МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРОМЫШЛЕННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ДИЗАЙНА»

ВЫСШАЯ ШКОЛА ТЕХНОЛОГИИ И ЭНЕРГЕТИКИ

Кафедра высшей математики

МАТЕМАТИКА

Методические указания и контрольные задания

для студентов заочной формы ускоренного обучения

II семестр

Санкт-Петербург

2018

ББК 22.1р
УДК 51(07)
О-627

Математика: методические указания и контрольные задания для студентов заочной формы ускоренного обучения. II семестр / сост.: Е.Г. Иванова, И.Э. Апакова, И.Ю. Малова, М.Э. Юдовин; ВШТЭ СПбГУПТД. СПб., 2018. – 32 с.

Приводится теоретический материал с разобранными решениями типичных примеров. Предназначено для студентов заочной формы ускоренного обучения всех направлений (II семестр).

Рецензент: зав. кафедрой высшей математики № 1 СПбГЭТУ «ЛЭТИ» д-р физ.-мат. наук Н.А. Бодунов.

Подготовлено и рекомендовано к изданию кафедрой высшей математики ВШТЭ СПбГУПТД (протокол № 6 от 06.02.2018 г.).

Утверждено к изданию методической комиссией ВШТЭ СПбГУПТД (протокол № 3 от 07.02.2018 г.).

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящих методических указаниях рассмотрены некоторые примеры из контрольных заданий второго семестра заочной ускоренной формы обучения по следующим темам:

1) Обыкновенные дифференциальные уравнения;
2) Кратные и криволинейные интегралы;
3) Числовые и функциональные ряды;
4) Случайные события;
5) Случайные величины;
6) Элементы математической статистики.

Дается вкратце теоретический материал для подготовки к решению задач.

Настоящие методические указания написаны для помощи в решении заданий студентам заочной ускоренной формы обучения. Для более детального и глубокого освоения материала авторы рекомендуют студентам изучить литературу, приведенную в библиографическом списке.

1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Определение 1: Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию y и ее производные до n-ого порядка:

$$F(x, y, y', y'' \ldots y^{(n)})=0.$$

Определение 2: Порядком дифференциального уравнения называют порядок наивысшей производной, входящей в это уравнение.

Определение 3: Решением дифференциального уравнения называется такая функция $y = y(x)$, что при подстановке в данное уравнение получается истинное равенство.

Определение 4: Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными – это уравнения вида:

$$y' = f(x) \cdot g(y).$$

Для решения этого уравнения запишем производную в виде:

$$y' = \frac{dy}{dx},$$

подставляя это выражение в рассматриваемое уравнение, получим:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx.$$

Проинтегрируем левую и правую части данного равенства:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx.$$

Полученное соотношение представляет собой общее решение рассматриваемого уравнения в неявном виде.

Пример 1:

Рассмотрим уравнение с разделяющимися переменными:

$$y' \cos x = (y+1) \sin x,$$

разделив обе части уравнения на $\cos x$, получаем:

$$y' = (y+1) \cdot \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Представим $y' = \dfrac{dy}{dx}$, получаем:

$$\frac{dy}{dx} = (y+1) \cdot \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Переносим в левую часть $(y+1)$; а dx – в правую:

$$\frac{dy}{y+1} = \frac{\sin x}{\cos x} dx.$$

Интегрируем правую и левую части:

$$\int \frac{dy}{y+1} = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx,$$

получаем: $$\ln|y+1| = -\int \frac{d\cos x}{\cos x},$$

$$\ln|y+1| = -\ln|C \cdot tgx|,$$

или $$y + 1 = \frac{1}{C \cdot tgx}.$$

Следовательно, решение уравнения будет иметь вид:

$$y+1 = \frac{1}{C \cdot tgx}.$$

Определение 5: Дифференциальные уравнения вида

$$y'' + py' + qy = 0,$$

где p и q – действительные числа, называются линейными однородными дифференциальными уравнениями (ЛОДУ) 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

Уравнение $k^2 + pk + q = 0$ называется характеристическим уравнением для данного ЛОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Находим его корни по формуле:

$$k_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{D}}{2},$$

где $D = p^2 - 4q$ - дискриминант характеристического уравнения.

