

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ**

**«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПРОМЫШЛЕННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ДИЗАЙНА»**

ВЫСШАЯ ШКОЛА ТЕХНОЛОГИИ И ЭНЕРГЕТИКИ

Кафедра высшей математики

**Дополнительные главы теории вероятностей
и математической статистики
Дисперсионный анализ**

Методические указания и индивидуальные задания
для магистрантов всех направлений

Санкт-Петербург
2018

Дополнительные главы теории вероятностей и математической статистики. Дисперсионный анализ: методические указания и индивидуальные задания для магистрантов всех направлений/— сост.:М.Э.Юдовин, З.Л.Абжандадзе, Н.Л.Белая, Е.Г.Иванова; СПбГУПТД ВШТЭ – СПб.,2018-21с.

Приводится теоретический материал с разобранными решениями типичных примеров. Приложены варианты индивидуальных заданий.

Предназначено для магистрантов всех направлений.

Рецензент: доцент кафедры высшей математики № 2 ЛЭТИ,
канд.техн.наук С.Б. Энтина.

Подготовлено и рекомендовано к печати кафедрой высшей математики ВШТЭ Санкт-Петербургского государственного университета промышленных технологий и дизайна (протокол № 6 от 06.02.2018).

Утверждено к изданию методической комиссией факультета промышленной энергетики ВШТЭ Санкт-Петербургского государственного университета промышленных технологий и дизайна (протокол № 3 от 07.02.2018).

© Высшая школа технологии
и энергетики СПбГУПТД, 2018

1. Предварительные сведения

Напомним определения некоторых понятий из курса теории вероятностей и математической статистики, необходимых для освоения последующего материала.

- Для задания **дискретной** случайной величины используется **ряд распределения** – набор всех значений случайной величины и вероятностей этих значений.
- Для задания **непрерывной** случайной величины используется **плотность вероятности** $f(x)$. С помощью функции $f(x)$ для любого интервала (a, b) определяется вероятность попадания значения случайной величины X в этот интервал по формуле

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx .$$

- Для задания как непрерывных, так и дискретных случайных величин можно также использовать **функцию распределения** $F(x)$, определяемую формулой $F(x) = P(X < x)$, где $P(X < x)$ – вероятность попадания значения случайной величины в интервал $(-\infty, x)$.
- Числовые характеристики случайной величины: **математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратичное отклонение** .

В дальнейшем тексте они будут обозначаться символами μ, σ^2 и σ соответственно. Среднее квадратичное отклонение называют также **стандартным отклонением**. Формулы для их вычисления в дискретном и непрерывном случае имеют вид :

$$\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i p_i ; \quad \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx ;$$
$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx ; \quad \sigma^2 = \sum_{i=1}^{+\infty} (x_i - \mu)^2 p_i .$$

Математическое ожидание является в определенном смысле средним значением случайной величины, а дисперсия – характеристикой

рассеяния значений случайной величины относительно ее среднего значения.

- В статистике часто используется **квантиль распределения** – функция, обратная к функции распределения. Число x_β , определяемое уравнением $F(x_\beta) = \beta$, называется **β -квантилью** распределения.
- **Случайной выборкой** объема n называется набор значений (x_1, \dots, x_n) случайной величины, полученных в результате n независимых опытов. Эти значения называют в статистике наблюдениями.
- Выборка имеет числовые характеристики, аналогичные характеристикам случайной величины: **выборочное среднее** $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$; **выборочная дисперсия** $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$; **выборочное стандартное отклонение** $s = \sqrt{s^2}$.

2. О задачах дисперсионного анализа

Предположим, что изучается влияние одного или нескольких факторов на некоторую величину. Эти факторы могут принимать разные значения, называемые уровнями. Факторы могут быть как числовыми, так и нечисловыми. Например, на износ автомобильных покрышек может влиять как тип покрышки (не числовой фактор), так и длина пробега (числовой фактор).

Вот некоторые из задач, которые ставятся в дисперсионном анализе:

- Влияет ли некоторый фактор или группа факторов на изучаемую величину?
- Какой из факторов имеет наибольшее влияние?
- Зависит ли влияние факторов от их взаимодействия друг с другом?

Решение этих и подобных задач основано на теории вероятностей и математической статистике.

3. Двухфакторный дисперсионный анализ с однократными наблюдениями

Здесь рассматривается возможное влияние нескольких факторов на некоторую переменную y . Как и в однофакторном анализе, факторы могут быть и числовыми, но и в этом случае учитывается лишь число различных значений (уровней), которые принимает фактор, а не величина этих значений. Рассмотрим наиболее простую двухфакторную модель.

