Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Санкт-Петербургский государственный университет промышленных технологий и дизайна»
Высшая школа технологии и энергетики
Кафедра высшей математики

МАТЕМАТИКА

Выполнение контрольных работ № 1, № 2, № 3, № 4

Методические указания для студентов заочной формы обучения
по всем направлениям подготовки

Составители:
И. Ю. Малова
Е. В. Федорова

Санкт-Петербург
2022

Утверждено
на заседании кафедры ВМ
14.03.2022 г., протокол № 7

Рецензент: Е. Н. Громова

Методические указания соответствуют программам и учебным планам дисциплины «Математика» для студентов, обучающихся по всем направлениям подготовки.

В настоящих методических указаниях даны общие рекомендации для выполнения контрольных работ и правила их оформления, представлены варианты контрольных заданий, также приведены теоретические материалы и примеры решения задач.

Методические указания предназначены для студентов всех направлений первого курса заочной формы обучения.

Утверждены Редакционно-издательским советом ВШТЭ СПбГУПТД в качестве методических указаний

Редактор и корректор М. Д. Баранова
Техн. редактор Д. А. Романова Темплан 2022 г., поз.5061/а

Подписано к печати 31.05.2022. Формат 60х84/16. Бумага тип № 1.
Печать офсетная. Печ.л. 2,3. Уч.-изд. л. 2,3.
Тираж 50 экз. Изд. № 5061/а. Цена «С». Заказ №

Ризограф Высшей школы технологии и энергетики СПбГУПТД,

198095, Санкт-Петербург, ул. Ивана Черных, 4.

Содержание

Предисловие

Настоящие методические указания предназначены для студентов–заочников первого курса всех направлений. Они составлены в соответствии с действующей программой курса высшей математики в ВШТЭ СПбГУПТД для студентов заочной формы обучения.

Курс высшей математики в ВШТЭ СПбГУПТД состоит из четырех частей в соответствии с количеством семестров, в течение которых он изучается. По каждой части (в каждом семестре) студент–заочник должен выполнить определенное количество контрольных работ (в дальнейшем к/р).

Ниже мы приводим номера и темы к/р, которые должны быть выполнены на первом курсе в первом и втором семестрах. Таблицы для выбора задач к/р и общие правила их выполнения и оформления представлены в конце указаний.

I семестр.

Контрольная работа № 1 – Аналитическая геометрия, векторная и линейная алгебра.

Контрольная работа № 2 – Предел функции. Непрерывность функции. Производная функции одной переменной.

II семестр.

Контрольная работа № 3 – Исследование функций с помощью производных. Функции нескольких переменных. Частные производные.

Контрольная работа № 4 – Неопределенный интеграл. Определенный интеграл.

Рекомендации к выполнению контрольных работ

1. В процессе изучения курса математики студент должен выполнить ряд контрольных работ, главная цель которых – оказать студенту помощь в освоении материала. Рецензия на эти работы позволяет студенту судить о степени усвоения им соответствующего раздела курса, указывает на имеющиеся у него пробелы, помогает сформулировать вопросы к преподавателю.

2. Не следует приступать к выполнению контрольного задания, не решив достаточного количества задач по материалу, соответствующему этому заданию. Опыт показывает, что чаще всего неумение решить ту или иную задачу контрольного задания вызывается тем, что студент не выполнил это требование.

3. Контрольные работы должны выполняться студентом самостоятельно. В противном случае студент не приобретает необходимых знаний и может оказаться неподготовленным к устному экзамену или зачету.

4. Не рекомендуется присылать в университет одновременно работы по нес–кольким заданиям: это не дает возможности рецензенту своевременно указать студенту на допускаемые им ошибки и удлиняет срок рецензирования работ.

5. Прорецензированные контрольные работы вместе со всеми исправлениями и дополнениями, сделанными по требованию рецензента, следует сохранять. Без предъявления зачтенных контрольных работ студент не допускается к сдаче зачета и экзамена.

6. Распределение контрольных работ по семестрам устанавливается университетом в соответствии с распределением материала по семестрам и сообщается студентам дополнительно.

Задачи для контрольных заданий

1. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии

11–20. Даны координаты вершин пирамиды A_1, A_2, A_3, A_4. Найти: 1) длину ребра A_1A_2; 2) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4; 3) угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$; 4) площадь грани $A_1A_2A_3$; 5) объем пирамиды; 6) уравнение прямой A_1A_2; 7) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$; 8) уравнение высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$. Сделать чертеж.

11. $A_1(4;2;5)$, $A_2(0;7;2)$, $A_3(0;2;7)$, $A_4(1;5;0)$.
12. $A_1(4;4;10)$, $A_2(4;10;2)$, $A_3(2;8;4)$, $A_4(9;6;9)$.
13. $A_1(4;6;5)$, $A_2(6;9;4)$, $A_3(2;10;10)$, $A_4(7;5;9)$.
14. $A_1(3;5;4)$, $A_2(8;7;4)$, $A_3(5;10;4)$, $A_4(4;7;8)$.
15. $A_1(10;6;6)$, $A_2(-2;8;2)$, $A_3(6;8;9)$, $A_4(7;10;3)$.
16. $A_1(1;8;2)$, $A_2(5;2;6)$, $A_3(5;7;4)$, $A_4(4;10;9)$.
17. $A_1(6;6;5)$, $A_2(4;9;5)$, $A_3(4;6;11)$, $A_4(6;9;3)$.
18. $A_1(7;2;2)$, $A_2(5;7;7)$, $A_3(5;3;1)$, $A_4(2;3;7)$.
19. $A_1(8;6;4)$, $A_2(10;5;5)$, $A_3(5;6;8)$, $A_4(8;10;7)$.
20. $A_1(7;7;3)$, $A_2(6;5;8)$, $A_3(3;5;8)$, $A_4(8;4;1)$.

21. Уравнение одной из сторон квадрата: $x+3y-5=0$. Составить уравнение трех остальных сторон квадрата, если точка пересечения его диагоналей $(-1, 0)$.

22. Даны уравнения одной из сторон ромба: $x-3y+10=0$ и одной из его диагоналей: $x+4y-4=0$; диагонали ромба пересекаются в точке $(0, 1)$. Найти уравнения остальных сторон ромба.

23. Уравнения двух сторон параллелограмма: $x+2y+2=0$ и $x+y-4=0$, а уравнение одной из его диагоналей: $x-2=0$. Найти координаты вершин параллелограмма.

24. Даны две вершины треугольника: $A(-3,3)$ и $B(5,-1)$ и точка $D(4,3)$ – точка пересечения высот треугольника. Составить уравнения его сторон.

25. Даны вершины $A(-3,-2)$, $B(4,-1)$, $C(1,3)$ трапеции $ABCD$ (сторона AD параллельна BC). Известно, что диагонали трапеции взаимно перпендикулярны. Найти координаты вершины D этой трапеции.

26. Даны уравнения двух сторон треугольника $5x+4y+15=0$ и $4x+y-9=0$. Его медианы пересекаются в точке $(0,2)$. Составить уравнение третьей стороны треугольника.

27. Даны две вершины треугольника $A(2,-2)$ и $B(3,-1)$ и точка $P(1,0)$ – точка пересечения медиан треугольника ABC. Составить уравнение высоты треугольника, проведенной через третью вершину C.

28. Даны уравнения двух высот треугольника $x+y=4$ и $y=2x$ и одна из его вершин $A(0,2)$. Составить уравнения сторон треугольника.

29. Даны уравнения двух медиан треугольника $x-2y+1=0$ и $y-1=0$ и одна из его вершин $(1,3)$. Составить уравнения его сторон.

