Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Санкт-Петербургский государственный университет промышленных технологий и дизайна»

Высшая школа технологии и энергетики

Кафедра высшей математики

МАТЕМАТИКА

Выполнение контрольных работ № 5, № 6, № 7, № 8

Методические указания для студентов заочной формы обучения по всем направлениям подготовки

Составители:
И. Э. Апакова
З. Л. Абжандадзе

Санкт-Петербург
2022

Утверждено
на заседании кафедры ВМ
14.03.2022 г., протокол №7

Рецензент Е. Н. Громова

Методические указания соответствуют программам и учебным планам дисциплины «Математика» для студентов заочной формы обучения, обучающихся всем по направлениям подготовки. В указаниях представлены организационная информация, общие рекомендации для выполнения и оформления контрольных работ, варианты контрольных заданий, а также примеры решения задач.

Методические указания предназначены для студентов второго курса всех направлений подготовки заочной формы обучения (III и IV семестры) и для студентов всех направлений подготовки заочной ускоренной формы обучения (II семестр).

Утверждено Редакционно-издательским советом ВШТЭ СПбГУПТД в качестве методических указаний

Редактор и корректор М. Д. Баранова
Техн. редактор Д. А. Романова Темплан 2022 г., поз.5060а

Подписано к печати 26.04.2022. Формат 60x84/16. Бумага тип № 1.
Печать офсетная. Печ.л. 2,2. Уч.-изд. л. 2,2.
Тираж 50 экз. Изд. № 5060а. Цена «С». Заказ №

Ризограф Высшей школы технологии и энергетики СПбГУПТД,

198095, Санкт-Петербург, ул. Ивана Черных, 4.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящие методические указания предназначены для студентов-заочников второго курса всех специальностей, срок обучения которых составляет 5 лет, а также для студентов-заочников, срок обучения которых составляет 3 года и 6 месяцев. Они составлены в соответствии с ныне действующей программой курса высшей математики в ВШТЭ СПбГУПТД для студентов-заочников. Весь курс высшей математики в ВШТЭ СПбГУПТД состоит из четырех частей для студентов-заочников, срок обучения которых составляет 5 лет, и из двух частей для студентов-заочников, срок обучения которых составляет 3 года и 6 месяцев, в соответствии с количеством семестров, в течение которых он изучается. По каждой части (в каждом семестре) студент-заочник должен выполнить определенное количество контрольных работ (в дальнейшем – к/р).

Студенты-заочники второго курса всех специальностей, **срок обучения которых составляет 5 лет**, выполняют в **III семестре**:

Контрольная работа № 5 – Обыкновенные дифференциальные уравнения. Двойной интеграл.

Контрольная работа № 6 – Криволинейный интеграл 2-го рода. Числовые и степенные ряды,

а в **IV семестре**:

Контрольная работа № 7 – Случайные события. Случайные величины.

Контрольная работа № 8 – Нормальное распределение. Элементы математической статистики.

Студенты-заочники, **срок обучения которых составляет 3 года и 6 месяцев**, выполняют во **II семестре**:

Контрольная работа № 5 – Обыкновенные дифференциальные уравнения. Двойной интеграл.

Контрольная работа №6 – Криволинейный интеграл 2-го рода. Числовые и степенные ряды.

Контрольная работа № 7 – Случайные события. Случайные величины.

Контрольная работа № 8 – Нормальное распределение. Элементы математической статистики.

Таблицы для выбора задач к/р и общие правила их выполнения и оформления представлены в конце методических указаний.

Особое внимание в настоящих методических указаниях уделено разбору примеров по указанным темам для помощи студентам заочной формы обучения в решении задач контрольных работ.

Изучить соответствующие теоретические разделы и получить практические навыки в решении задач можно, используя литературу, представленную в конце методических указаний [1 - 5].

РЕКОМЕНДАЦИИ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

1. В процессе изучения курса математики студент должен выполнить ряд контрольных заданий, главная цель которых – оказать студенту помощь в его работе. Рецензии на эти работы позволяют студенту судить о степени усвоения им соответствующего раздела курса; указывают на имеющиеся у него пробелы, на желательное направление дальнейшей работы; помогают сформулировать вопросы для постановки их перед преподавателем.

2. Не следует приступать к выполнению контрольного задания, не решив достаточного количества задач по соответствующему материалу. Неумение решить ту или иную задачу контрольного задания вызвано тем, что студент не выполнил это требование.

3. Контрольные работы должны выполняться самостоятельно. В противном случае студент не приобретает необходимых знаний и может оказаться неподготовленным к устному экзамену и зачету.

4. Не рекомендуется присылать в университет одновременно несколько контрольных работ: это не дает возможности рецензенту своевременно указать студенту на допускаемые им ошибки и удлиняет срок рецензирования работ.

5. Контрольные работы выполняются шариковой ручкой. Контрольные работы, выполненные на компьютере, не принимаются.

Прорецензированные контрольные работы вместе со всеми исправлениями и дополнениями, сделанными по требованию рецензента, следует сохранять. Зачтенные к/р не возвращаются – выдается рецензия с пометкой о зачете.

Распределение контрольных работ по семестрам устанавливается университетом в соответствии с распределением материала по семестрам и сообщается студентам дополнительно.

ЗАДАЧИ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Контрольная работа № 5. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Двойной интеграл

321-330. Найти общее решение или общий интеграл дифференциального уравнения.

321. $(x^2 + y^2)y' = 2xy$. **322.** $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$.

323. $xy' = y\ln\dfrac{y}{x}$. **324.** $xy' + y - 3 = 0$.

325. $xy' + xe^{y/x} - y = 0$. **326.** $y'\cos x = (y + 1)\sin x$.

327. $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$. **328.** $x^2 y' = 2xy + 3$.

329. $x^2 y' + y^2 - 2xy = 0$. **330.** $xy' + y - x - 1 = 0$.

341-350. Найти частное решение дифференциального уравнения $y''+py'+qy=f(x)$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=a$, $y'(0)=b$.

341. $y''+4y'-12y=8\sin 2x$; $y(0)=0$, $y'(0)=0$.

342. $y''-6y'+9y=x^2-x+3$; $y(0)=4/3$, $y'(0)=1/27$.

343. $y''+4y=e^{-2x}$; $y(0)=0$, $y'(0)=0$.

344. $y''-2y'+5y=xe^{2x}$; $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

345. $y''+5y'+6y=12\cos 2x$; $y(0)=1$, $y'(0)=3$.

346. $y''-5y'+6y=(12x-7)e^{-x}$; $y(0)=0$, $y'(0)=0$.

347. $y''-4y'+13y=26x+5$; $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

348. $y''-4y'=6x^2+1$; $y(0)=2$, $y'(0)=3$.

349. $y''-2y'+y=16e^{x}$; $y(0)=1$, $y'(0)=2$.

350. $y''+6y'+9y=10e^{-3x}$; $y(0)=3$, $y'(0)=2$.

381-390. Вычислить двойной интеграл по области D, ограниченной указанными линиями. Сделать чертеж области D.

381. $\iint\limits_D (12x^2y^2+16x-2y)dxdy;\quad D: x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt{x}$.

382. $\iint\limits_D (6y-x-48x^3y^3)dxdy;\quad D: x=1,\ y=-x^2,\ y=\sqrt{x}$.

