МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРОМЫШЛЕННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ДИЗАЙНА”

ВЫСШАЯ ШКОЛА ТЕХНОЛОГИИ И ЭНЕРГЕТИКИ

Кафедра высшей математики

Дополнительные главы теории вероятностей и математической статистики

Регрессионный анализ

Методические указания и индивидуальные задания
для магистрантов всех направлений

Санкт-Петербург
2018

УДК 519.22(07)

Дополнительные главы теории вероятностей и математической статистики. Регрессионный анализ: методические указания и индивидуальные задания для магистрантов всех направлений/─ сост.:М.Э.Юдовин, З.Л.Абжандадзе, Н.Л.Белая, Н.Ю.Косовская, – СПб. –ВШТЭ СПбГУПТД, 2018-18с.

Приводится теоретический материал с разобранными решениями типичных примеров. Приложены варианты индивидуальных заданий.

Предназначено для магистрантов всех направлений.

Рецензент: доцент кафедры высшей математики № 2 ЛЭТИ,
канд. техн.наук С.Б. Энтина.

Подготовлено и рекомендовано к печати кафедрой высшей математики ВШТЭ Санкт-Петербургского государственного университета промышленных технологий и дизайна (протокол № 6 от 06.02.2018).

Утверждено к изданию методической комиссией факультета промышленной энергетики ВШТЭ Санкт-Петербургского государственного университета промышленных технологий и дизайна (протокол № 3 от 07.02.2018).

1. Предварительные сведения

Напомним определения некоторых понятий из курса теории вероятностей и математической статистики, необходимых для освоения последующего материала.

- Для задания ***дискретной*** случайной величины используется ***ряд распределения*** – набор всех значений случайной величины и вероятностей этих значений.

- Для задания ***непрерывной*** случайной величины используется ***плотность вероятности*** $f(x)$. С помощью функции $f(x)$ для любого интервала (a, b) определяется вероятность попадания значения случайной величины X в этот интервал по формуле $P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$.

- Для задания как непрерывных, так и дискретных случайных величин можно также использовать ***функцию распределения*** $F(x)$, определяемую формулой $F(x) = P(X < x)$, где $P(X < x)$ – вероятность попадания значения случайной величины в интервал $(-\infty, x)$.

- Числовые характеристики случайной величины: ***математическое ожидание, дисперсия*** и ***среднее квадратичное отклонение*** . В дальнейшем тексте они будут обозначаться символами μ, σ^2и σ соответственно. Среднее квадратичное отклонение называют также ***стандартным отклонением***. Формулы для их вычисления в дискретном и непрерывном случае имеют вид:

$$\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i p_i; \quad \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx \;;,$$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx \;; \quad \sigma^2 = \sum_{i=1}^{+\infty} (x_i - \mu)^2 p_i \;.$$

Математическое ожидание является в определенном смысле средним значением случайной величины, а дисперсия – характеристикой рассеяния значений случайной величины относительно ее среднего значения.

- В статистике часто используется ***квантиль распределения*** – функция, обратная к функции распределения. Число x_β, определяемое уравнением $F(x_\beta) = \beta$, называется β-***квантилью*** распределения.

- ***Случайной выборкой*** объема n называется набор значений $(x_1, \ldots, x_n)$ случайной величины, полученных в результате n независимых опытов. Эти значения в статистике называют наблюдениями.

- Выборка имеет числовые характеристики, аналогичные характеристикам случайной величины: ***выборочное среднее*** $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$; ***выборочная дисперсия*** $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$; ***выборочное стандартное отклонение*** $s = \sqrt{s^2}$.

- Важную роль в математической статистике играет нормальное распределение. Его функцию распределения можно задать формулой

$F(x, \mu, \sigma) = \Phi(t) + 0{,}5$, где $t = (x - \mu)/\sigma$, а $\Phi(t)$ – функция Лапласа. Значения функции Лапласа или функции $F(x, 0{,}1)$ можно найти в любом учебнике по теории вероятностей. Также эта функция имеется во многих программах, например в программе Excel.

2. Простейшая модель регрессионного анализа

В регрессионном анализе изучается зависимость между переменной $\boldsymbol{y}$ и одной или несколькими независимыми переменными. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением случая одной независимой переменной.

Предполагается, что значения независимой переменной $\boldsymbol{x}$ можно задавать, а значения $\boldsymbol{y}$ определяются из эксперимента и, следовательно, содержат случайные ошибки.