30. Две стороны треугольника заданы уравнениями $5x-2y-8=0$ и $3x-2y-8=0$, а середина третьей стороны совпадает с началом координат. Составить уравнение этой стороны.

31. Составить уравнение линии, расстояние каждой точки которой от начала координат и от точки $A(5,0)$ относится как $2:1$.

32. Составить уравнение линии, расстояние каждой точки которой от точки $A(-1,0)$ вдвое меньше расстояния её от прямой $x=-4$.

33. Составить уравнение линии, расстояние каждой точки которой от точки $A(2,0)$ и от прямой $5x+8=0$ относится как $5:4$.

34. Составить уравнение линии, каждая точка которой находится вдвое дальше от точки $A(4,0)$, чем от точки $B(1,0)$.

35. Составить уравнение линии, расстояние каждой точки которой от точки $A(2,0)$ и от прямой $2x+5=0$ относится как $4:5$.

36. Составить уравнение линии, расстояние каждой точки которой от точки $A(3,0)$ вдвое меньше расстояния от точки $B(26,0)$.

37. Составить уравнение линии, каждая точка которой одинаково удалена от точки $A(0,2)$ и от прямой $y-4=0$.

38. Составить уравнение линии, каждая точка которой равноотстоит от оси ординат и от окружности $x^2 + y^2 = 4x$.

39. Составить уравнение линии, каждая точка которой равноудалена от точки $A(2, 6)$ и от прямой $y + 2 = 0$.

40. Составить уравнение линии, каждая точка которой отстоит от точки $A(-4, 0)$ втрое дальше, чем от начала координат.

2. Введение в математический анализ

Задания 41–50. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя.

41. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1-2x}{3x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{5x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^x$.

42. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+1}{2x^3+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{\sqrt{2+x}-3}{x-7}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)}{5x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^x$.

43. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3+x^2-5}{x^3+x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-\sqrt{x}}{x^2-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-\cos(2x)}}{x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{4x+1}{4x}\right)^{2x}$.

44. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^4+x^2-6}{2x^2-x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5x}{\operatorname{arctg} x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0} (1+2x)^{1/x}$.

45. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+6x-5}{5x^2-x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty} x(\ln(x+1)-\ln(x))$.

46. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3+x+5x^4}{x^4-12x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \operatorname{ctg} 2x}{\sin 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty} (2x+1)(\ln(x+3)-\ln x)$.

47. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-2x^2+5x^4}{2+3x^2+x^4}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^2+x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 6x}{1-\cos 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty} (x-5)(\ln(x-3)-\ln x)$.

48. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^2-3x+1}{3x^2+x-5}$; б) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{5}}{x-3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}^2(x/2)}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to 1} (7-6x)^{x/(3x-3)}$.

49. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{7x^4-2x^3+2}{x^4+3}$; б) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{2x+6}}{x^2-5x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 4x}{2x\operatorname{tg} 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to 2} (3x-5)^{2x/(x^2-4)}$.

50. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{8x^5-3x^2+9}{2x^5+2x^2+5}$; б) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{\sqrt{2x}-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5x}{\operatorname{tg} 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to 3} (3x-8)^{2/(x-3)}$.

51–60. Заданы функция $y=f(x)$ и два значения аргумента x_1,x_2. Требуется: 1) установить, является ли данная функция непрерывной или разрывной для каждого из данных значений аргумента; 2) в случае разрыва функции найти ее пределы в точке разрыва слева и справа; 3) сделать схематический чертеж.

51. $f(x)=9^{1/(2-x)}$, $x_1=0$, $x_2=2$.
52. $f(x)=4^{1/(3-x)}$, $x_1=1$, $x_2=3$.
53. $f(x)=12^{1/x}$, $x_1=0$, $x_2=2$.
54. $f(x)=3^{1/(4-x)}$, $x_1=2$, $x_2=4$.
55. $f(x)=8^{1/(5-x)}$, $x_1=3$, $x_2=5$.
56. $f(x)=10^{1/(7-x)}$, $x_1=5$, $x_2=7$.
57. $f(x)=14^{1/(6-x)}$, $x_1=4$, $x_2=6$.
58. $f(x)=15^{1/(8-x)}$, $x_1=6$, $x_2=8$.
59. $f(x)=11^{1/(4+x)}$, $x_1=-4$, $x_2=-2$.
60. $f(x)=13^{1/(5+x)}$, $x_1=-5$, $x_2=-3$.

3. Производная и ее приложения

61–70. Найти производные dy/dx данных функций:

61. а) $y = \dfrac{2\sqrt{4x+3}-3}{\sqrt{x^3+x+1}}$; б) $y = e^{\cos x+3x}$;
в) $y = \ln(\sin(2x+5))$; г) $y = x^{\sqrt{x}}$.

62. а) $y = \sqrt{1-x^2}\cos x$; б) $y = 4\sin x/\cos^2 x$;
в) $y = \mathrm{tg}\,(e^{2x})$; г) $y = x^{1/x}$.

63. а) $y = x\sqrt{1+x^2}$; б) $y = \mathrm{tg}\,^2 2x$;
в) $y = \arcsin(\sqrt{1-3x})$; г) $y = x^{\ln x}$.

64. а) $y = 3/\sqrt{3-4x+5x^2}$; б) $y = \sin x - x\cos x$;
в) $y = x^5 \ln x$; г) $y = x^{\mathrm{tg}\,x}$.

65. а) $y = x/\sqrt{4-x^2}$; б) $y = \sin^2 x/(2+3\cos^2 x)$;
в) $y = x\ln x/(x-1)$; г) $y = (\mathrm{tg}\,x)^{\ln x}$.

66. а) $y = 5\sqrt[5]{x^3+1} + 1/x$; б) $y = \mathrm{tg}\,^3(x^2+1)$;
в) $y = 3^{\mathrm{arctg}\,x}$; г) $y = (\mathrm{arctg}\,x)^x$.

67. а) $y = \sqrt[3]{(1+x^2)/(1-x^2)}$; б) $y = \mathrm{tg}\,^2 x + \ln\cos x$;
в) $y = \mathrm{arctg}\,(x/(1+\sqrt{1-x^2}))$; г) $y = (x+x^2)^x$.

68. а) $y = \sqrt{x^5+5x^4-5}$; б) $y = \ln\sqrt{(1-\sin x)/(1+\sin x)}$;
в) $y = \mathrm{arctg}\,\ln x$; г) $y = (\sin x)^{\ln x}$.

69. а) $y = \sqrt[5]{x^2+x+1/x}$; б) $y = 2^x e^{-x}$;
в) $y = \arcsin x/\sqrt{1-x^2}$; г) $y = (\cos x)^x$.

70. а) $y = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^3+1}$; б) $y = \mathrm{tg}\,^3 x/3 - \mathrm{tg}\,x + x$;
в) $y = \mathrm{arctg}\,\sqrt{3-x}$; г) $y = x^{\cos x}$.

71–80. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

71. $f(x) = x^3 - 12x + 7$; $[0, 3]$.
72. $f(x) = x^5 - \dfrac{5}{3}x^3 + 2$; $[0, 2]$.
73. $f(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x + \cos x$; $[0, \pi/2]$.
74. $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 2$; $[-3, 1]$.
75. $f(x) = x^3 - 3x + 1$; $[1/2, 2]$.
76. $f(x) = x^4 + 4x$; $[-2, 2]$.

77. $f(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x - \sin x; \qquad [0, \pi/2].$

78. $f(x) = 81x - x^4; \qquad [-1, 4].$

79. $f(x) = 3 - 2x^2; \qquad [-1, 3].$

80. $f(x) = x - \sin x; \qquad [-\pi, \pi].$

81–90. Исследовать методами дифференциального исчисления функцию и, используя результаты исследования, построить ее график.