383. $\iint\limits_D (36x^2y^2-9x+y)dxdy;\quad D: x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^3$.

384. $\iint\limits_D (3x-4y+32x^3y^3)dxdy;\quad D: x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt[3]{x}$.

385. $\iint\limits_D (27x^2y^2-x-3y)dxdy;\quad D: x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt[3]{x}$.

386. $\iint\limits_D (18x^2y^2-x+4y)dxdy;\quad D: x=1,\ y=-x^3,\ y=\sqrt{x}$.

387. $\iint\limits_D (2x^3y^2+\frac{3}{5}x-y)dxdy;\quad D: x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt{x}$.

388. $\iint\limits_D (y-\frac{2}{2}x+14x^3y^2)dxdy;\quad D: x=1,\ y=-x^2,\ y=\sqrt[3]{x}$.

389. $\iint\limits_D (\frac{4}{5}xy^2-3x-2y^3)dxdy;\quad D: x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt{x}$.

390. $\iint\limits_D (x^2y^3+x^3+6y)dxdy;\quad D: x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt[3]{x}$.

Контрольная работа № 6. Криволинейный интеграл 2-го рода. Числовые и степенные ряды

391. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L (x^2 - y)dx - (x - y^2)dy$ вдоль дуги L окружности $x = 5\cos t$, $y = 5\sin t$ от точки A(5;0) до точки B(0;5). Сделать чертеж.

392. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L (x - y)dx - (x - y)dy$ вдоль ломаной $L = OAB$, где O(0;0), A(2;0), B(4;5). Сделать чертеж.

393. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$ вдоль границы L треугольника ABC, обходя ее против хода часовой стрелки, где A(1;0), B(1;1), C(0;1). Сделать чертеж.

394. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L (x^2 - 2xy)dx - (y^2 - 2xy)dy$ вдоль дуги L параболы $y = x^2$ от точки A(-1;1) до точки B(1;1). Сделать чертеж.

395. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L (x^2 y - 3x)dx - (y^2 x + 2y)dy$ вдоль верхней половины L эллипса $x = 3\cos t$, $y = 2\sin t$ $(0 \le t \le \pi)$. Сделать чертеж.

396. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L (x^2 - y)dx - (y^2 + x)dy$ вдоль ломаной L=ABC, где A(1;2), B(1;5), C(3;5). Сделать чертеж.

397. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L ydx + \frac{x}{y}dy$ вдоль дуги L кривой $y = e^{-x}$ от точки A(0;1) до точки B(-1;e). Сделать чертеж.

398. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L \frac{y^2 + 1}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy$ вдоль отрезка L=AB прямой от точки A(1;2) до точки B(2;4). Сделать чертеж.

399. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L (xy - x^2)dx + xdy$ вдоль дуги L параболы $y = 2x^2$ от точки A(0;0) до точки B(1;2). Сделать чертеж.

400. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L \frac{y}{x}dx + xdy$ вдоль дуги L кривой $y = \ln x$ от точки A(1;0) до точки B(e;5). Сделать чертеж.

421-430. Исследовать сходимость числового ряда.

421. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n^3 - 2}$.

422. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

423. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2-1}$.

424. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(2n)!}$.

425. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{e^n}$.

426. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}$.

427. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{n2^n}}$.

428. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(3n)!}$.

429. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$.

430. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+1}}{(n+1)!}$.

431-440. Найти интервал сходимости степенного ряда.

431. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n(n+1)}x^n$.

432. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n(n+1)}x^n$.

433. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2^n(3n+1)}x^n$.

434. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{5^n(2n+1)}x^n$.

435. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{4^n(n+1)}x^n$.

436. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{12^n}{n(n+3)}x^n$.

437. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3n\cdot 4^n}x^n$.

438. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{2n(3n+1)}x^n$.

439. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3\cdot 10^n}x^n$.

440. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{4n(5n+1)}x^n$.

Контрольная работа № 7. Случайные события. Случайные величины

521. Студент знает 45 из 60 ответов на вопросы программы. Каждый экзаменационный билет содержит три вопроса. Найти вероятность того, что: а) студент знает ответы на все три вопроса, содержащиеся в его экзаменационном билете; б) студент знает ответы только на два вопроса своего экзаменационного билета; в) студент ответы знает только на один вопрос своего экзаменационного билета.

522. В каждой из двух урн находятся 5 белых и 10 черных шаров. Из первой урны во вторую переложили наудачу один шар, а затем из второй урны вынули наугад один шар. Найти вероятность того, что шар, вынутый из второй урны, окажется черным.

523. Три стрелка в одинаковых и независимых условиях произвели по одному выстрелу по одной и той же цели. Вероятность поражения цели первым стрелком равна 0,9, вторым – 0,8, третьим – 0,7. Найти вероятность того, что: а) только один из стрелков попадет в цель; б) только два стрелка попадут в цель; в) все три стрелка попадут в цель.

524. Вероятность наступления события в каждом из одинаковых и независимых испытаний равна 0,7. Найти вероятность того, что в 1600 испытаниях событие наступит 900 раз.

525. Для сигнализации об аварии установлены три независимо работающих устройства. Вероятность того, что при аварии сработает первое устройство, равно 0,9, второе – 0,95 и третье – 0,85. Найти вероятность того, что при аварии сработает: а) только одно устройство; б) только два устройства; в) все три устройства.

526. Вероятность наступления события в каждом из одинаковых и независимых испытаний равна 0,07. Найти вероятность того, что в 1460 испытаниях событие наступит 28 раз.

527. В партии из 1000 изделий имеется 10 дефектных. Найти вероятность того, что среди наудачу взятых из этой партии 50 изделий ровно 5 окажутся дефектными.

528. Вероятность наступления события в каждом из одинаковых и независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что в 225 испытаниях событие наступит не менее 75 и не более 90 раз.

529. На трех станках при одинаковых и независимых условиях изготовляются детали одного наименования. На первом станке изготовляется 10 %, на втором 30 %, на третьем 60 % всех деталей. Для каждой детали вероятность быть бездефектной равна 0,7, если она изготовлена на первом станке; 0,8 – если она изготовлена на втором станке; 0,9 – если она изготовлена на третьем станке. Найти вероятность того, что наугад взятая деталь окажется бездефектной.

530. Два брата входят в состав двух различных спортивных команд, состоящих из 12 человек каждая. В двух урнах имеется по 12 билетов с номерами от 1 до 12. Члены каждой команды вынимают наудачу по одному билету из определенной урны (без возвращения). Найти вероятность того, что оба брата вытащат номер 6.

531-540. Дискретная случайная величина *X* может принимать только два значения: x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Известны вероятность p_1 возможного значения x_1, математическое ожидание *M(X)* и дисперсия *D(X)*. Найти закон распределения этой случайной величины.

531. $p_1 = 0{,}1;\ \ M(x) = 3{,}9;\ \ D(x) = 0{,}09$.

532. $p_1 = 0{,}3;\ \ M(x) = 3{,}7;\ \ D(x) = 0{,}21$.

533. $p_1 = 0{,}5;\ \ M(x) = 3{,}5;\ \ D(x) = 0{,}25$.

534. $p_1 = 0{,}7;\ \ M(x) = 3{,}3;\ \ D(x) = 0{,}21$.

535. $p_1 = 0{,}9;\ \ M(x) = 3{,}1;\ \ D(x) = 0{,}09$.