Предположим, что между переменными величинами x $и$ y существует линейная зависимость

$$y = a_0 + a_1 x, \tag{1}$$

причем коэффициенты в уравнении (1) неизвестны. Зависимость (1) является простейшей из возможных, однако при изучении реальных зависимостей ее можно использовать в качестве первого приближения и при необходимости перейти к более сложной модели. Формула (1) определяет строгую линейную зависимость, в ней не учитывается, что значения y доступны лишь в результате эксперимента и, значит, содержат случайные ошибки. Поэтому более реалистичной является модель

$$Y = a_0 + a_1 x + E\ , \tag{2}$$

где $Y, E -$ случайные величины.

Проведем n опытов и получим n пар наблюдений $(x_i, y_i),\ i = 1, \dots, n.$ В соответствии с принятой линейной моделью (2) эти наблюдения можно представить в виде

$$y_i = a_0 + a_1 x_i + \varepsilon_i\ ,\ i = 1, \dots\ , n. \tag{3}$$

Здесь ε_i – случайные ошибки. Система (3) имеет n уравнений с $(n + 2)$ неизвестными $a_0, a_1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$.

Очевидно, такие системы имеют бесконечно много решений, поэтому из них нельзя найти точные значения коэффициентов a_0 и a_1. Однако существуют методы, позволяющие найти их приближенные значения .

Один из таких методов – ***метод наименьших квадратов*** (МНК).

3. Метод наименьших квадратов

Далее мы предполагаем, что случайные ошибки ε_i независимы и имеют нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и неизвестной, но одинаковой дисперсией.

Обозначим $e_i = y_i - \alpha_0 - \alpha_1 x_i$ где α_0, α_1– произвольные числа, и составим сумму

$$S(\alpha_0, \alpha_1) = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 \ . \qquad (4)$$

Числа e_i называются остатками. Они характеризуют отклонение по вертикали точек (x_i, y_i) от произвольной прямой.

Метод наименьших квадратов заключается в том, что коэффициенты α_0, α_1 выбираются таким образом, чтобы сумма квадратов остатков была ***наименьшей***.

Предположим, что сумма $S(\alpha_0, \alpha_1)$ принимает наименьшее значение при $\alpha_0 = \hat{a}_0$, $\alpha_1 = \hat{a}_1$. В математической статистике доказывается, что величины $\hat{a}_0, \hat{a}_1$ являются ***статистическими оценками*** неизвестных параметров a_0, a_1.

Геометрический смысл описанного подхода заключается в следующем. На рис.1 изображены экспериментальные точки и произвольная прямая

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 x,$$

знаком $*$ отмечены точки, полученные в результате эксперимента; вертикальные отрезки изображают остатки e_i ; модуль остатка – это расстояние по вертикали от экспериментальной точки (x_i, y_i) до прямой. Очевидно, что невозможно выбрать прямую так, чтобы она проходила через все точки (x_i, y_i). Поэтому выбирается на основе определенного критерия некоторое среднее положение прямой, наилучшее согласно выбранному нами критерию. Наиболее часто используемым критерием является минимум суммы квадратов остатков.

Таким образом, задача сводится к отысканию значений параметров (α_0, α_1), при которых функция $S(\alpha_0, \alpha_1)$ имеет наименьшее значение.

4. Формулы для вычисления коэффициентов $\hat{a}_0, \hat{a}_1$

Для отыскания значений переменных α_0, α_1, минимизирующих $S(\alpha_0, \alpha_1)$, используем необходимое условие экстремума

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial \alpha_0} = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial \alpha_1} = 0 \end{cases}. \tag{5}$$

Решение системы (5) дается формулами :

$$\hat{a}_1 = \frac{S_{XY}}{S_X}, \quad \hat{a}_0 = \bar{y} - \hat{\alpha}_1 \bar{x},$$

где

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \qquad S_X = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2, \tag{6}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i, \quad S_{XY} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}). \tag{7}$$

Коэффициенты $\hat{a}_0$, $\hat{a}_1$ являются случайными величинами, так как они зависят от значений случайной величины Y. Вообще говоря, они не совпадают с "истинными" коэффициентами**.** Однако можно доказать, что их математические ожидания равны соответственно a_0, a_1. На языке математической статистики это означает, что $\hat{a}_0$, $\hat{a}_1$ являются ***несмещенными оценками*** коэффициентов a_0, a_1.

