}$.

<u>Пример 1:</u> Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ с помощью признака Даламбера. $a_n = \frac{n}{3^n}$, тогда $a_{n+1} = \frac{n+1}{3^{n+1}} = \frac{n+1}{3^n \cdot 3}$.

Рассмотрим $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)}{3^n \cdot 3}}{\frac{n}{3^n}} = \frac{1}{3} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{3} < 1$. Ряд сходится.

2.4 Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница.

Определение 1: Знакочередующимся рядом называют ряд вида:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots(-1)^n a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n \ . \qquad (2.4.1)$$

Определение 2: Рядом из абсолютных значений называют ряд, состоящий из абсолютных значений ряда (1):

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + \ldots |a_n| + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \ . \qquad (2.4.2)$$

Определение 3: Говорят, что ряд (1) сходится абсолютно, если сходится ряд из его абсолютных значений.

Если ряд (2)расходится, то для исследования сходимости ряда (2.4.1) используют признак Лейбница.

Признак Лейбница:

Если ряд из абсолютных значений (2.4.2) расходится, но при этом выполняются условия:

1) $|a_1| > |a_2| > |a_3| > \ldots > |a_n| > \ldots$,

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,

тогда ряд (1) ***сходится условно***. Если условия (1), (2) не выполняются, то ряд (1) расходится.

Пример: Исследуем на сходимость ряд

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-...(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+...=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}. \qquad (*)$$

Соответствующим положительным рядом будет гармонический расходящийся ряд: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+...=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Выясним, будет ли ряд (*) условно сходиться. Для этого рассмотрим условия (1),(2).

1) $1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>...>\frac{1}{n}>...$, выполняется

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, выполняется. Ряд (*) сходится условно.

2.5 Степенные ряды. Область сходимости. Формулы Тейлора и Маклорена.

Определение 1: Степенными рядами называются ряды вида:

$$c_0+c_1(x-a)+...+c_n(x-a)^n+...=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n \qquad (2.5.1)$$

Определение 2: Интервалом сходимости ряда (1) называется такой интервал $|x-a|<R$ с центром в точке $x=a$, внутри которого ряд сходится абсолютно, а вне интервала расходится. Вопрос о сходимости на границе решается с помощью признака Лейбница.

Определение 3: Если функция $f(x)$ допускает в некоторой окрестности $|x-a|<R$ точки a разложение в степенной ряд по

степеням $(x-a)$, то такой ряд называется рядом Тейлора и записывается:

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+...+\frac{f^{(n)}(a)(}{n!}(x-a)^n+... \qquad (2.5.2)$$

<u>Определение 4:</u> Рядом Маклорена называют ряд Тейлора при $a=0$:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+... \qquad (2.5.3)$$

<u>2.6 Разложение в ряд Маклорена функций</u>

$$y=e^x,\ y=\cos x,\ y=\sin x.$$

Для разложения в ряд Маклорена элементарных функций $y=e^x,\ y=\cos x,\ y=\sin x$ запишем сам ряд Маклорена:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+... \qquad (2.6.1)$$

1. Разложим в ряд Маклорена функцию $y=e^x$ или $f(x)=e^x$.

Тогда $f(0)=e^0=1, f'(0)=e^0=1,..., f^{(n)}(0)=e^0=1$.

Подставляем полученные результаты в (6.1), получаем:

$$f(x)=1+x+\frac{1}{2!}x+...+\frac{1}{n!}x^n+... \qquad (2.6.2)$$

Или окончательно:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \qquad (2.6.3)$$

2. Разложим в ряд Маклорена функцию $y = \cos x$ или $f(x) = \cos x$. Тогда

$$f(0) = \cos 0 = 1, f'(0) = -\sin 0 = 0, f''(0) = -\cos 0 = -1$$
$$f'''(0) = \sin(0) = 0, f''''(0) = \cos 0 = 1.$$

Подставляем полученные результаты в (6.1), получаем:

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \ldots \qquad (2.6.4)$$

Или окончательно:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \qquad (2.6.5)$$

3. Разложим в ряд Маклорена функцию $y = \sin x$ или $f(x) = \sin x$. Тогда

$$f(0) = \sin 0 = 0, f'(0) = \cos 0 = 1, f''(0) = -\sin 0 = 0,$$
$$f'''(0) = -\cos(0) = -1, f''''(0) = \sin 0 = 0, f'''''(0) = \cos 0 = 1.$$

Подставляем полученные результаты в (6.1), получаем:

$$f(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \ldots \qquad (2.6.6)$$

Или окончательно:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \qquad (2.6.7)$$

II. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА.

1. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ.

1.1 Классическое определение вероятности.

В теории вероятности рассматриваются события, которые бывают невозможные, достоверные и случайные.

Определение 1: Событие называется невозможным и обозначается Ø, если оно не произойдет ни при каких условиях.

Определение 2: Событие называется достоверным и обозначается Ω, если оно произойдет в любом случае.

Определение 3: Событие называется случайным и обозначается заглавными латинскими буквами A,B,C…, если оно может произойти или не произойти в зависимости от случайных факторов.

Определение 4. Классическое определение вероятности: Вероятность события A равна отношению числа благоприятных исходов события A к общему числу исходов:

$$p(A)=\frac{m}{n}, \qquad (1.1.1)$$

Где m – благоприятное число исходов события А, n – общее число исходов события А.

Замечание: Вероятность обозначается латинской буквой Р.

Исходя из классического определения вероятности, вероятность невозможного события $P(\emptyset)=0$. В этом случае нет благоприятных исходов, значит $m=0$. С другой стороны, вероятность достоверного события $P(\Omega)=1$. В этом случае все исходы благоприятные и $m=n$. Таким образом, вероятность случайного события лежит между этими двумя значениями: $0<P(A)<1$.

1.2 Вероятность произведения двух событий.

Определение 1: Произведением двух событий А,В называется совместное событие $A\cdot B$. Знак умножение означает союз «***и***», т.е.$A\cdot B = A и B$.

Определение 2: Случайные события бывают зависимыми и независимыми.

Например, событие А выпадение герба при бросании монеты и В выпадение шестерки на игральном кубике – два независимых события. Другой пример: мы последовательно достаем из колоды две карты. Событие А – выбор дамы, и событие В – выбор после этого бубнового туза – являются зависимыми событиями.

Определение 3: Условная вероятность $P_A(B)$ называется вероятность события В при условии, что событие А уже произошло.

Теорема умножения вероятностей:

1) Если события А и В независимые, то вероятность совместного появления этих двух событий равна произведению их вероятностей:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) \qquad (1.2.1)$$

2) Если события А и В зависимые, то вероятность совместного появления этих двух событий равна произведению вероятности одного из этих событий на условную вероятность другого, при условии, что первое событие наступило:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B) \qquad (1.2.2)$$

1.3 Вероятность суммы двух событий.

Определение 1: Суммой двух событий А,В называется появление одного из двух событий ***А*** или ***В***. Знак суммы означает союз «***или***», т.е. ***А+В=АилиВ.***

Определение 2: Случайные события бывают совместными и несовместными.

Теорема сложения вероятностей:

1) Если события А и В несовместные, то вероятность появления одного из этих двух событий, безразлично какого, равна сумме их вероятностей:

$$P(A+B)=P(A)+P(B) \qquad (1.3.1)$$

2) Если события А и В совместные, то вероятность появления одного из этих двух событий, безразлично какого, равна сумме их вероятностей без вероятности их совместного появления:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B) \qquad (1.3.2)$$

1.4 Повторные испытания. Сочетания. Формула Бернулли.

Если проводятся испытания, при которых вероятность появления события А в каждом испытании не зависит от исходов в других испытаниях, то такие испытания называются независимыми относительно события А. Рассмотрим случай, когда проводятся $\boldsymbol{n}$-независимых испытаний, с вероятностью $P(A)=p$, и вероятностью противоположного события $P(\overline{A})=q$. В этих испытаниях событие А происходит ровно $\boldsymbol{k}$ раз. Тогда вероятность того, что в $\boldsymbol{n}$-независимых испытаниях событие А происходит ровно $\boldsymbol{k}$ раз находится по формуле:

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k} \quad , \qquad (1.4.1)$$

где C_n^k - число сочетаний из $\boldsymbol{n}$ по $\boldsymbol{k}$ вычисляется по формуле:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} \quad . \qquad (1.4.2)$$

Формула (1.4.1)называется формулой Бернулли.

2. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ.

$$\frac{dy}{dx}$$