Изучаем влияние факторов A и B на переменную y . Модель можно представить в виде :

$$y_{ij} = \mu_{ij} + \varepsilon_{ij}, \quad i = 1, \dots, I, \quad j = 1, \dots, J, \quad (1)$$

где μ_{ij} —некоторые константы; ε_{ij} —случайные ошибки; I, J — число уровней факторов A и B соответственно; y_{ij} —наблюдение, полученное на i -ом уровне фактора A и j -ом уровне фактора B .

Относительно случайных ошибок ε_{ij} предполагается, что они независимы и подчиняются нормальному распределению с нулевым математическим ожиданием и одинаковой, хотя и неизвестной, дисперсией.

В этом пункте также предполагается, что между факторами нет взаимодействия. Это означает, что влияние одного фактора на величину y не зависит от того, на каком уровне находится другой фактор. Тогда параметр μ_{ij} можно представить в виде $\mu_{ij} = \alpha_i + \beta_j$. От этого допущения нельзя отказаться, иначе пришлось бы ввести дополнительные параметры, учитывающие взаимодействие, а тогда при однократных наблюдениях слишком мало исходных данных для оценки более сложной модели.

Итак, уравнение (1) можно переписать в виде :

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}, \quad i = 1, \dots, I, \quad j = 1, \dots, J. \quad (2)$$

Параметры в уравнении (2) имеют следующий смысл: μ —общее среднее, α_i —эффект фактора A на его i -ом уровне, β_j —эффект фактора B на его j -ом уровне.

Пусть мы хотим проверить предположение о том, что фактор A или B не влияет на переменную y . Иначе говоря, нужно проверить гипотезы H_A и H_B о равенстве нулю соответствующих эффектов:

$$H_A: \alpha_i = 0, \quad i = 1, \dots, I; \quad H_B: \beta_j = 0, \quad j = 1, \dots, J.$$

Для этого вычисляем следующие величины:

средние по строкам

$$y_{i*} = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J y_{ij}, \quad i = 1, \dots, I;$$

средние по столбцам

$$y_{*j} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I y_{ij}, \quad j = 1, \dots, J;$$

и общее среднее

$$y_{**} = \frac{1}{IJ} \sum_{i,j} y_{ij}.$$

Эти величины вместе с исходными данными обычно записывают в табл.4.

Таблица 1. Исходные данные

| $i \backslash j$ | 1 | 2 | ... | J | средние по строке |
|--------------------|----------|----------|-----|----------|-------------------|
| 1 | y_{11} | y_{12} | ... | y_{1J} | y_{1*} |
| ... | ... | ... | ... | ... | |
| I | y_{I1} | y_{I2} | ... | y_{IJ} | y_{I*} |
| средние по столбцу | y_{*1} | y_{*2} | ... | y_{*J} | y_{**} |

Далее вычисляем $\hat{\alpha}_i = y_{i*} - y_{**}$, $\hat{\beta}_j = y_{*j} - y_{**}$. Эти величины являются несмещенными оценками соответствующих параметров α_i, β_j модели (2).

Поэтому, если гипотезы H_A, H_B верны (т.е. эффекты равны нулю), то $\hat{\alpha}_i, \hat{\beta}_j$ не должны значимо отличаться от нуля.

Алгоритм проверки гипотез, основан на F -критерии.

Вычисляем:

а) суммы квадратов:

$$S_A = J \sum_{i=1}^I \hat{\alpha}_i^2; \quad S_B = I \sum_{j=1}^J \hat{\beta}_j^2;$$

$$S_{\Pi} = \sum_{i,j=1}^{I,J} (y_{ij} - y_{**})^2; \quad S_R = S_{\Pi} - S_A - S_B.$$

Здесь S_A, S_B характеризуют величину эффектов, S_{Π} – полная сумма квадратов, а остаточная сумма S_R служит для оценки дисперсии ошибок наблюдений;

б) делим каждую сумму на число ее степеней свободы:

$$s_A^2 = \frac{S_A}{n_A}; \quad s_B^2 = \frac{S_B}{n_B}; \quad s_R^2 = \frac{S_R}{n_R},$$

где $n_A = I - 1; \quad n_B = J - 1; \quad n_R = n_A n_B;$

в) определяем значения F -критериев для гипотез H_A, H_B :

$$F_A = \frac{s_A^2}{s_R^2}; \quad F_B = \frac{s_B^2}{s_R^2}.$$

Эти величины подчиняются F -распределению с числами степеней свободы (n_A, n_R) и (n_B, n_R) соответственно.

г) задаем уровень значимости и найдем квантили для F -распределения, которые и принимаются в качестве критических значений (для каждой гипотезы – свое критическое значение).

Правило

Если $F_A > F_{\text{крит}}$, то гипотеза H_A отвергается, если $F_A \leq F_{\text{крит}}$, то гипотеза принимается.

Аналогичное правило – для H_B .

Результаты дисперсионного анализа обычно сводят в табл.2.