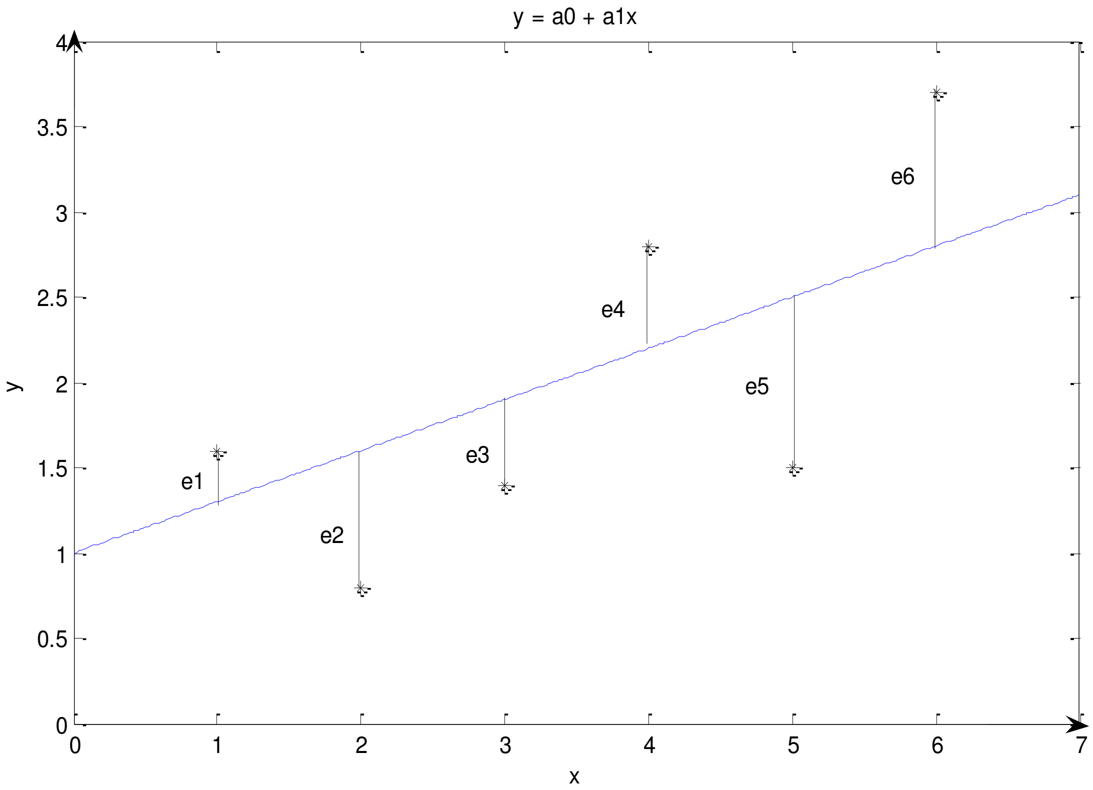

Рис.1

Таким образом, вместо точного уравнения (1) с неизвестными коэффициентами получено приближенное уравнение

$$\hat{y} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x \tag{8}$$

Остатки для этого уравнения равны $\hat{e}_i = y_i - \hat{y}_i$, где $\hat{y}_i = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_i$. Для любого заданного x величина $\hat{y}$, определяемая уравнением (11), является несмещенной оценкой для y. Обозначим $S_R = S(\hat{a}_0, \hat{a}_1)$. В курсе математической статистики доказывается, что величина

$$s^2 = S_R/(n-2) \tag{9}$$

является несмещенной оценкой для дисперсии случайных ошибок .

5. Проверка значимости коэффициентов

Если некоторый из вычисленных коэффициентов $\hat{a}_0$, $\hat{a}_1$ оказался малым, то естественно предположить, что соответствующий истинный коэффициент равен нулю, а его оценка не равна нулю из-за случайных ошибок или, как говорят в этом случае, вычисленный коэффициент незначимо отличается от нуля.

Обозначим через $\boldsymbol{H_0}$ гипотезу: $a_1 = 0$, иначе говоря, гипотеза состоит в том, что переменная y не зависит от x. Гипотеза проверяется следующим образом.

Вычислим полную сумму квадратов S_Y , остаточную сумму квадратов S_R и F- отношение по формулам:

$$S_Y = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2 \ ; \ S_R = S(\hat{a}_0, \hat{a}_1); \ F = (n-2)(S_Y - S_R)/S_R \,. \quad (10)$$

Если гипотеза $\boldsymbol{H_0}$ верна, то случайная величина F имеет распределение Фишера со степенями свободы 1 и $(n-2)$. Задаем уровень значимости $\boldsymbol{\alpha}$. Из таблицы находим $(1-\boldsymbol{\alpha})$-квантиль этого распределения . Обозначим его через $F_{\text{крит}}$. Для проверки гипотезы применяется следующее правило:

Если $F \le F_{\text{крит}}$, то гипотеза $\boldsymbol{H_0}$ принимается, если же $F > F_{\text{крит}}$, то $\boldsymbol{H_0}$ отвергается.