Рассмотрим три случая.

1) $D > 0$. В этом случае $k_1 \neq k_2$, а решение ЛОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами будет иметь вид:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.$$

2) $D=0$. В этом случае $k_1 = k_2 = k$, а решение ЛОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами будет иметь вид:

$$y = e^{kx}(C_1 x + C_2).$$

3) $D<0$. В этом случае вещественных корней нет, все корни комплексные: $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, а решение ЛОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами будет иметь вид:

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

В следующих примерах рассмотрим линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами с различными дискриминантами.

Пример 2.1. *Случай, когда D>0.*

Рассмотрим: $y'' + 3y' + 2y = 0$. Запишем соответствующее характеристическое уравнение: $k^2 + 3k + 2 = 0$. $D = 3^2 - 4 \cdot 2 = 1$, а корни уравнения $k_1 = -1; k_2 = -2$ - вещественные и различные. Тогда решение уравнения будет иметь вид: $y = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{-3x}$.

Пример 2.2. *Случай, когда D=0.*

Рассмотрим $y'' + 6y' + 9y = 0$. Характеристическое уравнение: $k^2 + 6k + 9 = 0$, $D = 6^2 - 4 \cdot 9 = 0$, а корни $k_1 = k_2 = -3$ - вещественные и равные. Тогда решение уравнения будет иметь вид: $y = (C_1 \cdot x + C_2) \cdot e^{-3x}$.

Пример 2.3. *Случай, когда D<0.*

Рассмотрим $y'' + 4y' + 5y = 0$. Характеристическое уравнение: $k^2 + 4k + 5 = 0$, $D = (-4)^2 - 4 \cdot 5 = -4$, $\sqrt{D} = \sqrt{-4} = 2i$, а корни уравнения – комплексные: $k_{1,2} = \dfrac{-4 \pm 2i}{2}, k_{1,2} = -2 \pm i$. Тогда решение уравнения будет иметь вид: $y = e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$.

2. КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

2.1. Двойные интегралы

Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x, y)$.

Определение 1: Интегральной суммой называется выражение:

$\sum\limits_{i,j=1}^{n} f(x_i, y_j)\Delta x_i \Delta y_j$, где функция $z = f(x, y)$ определена и непрерывна в области D.

Область D разбивается на части $S_{i,j}$. В каждой из этих частей выбирается точка $M(x_i, y_j)$.

Определение 2: Если существует конечный предел от интегральной суммы при любом произвольном разбиении области D на части и произвольном выборе точек $M(x_i, y_j)$, то такой предел называется двойным интегралом:

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i,j=1}^{n} f(x_i, y_j) \Delta x_i \Delta y_j = \iint_D f(x, y) dxdy,$$

где $\lambda = \max S_{i,j}$.

Пример:

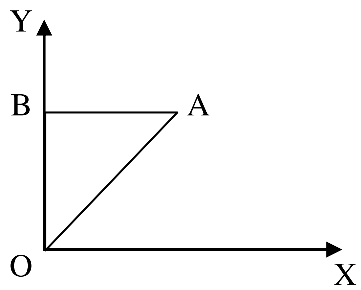
Вычислить двойной интеграл

$$\iint_D xdxdy,$$

где область D - треугольник OAB с вершинами $O(0,0)$, $A(1,1)$, $B(0,1)$.

Решение:

Нарисуем область D:



Перейдем от двойного интеграла к повторному. Для этого определим пределы изменения для переменных x и y: $0 \le x \le 1$, $x \le y \le 1$. Тогда

$$\iint_D xdxdy = \int_0^1 xdx \int_x^1 dy.$$

Интегрируя сначала внутренний интеграл, а затем внешний, получаем:

$$\int_0^1 xdx\int_x^1 dy = \int_0^1 xdx \cdot y\Big|_x^1 = \int_0^1 x(1-x)dx = \int_0^1 (x-x^2)dx =$$

$$(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3})\Big|_0^1 = \frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}.$$

2.2. Тройные интегралы

Рассмотрим функцию трех переменных $u = f(x, y, z)$.