536. $p_1 = 0{,}9;\ \ M(x) = 2{,}2;\ \ D(x) = 0{,}36$.

537. $p_1 = 0,8;\quad M(x) = 3,2;\quad D(x) = 0,16$.

538. $p_1 = 0,6;\quad M(x) = 3,4;\quad D(x) = 0,24$.

539. $p_1 = 0,4;\quad M(x) = 3,6;\quad D(x) = 0,24$.

540. $p_1 = 0,2;\quad M(x) = 3,8;\quad D(x) = 0,16$.

541-550. Случайная величина X задана функцией распределения (интегральной функцией) *F(X).* Найти плотность вероятности (дифференциальную функцию), математическое ожидание и дисперсию. Построить графики интегральной и дифференциальной функций.

541. $F(x) = \begin{cases} 0 & при\ \ x \le 0 \\ x^2 & при\ \ 0 < x \le 1 \\ 1 & при\ \ x > 1 \end{cases}$

542. $F(x) = \begin{cases} 0 & при\ \ x \le 1 \\ \dfrac{1}{2}(x^2 - x) & при\ \ 1 < x \le 2 \\ 1 & при\ \ x > 2 \end{cases}$

543. $F(x) = \begin{cases} 0 & при\ \ x \le 0 \\ x^3 & при\ \ 0 < x \le 1 \\ 1 & при\ \ x > 1 \end{cases}$

544. $F(x) = \begin{cases} 0 & при\ \ x \le 0 \\ 3x^2 + 2x & при\ \ 0 < x \le 1/3 \\ 1 & при\ \ x > 1/3 \end{cases}$

545. $F(x) = \begin{cases} 0 & при\ \ x \le 2 \\ \dfrac{1}{2}x - 1 & при\ \ 2 < x \le 4 \\ 1 & при\ \ x > 4 \end{cases}$

546. $F(x) = \begin{cases} 0 & при\ \ x \le 0 \\ x^2/9 & при\ \ 0 < x \le 3 \\ 1 & при\ \ x > 3 \end{cases}$

547. $F(x) = \begin{cases} 0 & при\ \ x \le 0 \\ x^2/4 & при\ \ 0 < x \le 2 \\ 1 & при\ \ x > 2 \end{cases}$

548. $F(x) = \begin{cases} 0 & при\ \ x \le -\pi/2 \\ \cos x & при\ \ -\pi/2 < x \le 0 \\ 1 & при\ \ x > 0 \end{cases}$

549. $F(x) = \begin{cases} 0 & при\ \ x \le 0 \\ 2\sin x & при\ \ 0 < x \le \pi/6 \\ 1 & при\ \ x > \pi/6 \end{cases}$

550. $F(x) = \begin{cases} 0 & при\ \ x \le 3\pi/4 \\ \cos 2x & при\ \ 3\pi/4 < x \le \pi \\ 1 & при\ \ x > \pi \end{cases}$

Контрольная работа № 8. Нормальное распределение. Элементы математической статистики

551-560. Известны математическое ожидание a и среднее квадратическое отклонение σ нормально распределенной случайной величины X. Найти вероятность попадания этой величины в заданный интервал (α, β).

551. $a = 10,\ \sigma = 4,\ \alpha = 2,\ \beta = 13$.

552. $a = 9,\ \sigma = 5,\ \alpha = 5,\ \beta = 14$.

553. $a = 8,\ \sigma = 1,\ \alpha = 4,\ \beta = 9$.

554. $a = 7,\ \sigma = 2,\ \alpha = 3,\ \beta = 10$.

555. $a=6,\ \sigma=3,\ \alpha=2,\ \beta=11$.
556. $a=5,\ \sigma=1,\ \alpha=1,\ \beta=12$.
557. $a=4,\ \sigma=5,\ \alpha=2,\ \beta=11$.
558. $a=3,\ \sigma=2,\ \alpha=3,\ \beta=10$.
559. $a=2,\ \sigma=5,\ \alpha=4,\ \beta=9$.
560. $a=2,\ \sigma=4,\ \alpha=6,\ \beta=10$.

561-570. По данному статистическому распределению выборки найти выборочную среднюю $\overline{x}$, выборочную дисперсию D_B, выборочное среднее квадратическое отклонение σ_B, эмпирическую функцию распределения выборки $F^*(x)$, построить ее график (в первой строке указаны выборочные варианты x_i, а во второй строке – соответствующие им частоты n_i количественного признака *X*).

561.

x_i	2	3	4	5	6	7
n_i	6	20	36	25	11	2

562.

x_i	56	58	60	62	64
n_i	4	10	16	8	2

563.

x_i	10	15	20	25	30	35
n_i	8	35	48	31	18	4

564.

x_i	39	40	41	42	43	44
n_i	4	17	40	25	10	4

565.

x_i	1	3	5	7	9	11
n_i	11	27	41	35	14	2

566.

x_i	0,3	0,7	1,1	1,5	1,9	2,3
n_i	10	43	57	45	36	9

567.

x_i	156	160	164	168	172	176
n_i	8	22	34	24	9	3

568.

x_i	2,0	2,4	2,8	3,2	3,6	4,0
n_i	3	10	19	13	4	1

569.

x_i	3,1	3,3	3,5	3,7	3,9
n_i	5	18	50	17	10

570.

x_i	1,3	1,5	1,7	1,9	2,1
n_i	8	20	38	22	12

571-580. Найти доверительные интервалы для оценки математического ожидания a нормального распределения с надежностью 0,95, зная выборочную среднюю $\overline{x}$, объем выборки n и среднее квадратическое отклонение σ.

571. $\overline{x} = 75{,}17$, $n = 36$, $\sigma = 6$.

572. $\overline{x} = 75{,}16$, $n = 49$, $\sigma = 7$.

573. $\overline{x} = 75{,}15$, $n = 65$, $\sigma = 8$.

574. $\overline{x} = 75{,}14$, $n = 81$, $\sigma = 9$.

575. $\overline{x} = 75{,}13$, $n = 100$, $\sigma = 10$.

576. $\overline{x} = 75{,}12$, $n = 121$, $\sigma = 11$.

577. $\overline{x} = 75{,}11$, $n = 144$, $\sigma = 12$.

578. $\overline{x} = 75{,}10$, $n = 169$, $\sigma = 13$.

579. $\overline{x} = 75{,}09$, $n = 196$, $\sigma = 14$.

580. $\overline{x} = 75{,}08$, $n = 225$, $\sigma = 15$.

ТАБЛИЦЫ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Ниже приведены таблицы номеров задач, входящих в задания четырех контрольных работ, предусмотренных учебным планом заочного отделения ВШТЭ СПбГУПТД для студентов-заочников, срок обучения которых составляет 5 лет (III, IV семестры), а также для студентов-заочников, срок обучения которых составляет 3 года и 6 месяцев (II семестр). Студент должен выполнить контрольные задания по варианту, номер которого совпадает с последней цифрой его учебного номера (шифра).