Замечание. Принятие этой гипотезы не означает, что она обязательно верна. Утверждается лишь, что при имеющихся экспериментальных данных и на выбранном уровне значимости нет оснований отвергать гипотезу. Увеличив $\boldsymbol{\alpha}$, мы, возможно, должны будем отвергнуть гипотезу. Аналогично, отвергая гипотезу, мы не можем гарантировать, что она неверна.

6. Оценка точности приближенной модели

Предположим, что коэффициенты в уравнении (8) оказались значимыми. Если мы хотим использовать $\hat{\boldsymbol{y}}$ в качестве приближенного значения для $\boldsymbol{y}$ при произвольном $\boldsymbol{x}$**,** то возникает вопрос о точности этого приближения. Определим выражение

$$\Delta y(x) = t_{\gamma,m} \cdot s\sqrt{\frac{1}{n} + (x - \bar{x})^2/S_X} \quad , \qquad (11)$$

где s *и* S_X определяются формулами (6) и (9), а коэффициент *t* определяется из таблицы квантилей распределения Стьюдента по заданному уровню значимости $\boldsymbol{\alpha}$ и числу степеней свободы $m = n - 2$. Например, при $\alpha = 0{,}05$ и $n = 12$ имеем $\gamma = 1 - \alpha/2 = 0{,}975$ и $m = 12 - 2 = 10$. Тогда из таблицы распределения Стьюдента находим $t_{\gamma,m} = 2{,}23.$.

Доверительный интервал для $\boldsymbol{y}$ зависит от $\boldsymbol{x}$ и имеет вид

$$\hat{y}(x) - \Delta y(x) < y(x) < \hat{y}(x) + \Delta y(x) \qquad (12)$$

где $\hat{y}(x)$ вычисляется по формуле (8), а $\Delta y(x)$ – по формуле (11).

Из формул (9) и (11) видно, что длина и центр этого интервала зависят от $\boldsymbol{x}$, причем наименьшая длина достигается при $x = \bar{x}$, а по мере удаления от $\bar{x}$ длина интервала увеличивается, а значит, уменьшается точность оценки величины $\boldsymbol{y}$.

На рис. 2 показана полоса, определенная неравенствами (12). Наименьшее вертикальное сечение этой полосы будет при $x = \bar{x}$, а при удалении в обе стороны от этого сечения полоса расширяется.