Определение 1: Интегральной суммой называется выражение:

$$\sum_{i,j,k=1}^{n} f(x_i, y_j, z_k)\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k,$$

где функция $u = f(x, y, z)$ определена и непрерывна в области D.

Область D разбивается на части $V_{i,j.k}$. В каждой из этих частей выбирается точка $M(x_i, y_j, z_k)$.

Определение 2: Если существует конечный предел от интегральной суммы при любом произвольном разбиении области D на части и произвольном выборе точек $M(x_i, y_j, z_k)$, то такой предел называется тройным интегралом:

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i,j,k=1}^{n} f(x_i, y_j, z_k)\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k = \iiint_D f(x, y, z)dxdydz,$$

где $\lambda = \max V_{i,j,k}$.

Пример:

Вычислить $\iiint\limits_D x^3 y^2 z dxdydz$, где область V определяется неравенствами: $0 \le x \le 1, 0 \le y \le x, 0 \le z \le xy$.

Решение:

Для решения перейдем к повторным интегралам:

$$\iiint\limits_D x^3 y^2 z dxdydz = \int\limits_0^1 x^3 dx \int\limits_0^x y^2 dy \int\limits_0^{xy} z dz.$$

Находим по очереди сначала внутренние интегралы по переменным y и z, а затем внешний интеграл по переменной x:

$$\int\limits_0^1 x^3 dx \int\limits_0^x y^2 dy \int\limits_0^{xy} z dz = \int\limits_0^1 x^3 dx \int\limits_0^x y^2 dy \cdot \frac{z^2}{2}\Big|_0^{xy} =$$

$$\int\limits_0^1 x^3 dx \int\limits_0^x y^2 dy \cdot \frac{(xy)^2}{2} = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 x^5 dx \int\limits_0^x y^4 dy = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 x^5 dx \cdot \frac{y^5}{5}\Big|_0^x =$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^1 x^5 dx \cdot \frac{x^5}{5} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\int\limits_0^1 x^{10} dx = \frac{1}{10}\cdot\frac{x^{11}}{11}\Big|_0^1 = \frac{1}{110}.$$

2.3. Криволинейные интегралы 1-го рода

Рассмотрим функцию $z = f(x, y)$, которая определена и непрерывна

на некоторой гладкой кривой C, заданной уравнением: $y = \varphi(x)$, где

$a \le x \le b$. Разбиваем кривую на дуги M_{i-1}, M_i с длинами $\Delta s_i, i = \overline{1,n}$.

Определение 1: Если существует конечный предел от интегральной суммы при любом произвольном разбиении кривой C на части и произвольном выборе точек $M \ (x_i, y_i)$ то такой предел называется криволинейным интегралом 1-го рода:

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta s_i = \int_C f(x, y)ds, \quad \text{где } \lambda = \max_{1 \le i \le n} \Delta s_i .$$

Криволинейный интеграл 1-го рода вычисляется по формуле:

$$\int_C f(x, y)ds = \int_a^b f(x, \varphi(x))\sqrt{1 + (\varphi'(x))^2}\,dx.$$

Пример: Вычислить криволинейный интеграл $\int_C \frac{ds}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$, если C - отрезок прямой, соединяющий точки $O(0,0)$ и $A(1,2)$.

Решение:

Уравнение прямой, содержащей отрезок $[O, A]$, имеет вид: $y = 2x$, а $y' = 2$.

Подставляя в приведенную выше формулу выражения для y и y', будем иметь:

$$\int_C \frac{ds}{\sqrt{x^2+y^2+4}} = \int_0^1 \frac{\sqrt{1+2^2}}{\sqrt{x^2+(2x)^2+4}}dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5x^2+4}}dx =$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+\frac{4}{5}}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+\frac{4}{5}}\right|\Big|_0^1 = \ln\left|\frac{\sqrt{5}+3}{2}\right|.$$

.

2.2. Криволинейные интегралы 2-го рода

Рассмотрим функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, которые определены и непрерывны на некоторой гладкой кривой AB, заданной уравнением: $y=\varphi(x)$, где $a \le x \le b$, и точка A имеет абсциссу $x = a$, а точка B - абсциссу $x = b$.