Таблица 2. Дисперсионный анализ

| Источник изменчивости | Сумма квадратов | Степени свободы | Средняя сумма квадр. | F |
|-----------------------|----------------------------|------------------|----------------------|-----------------------|
| фактор A | S_A | $I - 1$ | s_A^2 | $F_A = s_A^2 / s_R^2$ |
| фактор B | S_B | $J - 1$ | s_B^2 | $F_B = s_B^2 / s_R^2$ |
| ошибка эксперимента | S_R | $(I - 1)(J - 1)$ | s_R^2 | — |
| — | $S_{II} = S_A + S_B + S_R$ | $IJ - 1$ | — | — |

Пример

Таблица 3. Исходные данные

| $B_j \backslash A_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | Средние по строке |
|----------------------|------|------|------|------|-------------------|
| 1 | 2,68 | 3,29 | 2,88 | 4,45 | 3,32 |
| 2 | 4,12 | 4,96 | 5,09 | 5,22 | 4,85 |
| 3 | 5,52 | 4,50 | 5,42 | 5,29 | 5,18 |
| Средние по столбцу | 4,11 | 4,25 | 4,46 | 4,99 | 4,45 |

Таблица 4. Дисперсионный анализ

| Источник изменчивости | Сумма квадратов | Степени свободы | Средняя сумма квадратов | F-отношение |
|-----------------------|-----------------|-----------------|-------------------------|-------------|
| фактор A | 7,84 | $3 - 1 = 2$ | 3,92 | 1,41 |
| фактор B | 1,34 | $4 - 1 = 3$ | 0,446 | 0,16 |
| ошибка эксперимента | 16,68 | 6 | 2,78 | — |
| — | 21,04 | 11 | — | — |

Задаем уровень значимости $\alpha = 0,05$ и находим из таблиц для каждой из гипотез $(1 - \alpha)$ -квантиль, то-есть, $F_{\text{крит}}$.

Для гипотезы $H_A: F_{\text{крит}} = F(0,95; 2; 6) = 5,14$.

Для гипотезы $H_B: F_{\text{крит}} = F(0,95; 3; 6) = 4,76$.

Очевидно, в обоих случаях вычисленное F -отношение меньше, чем $F_{\text{крит}}$ (см. табл.7). Следовательно, на уровне значимости 0,05 экспериментальные данные не противоречат этим гипотезам. Иначе говоря, следует принять гипотезы о том, что факторы A и B не влияют на переменную y .

4. Двухфакторный анализ с многократными наблюдениями

Как и в предыдущем случае, изучается влияние двух факторов на некоторую переменную y . Отличие состоит в том, что для каждой комбинации уровней имеется более одного наблюдения. Большое количество наблюдений позволяет рассматривать более сложную модель, учитывающую возможное взаимодействие факторов. Модель имеет вид:

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \varepsilon_{ijk}, \quad i = 1, \dots, I, \quad j = 1, \dots, J, \quad k = 1, \dots, K.$$

Здесь μ – общее среднее значение; α_i, β_j – "чистые" (без учета взаимодействия) эффекты факторов A и B ; γ_{ij} – эффекты взаимодействия факторов; ε_{ijk} – случайные ошибки (они удовлетворяют тем же условиям, что и в предыдущих пунктах).

Методом наименьших квадратов находят оценки параметров модели:

$$y_{ij*} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K y_{ijk}; \quad y_{i**} = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J y_{ij*};$$

$$y_{*j*} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I y_{ij*}; \quad y_{***} = \frac{1}{IJ} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J y_{ij*};$$

$$\hat{\alpha}_i = y_{i**} - y_{***}; \quad \hat{\beta}_j = y_{*j*} - y_{***}; \quad \hat{\gamma}_{ij} = y_{ij*} - y_{***}.$$

Далее для дисперсионного анализа нужно вычислить следующие суммы квадратов:

$$S_A = KJ \sum_{i=1}^I \hat{\alpha}_i^2; \quad S_B = KI \sum_{j=1}^J \hat{\beta}_j^2; \\ S_{AB} = K \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \hat{\gamma}_{ij}^2; \quad S_R = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K (y_{ijk} - y_{ij*})^2.$$

Далее делим эти суммы на соответствующие числа степеней свободы (см. табл. 5). Полученные таким образом величины используются при проверке гипотез с помощью F -критерия. Результаты дисперсионного анализа удобно представлять в виде следующей таблицы.