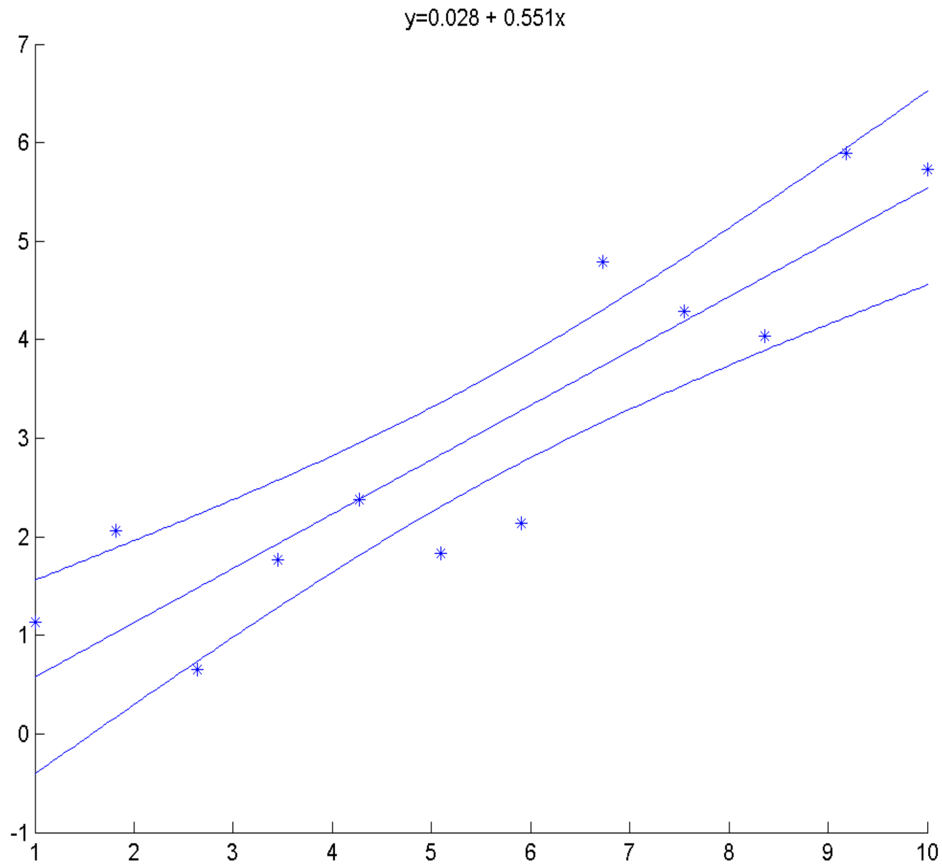

Рис.2

7. Проверка адекватности модели

Предыдущие рассуждения были основаны на предположении, что модель (1) адекватна, т.е. верна. Эта гипотеза также может быть проверена методами математической статистики. Для ее проверки необходимо иметь некоторое число дополнительных наблюдений, на основе которых строится оценка дисперсии случайной ошибки, независимая от оценки по формуле (9). Например, если для каждого x_i получено k повторных наблюдений $y_{i,j}$, $i = 1,2,\ldots,n$; $j = 1,2,\ldots,k$, то независимая от s^2 оценка имеет вид:

$$s_1^2 = \frac{S_1}{kn - n} \qquad ,$$

$$где\quad S_1 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\left(y_{i,j} - y_{i\cdot}\right)^2,\quad y_{i\cdot} = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} y_{i,j}\quad .$$

В математической статистике доказано, что величина

$$F = \frac{(S_R - S_1)/(n-k)}{S_1/(kn-n)}$$

имеет распределение Фишера со степенями свободы $(n-k)$,$(kn-n)$. Проверка гипотезы об адекватности модели (1) производится по той же схеме, что и проверка значимости коэффициента. Находим $(1-\alpha)$-квантиль распределения Фишера $F_{\text{крит}}$. Если $F \le F_{\text{крит}}$, то гипотеза принимается, если же $F > F_{\text{крит}}$, то гипотеза отвергается.

Библиографический список

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 1979.
2. Смирнов Н.В., Дунин-Барковский И.В. Курс теории вероятностей и математической статистики (для технических приложений). – М.: Наука, 1969.
3. Планирование эксперимента в исследовании технологических процессов. – М.: Мир, 1977.

Приложение

Варианты индивидуальных заданий по теме «Регрессионный анализ»

№ 1
x:2.0 3.0 4.0 5.0 6.0 7.0 8.0 9.0 10.0 11.0
y:1.1 2.1 1.9 1.3 1.7 1.4 2.0 1.5 1.7 2.7
y:0.7 1.3 1.5 1.2 1.7 1.8 1.2 1.8 2.1 3.0

№ 2
x:2.0 3.0 4.0 5.0 6.0 7.0 8.0 9.0 10.0 11.0
y:1.0 1.6 1.1 2.3 2.6 1.6 2.1 2.2 2.4 2.7
y:0.7 1.7 1.5 1.3 2.1 2.1 1.8 1.6 1.6 2.3

№ 3
x:2.0 3.0 4.0 5.0 6.0 7.0 8.0 9.0 10.0 11.0
y:1.3 1.8 1.6 1.3 1.0 2.3 1.8 2.5 2.5 1.9
y:1.2 1.4 1.5 2.0 0.9 1.7 1.4 1.2 2.5 1.7

№ 4
x:2.0 3.0 4.0 5.0 6.0 7.0 8.0 9.0 10.0 11.0
y:0.8 0.4 1.1 1.8 2.8 1.8 2.1 2.0 2.3 2.0
y:1.5 0.3 1.5 1.9 1.9 0.8 2.4 2.6 1.5 1.1

№ 5
x:2.0 3.0 4.0 5.0 6.0 7.0 8.0 9.0 10.0 11.0
y:0.9 1.0 2.3 1.8 1.8 2.0 1.2 2.1 1.6 1.8
y:0.7 1.5 1.5 1.3 1.0 2.1 1.6 1.3 2.7 2.5