81. $y = \dfrac{4x}{4 + x^2}.$ 82. $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}.$ 83. $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}.$

84. $y = \dfrac{x^2}{x - 1}.$ 85. $y = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}.$ 86. $y = \dfrac{4x^3 + 5}{x}.$

87. $y = \dfrac{x^2 + 5}{x - 3}.$ 88. $y = \dfrac{x^4}{x^3 - 1}.$ 89. $y = \dfrac{4x^3}{x^3 - 1}.$

90. $y = \dfrac{2 - 4x^2}{1 - 4x^2}.$

4. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

91. Дана функция

$$z = \frac{y}{(x^2 - y^5)^5}.$$

Показать, что

$$1/x\frac{\partial z}{\partial x} + 1/y\frac{\partial z}{\partial y} = z/y^2.$$

92. Дана функция

$$z = y^2/(3x) + \arcsin(xy).$$

Показать, что

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x} - xy\frac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0.$$

93. Дана функция

$$z = \ln(x^2 + y^2 + 2x + 1).$$

Показать, что

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

94. Дана функция

$$z = e^{xy}.$$

Показать, что

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2xyz = 0.$$

95. Дана функция

$$z = \ln(x + e^{-y}).$$

Показать, что

$$\frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} - \frac{\partial z}{\partial y}\,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0.$$

96. Дана функция

$$z = x/y.$$

Показать, что

$$x\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

97. Дана функция

$$z = x^y.$$

Показать, что

$$y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = (1 + y\ln x)\frac{\partial z}{\partial x}.$$

98. Дана функция

$$z = xe^{y/x}.$$

Показать, что

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

99. Дана функция

$$z = \sin(x + ay).$$

Показать, что

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

100. Дана функция

$$z = \cos y + (y - x)\sin y.$$

Показать, что

$$(x - y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y}.$$

101–110. Даны: функция $z = f(x, y)$, точка $A(x_0, y_0)$ и вектор **a**. Найти: 1) $\mathrm{grad}(z)$ в точке A; 2) производную в точке A по направлению **a**.

101. $z = x^2 + xy + y^2$; $A(1;1)$, $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$.
102. $z = 2x^2 + 3xy + y^2$; $A(2;1)$, $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$.
103. $z = \ln(x^2 + 3y^2)$; $A(1;1)$, $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$.
104. $z = \ln(5x^2 + 4y^2)$; $A(1;1)$, $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$.
105. $z = 5x^2 + 6xy$; $A(2;1)$, $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$.
106. $z = \operatorname{arctg}(xy^2)$; $A(2;3)$, $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$.
107. $z = \arcsin(x^2/y^2)$; $A(1;2)$, $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} - 12\mathbf{j}$.
108. $z = \ln(3x^2 + 4y^2)$; $A(1;3)$, $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$.
109. $z = 3x^4 + 2x^2y^3$; $A(-1;2)$, $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$.
110. $z = 3x^2y^2 + 5y^2x$; $A(1;1)$, $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$.

5. Неопределенный и определенный интегралы

111–120. Найти неопределенные интегралы. В двух первых примерах (п. а и б) проверить результаты дифференцированием.

111. а) $\int e^{\sin^2 x} \sin 2x dx$; б) $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x}\, dx$;

в) $\int \frac{dx}{x^3 + 8}$; г) $\int \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x+1}}$.

112. а) $\int \frac{x dx}{(x^2+4)^6}$; б) $\int e^x \ln(1 + 3e^x) dx$;

в) $\int \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^3 + 1} dx$; г) $\int \frac{dx}{\sin x + \operatorname{tg} x}$.

113. а) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1 - x^8}}$; б) $\int x\, 3^x dx$;

в) $\int \frac{(3x - 7)dx}{x^3 + 4x^2 + 4x + 16}$; г) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3} + \sqrt[3]{(x+3)^2}}$.

114. а) $\int \frac{dx}{\cos^2 x (3\operatorname{tg} x + 1)}$; б) $\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$;

в) $\int \frac{dx}{x^3 + x^2 + 2x + 2}$; г) $\int \frac{x^2 + \sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}\, dx$.

115. а) $\int \frac{\cos 3x\, dx}{4 + \sin 3x}$; б) $\int x^2 e^{3x} dx$;

в) $\int \frac{x^2 dx}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}$; г) $\int \frac{\cos x\, dx}{1 + \cos x}$.

116. а) $\displaystyle\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}$; б) $\displaystyle\int x\cdot\arcsin\frac{1}{x}\,dx$;

в) $\displaystyle\int \frac{(x+3)dx}{x^3+x^2-2x}$; г) $\displaystyle\int \frac{(\sqrt[4]{x}+1)dx}{(\sqrt{x}+4)\sqrt[4]{x^3}}$.

117. а) $\displaystyle\int \frac{(x+\operatorname{arctg} x)dx}{1+x^2}$; б) $\displaystyle\int x\ln(x^2+1)dx$;

в) $\displaystyle\int \frac{(x^3-3)dx}{x^4+5x^2+6}$; г) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+5}\,dx}{1+\sqrt[3]{x+5}}$.

118. а) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}(1+x)}$; б) $\displaystyle\int x\sin x\cos x\,dx$;

в) $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{x^4-81}$; г) $\displaystyle\int \frac{dx}{3\cos x+4\sin x}$.

119. а) $\displaystyle\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt[3]{3+2\cos x}}$; б) $\displaystyle\int x^2\sin 4x\,dx$;

в) $\displaystyle\int \frac{(x^2-x+1)dx}{x^4+2x^2-3}$; г) $\displaystyle\int \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[6]{x}+1)dx}{\sqrt[3]{x^2}}$.

120. а) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{4+\ln x}\,dx}{x}$; б) $\displaystyle\int x^2\ln^2 x\,dx$;

в) $\displaystyle\int \frac{(x^3-6)dx}{x^4+6x^2+8}$; г) $\displaystyle\int \frac{dx}{2\sin x+\cos x+2}$.

121–130. Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость.

121. $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$.

122. $\displaystyle\int_{-\infty}^{-3} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$.

123. $\displaystyle\int_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}$.

124. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^3}}$.

125. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$.

126. $\displaystyle\int_{-3}^2 \frac{dx}{(x+3)^2}$.

127. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x}$.

128. $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{(x-2)^2}$.

129. $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{(x-3)^2}$.

130. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5}$.

131. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = 3x^2 + 1$ и прямой $y = 3x + 7$.

132. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболами $y = x^2+8x+16$, $y = -x^2 - 3x + 4$.

133. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболами $y = 2x^2-4x-6$, $y = -2x^2 - 6x$.

134. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sin x$, $y = 2\sin x$, $x = 0$, $x = 7\pi/4$.

135. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \cos x$, $y = 2\cos x$, $x = 0$, $x = 5\pi/4$.

136. Вычислить площадь фигуры, ограниченной прямыми $y = 4x + 12$, $y = 2x + 6$, $y = x + 6$.

137. Вычислить площадь фигуры, ограниченной прямыми $y = 3x + 1$, $y = x + 3$, $y = 2x$.

138. Вычислить площадь фигуры, ограниченной прямыми $y = 2 - 2x$, $y = x - 1$, $y = -x/2 - 4$.

139. Вычислить площадь фигуры, ограниченной прямыми $y = 2x + 5$, $y = x/2 + 5$, $y = -x - 10$.

140. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболами $y = x^2+3x+12$, $y = -x^2 - 8x$.

Решение задач из контрольной работы № 1

1. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии

Примеры решения некоторых задач № 11–20

Даны координаты вершин пирамиды:

$$A_1(1;2;-3),\ A_2(2;-1;3),\ A_3(1;4;0),\ A_4(-1;5;8).$$

Найти: 1) длину ребра A_1A_2; 2) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4; 3) угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$; 4) площадь грани $A_1A_2A_3$; 5) объем пирамиды; 6) уравнение прямой A_1A_2.