III семестр

Вариант	Контрольная работа №5			Контрольная работа № 6		
1	321	341	381	391	421	431
2	322	342	382	392	422	432
3	323	343	383	393	423	433
4	324	344	384	394	424	434
5	325	345	385	395	425	435
6	326	346	386	396	426	436
7	327	347	387	397	427	437
8	328	348	388	398	428	438
9	329	349	389	399	429	439
10	330	350	360	400	430	440

IV семестр

Вариант	Контрольная работа № 7			Контрольная работа № 8		
1	521	531	541	551	561	571
2	522	532	542	552	562	572
3	523	533	543	553	563	573
4	524	534	544	554	564	574
5	525	535	545	555	565	575
6	526	536	546	556	566	576
7	527	537	547	557	567	577
8	528	538	548	558	568	578
9	529	539	549	559	569	579
10	530	540	550	560	570	580

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

При выполнении контрольных работ надо строго придерживаться указанных ниже правил. В противном случае работы не зачитываются и возвращаются студенту для переработки.

1. Каждую контрольную работу следует выполнять в отдельной тетради чернилами любого цвета, кроме красного, оставляя поля для замечаний рецензента.

2. На обложке тетради должны быть ясно написаны фамилия студента, его инициалы, учебный номер (шифр), номер контрольной работы, название дисциплины; здесь же следует указать дату отсылки работы в университет и почтовый адрес студента. В конце работы следует проставить дату ее выполнения и расписаться.

3. В работу должны быть включены все задачи, указанные в задании, в строгом соответствии с положенным вариантом. Контрольные работы, содержащие не все задания, а также содержащие задачи не своего варианта, не зачитываются.

4. Решения задач надо располагать в порядке номеров, указанных в заданиях, сохраняя номера задач.

5. Перед решением каждой задачи надо выписать полностью ее условие. В том случае, если несколько задач, из которых студент выбирает задачи своего варианта, имеют общую формулировку, следует, переписывая условие задачи, заменить общие данные конкретными из соответствующего номера.

6. Решения задач следует излагать подробно и аккуратно, объясняя и мотивируя все действия по ходу решения и делая необходимые чертежи.

7. После получения прорецензированной незачтенной работы студент должен исправить в ней все отмеченные рецензентом ошибки и недочеты и выполнить все рекомендации рецензента.

Если рецензент предлагает внести в решения задач те или иные исправления или дополнения и прислать их для повторной проверки, то это следует выполнить в короткий срок.

В случае незачета работы и отсутствия прямого указания рецензента на то, что студент может ограничиться представлением исправленных решений отдельных задач, вся контрольная работа должна выполняться заново.

При высылаемых исправлениях должна обязательно находиться прорецензированная работа и рецензия на нее. В связи с этим рекомендуется при выполнении контрольной работы оставлять в конце тетради несколько чистых листов для всех дополнений и исправлений в соответствии с указаниями рецензента. Вносить исправления в сам текст работы после рецензирования запрещается.

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ, ИЗУЧАЕМЫЕ В ТРЕТЬЕМ СЕМЕСТРЕ (для студентов-заочников, срок обучения которых составляет 5 лет)

1. Двойной интеграл: определение, свойства (линейность, аддитивность).
2. Вычисление двойного интеграла на примере.
3. Криволинейный интеграл 2-го рода: определение, свойства (линейность, аддитивность).
4. Вычисление криволинейного интеграла 2-го рода.
5. Дифференциальные уравнения (д.у.), основные определения; определение дифференциального уравнения; порядок д.у.; решение д.у., общее решение д.у. 1-го порядка, частное решение д.у. 1-го порядка, задача Коши. Интегральная кривая. Пример: $y' = 2x$.
6. Д.у. с разделяющими переменными. Примеры.
7. Линейные д.у. 1-го порядка. Пример: $y' - \frac{1}{x}y = x^2$.
8. Д.у. 2-го порядка, основные понятия: определение д.у. 2-го порядка; решение д.у., общее решение, частное решение, задача Коши. Пример: $y'' = 6x$.
9. Д.у. 2-го порядка, допускающие понижение порядка: $y'' = f(x, y')$. Пример: $y'' = \frac{y'}{x}$.
10. Линейные однородные д.у. 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Случаи: а) D>0; б) D=0; в) D<0 (D – дискриминант характеристического уравнения). Примеры.
11. Числовые ряды: определение ряда, частичная сумма, определение сходящегося ряда и его суммы. Пример: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$.
12. Необходимый признак сходимости ряда. Гармонический ряд.
13. Признак Даламбера. Пример: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$.
14. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница. Пример: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.
15. Функциональные ряды. Область сходимости. Пример: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$.
16. Ряды Тейлора, Маклорена. Пример: разложить многочлен $5x^3 - x^2 + 2x - 3$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x = 1$.
17. Разложить в ряд Маклорена функцию e^x, получив первые 3 члена разложения.
18. Разложить в ряд Маклорена функцию $\sin x$, получив первые 3

ненулевых члена разложения в ряд.

19. Разложить в ряд Маклорена функцию $\cos x$, получив первые 3 ненулевых члена разложения в ряд.

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ, ИЗУЧАЕМЫЕ В ЧЕТВЕРТОМ СЕМЕСТРЕ (для студентов-заочников, срок обучения которых составляет 5 лет)

1. Классическое определение вероятности.
2. Статистическое определение вероятности.
3. Вероятность произведения двух событий.
4. Вероятность суммы двух событий.
5. Формула полной вероятности.
6. Повторные испытания: сочетания, формула Бернулли.
7. Случайные величины. Основные понятия. Функция распределения и ее свойства.
8. Дискретные случайные величины. Закон распределения, математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины.
9. Непрерывные случайные величины. Плотность распределения вероятностей и ее свойства.
10. Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины.
11. Нормальное распределение. График плотности. Вероятностный смысл параметров распределения.
12. Вероятность попадания в заданный интервал нормально распределенной случайной величины.
13. Равномерное распределение.
14. Показательное распределение.
15. Случайная выборка. Гистограмма. Выборочное среднее. Выборочная дисперсия.
16. Доверительные интервалы.

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ, ИЗУЧАЕМЫЕ ВО ВТОРОМ СЕМЕСТРЕ (для студентов-заочников, срок обучения которых составляет 3 года и 6 месяцев)

1. Дифференциальные уравнения (д.у.), основные определения; определение дифференциального уравнения; порядок д.у.; решение д.у., общее решение

д.у. 1-го порядка, частное решение д.у. 1-го порядка, задача Коши. Интегральная кривая. Пример: $y' = 2x$.

2. Д.у. с разделяющими переменными.
3. Д.у. 2-го порядка, основные понятия: определение д.у. 2-го порядка; решение д.у., общее решение, частное решение, задача Коши. Пример: $y'' = 6x$.
4. Линейные однородные д.у. 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Случаи: а) D>0; б) D=0 (D – дискриминант характеристического уравнения).
5. Числовые ряды: определение ряда, частичная сумма, определение сходящегося ряда и его суммы. Пример: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$.
6. Признак сходимости Даламбера. Пример: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$.
7. Степенные ряды. Область сходимости. Формулы Тейлора и Маклорена.
8. Разложение в ряд Маклорена функций e^x, $\sin x$, $\cos x$.
9. Классическое определение вероятности.
10. Вероятность произведения двух событий.
11. Вероятность суммы двух событий.
12. Повторные испытания: сочетания, формула Бернулли.
13. Дискретная случайная величина: закон распределения, математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение.
14. Функция распределения и ее свойства.
15. Непрерывная случайная величина. Плотность распределения вероятностей и ее свойства.
16. Нормальное распределение. График плотности. Вероятностный смысл параметров распределения.
17. Вероятность попадания в заданный интервал нормально распределенной случайной величины.
18. Случайная выборка. Гистограмма. Выборочное среднее.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Решить дифференциальное уравнение $\sqrt{y^2+1}dx = xydy$.