№ 6
x:2.0 3.0 4.0 5.0 6.0 7.0 8.0 9.0 10.0 11.0
y:1.5 2.0 1.5 1.3 1.4 1.6 1.3 2.6 2.3 1.5
y:0.6 1.9 1.0 2.1 1.8 1.6 1.9 2.0 2.3 2.1

№ 7
x:2.0 3.0 4.0 5.0 6.0 7.0 8.0 9.0 10.0 11.0
y:1.9 2.2 1.7 1.9 1.9 1.1 1.4 1.8 1.8 1.8
y:1.6 1.7 1.7 1.3 1.6 1.7 2.2 1.3 2.4 1.3

№ 8
x:2.0 3.0 4.0 5.0 6.0 7.0 8.0 9.0 10.0 11.0
y:1.9 1.6 1.2 1.6 1.8 0.8 1.4 2.2 2.0 1.7
y:0.4 1.4 0.7 1.1 1.8 1.6 1.6 1.5 1.8 2.1

№ 9

x:2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0	11.0
y:0.9	0.7	1.1	1.9	1.1	1.8	1.7	1.5	1.4	2.0
y:1.5	1.2	0.6	1.6	2.4	2.0	1.9	2.1	1.5	2.2

№ 10

x:2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0	11.0
y:1.7	0.2	1.5	2.2	1.7	2.3	2.1	1.8	2.1	1.8
y:1.1	1.1	1.4	2.0	1.5	2.1	2.3	0.8	2.3	1.6

№ 11

x:2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0	11.0
y:0.3	1.4	2.1	0.9	1.8	2.2	1.4	1.8	1.7	1.5
y:0.8	1.0	0.9	0.6	2.0	1.5	2.3	2.3	2.3	2.1

№ 12

x:2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0	11.0
y:1.6	1.3	2.1	1.4	1.5	1.1	1.0	1.2	2.5	1.5
y:-0.0	0.5	1.1	0.9	1.8	2.2	1.6	2.1	2.4	1.7

№ 13

x:2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0	11.0
y:1.1	1.0	0.5	2.1	2.7	1.4	1.4	3.8	1.4	2.7
y:0.5	1.4	1.1	1.5	1.8	1.6	1.7	2.0	1.2	2.3

№ 14

x:2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0	11.0
y:0.7	0.9	0.5	1.7	2.1	1.3	1.1	2.0	2.2	1.9
y:1.2	1.8	2.1	1.5	2.4	0.9	1.1	1.5	3.3	2.8

№ 15

x:2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0	11.0
y:1.4	1.1	1.2	2.1	1.4	2.2	2.2	1.3	2.6	2.8
y:1.4	1.3	1.2	1.6	1.2	1.8	1.9	2.2	1.3	1.8

№ 16

x:2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0	11.0
y:2.3	1.9	0.5	1.5	1.4	1.9	1.7	2.5	1.7	1.8
y:0.8	1.5	1.4	1.0	1.8	1.9	2.8	1.9	1.5	1.2

№ 17

x:	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0	11.0
y:	1.4	0.8	2.0	1.7	2.1	2.3	2.4	1.3	2.1	1.7
y:	0.2	1.2	0.9	0.7	1.4	2.0	1.3	2.3	1.9	1.9

№ 18

x:	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0	11.0
y:	0.8	1.7	2.4	1.5	1.9	2.0	2.5	1.9	2.3	1.7
y:	1.7	2.1	1.7	1.9	1.0	1.7	1.2	1.1	2.8	1.5

№ 19

x:	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0	11.0
y:	1.4	0.8	1.9	1.5	1.2	2.2	1.8	2.6	2.0	1.9
y:	0.3	1.7	1.4	1.0	2.5	1.6	2.6	2.1	3.0	1.9

№ 20

x:	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0	11.0
y:	0.5	1.4	1.0	2.4	0.8	2.6	2.7	1.4	2.7	2.1
y:	1.3	1.0	1.3	1.6	2.2	1.8	2.4	2.0	1.4	1.9

№ 21

x:	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0	11.0
y:	2.5	0.8	1.1	1.8	1.7	1.5	1.3	2.9	2.1	2.2
y:	1.9	1.7	1.3	0.7	1.3	1.5	1.8	1.8	1.5	1.4

№ 22

x:	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0	11.0
y:	1.6	1.8	1.1	2.3	1.2	1.2	2.1	2.5	2.5	1.9
y:	1.6	1.5	1.5	0.8	1.9	1.4	2.0	2.3	1.6	1.9