Таблица 5. Результаты дисперсионного анализа

| Источник именчивости | Суммы квадратов | Степени свободы | Средние суммы квадратов | F -отношение |
|---------------------------------|--------------------|------------------|-------------------------------|---------------------------|
| фактор А | S_A | $I - 1$ | S_A^2 | $F_A = S_A^2/S_R^2$ |
| фактор В | S_B | $J - 1$ | S_B^2 | $F_B = S_B^2/S_R^2$ |
| взаимо- действие факторов | S_{AB} | $(I - 1)(J - 1)$ | S_{AB}^2 | $F_{AB} = S_{AB}^2/S_R^2$ |
| ошибка эксперимента | S_R | $IJ(K - 1)$ | S_R^2 | — |
| — | S_{Π} | $IJK - 1$ | — | — |

Проверяются три гипотезы:

$H_A: \alpha_i = 0, i = 1, 2, \dots, I$ — фактор А не влияет на y ;

$H_B : \beta_j = 0, j = 1, 2, \dots, J$ – фактор B не влияет на y ;

$H_{AB} : \gamma_{ij} = 0, i = 1, 2, \dots, I; j = 1, 2, \dots, J$ – взаимодействие факторов отсутствует.

Пример. Ограничимся простейшим случаем двух наблюдений для каждой комбинации уровней. В этом случае таблица исходных данных содержит по два наблюдения в каждой ячейке.

Таблица 6. Исходные данные при $I = 3, J = 4, K = 2$.

| $A_i \backslash B_j$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|----------------------|------------|------------|------------|------------|
| 1 | 2,38; 2,68 | 2,61; 2,89 | 2,87; 3,03 | 2,82; 2,46 |
| 2 | 4,20; 4,12 | 3,96; 4,02 | 5,09; 4,85 | 4,78; 5,22 |
| 3 | 5,52; 5,98 | 4,15; 5,05 | 5,42; 5,64 | 5,29; 5,87 |

Таблица 7. Средние значения внутри ячеек

| $A_i \backslash B_j$ | 1 | 2 | 3 | 4 | Средние по строкам |
|----------------------|------|------|------|------|--------------------|
| 1 | 2,53 | 2,40 | 2,55 | 2,64 | 2,53 |
| 2 | 4,16 | 4,64 | 4,97 | 5,00 | 4,69 |
| 3 | 5,75 | 4,90 | 5,53 | 5,58 | 5,44 |
| Средние по столбцам | 4,15 | 3,98 | 4,35 | 4,41 | 4,22 |

Таблица 8. Дисперсионный анализ

| Источник именчивости | Суммы квадратов | Степени свободы | Средние суммы квадратов | F -отношение |
|----------------------------|--------------------|--------------------|-------------------------------|---------------------------|
| фактор А | $S_A = 36,54$ | 2 | $S_A^2 =$ | $F_A = S_A^2/S_R^2$ |
| фактор В | $S_B = 0,69$ | 3 | S_B^2 | $F_B = S_B^2/S_R^2$ |
| взаимодействие факторов | $S_{AB} =$ | 6 | S_{AB}^2 | $F_{AB} = S_{AB}^2/S_R^2$ |
| ошибка эксперимента | S_R | 12 | S_R^2 | – |
| – | S_{Π} | 23 | – | – |

Находим из таблицы F - распределения критические значения при $\alpha = 0,05$ и степенях свободы (2; 12), (3; 12) и (6; 12) и сравниваем их с рассчитанными.

Получаем:

гипотеза $H_A: F_{\text{крит}} = 3,89 < F_A = 93,89$ - гипотеза отвергается;

гипотеза $H_B: F_{\text{крит}} = 3,49 < F_B = 1,18$ - гипотеза принимается;

гипотеза $H_{AB}: F_{\text{крит}} = 3,00 < F_{AB} = 32,84$ - гипотеза отвергается.

Выводы:

- фактор A влияет на переменную y ;
- фактор B при фиксированном уровне фактора A не влияет на переменную y ;
- действие фактора B проявляется в том, что степень влияния фактора A зависит от того, на каком уровне находится фактор B .

Замечание

В данном примере рассчитанные значения F значительно отличаются от

критических, поэтому даже заметное изменение уровня значимости не отменит сделанных выводов. При других данных тот или иной выбор значения α может существенно повлиять на выводы. Предположим, например, что мы получили рассчитанное значение F_B , равное 3,18 вместо 1,18. Тогда, выбрав большее значение $\alpha = 0,1$, получим меньшее значение $F_{\text{крит}} = 2,61 < F_B$. В этом случае гипотезу H_B в соответствии с правилом пришлось бы отвергнуть.

Библиографический список

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 1979.
2. Смирнов Н.В., Дунин-Барковский И.В. Курс теории вероятностей и математической статистики (для технических приложений). – М.: Наука, 1969.
3. Планирование эксперимента в исследовании технологических процессов. – М.: Мир, 1977.

Приложение

Варианты индивидуальных заданий по теме:

"Двухфакторный дисперсионный анализ с двукратными наблюдениями".