Решение. Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными, поэтому разделив левую и правую части уравнения на выражение $x\sqrt{y^2+1}$ (при $x \neq 0$), приходим к равенству

$$\frac{dx}{x} = \frac{ydy}{\sqrt{y^2+1}}.$$

Интегрируя обе части полученного равенства, получим общий интеграл данного дифференциального уравнения

$$\ln|x| = \sqrt{y^2+1} + C_1 \quad \text{или} \quad x = \pm e^{C_1} e^{\sqrt{y^2+1}}, \quad \text{или} \quad x = Ce^{\sqrt{y^2+1}}, \text{ где } C = \pm e^{C_1}.$$

Ответ: $x = Ce^{\sqrt{y^2+1}}$, где $C = \pm e^{C_1}$.

Пример 2. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$(\sqrt{xy} + \sqrt{x})y' - y = 0.$$

Решение. Выразим производную через дифференциалы переменных $y' = \dfrac{dy}{dx}$, умножим обе части уравнения на dx и разложим коэффициент при dy на множители, получим уравнение с разделяющимися переменными:

$$(\sqrt{y} + 1)\sqrt{x}dy - ydx = 0.$$

Далее разделяем переменные: $\dfrac{\sqrt{y}+1}{y}dy - \dfrac{1}{\sqrt{x}}dx = 0$ и, интегрируя, находим общее решение дифференциального уравнения

$$\int (y^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{y})dy - \int x^{-\frac{1}{2}}dx = C; \qquad 2\sqrt{y} + \ln|y| - 2\sqrt{x} = C.$$

Ответ: $2\sqrt{y} + \ln|y| - 2\sqrt{x} = C$.

Пример 3. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0.$$

Решение. Разрешая данное уравнение относительно производной,

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{x^2 + y^2}{2xy} = \frac{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\frac{y}{x}} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

устанавливаем, что она является функцией только отношения переменных $\dfrac{y}{x}$, т. е. устанавливаем, что данное уравнение является однородным. Далее, вводим новую функцию *u*, полагая $y = u \cdot x$, где $u = u(x)$; при этом $\dfrac{dy}{dx} = u + x\dfrac{du}{dx}$ и после подстановки данное уравнение преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{1+u^2}{2u} \qquad \text{или} \qquad xdu = \frac{1-u^2}{2u}dx.$$

Разделим переменные: $\dfrac{2udu}{1-u^2} = \dfrac{dx}{x}$ и, интегрируя, найдем

$$-\ln|1-u^2| = \ln|x| - \ln C_1 \qquad \text{или} \qquad x(1-u^2) = \pm C_1 = C.$$

Исключая вспомогательную функцию *u* $\left(u = \dfrac{y}{x}\right)$, окончательно получим

$$y^2 = x^2 - Cx.$$

Ответ: $y^2 = x^2 - Cx$.

Пример 4. Решить уравнение $y' - y \cdot ctgx = \sin x$ при условии $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Решение. Убедившись, что данное уравнение линейное 1-го порядка, полагаем *y* = *u*·*v*, где *u=u(x), v=v(x)*; тогда $y' = u'v + v'u$ и данное уравнение преобразуется к виду

$$u'v + v'u - uv \cdot ctgx = \sin x \qquad \text{или} \qquad u'v + u(v' - v \cdot ctgx) = \sin x.$$

Так как одну из вспомогательных функций *u* или *v* можно взять произвольно, выберем в качестве *v* какое-нибудь частное решение уравнения $v' - v \cdot ctgx = 0$. Тогда для отыскания *u* получим уравнение $u'v = \sin x$.

Решая первое из этих уравнений, найдем *v* ; разделяя переменные и интегрируя, получим:

$$\frac{dv}{v} = ctgxdx; \qquad \ln v = \ln \sin x; \qquad v = \sin x.$$

Подставляя *v* во второе уравнение и решая его, найдем *u* как общее решение этого уравнения:

$$u' \sin x = \sin x; \qquad du = dx; \qquad u = x + C.$$

Зная теперь *u* и *v*, находим общее решение данного уравнения

$$y = uv = (x + C)\sin x.$$

Теперь, используя указанное начальное условие $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, подставляем в общее решение заданные значения переменных ($x_0 = \frac{\pi}{2}$, $y_0 = 0$) и определяем соответствующее значение произвольной постоянной *C*:

$$0 = (\frac{\pi}{2} + C)\sin\frac{\pi}{2}; \qquad 0 = \frac{\pi}{2} + C \qquad \text{или} \qquad C = -\frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, частным решением будет $y = (x - \frac{\pi}{2})\sin x$.

Ответ: $y = (x - \frac{\pi}{2})\sin x$.

Пример 5. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 7y' + 10y = 0.$$

Решение. Данное уравнение является линейным однородным дифференциальным уравнением 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Составим для этого уравнения характеристическое уравнение и найдем его корни: $k^2 - 7k + 10 = 0$; $k_1 = 2$; $k_2 = 5$.

Так как корни характеристического уравнения действительные и различные, то общее решение данного дифференциального уравнения имеет вид: $y = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^{5x}$.

Ответ: $y = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^{5x}$.

Пример 6. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y'' + 8y' + 16y = 0, \text{ если } y(0) = 1, y'(0) = 3.$$

Решение. Данное уравнение является линейным однородным дифференциальным уравнением 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Так как характеристическое уравнение $k^2+8k+16=0$ имеет равные действительные корни $k_1 = k_2 = -4$, то общее решение данного дифференциального уравнения имеет вид: $y=(C_1+C_2x)\cdot e^{-4x}$ или $y=C_1\cdot e^{-4x}+C_2\cdot xe^{-4x}$. Дифференцируя общее решение, имеем

$$y'=-4C_1\cdot e^{-4x}+C_2\cdot e^{-4x}-4C_2\cdot xe^{-4x}.$$

Подставив начальные условия в выражения для y и y', получим систему уравнений

$$\begin{cases} 1=C_1e^0+C_2\cdot 0\cdot e^0, \\ 3=-4C_1e^0+C_2e^0-4C_2\cdot 0\cdot e^0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 1=C_1, \\ 3=-4C_1+C_2, \end{cases}$$

откуда $C_1=1$ и $C_2=7$. Следовательно, искомое частное решение имеет вид $y=e^{-4x}+7xe^{-4x}$.

Ответ: $y=e^{-4x}+7xe^{-4x}$.

Пример 7. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''-6y'+25y=0.$$

Решение. Данное уравнение является линейным однородным дифференциальным уравнением 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$k^2-6k+25=0$; $k_{1,2}=\dfrac{6\pm\sqrt{36-100}}{2}=\dfrac{6\pm\sqrt{64}i}{2}=3\pm 4i$; здесь $\alpha=3, \beta=4$.

Так как характеристическое уравнение имеет два комплексно-сопряженных корня, то общее решение данного дифференциального уравнения имеет вид: $y=e^{3x}(C_1\cos 4x+C_2\sin 4x)$.

Ответ: $y=e^{3x}(C_1\cos 4x+C_2\sin 4x)$.