№ 23

x:	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0	11.0
y:	1.1	1.8	1.9	2.0	2.1	1.8	1.8	2.6	2.2	2.5
y:	0.6	1.4	1.5	2.0	1.8	1.7	1.8	1.7	2.2	1.8

№ 24

x:	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0	11.0
y:	0.2	0.4	1.7	1.6	0.6	1.3	2.1	2.4	2.9	1.6
y:	0.8	1.1	1.7	1.0	1.7	2.0	2.7	1.5	1.0	1.5

№ 25
x:2.0 3.0 4.0 5.0 6.0 7.0 8.0 9.0 10.0 11.0
y:0.4 0.7 0.6 1.5 1.3 1.9 2.3 2.8 2.1 2.0
y:1.3 0.4 1.3 1.3 1.9 1.7 1.4 2.3 1.6 1.1

№ 26
x:2.0 3.0 4.0 5.0 6.0 7.0 8.0 9.0 10.0 11.0
y:1.7 1.3 0.9 1.0 0.9 1.5 2.5 1.6 2.7 1.2
y:1.0 0.9 1.4 1.7 2.2 1.9 1.6 1.1 1.9 1.9

№ 27
x:2.0 3.0 4.0 5.0 6.0 7.0 8.0 9.0 10.0 11.0
y:1.3 0.4 1.4 1.5 1.5 1.4 1.1 1.8 1.3 1.7
y:0.6 1.1 1.1 2.3 1.6 2.1 2.1 1.5 2.4 2.5

№ 28
x:2.0 3.0 4.0 5.0 6.0 7.0 8.0 9.0 10.0 11.0
y:1.8 0.2 1.7 1.1 1.6 2.1 1.0 1.6 1.5 2.3
y:2.1 2.0 1.1 2.2 2.5 1.9 2.1 1.9 2.2 1.9

№ 29
x:2.0 3.0 4.0 5.0 6.0 7.0 8.0 9.0 10.0 11.0
y:1.1 1.1 1.3 1.9 1.4 2.5 0.9 1.9 1.8 2.2
y:0.5 1.6 1.2 0.5 1.7 1.3 1.6 2.6 2.3 2.3

№ 30
x:2.0 3.0 4.0 5.0 6.0 7.0 8.0 9.0 10.0 11.0
y:1.3 1.2 2.3 1.5 2.0 1.1 3.3 1.4 1.6 2.8
y:0.9 1.9 0.7 0.6 1.2 2.5 1.6 1.1 1.6 1.6

№ 31
x:2.0 3.0 4.0 5.0 6.0 7.0 8.0 9.0 10.0 11.0
y:1.6 0.7 0.6 1.9 2.1 0.8 2.0 1.8 1.6 2.3
y:1.4 1.8 1.2 1.4 1.6 1.5 1.9 2.1 1.5 2.5

№ 32
x:2.0 3.0 4.0 5.0 6.0 7.0 8.0 9.0 10.0 11.0
y:1.7 1.3 0.9 1.2 2.0 2.4 2.2 1.9 2.5 1.3
y:0.9 0.9 0.6 1.7 1.2 1.9 1.6 2.8 2.4 2.5

№ 33
x:2.0 3.0 4.0 5.0 6.0 7.0 8.0 9.0 10.0 11.0
y:0.9 1.7 1.0 0.4 1.7 1.2 1.8 1.5 2.6 1.8
y:0.8 1.6 2.0 1.7 2.4 1.1 1.8 2.1 1.4 1.4

№ 34
x:2.0 3.0 4.0 5.0 6.0 7.0 8.0 9.0 10.0 11.0
y:0.8 0.2 1.1 2.7 2.8 1.6 1.3 2.9 2.2 2.9
y:0.6 1.6 1.3 1.3 0.8 1.8 2.3 2.0 1.5 2.1

№ 35
x:2.0 3.0 4.0 5.0 6.0 7.0 8.0 9.0 10.0 11.0
y:1.3 2.3 2.1 2.1 1.9 1.2 1.8 2.0 2.1 2.1
y:1.3 1.8 1.4 1.5 1.9 2.2 1.8 1.4 2.8 2.0

№ 36
x:2.0 3.0 4.0 5.0 6.0 7.0 8.0 9.0 10.0 11.0
y:1.1 1.4 2.1 1.3 1.8 2.1 2.2 2.6 2.3 2.2
y:0.5 1.7 1.1 2.1 1.2 1.4 1.0 3.2 1.5 3.6