вариант 1

| | B1 | B2 | B3 | B4 |
|----|-------------|-------------|-------------|-------------|
| A1 | (4.66 4.52) | (3.78 3.84) | (4.38 4.37) | (3.55 3.49) |
| A2 | (5.12 4.85) | (3.63 4.14) | (4.43 4.32) | (3.80 4.09) |
| A3 | (5.24 5.32) | (4.47 4.46) | (4.81 4.37) | (3.82 4.06) |

вариант 2

| | B1 | B2 | B3 | B4 |
|----|-------------|-------------|-------------|-------------|
| A1 | (4.54 4.77) | (3.85 3.78) | (4.24 4.07) | (3.60 3.60) |
| A2 | (4.88 4.85) | (4.43 4.12) | (4.31 4.72) | (4.01 3.91) |
| A3 | (4.98 4.80) | (4.30 4.29) | (4.69 4.99) | (4.05 4.09) |

вариант 3

| | B1 | B2 | B3 | B4 |
|----|-------------|-------------|-------------|-------------|
| A1 | (4.16 4.52) | (3.60 4.17) | (4.00 3.66) | (3.47 3.71) |
| A2 | (4.95 4.66) | (4.24 4.29) | (4.64 4.72) | (4.02 3.57) |
| A3 | (4.84 4.93) | (4.60 4.38) | (4.71 4.83) | (4.25 4.33) |

вариант 4

| | B1 | B2 | B3 | B4 |
|----|-------------|-------------|-------------|-------------|
| A1 | (4.72 4.08) | (3.62 3.74) | (4.14 4.05) | (3.54 3.37) |
| A2 | (4.46 4.71) | (3.77 4.26) | (4.47 4.48) | (3.70 4.00) |
| A3 | (4.92 4.84) | (4.77 4.44) | (5.10 4.50) | (4.00 4.67) |

вариант 5

| | B1 | B2 | B3 | B4 |
|----|-------------|-------------|-------------|-------------|
| A1 | (4.54 4.44) | (3.93 3.95) | (4.26 3.74) | (3.43 3.63) |
| A2 | (4.78 4.79) | (3.88 4.03) | (4.63 4.69) | (3.68 3.64) |
| A3 | (4.88 5.19) | (4.61 4.82) | (4.99 4.81) | (4.29 4.30) |

вариант 6

| | B1 | B2 | B3 | B4 |
|----|-------------|-------------|-------------|-------------|
| A1 | (4.54 4.21) | (3.78 3.80) | (4.08 4.45) | (3.42 3.61) |
| A2 | (4.49 4.80) | (4.30 4.19) | (4.27 4.52) | (3.85 3.70) |
| A3 | (5.35 5.39) | (4.45 4.74) | (4.94 4.50) | (4.30 4.28) |

вариант 7

| | B1 | B2 | B3 | B4 |
|----|-------------|-------------|-------------|-------------|
| A1 | (4.71 4.50) | (3.98 3.38) | (3.61 4.14) | (3.12 3.66) |
| A2 | (4.59 4.79) | (4.25 4.41) | (4.62 4.63) | (3.82 3.62) |
| A3 | (5.20 4.99) | (4.17 4.29) | (4.49 4.64) | (4.41 4.10) |

вариант 8

| | B1 | B2 | B3 | B4 |
|----|-------------|-------------|-------------|-------------|
| A1 | (4.56 4.07) | (3.68 3.59) | (4.20 4.15) | (3.29 3.29) |
| A2 | (4.95 5.24) | (4.17 4.36) | (4.51 4.23) | (3.79 3.54) |
| A3 | (4.90 5.36) | (4.41 4.49) | (4.79 4.48) | (3.90 4.02) |

вариант 9

| | B1 | B2 | B3 | B4 |
|----|-------------|-------------|-------------|-------------|
| A1 | (4.67 4.50) | (3.93 3.81) | (4.18 4.20) | (3.54 3.47) |
| A2 | (4.51 4.68) | (4.13 3.82) | (4.46 4.28) | (3.34 4.24) |
| A3 | (5.49 4.99) | (4.68 4.43) | (5.10 5.08) | (4.06 4.27) |

вариант 10

| | B1 | B2 | B3 | B4 |
|----|-------------|-------------|-------------|-------------|
| A1 | (4.63 4.45) | (3.78 3.67) | (3.87 4.30) | (3.44 3.72) |
| A2 | (4.88 4.77) | (3.94 3.88) | (4.51 4.39) | (3.99 3.96) |
| A3 | (4.86 5.16) | (4.26 4.42) | (4.59 4.39) | (3.96 4.18) |

вариант 11

| | B1 | B2 | B3 | B4 |
|----|-------------|-------------|-------------|-------------|
| A1 | (4.30 4.54) | (3.85 4.04) | (4.02 4.08) | (3.59 3.34) |
| A2 | (4.94 4.95) | (3.49 4.08) | (4.55 4.25) | (3.71 3.34) |
| A3 | (5.05 5.35) | (4.42 4.22) | (5.11 4.91) | (3.77 4.35) |