Определение 1: Криволинейным интегралом 2-го рода называются интегралы вида: $\int\limits_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$

Криволинейный интеграл 2-го рода вычисляется по формуле:

$$\int\limits_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_a^b (P(x, y) + Q(x, y)\varphi'(x))dx.$$

Пример:

Вычислить криволинейный интеграл:

$$\int\limits_{AB} (x^2 - 2xy)dx + (2xy + y^2)dy,$$

где AB $(A(1,1), B(2,4))$ – дуга параболы $y = x^2$:

$$\int\limits_{AB} (x^2 - 2xy)dx + (2xy + y^2)dy =$$

$$= \int\limits_1^2 ((x^2 - 2x \cdot x^2) + (2x \cdot x^2 + (x^2)^2) \cdot 2x)dx =$$

$$= \int\limits_1^2 (x^2 - 2x^3 + 4x^4 + 2x^5)dx = (\frac{x^3}{3} - \frac{2x^4}{4} + \frac{4x^5}{5} + \frac{2x^6}{6})\Big|_1^2 =$$

$$= (\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + \frac{4x^5}{5} + \frac{x^6}{3})\Big|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} - \frac{16}{2} + \frac{1}{2} + \frac{128}{5} - \frac{4}{5} + \frac{64}{3} - \frac{1}{3} =$$

$$= 40\frac{19}{30}.$$

3. ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

3.1. Числовые ряды

Определение 1: Числовым рядом называется выражение

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

где числа $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...,$ называемые членами ряда, образуют известную числовую последовательность.

Определение 2: Сумму *n* первых членов ряда называют *n*-ой частичной суммой ряда: $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$.

Определение 3: Если существует конечный предел частичной суммы ряда, $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, то говорят, что ряд сходится, а S – сумма ряда.

Определение 4: Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ или $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует, то ряд называется расходящимся.

Пример: Рассмотрим ряд: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$

Этот ряд состоит из членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом $b_1 = \frac{1}{2}$ и знаменателем $q = \frac{1}{2}$. Найдем сумму по формуле: $S = \frac{b_1}{1-q}$. Для данного примера получаем $S = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$. Сумма ряда, являющегося бесконечно убывающей геометрической прогрессией, равна 1.

Признак сходимости Даламбера:

Пусть все члены числового ряда $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ положительны. Если существует $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l,$ тогда

1) Если $l < 1,$ то данный ряд сходится;

2) Если $l > 1$, то данный ряд расходится;

3) Если $l = 1$, то признак определенного ответа о сходимости или расходимости ряда не дает, т. е. в таком случае возможна как сходимость ряда, так и его расходимость.

Пример:

Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$ с помощью признака Даламбера.

Так как $a_n = \frac{n}{3^n}$, тогда $a_{n+1} = \frac{n+1}{3^{n+1}} = \frac{n+1}{3^n \cdot 3}$. Рассмотрим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)}{3^n \cdot 3}}{\frac{n}{3^n}} = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = \frac{1}{3} < 1$$

. Ряд сходится.

3.2. Функциональные ряды

Определение 1: Степенными рядами называются ряды вида:

$$c_0 + c_1(x-a) + ... + c_n(x-a)^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n.$$

Определение 2: Интервалом сходимости степенного ряда называется такой интервал $|x-a| < R$ с центром в точке $x = a$, внутри которого ряд сходится абсолютно, а вне интервала расходится. Вопрос о сходимости ряда на концах сходимости проверяется с помощью достаточных признаков сходимости положительных рядов или с помощью признака Лейбница.

Определение 3: Если функция $f(x)$ допускает в некоторой окрестности точки a разложение в степенной ряд по степеням $(x-a)$, то такой ряд называется рядом Тейлора и записывается:

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+...+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+...$$

Определение 4: Рядом Маклорена называют ряд Тейлора при $a=0$:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+...$$

Приведем разложение в ряд Маклорена функций $y=e^x$, $y=\cos x$, $y=\sin x$:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+..., \quad x\in(-\infty;+\infty),$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+..., \quad x\in(-\infty;+\infty),$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+..., \quad x\in(-\infty;+\infty).$$

4. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

Определение 1: Событие называется невозможным и обозначается Ø, если оно не произойдет ни при каких условиях.