Решение.

1. Длина ребра A_1A_2.

Длину ребра находим по формуле расстояния между двумя точками $A_1(x_1, y_1, z_1)$ и $A_2(x_2, y_2, z_2)$:

$$|A_1A_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Так как $A_1(1;2;-3)$ и $A_2(2;-1;3)$, то

$$|A_1A_2| = \sqrt{(2-1)^2 + (-1-2)^2 + (3-(-3))^2} =$$
$$= \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2 + 6^2} = \sqrt{1+9+36} = \sqrt{46} \text{ (ед).}$$

2. Угол между ребрами A_1A_2 ***и*** A_1A_4.

Для того, чтобы найти угол между ребрами, найдем длины ребер A_1A_2 и A_1A_4, а затем вычислим скалярное произведение векторов $\overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_1A_4}$.

Скалярное произведение двух векторов вычисляется по формуле:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos \varphi,$$

где φ – угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

Значит, $\overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_1A_4} = |\overline{A_1A_2}| \cdot |\overline{A_1A_4}| \cdot \cos \varphi$.

Отсюда

$$\cos \varphi = \frac{\overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_1A_4}}{|\overline{A_1A_2}| \cdot |\overline{A_1A_4}|}.$$

Вычислим координаты векторов:

$$\overline{A_1A_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1) = (1; -3; 6),$$
$$\overline{A_1A_4} = (x_4 - x_1; y_4 - y_1; z_4 - z_1) = (-2; 3; 11),$$

где $A_1(x_1; y_1; z_1)$, $A_2(x_2; y_2; z_2)$, $A_4(x_4; y_4; z_4)$.

Таким образом, скалярное произведение

$$\overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_1A_4} = 1 \cdot (-2) + (-3) \cdot 3 + 6 \cdot 11 = -2 - 9 + 66 = 55.$$

Длина ребра A_1A_2 вычислена в п. 1: $|A_1A_2| = \sqrt{46} \approx 6.8$ (ед).

Найдем длину ребра A_1A_4 аналогично $|A_1A_2|$.

Так как $A_1(1;2;-3)$ и $A_4(-1;5;8)$, то

$$|A_1A_4| = \sqrt{(-1-1)^2 + (5-2)^2 + (8-(-3))^2} =$$
$$= \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 11^2} = \sqrt{4+9+121} = \sqrt{134} \approx 11{,}6 \text{ (ед).}$$

Длина ребра A_1A_2 совпадает с длиной вектора $\overline{A_1A_2}$, а длина ребра A_1A_4 совпадает с длиной вектора $\overline{A_1A_4}$.

Подставим полученные данные в формулу:

$$\cos \varphi = \frac{\overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_1A_4}}{|\overline{A_1A_2}| \cdot |\overline{A_1A_4}|} = \frac{55}{\sqrt{46}\sqrt{134}} = \frac{55}{\sqrt{6164}} = \frac{55}{78{,}5} \approx 0{,}7.$$

Окончательно получаем: $\varphi = \arccos(0{,}7) \approx 0{,}795399$.

3. Угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$.

Запишем уравнение прямой A_1A_4. Общий вид уравнения:

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n},$$

где x_1,y_1,z_1 – координаты точки A_1; l,m,n – кординаты направляющего вектора. Таким вектором может быть вектор, соединяющий две точки на прямой, например, $\overline{A_1A_4}$. Из п. 2 возьмем координаты вектора $\overline{A_1A_4}=(-2;3;11)$. Таким образом, $l=x_4-x_1=-1-1=-2, m=y_4-y_1=5-2=3, n=z_4-z_1=8-(-3)=11$.

Окончательно уравнение прямой A_1A_4 примет вид:

$$\frac{x-1}{-2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+3}{11}.$$

Составим уравнение плоскости $A_1A_2A_3$.

Общий вид уравнения плоскости, проходящей через три заданные точки $A_1(x_1;y_1;z_1)$, $A_2(x_2;y_2;z_2)$, $A_3(x_3;y_3;z_3)$, имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

В нашем случае уравнение плоскости $A_1A_2A_3$ будет выглядеть так:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+3 \\ 2-1 & -1-2 & 3+3 \\ 1-1 & 4-2 & 0+3 \end{vmatrix}=0,$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+3 \\ 1 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}=(x-1)\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}-(y-2)\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}+(z+3)\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=$$

$$=(x-1)(-9-12)-(y-2)\cdot 3+(z+3)\cdot 2=$$

$$=-21(x-1)-3(y-2)+2(z+3)=-21x+21-3y+6+2z+6=$$

$$=-21x-3y+2z+33=0.$$

Окончательно уравнение плоскости $A_1A_2A_3$ выглядит так:

$$-21x-3y+2z+33=0.$$

Угол между прямой $\dfrac{x-x_1}{l}=\dfrac{y-y_1}{m}=\dfrac{z-z_1}{n}$ и плоскостью $Ax+By+Cz+D=0$ определяется по формуле:

$$\sin\varphi=\frac{Al+Bm+Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

Подставляя наши данные, получаем:

$$\sin\varphi = \frac{(-21)\cdot(-2)+(-3)\cdot 3+2\cdot 11}{\sqrt{(-21)^2+(-3)^2+2^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+3^2+11^2}} =$$

$$= \frac{42-9+22}{\sqrt{441+9+4}\cdot\sqrt{4+9+121}} = \frac{55}{\sqrt{454}\sqrt{134}} = \frac{55}{21{,}1\cdot 11{,}58} \approx 0{,}225.$$

Таким образом, $\varphi = \arcsin(0{,}225) \approx 0{,}232$.

4. Площадь грани $A_1A_2A_3$.

$S_{A_1A_2A_3}$ – это площадь треугольника, построенного на векторах $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1A_3}$:

$$S_{A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}\,|\overline{A_1A_2}\times\overline{A_1A_3}|.$$

Для вычисления площади найдем:

1) векторы $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1A_3}$;

2) векторное произведение $\overline{A_1A_2}\times\overline{A_1A_3}$;

3) длину $|\overline{A_1A_2}\times\overline{A_1A_3}|$.

1) $\overline{A_1A_2} = (x_2-x_1; y_2-y_1; z_2-z_1) = (1;-3;6)$, $\overline{A_1A_3} = (x_3-x_1; y_3-y_1; z_3-z_1) = (0;2;3)$.

2) $\overline{A_1A_2}\times\overline{A_1A_3} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \bar{i}\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = \bar{i}(-9-12) - 3\bar{j} + 2\bar{k} = -21\bar{i} - 3\bar{j} + 2\bar{k}$.

3) $S_{A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}\sqrt{(-21)^2+(-3)^2+2^2} = \frac{1}{2}\sqrt{441+9+4} = \frac{1}{2}\sqrt{454} \approx 10{,}7$.

5. Объем пирамиды $A_1A_2A_3A_4$.

Объем пирамиды равен 1/6 объема параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$, $\overline{A_1A_4}$:

$$\overline{A_1A_2} = (x_2-x_1; y_2-y_1, z_2-z_1) = (1;-3;6),$$
$$\overline{A_1A_3} = (x_3-x_1; y_3-y_1, z_3-z_1) = (0;2;3),$$
$$\overline{A_1A_4} = (x_4-x_1; y_4-y_1, z_4-z_1) = (-2;3;11).$$

Найдем смешанное произведение этих векторов:

$$\overline{A_1A_2}\cdot\overline{A_1A_3}\cdot\overline{A_1A_4} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 23 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 23 \end{vmatrix} =$$
$$= 2\cdot 23 + 9 = 55.$$

Объем параллелепипеда, построенного на трех векторах, равен модулю смешанного произведения этих векторов: $V_{\text{пар.}} = 55$ (ед^3).