Пример 8. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''+6y'+5y=25x^2-2.$$

Решение. Данное уравнение является линейным неоднородным дифференциальным уравнением 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Общее решение такого дифференциального уравнения имеет вид:

$$y=\bar{y}+y_*,$$

где $\bar{y}$ – общее решение соответствующего однородного уравнения (получающегося из данного неоднородного уравнения при $f(x)=0$), а y_* – частное решение данного неоднородного уравнения.

Вначале находим общее решение $\bar{y}$ однородного уравнения $y''+6y'+5y=0$, соответствующего данному неоднородному уравнению. Его характеристическое уравнение $k^2+6k+5=0$ имеет корни $k_1=-5$; $k_2=-1$. Поэтому $\bar{y}=C_1\cdot e^{-5x}+C_2\cdot e^{-x}$.

Далее находим частное решение y_* данного неоднородного уравнения методом неопределенных коэффициентов. Так как правая часть данного уравнения имеет вид $f(x)=25x^2-2=e^{0\cdot x}\cdot P_2(x)$, а число $m=0$ не является корнем характеристического уравнения и степень заданного многочлена $n=2$, то частное решение y_* будет иметь вид $y_*=e^{0\cdot x}\cdot Q_2(x)=b_2x^2+b_1x+b_0$.

Отсюда, дифференцируя, находим $y'_*=2b_2x+b_1$, $y''_*=2b_2$ и, подставляя y_*, y'_*, y''_* в данное уравнение, получим равенство

$$2b_2+6(2b_2x+b_1)+5(b_2x^2+b_1x+b_0)=25x^2-2 \quad \text{или}$$

$$5b_2x^2+(12b_2+5b_1)x+(2b_2+6b_1+5b_0)=25x^2-2.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x из обеих его частей, ибо только при этом условии оно будет тождественным, получим систему

$$5b_2=25, \quad 12b_2+5b_1=0, \quad 2b_2+6b_1+5b_0=-2,$$

из которой находим $b_2=5$, $b_1=-12$, $b_0=12$.

Следовательно, $y_*=5x^2-12x+12$. Теперь найдем общее решение данного неоднородного уравнения

$$y=\bar{y}+y_*=C_1e^{-5x}+C_2e^{-x}+5x^2-12x+12.$$

Ответ: $y=C_1e^{-5x}+C_2e^{-x}+5x^2-12x+12$.

Пример 9. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''-2y'+10y=37\cos 3x.$$

Решение. Данное уравнение является линейным неоднородным дифференциальным уравнением 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Общее решение такого дифференциального уравнения имеет вид:

$$y=\bar{y}+y_*,$$

где $\bar{y}$ – общее решение соответствующего однородного уравнения (получающегося из данного неоднородного уравнения при $f(x)=0$), а y_* – частное решение данного неоднородного уравнения.

Вначале находим общее решение $\bar{y}$ однородного уравнения $y''-2y'+10y=0$, соответствующего данному неоднородному уравнению. Его характеристическое уравнение $k^2-2k+10=0$ имеет комплексно-сопряженные корни $k_{1,2}=1\pm 3i$. Поэтому $\bar{y}=e^x(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)$.

Частное решение y_* данного неоднородного уравнения (будем искать его методом неопределенных коэффициентов), соответственно его правой части вида $f(x)=37\cos 3x=e^{0\cdot x}(37\cos 3x+0\cdot\sin 3x)$ при $a=0$, $b=3$, когда числа

$a \pm bi = \pm 3i$ не являются корнями характеристического уравнения, будет иметь вид $y_* = e^{0 \cdot x}(M \cos 3x + N \sin 3x) = M \cos 3x + N \sin 3x$.

Подставляя функцию y_* и ее производные $y_*' = -3M \sin 3x + 3N \cos 3x$, $y_*'' = -9M \cos 3x - 9N \sin 3x$ в данное неоднородное уравнение, получим равенство

$$(M - 6N)\cos 3x + (N + 6M)\sin 3x = 37\cos 3x,$$

которое будет тождеством только при равенстве коэффициентов у подобных членов (у *cos3x* и у *sin3x*) в обеих его частях, которое будет тождеством только при равенстве коэффициентов у подобных

$$M - 6N = 37; \; N + 6M = 0.$$

Решая эту систему, найдем $M = 1$; $N = -6$. Следовательно, $y_* = \cos 3x - 6\sin 3x$, а искомое общее решение данного неоднородного уравнения таково

$y = \bar{y} + y_* = e^x(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + \cos 3x - 6\sin 3x$.

Ответ: $y = e^x(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + \cos 3x - 6\sin 3x$.

Пример 10. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 3y' + 2y = e^{2x}.$$

Решение. Данное уравнение является линейным неоднородным дифференциальным уравнением 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Общее решение такого дифференциального уравнения имеет вид:

$$y = \bar{y} + y_*,$$

где $\bar{y}$ – общее решение соответствующего однородного уравнения (получающегося из данного неоднородного уравнения при $f(x) = 0$), а y_* – частное решение данного неоднородного уравнения.

Вначале находим общее решение $\bar{y}$ однородного уравнения $y'' - 3y' + 2y = 0$, соответствующего данному неоднородному уравнению. Его характеристическое уравнение $k^2 - 3k + 2 = 0$ имеет корни $k_1 = 1$; $k_2 = 2$. Поэтому $\bar{y} = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{2x}$.

Далее находим частное решение y_* данного неоднородного уравнения методом неопределенных коэффициентов. Так как правая часть данного уравнения имеет вид $f(x) = e^{2x} = e^{2x} \cdot P_0(x)$, а число $m = 2$ совпадает только с одним из корней характеристического уравнения $m = 2 = k_2$ и степень заданного многочлена $n = 0$, то y_* будет иметь вид $y_* = xe^{2x} \cdot Q_0(x) = xe^{2x} \cdot b_0$.

Отсюда, дифференцируя, находим $y_*' = b_0 e^{2x} + 2b_0 x e^{2x} = b_0 e^{2x}(1 + 2x)$, $y_*'' = 2b_0 e^{2x} + 2b_0 e^{2x}(1 + 2x) = 2b_0 e^{2x}(2 + 2x)$ и, подставляя y_*, y_*', y_*'' в данное уравнение, получим равенство:

$$2b_0 e^{2x}(2 + 2x) - 3b_0 e^{2x}(1 + 2x) + 2b_0 x e^{2x} = e^{2x} \quad \text{или}$$

$$2b_0(2 + 2x) - 3b_0(1 + 2x) + 2b_0 x = 1.$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получим, что $b_0 = 1$. Следовательно, $y_* = xe^{2x}$, а искомое общее решение данного неоднородного уравнения имеет вид: $y = \bar{y} + y_* = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{2x} + xe^{2x}$.

Ответ: $y = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{2x} + xe^{2x}$.

Пример 11. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D (x^2 - y)dxdy$ по области *D*, ограниченной линиями $y = x,\ y = 1,\ x = 0\ (x \ge 0)$. Сделать чертеж области *D*.