Определение 2: Событие называется достоверным и обозначается Ω, если оно произойдет в любом случае.

Определение 3: Событие называется случайным и обозначается заглавными латинскими буквами $A, B, C\ldots$, если оно может произойти или не произойти в зависимости от случайных факторов.

Классическое определение вероятности: Вероятность события A равна отношению числа благоприятных исходов события A к общему числу исходов эксперимента:

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где m – число благоприятных исходов события A, n – общее число исходов события эксперимента.

Замечание: Вероятность обозначается латинской буквой P.

Вероятность невозможного события $P(\varnothing)=0$, вероятность достоверного события $P(\Omega)=1$, для любого случайного события A $0 < P(A) < 1$.

Определение 4: Условной вероятностью $P_A(B)$ называется вероятность события B при условии, что событие A уже произошло.

Теорема умножения вероятностей:

1. Если события A и B независимые, то $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$.
2. Если события A и B зависимые, то $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B)$.

Определение 5: Суммой двух событий A и B называется событие $A+B$, заключающееся в появлении хотя бы одного из двух событий A или B.

Теорема сложения вероятностей:

1. Если события A и B несовместные, то

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

2. Если события A и B совместные, то

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B).$$

Пример 1: Студент знает ответы на 20 из 25 вопросов экзамена. Найти вероятность, что он получит на экзамене «отлично», если для этого нужно только правильно ответить на два вопроса билета.

Решение: Пусть событие A – правильный ответ на первый вопрос, B – правильный ответ на второй вопрос. Тогда событие AB – правильный ответ на оба вопроса. Так как события A и B зависимые, то

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P_A(B)=\frac{20}{25}\cdot\frac{19}{24}=\frac{19}{30}.$$

Пример 2: Бросили игральный кубик (событие A) и монету (событие B). Найти вероятность того, что выпадет шестерка и герб (событие AB).

Решение: Событие AB заключается в одновременном выпадение шестерки и герба. Так как события A и B независимые, то

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{12}.$$

Повторные испытания. Сочетания. Формула Бернулли

Пусть проводится n независимых испытаний, в каждом из которых некоторое событие A может произойти с вероятностью $P(A)=p$ или не произойти вероятностью противоположного события $P(\overline{A})=1-p=q$.

Пусть в этих испытаниях событие A наступает ровно k раз. Тогда вероятность того, что в n независимых испытаниях событие A происходит ровно k раз вычисляется по формуле Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

где C_n^k - число сочетаний из n по k вычисляется по формуле:

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Пример 3: Монету бросают 6 раз. Найти вероятность трехкратного появления четверки.

Решение: Этот пример на формулу Бернулли: $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$,

$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$, где $n = 6, k = 3, p = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{2}$.

Тогда по формуле Бернулли получаем

$$P_6(3) = C_6^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^{6-3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} \cdot \frac{1}{64} = 0,3125.$$

Пример 4: Вероятность попасть в мишень для стрелка равна 0,8. Найти вероятность трехкратного поражения мишени при пяти выстрелах.

Решение: Это тоже задача на формулу Бернулли $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$,

где n=5, k=3, p=0,8, q=0,2. Подставив эти значения, получаем:

$$P_5(3) = C_5^3 (0,8)^3 (0,2)^2 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot (0,8)^3 \cdot (0,2)^2 = 0,2048.$$

5. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Определение: Случайной называют величину, которая в результате испытаний принимает одно и только одно возможное значение, наперед неизвестное и зависящее от случайных причин. Случайные величины обозначаются большими латинскими буквами: $X, Y, Z\ldots$

5.1. Дискретные случайные величины

Определение 1: Дискретной называют случайную величину, принимающую отдельные изолированные значения.