Окончательно, объем пирамиды:

$$V_{\text{пир.}} = \frac{1}{6}V_{\text{пар.}} = \frac{55}{6} \approx 9{,}17\ (\text{ед}^3).$$

6. Уравнение прямой A_1A_2.

Уравнение прямой A_1A_2 имеет вид:

$$\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n},$$

где x_1,y_1,z_1 – координаты точки $A_1(1;2;-3)$, через которую проходит прямая, l,m,n – координаты направляющего вектора. Таким вектором может быть вектор, соединяющий две точки на прямой, например, $\overline{A_1A_2}$. Из п. 4 возьмем координаты вектора $\overline{A_1A_2} = (1;-3;6)$. Таким образом, $l = x_2 - x_1 = 2 - 1 = 1$, $m = y_2 - y_1 = -1 - 2 = -3$, $n = z_2 - z_1 = 3 - (-3) = 6$.

Окончательно уравнение прямой A_1A_2 имеет вид:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+3}{6}.$$

Пример решения задач № 21–30

Уравнение одной из сторон квадрата:

$$x + 2y - 7 = 0. \qquad (1)$$

Составить уравнение трех остальных сторон квадрата, если точка пересечения его диагоналей $(-1;2)$.

Решение.

Запишем уравнение (1) в виде уравнения прямой с угловым коэффициентом:

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}, \qquad (2)$$

отсюда $k = -1/2$.

У квадрата две стороны перпендикулярны, а одна – параллельна стороне, выражаемой уравнением (2).

Условие перпендикулярности двух прямых: $k_1 = -1/k$. Из уравнения (2) следует, что $k = -1/2$, значит, $k_1 = 2$, и уравнения сторон квадрата, перпендикулярных стороне (1), имеют вид:

$$y = 2x + b_2, \qquad (3)$$

$$y = 2x + b_4. \qquad (4)$$

Условие параллельности двух прямых: $k_2 = k$. Значит, уравнение стороны, параллельной стороне (1), будет иметь вид:

$$y = -\frac{1}{2}x + b_3. \qquad (5)$$

Найдем теперь b_2,b_3,b_4. Для этого составим уравнения диагоналей квадрата. Диагональ квадрата образует со стороной квадрата угол $\varphi = 45^\circ$, следовательно, $\operatorname{tg}\varphi = \left|\dfrac{k_3 - k}{1 + k_3 k}\right|$, где k_3 – угловой коэффициент диагонали квадрата. Найдем k_3.

Поскольку $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$ и $k = -1/2$, то

$$1 = \frac{k_3 + 1/2}{1 - k_3/2} = \frac{2k_3 + 1}{2 - k_3};$$

$$2k_3 + 1 = 2 - k_3;$$

$$3k_3 = 1;$$

$$k_3 = \frac{1}{3}.$$

Таким образом, уравнение одной из диагоналей: $y = \dfrac{1}{3}\,x + b_5$.

Так как диагональ проходит через точку $(-1; 2)$, то найдем b_5, подставив координаты этой точки в уравнение диагонали:

$$2 = \frac{1}{3} \cdot (-1) + b_5;$$

$$2 = -\frac{1}{3} + b_5;$$

$$b_5 = 2 + \frac{1}{3} = 2\,\frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

Итак, уравнение одной из диагоналей

$$y = \frac{1}{3}\,x + \frac{7}{3} \quad \text{или} \quad 3y = x + 7, \quad x - 3y + 7 = 0. \tag{6}$$

Из условия перпендикулярности диагоналей следует, что уравнение второй диагонали имеет вид: $y = -3x + b_6$. Найдем b_6, подставив координаты точки $(-1; 2)$ в это уравнение: $2 = -3 \cdot (-1) + b_6$, откуда $2 = 3 + b_6$, то есть $b_6 = -1$. Итак, уравнение второй диагонали имеет вид:

$$y = -3x - 1. \tag{7}$$

Найдем точку пересечения стороны (1) и диагонали (6):

$$\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 3y - x = 7 \end{cases}.$$

Сложив оба уравнения, получим: $5y = 14$, или $y = 14/5 = 2{,}8$. Подставим найденное значение y в первое уравнение: $x + 2 \cdot 2{,}8 = 7$, откуда $x = 1{,}4$.

Итак, точка $A(1{,}4; 2{,}8)$ – вершина квадрата.

Найдем уравнение стороны (3), проходящей через точку A. Подставим координаты точки A в уравнение (3): $y = 2x + b_2$, получим $2{,}8 = 2 \cdot 1{,}4 + b_2$, откуда $b_2 = 0$.

Уравнение (3) примет вид: $y = 2x$ или $2x - y = 0$.

Найдем вторую вершину квадрата B, которая получается при пересечении стороны (3) и диагонали (7):

$$\begin{cases} y = 2x, \\ y = -3x - 1. \end{cases}$$

Подставим первое уравнение системы во второе, получим: $2x = -3x - 1$, то есть $5x = -1$, отсюда $x = -1/5 = -0{,}2$. Подставляя x в первое уравнение системы, получаем, что $y = -0{,}4$. И окончательно $B(-0{,}2; -0{,}4)$.

Найдем уравнение стороны (5), проходящей через точку B. Подставим координаты точки B в уравнение $y = -1/2 \cdot x + b_3$, тогда $-0{,}4 = -1/2 \cdot (-0{,}2) + b_3$, то есть $-0{,}4 = 0{,}1 + b_3$, откуда $b_3 = -0{,}5 = -1/2$.

Уравнение (5) приняло вид: $y = -1/2 \cdot x - 1/2$, или $2y + x + 1 = 0$, или $x + 2y + 1 = 0$.

Найдем вершину C – это точка пересечения стороны (5) и диагонали (6):

$$\begin{cases} x + 2y + 1 = 0, \\ x - 3y + 7 = 0. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения системы второе, получим $5y - 6 = 0$, откуда $y = 6/5 = 1{,}2$. Подставляя y в первое уравнение системы, получим $x + 2 \cdot 1{,}2 + 1 = 0$, откуда $x = -3{,}4$. Значит, координаты вершины C следующие: $C(-3{,}4; 1{,}2)$.

Найдем уравнение стороны (4), проходящей через точку C. Подставим координаты точки C в уравнение (4): $y = 2x + b_4$, тогда $1{,}2 = 2 \cdot (-3{,}4) + b_4$, откуда $b_4 = 1{,}2 + 6{,}8 = 8$.

Итак, уравнение (4) имеет вид: $y = 2x + 8$, или $2x - y + 8 = 0$.

Ответ. Уравнения сторон квадрата:

$$x + 2y - 7 = 0; \qquad (1)$$

$$2x - y = 0; \qquad (3)$$

$$2x - y + 8 = 0; \qquad (4)$$

$$x + 2y + 1 = 0. \qquad (5)$$

Решение задач из контрольной работы № 2

2. Введение в математический анализ

Примеры решения задач № 41–50

Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя.

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+2x-1}{3x^2-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(5x)}{x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{7}{x}\right)^x$.

Решение.