№ 37
x:2.0 3.0 4.0 5.0 6.0 7.0 8.0 9.0 10.0 11.0
y:0.6 1.7 1.0 2.0 1.3 1.6 2.4 2.4 2.0 2.0
y:1.4 1.5 1.4 1.7 1.6 2.6 1.7 2.2 2.4 2.5

№ 38
x:2.0 3.0 4.0 5.0 6.0 7.0 8.0 9.0 10.0 11.0
y:1.1 0.5 1.6 1.9 1.1 1.7 2.1 1.4 2.7 2.3
y:0.9 1.7 1.2 2.5 1.4 1.5 2.0 1.9 2.4 2.2

№ 39
x:2.0 3.0 4.0 5.0 6.0 7.0 8.0 9.0 10.0 11.0
y:1.9 1.6 1.2 1.0 1.2 1.0 1.6 2.7 1.8 2.3
y:1.3 1.5 1.4 1.5 1.0 1.1 2.1 2.2 1.5 1.9

№ 40
x:2.0 3.0 4.0 5.0 6.0 7.0 8.0 9.0 10.0 11.0
y:1.2 1.2 1.5 1.4 1.3 2.0 1.8 1.7 2.1 1.6
y:1.9 0.7 2.9 2.1 1.3 1.6 1.8 1.1 1.5 1.9

№ 41
x:2.0 3.0 4.0 5.0 6.0 7.0 8.0 9.0 10.0 11.0
y:1.0 2.0 1.9 1.8 1.3 2.5 2.6 1.4 1.9 2.1
y:1.4 2.0 0.4 1.6 1.9 2.2 1.7 1.9 1.0 2.1

№ 42
x:2.0 3.0 4.0 5.0 6.0 7.0 8.0 9.0 10.0 11.0
y:1.7 0.8 0.8 2.0 1.5 1.9 2.0 1.6 1.2 1.7
y:0.8 1.4 0.7 0.7 2.3 2.0 1.4 2.4 3.0 2.3

№ 43
x:2.0 3.0 4.0 5.0 6.0 7.0 8.0 9.0 10.0 11.0
y:1.2 1.1 2.0 1.1 2.3 2.1 1.1 1.4 1.9 1.7
y:0.5 2.1 1.2 1.2 2.7 1.5 2.0 1.1 2.7 2.0

№ 44
x:2.0 3.0 4.0 5.0 6.0 7.0 8.0 9.0 10.0 11.0
y:1.1 1.5 1.7 0.8 1.5 0.8 2.1 1.3 1.8 1.9
y:0.8 1.6 1.6 2.1 1.2 1.6 2.3 2.2 2.3 1.8

№ 45
x:2.0 3.0 4.0 5.0 6.0 7.0 8.0 9.0 10.0 11.0
y:1.2 1.0 2.2 1.7 2.7 1.3 1.8 2.3 2.0 2.1
y:1.1 -0.1 1.6 1.6 1.9 1.7 2.1 1.8 1.7 2.2

№ 46
x:2.0 3.0 4.0 5.0 6.0 7.0 8.0 9.0 10.0 11.0
y:1.1 2.0 1.5 2.3 0.7 1.7 2.2 2.4 2.6 2.0
y:0.7 1.4 0.3 0.9 0.9 1.7 1.9 1.9 1.9 2.3

№ 47
x:2.0 3.0 4.0 5.0 6.0 7.0 8.0 9.0 10.0 11.0
y:1.1 1.8 1.8 1.2 2.2 1.4 2.0 2.3 2.1 3.6
y:1.4 1.0 2.6 1.9 1.5 1.6 1.8 1.8 2.1 2.1

№ 48
x:2.0 3.0 4.0 5.0 6.0 7.0 8.0 9.0 10.0 11.0
y:1.0 1.3 1.5 1.5 1.5 1.8 1.8 2.2 3.3 1.7
y:1.1 1.7 1.5 1.1 1.7 2.5 1.8 2.6 2.7 2.7

№ 49
x:2.0 3.0 4.0 5.0 6.0 7.0 8.0 9.0 10.0 11.0
y:1.4 1.6 1.8 1.5 1.5 2.0 2.1 1.0 1.1 2.0
y:1.7 2.0 1.7 0.7 1.9 1.1 2.3 1.4 1.7 1.7

№ 50
x:2.0 3.0 4.0 5.0 6.0 7.0 8.0 9.0 10.0 11.0
y:0.8 1.0 0.9 2.4 1.3 1.7 1.6 1.3 2.7 2.3
y:0.8 1.6 1.3 1.4 1.2 2.0 1.4 1.7 1.9 2.9