Дискретная случайная величина характеризуется законом распределения, заданным в виде таблицы, в первой строчке которой – значения случайной величины, а во второй – вероятности соответствующих значений:

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

Сумма вероятностей равна 1: $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$

Кроме закона распределения, дискретная случайная величина имеет числовые характеристики: математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Определение 2: Математическим ожиданием дискретной случайной величины называют

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + \ldots + x_i p_i .$$

Определение 3: Дисперсией дискретной случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X)=M(X-M(X))^2 .$$

Имеет место следующая формула для нахождения дисперсии:

$$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2 .$$

Для нахождения $M(X^2)$ используем таблицу:

X^2	$x_1^{\;2}$	$x_2^{\;2}$	…	$x_n^{\;2}$
P	p_1	p_2	…	p_n

$$M(X^2)=\sum_{i=1}^{n} x_i^{\;2} p_i = x_1^{\;2} p_1 + x_2^{\;2} p_2 + \ldots + x_i^{\;2} p_i .$$

Среднее квадратическое отклонение находится по формуле:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}.$$

Пример 1: Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:

X	2	5	7	8
P	0,1	0,2	0,4	0,3

$$M(X) = 2 \cdot 0{,}1 + 5 \cdot 0{,}2 + 7 \cdot 0{,}4 + 8 \cdot 0{,}3 = 6{,}4;$$

$$M(X^2) = 4 \cdot 0{,}1 + 25 \cdot 0{,}2 + 49 \cdot 0{,}4 + 64 \cdot 0{,}3 = 44{,}2;$$

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 44{,}2 - 6{,}4^2 = 3{,}24;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{3{,}24} = 1{,}8.$$

5.2 .Функция распределения и ее свойства

Определение: Функцией распределения случайной величины X называют функцию $F(x)$, определяющую вероятность того, что случайная величина X в результате испытания примет значение, меньшее, чем x, т. е. $F(x) = P(X < x), \quad x \in (-\infty; +\infty).$

Свойства функции распределения:

1) $0 \le F(x) \le 1, \quad x \in (-\infty; +\infty);$

2) Функция распределения - неубывающая функция;

3) $P(a \le X < b) = F(b) - F(a).$

5.3. Непрерывные случайные величины

Определение 1: Непрерывной называют случайную величину, принимающую значения на некотором интервале (a,b).

Определение 2: Плотностью распределения непрерывной случайной величины X называют производную от ее функции распределения: $f(x) = F'(x), \quad x \in (-\infty; +\infty).$

Свойства плотности распределения:

1) $$f(x) \geq 0, \quad x \in (-\infty; +\infty);$$

2) $$\int_a^b f(x)dx = 1.$$

Пример 1:

Найти плотность, если известна функция распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ \dfrac{1}{2}(x^2 - x), & 1 < x \leq 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Решение:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ \dfrac{1}{2}(2x - 1), & 1 < x \leq 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

Пример 2:

Задана функция распределения непрерывной случайной величины:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 3, \\ (x-3)^2, & 3 < x \leq 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

Найти вероятность попадания такой случайной величины в интервал *(2,5;3,5)*.

Решение: По третьему свойству функции распределения получаем:

$$P(2,5 < X < 3,5) = F(3,5) - F(2,5)$$
$$= (3,5-3)^2 - 0 = 0,5^2 = 0,25.$$

Кроме плотности распределения, непрерывная случайная величина имеет такие же числовые характеристики, как и дискретная случайная величина: математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Математическое ожидание непрерывной случайной величины X, заданной на интервале (a,b), находится по формуле:

$$M(X) = \int_a^b xf(x)dx.$$

Математическое ожидание непрерывной случайной величины X^2, заданной на интервале (a,b), находится по формуле:

$$M(X^2) = \int_a^b x^2 f(x)dx.$$

Дисперсия и среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины X находится по тем же формулам, что и дисперсия, и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2,$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Пример 3: Непрерывная случайная величина задана плотностью:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1, \\ \frac{1}{2}(2x-1), & 1<x\le 2, \\ 0, & x>2. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Решение:

$$M(X)=\int_1^2 x\cdot\frac{1}{2}(2x-1)dx=\frac{1}{2}\int_1^2(2x^2-x)dx=$$

$$\frac{1}{2}(\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2)\Big|_1^2=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{4}\Big|_1^2=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}-1+\frac{1}{4}=\frac{19}{12};$$

$$M(X^2)=\int_1^2 x^2\cdot\frac{1}{2}(2x-1)dx=\frac{1}{2}\int_1^2(2x^3-x^2)dx=$$

$$\frac{1}{2}(\frac{2}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3)\Big|_1^2=\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{6}\Big|_1^2=4-\frac{1}{4}-\frac{4}{3}+\frac{1}{6}=\frac{31}{12};$$

$$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2=\frac{31}{12}-(\frac{19}{12})^2=\frac{11}{144};$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\frac{11}{144}}=\frac{\sqrt{11}}{12}.$$