а) Числитель и знаменатель дроби – бесконечно большие функции, поэтому здесь имеет место неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$. Раскрывая эту неопределенность, вынесем в числителе и знаменателе старшую степень x и упростим выражение:

$$\frac{x^2+2x-1}{3x^2-2} = \frac{x^2(1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2})}{x^2(3-\frac{2}{x^2})} = \frac{1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}{3-\frac{2}{x^2}}.$$

Далее воспользуемся свойствами пределов, а также тем, что функции $\dfrac{1}{x}$ и $\dfrac{1}{x^2}$ – бесконечно малые при $x\to\infty$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x-1}{3x^2-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}}{3-\dfrac{2}{x^2}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2})}{\lim\limits_{x\to\infty}(3-\dfrac{2}{x^2})} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 1+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty} 3-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x^2}} = \frac{1+0-0}{3-0} = \frac{1}{3}.$$

б) Здесь мы имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Избавимся от иррациональности в числителе, домножив числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное к числителю:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x+8}-3)(\sqrt{x+8}+3)}{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x+8})^2-3^2}{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{x+8}+3} = \frac{1}{\sqrt{1+8}+3} = \frac{1}{6}.$$

в) Воспользуемся первым замечательным пределом:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Сделаем замену $y=5x$, тогда $y\to 0$ при $x\to 0$ и

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{\left(\frac{y}{5}\right)}=\lim_{y\to 0}\frac{5\sin y}{y}=5\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=5.$$

г) В данном случаем мы имеем неопределенность вида 1^{∞}. Воспользуемся вторым замечательным пределом:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

Для раскрытия неопределенности сделаем замену $y=x/7$. Получим, что $y\to\infty$ при $x\to\infty$, и исходный предел сводится ко второму замечательному пределу:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{(x/7)}\right)^{7\cdot x/7}=$$

$$=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{7y}=\left[\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right]^7=e^7.$$

Непрерывность функции

Пусть функция $y=f(x)$ определена в точке x_0 и в некоторой окрестности этой точки. Функция $y=f(x)$ *называется непрерывной в точке* x_0, если существует предел функции в этой точке x_0 и он равен значению функции в этой точке:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0).$$

Функция $y=f(x)$ *называется непрерывной в интервале* $(a;\,b)$, если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Функция $y=f(x)$ *называется непрерывной на отрезке* $[a;\,b]$, если она непрерывна в интервале $(a;\,b)$, в точке $x=a$ непрерывна справа: $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=f(a)$, а в точке $x=b$ непрерывна слева: $\lim\limits_{x\to b-0}f(x)=f(b)$.

Точки разрыва функции и их классификация

Пусть точка x_0 принадлежит области определения функции $y=f(x)$ или является граничной точкой этой области. Точка x_0 называется *точкой разрыва функции* $y=f(x)$, если в ней нарушается непрерывность функции, то есть не выполняется по крайней мере одно из условий определения непрерывности функции:

1) функция определена в окрестности точки x_0, но не определена в самой точке x_0;
2) функция определена в точке x_0 и ее окрестности, но не существует предел функции $y = f(x)$ при $x \to x_0$;
3) функция определена в точке x_0 и ее окрестности, существует предел функции $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, но этот предел не равен значению функции в точке x_0, то есть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

Классификация точек разрыва

1) Если в точке x_0 существуют конечные односторонние пределы $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$, но они не равны между собой, или же односторонние пределы равны между собой, но значение функции в этой точке не совпадает с односторонними пределами, то x_0 называется *точкой разрыва 1-го рода.*

Если в точке x_0 существует конечный предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, но значение $f(x_0)$ не определено или $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$, то эта точка называется *точкой устранимого разрыва.*

Точки разрыва 1-го рода функции $y = f(x)$, не являющиеся точками устранимого разрыва, называются *точками скачка* этой функции. При этом разность $\Delta f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) - \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq 0$ называется *скачком функции* $y = f(x)$ в точке x_0.

2) Если в точке x_0 не существует или равен бесконечности хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$, то x_0 называется *точкой разрыва 2-го рода.*

3. Производная и ее приложения

Таблица производных и правила дифференцирования

Таблица состоит из трех частей. Первая часть содержит формулы дифференцирования для основных элементарных функций. Вторая часть – правила вычисления производной суммы, произведения и частного двух функций. В третьей части приведена очень важная формула – формула дифференцирования сложной функции.

I. Правила дифференцирования элементарных функций.

1. $(c)' = 0$, где $c = const$;
2. $(x)' = 1$;

3. $(x^n)' = nx^{n-1}$, где $n \in \mathbb{R}$;
4. $(a^x)' = a^x \ln a$, где $a > 0$, $a \neq 1$;
5. $(e^x)' = e^x$;
6. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$, где $a > 0$, $a \neq 1$;
7. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;
8. $(\sin x)' = \cos x$;
9. $(\cos x)' = -\sin x$;
10. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ при $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;
11. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$ при $x \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;
12. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
13. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
14. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;
15. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

II. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – произвольные функции, для которых понятие производной имеет смысл.

16. $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$;
17. $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$, где $c = const$;
18. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$;
19. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$, $g(x) \neq 0$.

III. Формула дифференцирования сложной функции:

20. $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Примеры решения задач № 61–70

Найти производные dy/dx данных функций:

а) $y = \log_2 x \cdot \sin x$; б) $y = \dfrac{e^x}{\arcsin x}$; в) $y = \ln(\operatorname{tg} x)$; г) $y = x^{\sin x}$.

Решение. а) Нам нужно найти производную от произведения двух функций: $\log_2 x$ и $\sin x$ (формула 18):

$$\frac{dy}{dx} = (\log_2 x)' \cdot \sin x + \log_2 x \cdot (\sin x)'.$$

Теперь найдем производные $(\log_2 x)'$ и $(\sin x)'$ (формулы 6 и 8):

$$(\log_2 x)' = \frac{1}{x\,\mathrm{ln}2}; \qquad (\sin x)' = \cos x.$$

Окончательно получаем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\,\mathrm{ln}2} \cdot \sin x + \log_2 x \cdot \cos x.$$

б) Нам нужно найти производную от частного двух функций: e^x и $\arcsin x$ (формула 19):

$$\left(\frac{e^x}{\arcsin x}\right)' = \frac{(e^x)' \arcsin x - e^x (\arcsin x)'}{\arcsin^2 x}.$$

Найдем производные $(e^x)'$ и $(\arcsin x)'$ (формулы 5 и 12):

$$(e^x)' = e^x; \qquad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Окончательно получаем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x \cdot \arcsin x - e^x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\arcsin^2 x} = \frac{e^x(\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x - 1)}{\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin^2 x}.$$

в) Смотрим на формулу 7 как на правило. Производная от натурального логарифма аргумента равна единице, деленной на *тот же* аргумент.

В нашем случае аргумент логарифма равен $\mathrm{tg}\, x$. Обозначим его за u. $(\mathrm{ln}u)' = \frac{1}{u,}$ но $u = \mathrm{tg}\, x$, поэтому необходимо скорректировать результат в соответствии с формулой 20. То есть $(\mathrm{ln}u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$. Находим производную от аргумента (формула 10): $(\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$. Следовательно, учитывая, что $u = \mathrm{tg}\, x$, получим ответ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\mathrm{tg}\, x \cdot \cos^2 x} = \frac{\cos x}{\sin x \cdot \cos^2 x} = \frac{2}{\sin 2x}.$$

г) Прологарифмируем обе части равенства $y = x^{\sin x}$. Тогда $\mathrm{ln}y = \mathrm{ln}\, x^{\sin x}$, то есть $\mathrm{ln}y = \sin x \cdot \mathrm{ln}x$.