вариант 12

| | B1 | B2 | B3 | B4 |
|----|-------------|-------------|-------------|-------------|
| A1 | (4.14 4.34) | (3.89 4.00) | (4.55 3.76) | (3.52 3.53) |
| A2 | (4.64 4.85) | (3.98 4.06) | (4.81 4.52) | (3.99 3.76) |
| A3 | (5.11 4.97) | (4.33 4.85) | (4.74 5.14) | (4.20 4.31) |

вариант 13

| | B1 | B2 | B3 | B4 |
|----|-------------|-------------|-------------|-------------|
| A1 | (4.76 4.32) | (4.08 3.59) | (4.18 3.86) | (3.55 3.57) |
| A2 | (4.62 4.97) | (4.19 4.01) | (4.51 4.17) | (3.66 3.58) |
| A3 | (5.04 5.27) | (4.41 4.52) | (4.79 4.46) | (4.48 4.04) |

вариант 14

| | B1 | B2 | B3 | B4 |
|----|-------------|-------------|-------------|-------------|
| A1 | (4.17 4.46) | (3.59 3.78) | (4.00 4.31) | (3.51 3.65) |
| A2 | (4.68 4.56) | (4.09 4.02) | (4.11 4.54) | (3.84 3.88) |
| A3 | (5.42 5.23) | (4.62 4.42) | (4.88 4.87) | (4.06 4.13) |

вариант 15

| | B1 | B2 | B3 | B4 |
|----|-------------|-------------|-------------|-------------|
| A1 | (4.63 4.04) | (3.90 3.90) | (4.39 4.07) | (3.30 3.36) |
| A2 | (4.55 4.64) | (4.24 3.99) | (4.56 4.51) | (3.63 3.61) |
| A3 | (4.88 5.07) | (4.07 4.41) | (4.51 4.56) | (3.90 4.48) |

вариант 16

| | B1 | B2 | B3 | B4 |
|----|-------------|-------------|-------------|-------------|
| A1 | (3.93 4.26) | (3.26 4.06) | (4.04 4.39) | (3.49 3.92) |
| A2 | (4.82 4.30) | (4.34 4.23) | (4.28 4.59) | (3.38 4.02) |
| A3 | (5.06 5.07) | (4.59 4.52) | (4.65 4.70) | (4.28 4.18) |

вариант 17

| | B1 | B2 | B3 | B4 |
|----|-------------|-------------|-------------|-------------|
| A1 | (4.21 4.47) | (3.79 4.08) | (4.12 3.95) | (3.53 3.40) |
| A2 | (4.92 4.74) | (4.08 4.12) | (4.69 4.71) | (3.84 4.03) |
| A3 | (4.93 5.23) | (4.67 4.56) | (4.76 4.90) | (4.42 4.31) |

вариант 18

| | B1 | B2 | B3 | B4 |
|----|-------------|-------------|-------------|-------------|
| A1 | (4.77 4.41) | (3.67 3.97) | (3.87 3.79) | (3.23 3.52) |
| A2 | (4.68 5.04) | (4.04 4.02) | (4.27 4.32) | (4.10 3.64) |
| A3 | (4.91 5.36) | (4.53 4.53) | (4.80 4.88) | (4.24 3.83) |

вариант 19

| | B1 | B2 | B3 | B4 |
|----|-------------|-------------|-------------|-------------|
| A1 | (4.30 4.21) | (3.86 3.72) | (3.74 4.63) | (3.90 3.49) |
| A2 | (4.80 4.70) | (4.34 4.33) | (4.79 4.42) | (3.74 3.45) |
| A3 | (5.03 5.32) | (4.28 4.56) | (4.88 4.28) | (4.17 4.15) |

вариант 20

| | B1 | B2 | B3 | B4 |
|----|-------------|-------------|-------------|-------------|
| A1 | (4.33 4.61) | (3.82 3.54) | (4.47 3.83) | (3.40 3.60) |
| A2 | (4.88 4.87) | (3.93 4.25) | (4.12 4.56) | (3.73 3.85) |
| A3 | (4.91 5.45) | (4.50 4.39) | (4.78 5.04) | (4.25 4.02) |

вариант 21

| | B1 | B2 | B3 | B4 |
|----|-------------|-------------|-------------|-------------|
| A1 | (4.38 4.55) | (3.72 4.12) | (3.99 4.13) | (3.44 3.71) |
| A2 | (4.90 4.88) | (4.16 4.29) | (4.23 4.11) | (3.68 3.91) |
| A3 | (4.91 5.27) | (4.29 4.63) | (4.78 4.84) | (4.08 3.86) |

вариант 22

| | B1 | B2 | B3 | B4 |
|----|-------------|-------------|-------------|-------------|
| A1 | (4.59 4.35) | (3.84 3.51) | (4.46 4.09) | (3.39 3.54) |
| A2 | (4.84 4.90) | (4.19 4.20) | (4.51 4.54) | (4.01 3.87) |
| A3 | (5.09 5.14) | (4.76 4.28) | (4.68 4.62) | (4.01 3.71) |