5.4. Нормальное распределение

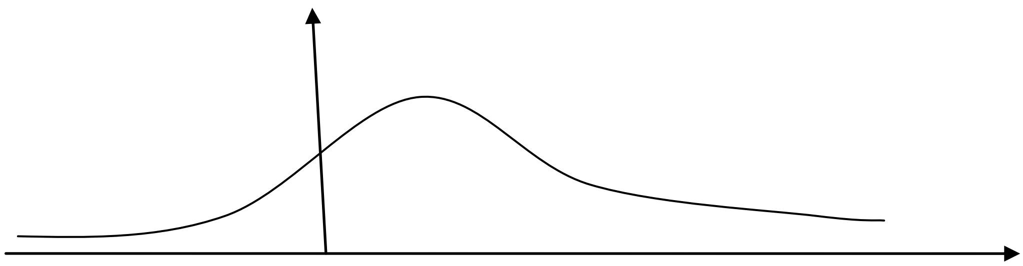
Нормальное распределение задается плотностью:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad x\in(-\infty;+\infty).$$

Вероятностный смысл параметров распределения:

$$a=M(X), \sigma(X)=\sqrt{D(X)}.$$

График нормального распределения называется нормальной кривой или кривой Гаусса и имеет вид:



Максисмум нормальной кривой достигается при $x=a$.

Вероятность попадания в заданный интервал (α,β) нормально распределенной случайной величины находится по формуле:

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi(\frac{\beta-a}{\sigma})-\Phi(\frac{\alpha-a}{\sigma}),$$

где $\Phi(x)$ – функция Лапласа, находится по таблице в [6], [7].

Пример 1: Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины X равны соответственно 10 и 2. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение в интервале (12,14).

Решение: Воспользуемся формулой:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi(\frac{\beta - a}{\sigma}) - \Phi(\frac{\alpha - a}{\sigma}),$$ где a=10, σ=2, α=12, β=14. Тогда

$$P(12 < X < 14) = \Phi(\frac{14-10}{2}) - \Phi(\frac{12-10}{2}) =$$
$$\Phi(2) - \Phi(1) = 0,4772 - 0,3413 = 0,1359 \approx 0,14,$$
$$P(12 < X < 14) = 0,14.$$

6. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Предположим, что изучается некоторая случайная величина X. С этой целью над случайной величиной X производится n независимых опытов (наблюдений). В каждом из этих опытов случайная величина X принимает определенное значение. Пусть значение x_1 наблюдалось n_1 раз, x_2 – n_2 раз ,…, x_k – n_k раз и $\sum_{i=1}^{k} n_i = n.$ Наблюдаемые значения называются вариантами; числа наблюдений n_i называют частотами.

Определение 1: Статистическим рядом называется таблица, в первой строке которой записываются наблюдаемые значения x_i в возрастающем порядке, а во второй – соответствующие им частоты n_i:

x_i	x_1	x_2	…	x_k
n_i	n_1	n_2	…	n_k

Определение 2: Выборочной средней называют $x_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i.$

Выборочная средняя – это несмещенная оценка неизвестного математического ожидания генеральной совокупности.

Определение 3: Интервальной называют оценку, которая определяется двумя числами – концами интервала, покрывающего оцениваемый параметр.

Определение 4: Доверительным называют интервал, который с заданной надежностью γ покрывает заданный параметр.

Интервальной оценкой (с надежностью γ) математического ожидания a нормально распределенного количественного признака X по выборочной средней $x_в$ при известном среднем квадратическом отклонении σ генеральной совокупности служит доверительный интервал:

$$x_в - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < x_в + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

где n – объем выборки, t – значение аргумента функции Лапласа $\Phi(t)=\gamma/2$.