Продифференцируем последнее равенство, при этом в левой части получим производную сложной функции, а в правой – производную произведения:

$$(\mathrm{ln}y)' = (\sin x \cdot \mathrm{ln}x)',$$

$$\frac{y'}{y} = (\sin x)' \cdot \mathrm{ln}x + \sin x \cdot (\mathrm{ln}x)',$$

$$\frac{y'}{y} = \cos x \cdot \mathrm{ln}x + \frac{\sin x}{x}.$$

Отсюда $y' = y\left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}\right)$. Но $y = x^{\sin x}$, поэтому окончательно получим:

$$y' = x^{\sin x}\left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}\right).$$

Решение задач из контрольной работы № 3

Наименьшее и наибольшее значения функции

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, тогда на нем она достигает своего наибольшего и наименьшего значения. Эти значения она может принять либо на границе отрезка, либо во внутренней точке x_0 отрезка $[a, b]$, в которой производная $f'(x)$ равна нулю или не существует (такие точки называются *критическими*).

Таким образом, для нахождения наибольшего и наименьшего значения функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ нужно:

1) найти значения функции на концах отрезка, то есть числа $f(a)$ и $f(b)$;
2) найти критические точки функции на интервале (a, b);
3) вычислить значения функции в найденных критических точках;
4) среди всех вычисленных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

Примеры решения задач № 71–80

1) Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$ на отрезке $[-2; 1]$.

Решение. Найдем производную функции $f'(x) = 6x^2 + 6x - 36$. Критические точки функции найдем из уравнения:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 6x - 36 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -3, x_2 = 2.$$

Ни одна из найденных точек не принадлежит промежутку $(-2; 1)$.

Найдем значения функции на концах отрезка:

$$f(-2) = 68, \quad f(1) = -31.$$

Это означает, что наименьшее значение функции $f(x)$ на $[-2; 1]$ – это $f(1) = -31$, а наибольшее – это $f(-2) = 68$.

2) Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x + \frac{1}{x}$ на отрезке $[-2; -0{,}5]$.

Решение. Найдем производную функции $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$.

Критические точки функции получим из уравнения:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1, x_2 = -1.$$

Отрезку $[-2; -0{,}5]$ принадлежит только одна из полученных точек: $x_2 = -1$. Значение функции в ней $f(-1) = -2$.

Теперь найдем значения функции на концах отрезка:

$$f(-2) = -2{,}5, \quad f(-0{,}5) = -2{,}5.$$

Среди полученных чисел выбираем наименьшее и наибольшее.

Наименьшее значение функции $f(x)$ на $[-2; -0{,}5]$ достигается на концах отрезка: $f(-2) = f(-0{,}5) = -2{,}5$, наибольшее – в точке экстремума $f(-1) = -2$.

Общая схема исследования функции и построения графика

1. Найти область определения функции $y = f(x)$.
2. Найти точки пересечения графика с осями координат (если возможно).
3. Найти интервалы знакопостоянства функции (промежутки, на которых функция $f(x) > 0$ или $f(x) < 0$).
4. Выяснить, является ли функция четной, нечетной или общего вида.
5. Найти асимптоты графика функции.
6. Найти интервалы монотонности функции.
7. Найти экстремумы функции.
8. Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба графика функции.
9. На основании проведенного исследования построить график функции.

4. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

Пример решения задач № 91–100

Дана функция $z = \ln(x^2 - y^2)$. Показать, что $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

Решение. Найдем частные производные $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 - y^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 \cdot \frac{x^2 - y^2 - x \cdot 2x}{(x^2 - y^2)^2} = \frac{-2(x^2 + y^2)}{(x^2 - y^2)^2}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y}{x^2 - y^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 \cdot \frac{x^2 - y^2 - y \cdot 2y}{(x^2 - y^2)^2} = \frac{-2(x^2 + y^2)}{(x^2 - y^2)^2}.$$

Тогда:
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{-2(x^2+y^2)}{(x^2-y^2)^2} - \frac{-2(x^2+y^2)}{(x^2-y^2)^2} = 0.$$

Пример решения некоторых задач № 101–110

Дана функция $z = 3x^4y^2 - 7xy^3$, точка $A(0;-1)$. Найти градиент $\mathrm{grad}(z)$ в точке A.

Решение.

Найдем частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$:
$$\frac{\partial z}{\partial x} = 12x^3y^2 - 7y^3; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 6x^4y - 21xy^2.$$

Градиент – это вектор, координатами которого являются частные производные по переменным x и y :
$$\mathrm{grad}\, z = (12x^3y^2 - 7y^3, 6x^4y - 21xy^2).$$

Найдем градиент функции $z = z(x,y)$ в точке $A(0;-1)$:
$$\mathrm{grad}\, z(A) = \left(12x^3y^2 - 7y^3\Big|_A, 6x^4y - 21xy^2\Big|_A\right) =$$
$$= (12\cdot 0^3\cdot(-1)^2 - 7\cdot(-1)^3, 6\cdot 0^4\cdot(-1) - 21\cdot 0\cdot(-1)^2) = (7, 0).$$

Решение задач из контрольной работы № 4

5. Неопределенный и определенный интегралы

Таблица основных неопределенных интегралов

1. $\int dx = x + C$
2. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \ (n \neq -1)$
3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$
4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$
5. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$
6. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$
7. $\int \mathrm{tg}\, x\, dx = -\ln|\cos x| + C$

8. $\int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln|\sin x| + C$

9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$

10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm \alpha}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm \alpha}| + C$

13. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$

14. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x - a}{x + a}\right| + C$

Наиболее важные свойства неопределенных интегралов

1. $\int a \cdot f(x)\,dx = a \cdot \int f(x)\,dx$, где $a = const$

2. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

3. $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$

Важный частный случай замены переменной

Пусть $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, тогда $\int f(ax + b)\,dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C.$

Примеры решения некоторых задач № 111–120

1) Найти неопределенный интеграл $\int \frac{x^2}{4 + x^6}\,dx.$

Решение. Данный интеграл не преобразуется к табличным с помощью алгебраических преобразований. Введем новую переменную $t = x^3$. Тогда $dt = 3x^2dx$, откуда $x^2dx = dt/3$.

$$\int \frac{x^2}{4 + x^6}\,dx = \int \frac{dt}{3 \cdot (4 + t^2)} = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{4 + t^2} =$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} + C = \frac{1}{6} \operatorname{arctg} \frac{x^3}{2} + C.$$

2) Найти неопределенный интеграл $\int \dfrac{x^2}{e^{2x}}\,dx.$

Решение. Интегралы такого типа находятся с помощью метода интегрирования по частям:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du,$$

где $u = u(x)$, $v = v(x)$ – фукции, имеющие непрерывные производные.

$$\int x^2 \cdot e^{-2x} dx = \left[\begin{array}{ll} u = x^2, & du = 2x\,dx \\ dv = e^{-2x}dx, & v = -\frac{1}{2}\,e^{-2x} \end{array}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\,x^2 \cdot e^{-2x} - \int -\frac{1}{2}\,2x \cdot e^{-2x} dx =$$

(последний интеграл снова интегрируем по частям)

$$= \left[\begin{array}{ll} u = x, & du = dx \\ dv = e^{-2x}dx, & v = -\frac{1}{2}\,e^{-2x} \end{array}\right] = -\frac{1}{2}\,x^2 \cdot e^{-2x} - \frac{1}{2}\,x \cdot e^{-2x} + \int \frac{1}{2}\,e^{-2x} dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\,x^2 \cdot e^{-2x} - \frac{1}{2}\,x \cdot e^{-2x} - \frac{1}{4}\,e^{-2x} + C = -\frac{1}{4}\,e^{-2x} \cdot (2x^2 + 2x + 1) + C.$$

Примеры решения задач № 121–130

1) Вычислить несобственный интеграл $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ или доказать его расходимость.

Решение. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b x^{-2} dx = -\lim_{b\to+\infty} \frac{1}{x}\Big|_1^b = -(0-1) = 1.$
Поскольку существует конечный предел, то данный интеграл *сходится.*

2) Вычислить несобственный интеграл $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$ или доказать его расходимость.