вариант 23

| | B1 | B2 | B3 | B4 |
|----|-------------|-------------|-------------|-------------|
| A1 | (4.53 4.36) | (3.72 3.57) | (4.10 4.39) | (3.54 3.79) |
| A2 | (4.36 4.43) | (4.28 4.18) | (4.51 4.48) | (4.04 3.78) |
| A3 | (5.22 4.81) | (4.25 4.95) | (4.84 4.41) | (3.91 3.98) |

вариант 24

| | B1 | B2 | B3 | B4 |
|----|-------------|-------------|-------------|-------------|
| A1 | (4.61 4.74) | (3.49 3.77) | (4.26 3.85) | (3.81 3.47) |
| A2 | (4.70 4.67) | (4.20 4.08) | (4.66 4.30) | (3.59 3.77) |
| A3 | (5.11 5.26) | (4.63 4.54) | (4.78 4.64) | (4.08 4.20) |

вариант 25

| | B1 | B2 | B3 | B4 |
|----|-------------|-------------|-------------|-------------|
| A1 | (4.53 4.48) | (3.76 4.06) | (3.82 4.07) | (3.56 3.08) |
| A2 | (4.84 4.69) | (4.22 4.34) | (4.17 4.55) | (4.17 3.71) |
| A3 | (4.98 5.16) | (4.57 4.42) | (5.12 4.93) | (3.92 4.07) |

вариант 26

| | B1 | B2 | B3 | B4 |
|----|-------------|-------------|-------------|-------------|
| A1 | (4.23 4.49) | (3.71 3.48) | (3.90 3.70) | (3.37 3.54) |
| A2 | (4.96 4.68) | (3.92 3.86) | (4.73 4.85) | (3.76 3.70) |
| A3 | (4.89 5.30) | (4.30 4.57) | (4.78 4.75) | (4.30 3.91) |

вариант 27

| | B1 | B2 | B3 | B4 |
|----|-------------|-------------|-------------|-------------|
| A1 | (4.08 4.33) | (3.69 3.85) | (3.97 4.05) | (3.15 3.03) |
| A2 | (4.52 4.70) | (4.26 4.33) | (4.50 4.40) | (3.70 4.03) |
| A3 | (5.39 4.87) | (4.72 4.37) | (4.89 4.70) | (3.94 3.92) |

вариант 28

| | B1 | B2 | B3 | B4 |
|----|-------------|-------------|-------------|-------------|
| A1 | (4.61 4.41) | (3.63 3.78) | (4.21 4.22) | (3.64 3.47) |
| A2 | (4.81 4.74) | (4.14 4.10) | (4.45 4.23) | (3.91 3.58) |
| A3 | (5.03 4.81) | (4.69 4.40) | (4.41 4.88) | (4.65 3.69) |

вариант 29

| | B1 | B2 | B3 | B4 |
|----|-------------|-------------|-------------|-------------|
| A1 | (4.40 4.28) | (4.05 3.22) | (3.80 3.99) | (3.81 3.39) |
| A2 | (4.91 4.81) | (4.04 4.18) | (4.36 4.52) | (3.92 3.92) |
| A3 | (5.11 4.82) | (4.37 4.29) | (4.51 4.74) | (4.17 4.10) |

вариант 30

| | B1 | B2 | B3 | B4 |
|----|-------------|-------------|-------------|-------------|
| A1 | (4.47 4.52) | (3.91 3.62) | (4.05 3.80) | (3.54 3.51) |
| A2 | (4.79 4.71) | (3.93 4.37) | (4.35 4.29) | (3.87 3.80) |
| A3 | (5.06 4.85) | (4.02 4.10) | (4.77 4.91) | (3.89 3.82) |

вариант 31

| | B1 | B2 | B3 | B4 |
|----|-------------|-------------|-------------|-------------|
| A1 | (4.22 4.27) | (4.30 4.18) | (4.14 4.05) | (3.63 3.87) |
| A2 | (4.65 4.56) | (4.03 4.02) | (4.68 4.59) | (3.64 3.73) |
| A3 | (5.18 4.84) | (4.72 4.45) | (4.73 4.63) | (4.03 4.28) |

вариант 32

| | B1 | B2 | B3 | B4 |
|----|-------------|-------------|-------------|-------------|
| A1 | (4.26 4.34) | (3.91 3.62) | (4.24 4.17) | (3.32 3.35) |
| A2 | (4.44 4.96) | (4.32 3.79) | (4.81 4.52) | (3.65 4.15) |
| A3 | (4.99 5.25) | (4.45 4.26) | (4.67 5.40) | (4.17 3.98) |