Решение. Нарисуем область D:

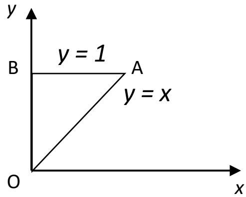

Рис. 1

Перейдем от двойного интеграла к повторному интегралу. Для этого определим пределы изменения переменных *x* и *y*: $0 \le x \le 1, \quad x \le y \le 1$. Тогда

$$\iint\limits_D (x^2 - y)dxdy = \int_0^1 dx \cdot \int_x^1 (x^2 - y)dy.$$

Вычислим сначала внутренний интеграл по переменной y в предположении, что *x* – постоянная:

$$\int_x^1 (x^2 - y)dy = \int_x^1 x^2 dy - \int_x^1 ydy = (x^2 y - \frac{y^2}{2})\Big|_x^1 = x^2 - \frac{1}{2} - x^3 + \frac{x^2}{2} = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} - x^3.$$

Подставим полученное выражение во внешний интеграл и вычислим его – полученный результат интегрируем по *x*:

$$\int_0^1 \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} - x^3\right)dx = \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2} \cdot x - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}.$$

Ответ: $-\frac{1}{4}$.

Пример 12. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} (2xy + 3)dx - \frac{1}{3}x^2 ydy$ от точки $A(1;0)$ до точки $B(0;2)$: а) по дуге параболы $4x + y^2 = 4$ (рис. 2); б) по дуге эллипса $x = \cos t,\ y = 2\sin t$ (рис. 3).

Решение.

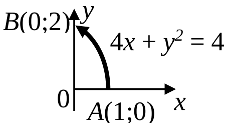

Рис. 2

а) Пользуясь данным уравнением линии интегрирования, преобразуем криволинейный интеграл в обыкновенный определённый интеграл с переменной y, затем вычисляем его:

$x = 1 - \frac{y^2}{4}$; $dx = -\frac{y}{2}dy$ (полученные выражения подставляем в исходный интеграл вместо x и dx):

$$\int_{AB}(2xy+3)dx - \frac{1}{3}x^2 y dy = \int_{y_A=0}^{y_B=2}(2(1-\frac{y^2}{4})y+3)(-\frac{y}{2}dy) - \frac{1}{3}(1-\frac{y^2}{4})^2 y dy =$$

$$= \int_0^2 (-\frac{y^5}{48} + \frac{y^4}{4} + \frac{y^3}{6} - y^2 - \frac{11y}{6})dy = (-\frac{y^6}{48\cdot 6} + \frac{y^5}{20} - \frac{y^4}{24} - \frac{y^3}{3} + \frac{11y^2}{12})\Big|_0^2 = -\frac{193}{45}.$$

б) Преобразуем данный интеграл в обыкновенный с переменной t (так как и x, и y являются функциями от t), затем вычисляем его:

$x = \cos t$; $dx = -\sin t dt$; $y = 2\sin t$; $dy = 2\cos t dt$;

$x_A = 1$; $1 = \cos t_A \Rightarrow t_A = 0$; $x_B = 0$; $0 = \cos t_B \Rightarrow t_B = \pi/2$.

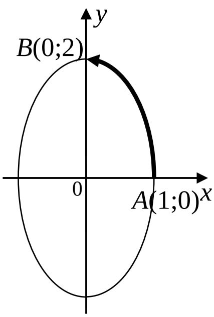

Рис. 3

Подставим полученные выражения в исходный интеграл:

$$\int_{AB}(2xy+3)dx - \frac{1}{3}x^2 y dy = \int_{t_A=0}^{t_B=\frac{\pi}{2}}(2\cos t 2\sin t + 3)(-\sin t dt) -$$

$$-\frac{1}{3}\cos^2 t 2\sin t 2\cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\frac{4}{3}\cos^3 t\sin t - 3\sin t -$$

$$-4\sin^2 t\cos t)dt =$$

$$= \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 t d(\cos t) - 3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t dt - 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t d(\sin t) =$$

$$= (\frac{1}{3}\cos^4 t + 3\cos t - \frac{4}{3}\sin^3 t)\Big|_0^{\pi/2} = -\frac{14}{3}.$$

Ответ: а) $-\frac{193}{45}$; б) $-\frac{14}{3}$.

Пример 13. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{-l} 2xdx-(x+2y)dy$ вдоль границы треугольника ABC, обходя ее по часовой стрелке, где $A(-1;0)$; $B(0;2)$; $C(2;0)$: 1) непосредственно; 2) при помощи формулы Грина.

Решение.

1) Замкнутая линия интегрирования состоит из трех отрезков, которые лежат на различных прямых (с различными уравнениями) (рис. 4). Соответственно этому криволинейный интеграл по ломаной $ABCA$ вычисляем как сумму интегралов, взятых по отрезкам AB, BC и CA (предварительно составив уравнения соответствующих прямых):

$$\oint\limits_{-\ell} = \int\limits_{AB} + \int\limits_{BC} + \int\limits_{CA} .$$

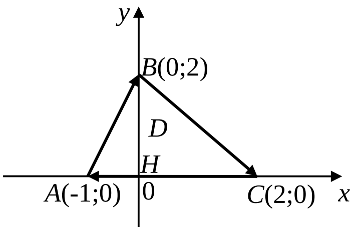

Рис. 4

Уравнение прямой AB: $\frac{x}{-1}+\frac{y}{2}=1 \Rightarrow y=2x+2 \Rightarrow dy=2dx,$ тогда

$$\int\limits_{AB} 2xdx-(x+2y)dy = \int\limits_{X_A=-1}^{X_B=0} 2xdx-(x+2(2x+2))2dx =$$

$$\int\limits_{-1}^{0}(2x-2x-8x-8)dx = -8\int\limits_{-1}^{0}(x+1) = -8\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_{-1}^{0} = -4.$$

Уравнение прямой BC: $\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=1 \Rightarrow y=2-x \Rightarrow dy=-dx,$ тогда

$$\int\limits_{BC} 2xdx-(x+2y)dy = \int\limits_{Xb=0}^{Xc=2} 2xdx-(x+2(2-x))(-dx) =$$

$$\int\limits_{0}^{2}(2x-x+4)dx = \int\limits_{0}^{2}(x+4)dx = \left(\frac{x^2}{2}+4x\right)\Big|_{0}^{2} = 10.$$

Так как прямая CA совпадает с осью Ox, то её уравнение $y = 0$, а $dy = 0$, тогда

$$\int\limits_{CA} 2xdx-(x+2y)dy=\int\limits_{Xc=2}^{Xa=-1} 2xdx = x\ \Big|_{2}^{-1} = -3.$$

Итак, $\oint\limits_{-\ell} = \int\limits_{AB} + \int\limits_{BC} + \int\limits_{CA} = -4+10-3=3$.

2) Решим эту задачу, применяя формулу Грина.

Имеем $P(x,y) = 2x$; $Q(x,y) = -(x + 2y)$; $\frac{\partial P}{\partial y}=0$; $\frac{\partial Q}{\partial x}=-1$, подставляя полученные выражения в формулу Грина и учитывая, что область D представляет собой треугольник ABC с основанием AC и высотой BH (рис. 4), получим:

$$\iint\limits_{D}(-1-0)dxdy=-\oint\limits_{-L}2xdx-(x+2y)dy,$$

$$\oint\limits_{-L}2xdx-(x+2y)dy=-\iint\limits_{D}(-1)dxdy=\iint\limits_{D}dxdy=$$

$$=S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BH=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2=3.$$

Ответ: 3.

Пример 14. Исследовать сходимость числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$.