Решение. Функция $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ терпит бесконечный разрыв при $x = 0$.

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to0} \int_{0+\varepsilon}^1 x^{-2} dx = -\lim_{\varepsilon\to0} \frac{1}{x}\Big|_{0+\varepsilon}^1 = -(1 - \lim_{\varepsilon\to0} \frac{1}{\varepsilon}) = \infty,$$

следовательно, данный интеграл *расходится.*

Формула Ньютона-Лейбница для вычисления определенных интегралов

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$, то есть $F'(x) = f(x)$.

Важные свойства определенных интегралов

1. Определенный интеграл меняет знак при перестановке пределов интегрирования: $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

2. Пусть промежуток $[a;b]$ разбит на две части точкой c $(a < c < b)$, тогда $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{\mathrm{c}} f(x)\,dx + \int_{\mathrm{c}}^b f(x)\,dx$

Вычисление площади в декартовых координатах

Площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$ (при условии $f_2(x) \geqslant f_1(x)$), вычисляется по формуле:

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,dx.$$

Пример решения задач № 131–140

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 6x - 3x^2$ и $y = 3x - 6$.

Решение. Графиками функций $y = 6x - 3x^2$ и $y = 3x - 6$ являются парабола и прямая. Точки пересечения данных линий находим, решая систему уравнений:

$$\begin{cases} y = 6x - 3x^2 \\ y = 3x - 6, \end{cases}$$

откуда $\begin{cases} x = -1 \\ y = -9 \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$. Тогда $a = -1$, $b = 2$, $f_1(x) = 3x - 6$, $f_2(x) = 6x - 3x^2$, при этом $f_2(x) \geqslant f_1(x)$ для $x \in [-1;2]$. Имеем:

$$S = \int_{-1}^2 \Big(6x - 3x^2 - (3x - 6)\Big)\,dx = \int_{-1}^2 (-3x^2 + 3x + 6)dx =$$

$$= -x^3 + \frac{3x^2}{2} + 6x\Big|_{-1}^2 = 13{,}5 \text{ (кв. ед.)}$$

Таблицы контрольных заданий

В первом семестре студенты выполняют контрольные работы № 1 и № 2.

Во втором семестре студенты выполняют контрольные работы № 3 и № 4.

Вариант	Контрольная работа № 1			Контрольная работа № 2		
1	11	21	31	41	51	61
2	12	22	32	42	52	62
3	13	23	33	43	53	63
4	14	24	34	44	54	64
5	15	25	35	45	55	65
6	16	26	36	46	56	66
7	17	27	37	47	57	67
8	18	28	38	48	58	68
9	19	29	39	49	59	69
10	20	30	40	50	60	70

Вариант	Контрольная работа № 3				Контрольная работа № 4		
1	71	81	91	101	111	121	131
2	72	82	92	102	112	122	132
3	73	83	93	103	113	123	133
4	74	84	94	104	114	124	134
5	75	85	95	105	115	125	135
6	76	86	96	106	116	126	136
7	77	87	97	107	117	127	137
8	78	88	98	108	118	128	138
9	79	89	99	109	119	129	139
10	80	90	100	110	120	130	140

Правила оформления контрольных работ

При выполнении контрольных работ надо строго придерживаться указанных ниже правил. Работы, выполненные без соблюдения этих правил, не зачитываются и возвращаются студенту для переработки.

1. Каждая контрольная работа выполняется в отдельной тетради чернилами любого цвета, кроме красного. В работе следует оставлять поля для замечаний рецензента.

2. На обложке тетради должны быть ясно написаны фамилия студента, его инициалы, учебный номер (шифр), номер контрольной работы, название дисци-

плины; здесь же следует указать дату отсылки работы в институт и почтовый адрес студента. В конце работы следует поставить дату ее выполнения и расписаться.

3. В работу должны быть включены все задачи, указанные в задании, в соответствии с положенным вариантом. Контрольные работы, содержащие не все задания, а также задания не своего варианта, не зачитываются.

4. Решения задач надо располагать в порядке номеров, указанных в заданиях, сохраняя номера задач.

5. Перед решением каждой задачи надо выписать полностью ее условие.

6. Решения задач следует излагать подробно и аккуратно, объясняя все действия по ходу решения и делая необходимые чертежи.

7. После получения прорецензированной работы студент должен исправить в ней все отмеченные рецензентом ошибки.

8. К сдаче зачета или экзамена допускаются только те студенты, у которых зачтены контрольные работы.

Основные теоретические вопросы, изучаемые в первом семестре

1. Определители второго порядка. Формула вычисления определителя третьего порядка путем разложения по первой строке.
2. Расстояние между двумя точками на плоскости. Координаты середины отрезка.
3. Уравнение прямой: общее и с угловым коэффициентом.
4. Уравнение прямой, проходящей через заданную точку, с заданным угловым коэффициентом; уравнение прямой, проходящей через две заданные точки.
5. Условия параллельности и перпендикулярности прямых.
6. Окружность. Каноническое уравнение, изображение.
7. Эллипс. Каноническое уравнение, изображение.
8. Векторы. Определение, равенство, операции над векторами.
9. Векторы $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$. Координаты вектора, действия над векторами в координатной форме.
10. Скалярное произведение: определение, выражение через координаты, условия перпендикулярности.
11. Векторное произведение: определение, выражение через координаты.
12. Общее уравнение плоскости, геометрический смысл коэффициентов.
13. Канонические уравнения прямой в пространстве. Геометрический смысл коэффициентов.

14. Предел числовой последовательности.
15. Определение предела функции.
16. Первый и второй замечательные пределы.
17. Определение непрерывной функции. Примеры разрывных функций.
18. Определение производной. Её геометрический и физический смысл.
19. Правила дифференцирования.
20. Таблица производных. Примеры.
21. Производная сложной функции. Примеры.

Основные теоретические вопросы, изучаемые во втором семестре

1. Возрастание и убывание функции.
2. Экстремум функции одной переменной, необходимое условие экстремума.
3. Достаточное условие экстремума функции одной переменной.
4. Функции двух переменных. Частные приращения. Частные производные.
5. Частные производные второго порядка, теорема о равенстве смешанных производных.
6. Экстремумы функций двух переменных. Необходимое условие экстремума функции двух переменных.
7. Градиент функции.
8. Первообразная: определение, свойства.
9. Неопределенный интеграл: определение, свойства.
10. Таблица неопределенных интегралов.
11. Замена переменной в неопределенном интеграле.
12. Интегрирование по частям в неопределенном интеграле.
13. Определенный интеграл: определение, геометрический смысл.
14. Свойства определенного интеграла. Формула Ньютона–Лейбница.
15. Интегрирование по частям в определенном интеграле.
16. Замена переменной в определенном интеграле.
17. Площадь плоской фигуры.

Библиографический список

1. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике [Текст]: полный курс / Д. Т. Письменный. – 14-е изд. - М.: Айрис-Пресс, 2017. – 608 с.

2. Сборник задач по высшей математике. С контрольными работами. 1 курс [Текст]: учебное пособие для вузов / К. Н. Лунгу, Д. Т. Письменный, С. Н. Федин, Ю. А. Шевченко. – 7-е изд. - М.: Айрис-Пресс, 2008. – 576 с.

3. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления [Текст]: учебное пособие для втузов. Т.1. / Н. С. Пискунов. – Изд. стереот. – М.: Интеграл-Пресс, 2010. – 416 с.

4. Демидович Б. П. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов [Текст] / ред. Б. П. Демидович. – М.: Астрель-АСТ, 2002. – 496 с.

5. Высшая математика в упражнениях и задачах [Текст]: учебное пособие для втузов. Ч. 1 / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. - 5-е изд. – М.: Высшая школа, 1999. – 304 с.