вариант 33

| | B1 | B2 | B3 | B4 |
|----|-------------|-------------|-------------|-------------|
| A1 | (4.45 4.06) | (4.00 3.84) | (4.10 4.12) | (3.73 3.65) |
| A2 | (4.58 4.77) | (4.01 4.17) | (4.51 4.53) | (3.92 3.92) |
| A3 | (5.23 5.04) | (4.74 4.33) | (4.78 4.76) | (4.08 3.84) |

вариант 34

| | B1 | B2 | B3 | B4 |
|----|-------------|-------------|-------------|-------------|
| A1 | (4.78 4.36) | (3.30 3.89) | (3.99 4.24) | (3.67 3.65) |
| A2 | (5.14 4.61) | (3.98 3.92) | (4.55 4.15) | (3.97 3.87) |
| A3 | (5.11 5.02) | (4.59 4.75) | (4.82 4.59) | (3.68 4.13) |

вариант 35

| | B1 | B2 | B3 | B4 |
|----|-------------|-------------|-------------|-------------|
| A1 | (4.55 4.19) | (3.89 3.83) | (3.93 3.74) | (3.14 3.51) |
| A2 | (4.95 4.74) | (4.11 4.20) | (4.34 4.45) | (3.73 3.64) |
| A3 | (5.26 4.95) | (4.29 4.63) | (4.78 4.74) | (4.29 3.80) |

вариант 36

| | B1 | B2 | B3 | B4 |
|----|-------------|-------------|-------------|-------------|
| A1 | (4.27 4.52) | (3.75 3.82) | (4.30 3.98) | (3.73 3.39) |
| A2 | (4.59 4.86) | (4.20 4.10) | (4.45 4.00) | (3.79 3.85) |
| A3 | (4.96 5.06) | (4.08 4.38) | (4.96 4.70) | (4.28 4.53) |

вариант 37

| | B1 | B2 | B3 | B4 |
|----|-------------|-------------|-------------|-------------|
| A1 | (4.42 4.78) | (3.67 3.39) | (4.56 3.76) | (4.03 3.36) |
| A2 | (4.97 4.63) | (3.66 3.96) | (4.45 4.47) | (3.48 3.84) |
| A3 | (4.98 4.69) | (4.43 4.54) | (5.30 4.66) | (3.99 4.21) |

вариант 38

| | B1 | B2 | B3 | B4 |
|----|-------------|-------------|-------------|-------------|
| A1 | (4.81 4.15) | (4.02 3.70) | (4.15 3.55) | (3.43 3.84) |
| A2 | (4.75 4.80) | (4.24 3.61) | (4.44 4.61) | (3.91 3.84) |
| A3 | (5.02 4.99) | (4.72 4.79) | (4.73 4.50) | (4.36 3.74) |

вариант 39

| | B1 | B2 | B3 | B4 |
|----|-------------|-------------|-------------|-------------|
| A1 | (4.71 4.72) | (3.76 3.96) | (4.34 4.17) | (3.61 3.26) |
| A2 | (4.80 5.03) | (4.07 3.91) | (4.34 4.57) | (3.89 3.89) |
| A3 | (5.29 5.28) | (4.72 4.56) | (4.82 4.72) | (4.09 3.67) |

вариант 40

| | B1 | B2 | B3 | B4 |
|----|-------------|-------------|-------------|-------------|
| A1 | (4.38 4.38) | (3.89 3.89) | (4.71 4.20) | (3.89 3.41) |
| A2 | (4.44 4.91) | (4.15 4.53) | (4.34 4.55) | (3.58 3.70) |
| A3 | (4.97 5.11) | (4.46 4.18) | (4.97 5.04) | (4.16 4.19) |

вариант 41

| | B1 | B2 | B3 | B4 |
|----|-------------|-------------|-------------|-------------|
| A1 | (4.71 4.47) | (3.94 3.96) | (4.42 4.41) | (3.82 3.30) |
| A2 | (4.71 4.74) | (3.91 4.10) | (4.50 4.52) | (4.21 3.59) |
| A3 | (5.28 4.87) | (4.40 4.72) | (4.89 4.85) | (4.19 3.99) |

вариант 42

| | B1 | B2 | B3 | B4 |
|----|-------------|-------------|-------------|-------------|
| A1 | (4.35 4.51) | (3.58 4.07) | (4.00 4.01) | (3.10 3.48) |
| A2 | (4.85 4.72) | (3.93 4.49) | (4.43 4.21) | (3.87 4.00) |
| A3 | (4.85 5.25) | (4.43 4.49) | (4.97 4.66) | (3.87 4.04) |

Содержание

| | |
|---|----|
| 1. Предварительные сведения..... | 3 |
| 2. О задачах дисперсионного анализа..... | 4 |
| 3. Двухфакторный анализ с однократными наблюдениями..... | 5 |
| 4. Двухфакторный анализ с многократными наблюдениями..... | 9 |
| 5. Библиографический список..... | 13 |
| 6. Приложение..... | 14 |