Пример: Найти доверительный интервал, если выборочное среднее $x_в=75{,}17$, объем выборки $n=36$, со средним квадратическим отклонением $\sigma=6$, с надежностью $\gamma=0{,}95$.

Решение: Для решения задачи не хватает t.

Найдем его из формулы $\Phi(t)=\gamma/2=0{,}95/2=0{,}475$. По таблице функции Лапласа находим $\Phi(1{,}96)=0{,}475$, следовательно, $t=1{,}96$.

Подставим все данные задачи в формулу для нахождения доверительного интервала:

$$75,17-1,96\frac{6}{\sqrt{36}}<a<75,17+1,96\frac{6}{\sqrt{36}}.$$

Таким образом, неизвестное математическое ожидание находится с надежностью $0,95$ в интервале $(73,21;77,13)$.

НОМЕРА И ТЕМЫ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Ниже мы приводим номера и темы к/р, которые должны быть выполнены во втором семестре. Общие правила выполнения и оформления к/р представлены в методических указаниях: Математика: методические указания и контрольные задания для студентов заочной формы обучения (III и IV семестры) / сост.: И.Э. Апакова, Н.Ю. Косовская; И.Ю. Малова; М.Э. Юдовин; ВШТЭ СПбГУПТД . – СПб., 2018. – 18 с. Эту брошюру можно найти на сайте ВШТЭ СПбГУПТД или в библиотеке университета под номером 07а.

К/р № 3 – Обыкновенные дифференциальные уравнения. Кратные и криволинейные интегралы. Числовые и функциональные ряды.

К/р № 4 – Теория вероятностей и математическая статистика.

ТАБЛИЦЫ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Ниже приведены таблицы номеров задач, входящих в задания контрольных работ № 3 и № 4, предусмотренных учебным планом заочного отделения ВШТЭ СПбГУПТД для студентов-заочников ускоренной формы обучения (II семестр). Студент должен выполнить контрольные задания по варианту, номер которого совпадает с последней цифрой его учебного номера (шифра), взяв задания из выше указанных методических указаний.

Вариант	Контрольная работа № 3

1	321	341	381	391	421
2	322	342	382	392	422
3	323	343	383	393	423
4	324	344	384	394	424
5	325	345	385	395	425
6	326	346	386	396	426
7	327	347	387	397	427
8	328	348	388	398	428
9	329	349	389	399	429
10	330	350	390	400	430

Вариант	Контрольная работа № 4				
1	521	531	541	551	571
2	522	532	542	552	572
3	523	533	543	553	573
4	524	534	544	554	574
5	525	535	545	555	575
6	526	536	546	556	576
7	527	537	547	557	577
8	528	538	548	558	578
9	529	539	549	559	579
10	530	540	550	560	580

Библиографический список

1. Задачи и упражнения по математическому анализу для ВТУЗов / под ред. Б.П. Демидовича. - М.: Интеграл-Пресс, 1997.

2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для ВТУЗов.– М.: Наука, 2010. Т 2.

3. Сборник задач по высшей математике. С контрольными работами. /сост.: К.Н. Лунгу, Д.Т. Письменный, С.Н. Федин, Ю.А. Шевченко. – М.: Айрис-Пресс, 2008.

4. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. Полный курс. – М.: Айрис-Пресс, 2009.

5. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике. – СПб., М., Краснодар: Лань, 2005.

6. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высшая школа, 2002.

7. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшее образование, 2008.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Елена Георгиевна Иванова,
Инна Эдуардовна Апакова,
Ирина Юрьевна Малова,
Марк Эльявич Юдовин

МАТЕМАТИКА

Методические указания и контрольные задания
для студентов заочной формы ускоренного обучения
II семестр

Редактор и корректор В.А. Басова
Техн. редактор Л.Я. Титова Темплан 2018 г., поз.67

Подп. к печати 28.02. 2018 г. Формат 60x84/16. Бумага тип №1.
Печать офсетная. Объем 2,0 печ.л.; 2,0 уч.-изд.л.
Тираж 70 экз. Изд. № 67. Цена «С». Заказ

Ризограф Высшей школы технологии и энергетики ВШТЭ СПбГУПТД,
198095, Санкт-Петербург, ул. Ивана Черных, 4.