Решение. Общий член данного ряда задается формулой: $a_n=\frac{n}{3^n}$, тогда $a_{n+1}=\frac{n+1}{3^{n+1}}=\frac{n+1}{3^n\cdot 3}$. Воспользуемся признаком Даламбера.

Найдем предел отношения последующего члена к предыдущему при $n\to\infty$:

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{3^{n+1}}:\frac{n}{3^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 3^n}{3^n\cdot 3\cdot n}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\frac{1}{3}<1.$$

Следовательно, данный ряд сходится по признаку Даламбера, так как $l=\frac{1}{3}<1$.

Ответ: данный ряд сходится.

Пример 15. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(2n+1)!}$.

Решение. Здесь общий член ряда задается формулой: $a_n=\frac{n^3}{(2n+1)!}$. Воспользуемся признаком Даламбера.

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^3}{(2(n+1)+1)!}:\frac{n^3}{(2n+1)!}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3\cdot(2n+1)!}{(2n+3)!\cdot n^3}=$$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{n^3(1+\frac{1}{n})^3(2n+1)!}{(2n+1)!(2n+2)(2n+3)n^3}=0<1$. Следовательно, данный ряд сходится по признаку Даламбера, так как $l=0<1$.

Ответ: данный ряд сходится.

Пример 16. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)\cdot\sqrt[3]{\ln(n+1)}}$.

Решение. Применим интегральный признак сходимости.

Рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{1}{(x+1)\cdot\sqrt[3]{\ln(x+1)}}$ $\left(f(n)=\dfrac{1}{(n+1)\cdot\sqrt[3]{\ln(n+1)}}=a_n\right)$, которая является положительной, непрерывной и убывающей при $x\geq 1$.

Вычислим несобственный интеграл:

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)\cdot\sqrt[3]{\ln(x+1)}}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b(\ln(x+1))^{-\frac{1}{3}}d(\ln(x+1))=$$

.

$$=\lim_{b\to+\infty}\frac{3}{2}(\ln(x+1))^{\frac{2}{3}}\Big|_1^b=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{3}{2}(\ln(b+1))^{\frac{2}{3}}-\frac{3}{2}(\ln 2)^{\frac{2}{3}}\right)=+\infty$$

Так как рассмотренный несобственный интеграл расходится, следовательно, расходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)\cdot\sqrt[3]{\ln(n+1)}}$ по интегральному признаку сходимости.

Ответ: данный ряд расходится.

Пример 17. Исследовать сходимость знакочередующегося ряда

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-...+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+...=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}. \qquad (*)$$

Решение. Выясним, будет ли ряд (*) сходиться. Для этого рассмотрим условия 1) и 2) теоремы Лейбница:

1) $1>\dfrac{1}{2}>\dfrac{1}{3}>...>\dfrac{1}{n}>...$ – выполняется;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$ – выполняется.

Оба условия теоремы Лейбница выполнены, следовательно, ряд (*) сходится. Соответствующим положительным рядом будет гармонический ряд: $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+...+\dfrac{1}{n}+...=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$, который является расходящимся рядом.

А поскольку соответствующий положительный гармонический ряд расходится, то ряд (*) сходится условно.

Ответ: данный ряд сходится условно.

Пример 18. Исследовать на сходимость знакочередующийся ряд:

$$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-...+(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}+...=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}.$$

Решение. Соответствующим положительным рядом будет сходящийся ряд: $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}+...=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Таким образом, ряд из абсолютных значений сходится, значит, исходный знакочередующийся ряд будет сходиться абсолютно.

Ответ: данный ряд сходится абсолютно.

Пример 19. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n\cdot 2^n}$.

Решение. Распишем подробнее этот ряд:

$$\frac{x+1}{1\cdot 2}+\frac{(x+1)^2}{2\cdot 2^2}+\frac{(x+1)^3}{3\cdot 2^3}...+\frac{(x+1)^n}{n\cdot 2^n}+...=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n\cdot 2^n}.$$

Для этого ряда $f_n(x)=\frac{(x+1)^n}{n\cdot 2^n}$, тогда $f_{n+1}(x)=\frac{(x+1)^{n+1}}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}=\frac{(x+1)^n\cdot(x+1)}{(n+1)\cdot 2^n\cdot 2}$.

Исследуем ряд на абсолютную сходимость. Для этого рассмотрим ряд из абсолютных значений $\sum_{n=1}^{\infty}\left|f_n(x)\right|$. Тогда $\left|f_n(x)\right|=\frac{|x+1|^n}{n\cdot 2^n}$, $\left|f_{n+1}(x)\right|=\frac{|x+1|^n}{n\cdot 2^n\cdot 2}\cdot|x+1|$.

Найдем $\frac{\left|f_{n+1}(x)\right|}{\left|f_n(x)\right|}=\frac{|x+1|^{n+1}}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}:\frac{|x+1|^n}{n\cdot 2^n}=\frac{|x+1|^n\cdot|x+1|}{(n+1)\cdot 2^n\cdot 2}\cdot\frac{n\cdot 2^n}{|x+1|^n}=\frac{|x+1|\cdot n}{2\cdot(n+1)}$.

Пусть $n\to\infty$. Тогда рассмотрим $\lim_{n\to\infty}\frac{\left|f_{n+1}(x)\right|}{\left|f_n(x)\right|}=\frac{|x+1|}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\frac{|x+1|}{2}$. Для того чтобы ряд сходился абсолютно, этот предел должен быть меньше единицы (признак Даламбера),

т. е. $\frac{|x+1|}{2}<1$; $\frac{|x+1|}{2}<1\Rightarrow|x+1|<2\Rightarrow-2<x+1<2\Rightarrow-3<x<1$.

Получен интервал абсолютной сходимости ряда. Но для окончательного определения интервала сходимости необходимо исследовать ряд на границах интервала, так как признак Даламбера не дает ответа, когда $l=1$.

Пусть $x=-3$. Подставив это значение x в формулу $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n\cdot 2^n}$, получим знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, который является условно сходящимся.

Значит, точка $x=-3$ входит в область сходимости ряда.

Пусть теперь $x=1$. Подставив это значение x в формулу $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n\cdot 2^n}$, получим гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, который является расходящимся. Поэтому точка $x=1$ не входит в область сходимости ряда.

В итоге получаем интервал сходимости $-3\le x<1$. Вне этого интервала ряд расходится.

Ответ: интервал сходимости данного ряда $-3\le x<1$.

Пример 20. В партии из 10-ти деталей 3 детали бракованные. Из партии выбирают 3 детали. Какова вероятность того, что две из них будут стандартными, а одна бракованной?

Решение. Обозначим через A событие – две детали стандартные, а одна бракованная. Для вычисления вероятности этого события воспользуемся классическим определением вероятности. Общее количество исходов данного эксперимента *n* равно числу сочетаний C_{10}^3, а число благоприятных исходов m равно произведению числа способов выбора двух стандартных деталей из семи C_7^2 на число способов выбора одной дефектной детали из трех C_3^1. Окончательно получаем: $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{C_7^2\cdot C_3^1}{C_{10}^3}=\frac{21\cdot 3}{120}=\frac{21}{40}$.

Ответ: $\frac{21}{40}$.

Пример 21. Два стрелка поражают мишень с вероятностью 0,6 и 0,8 соответственно. Они произвели залп по мишени. Какова вероятность того, что мишень будет поражена?

Решение. Обозначим через A_1 и A_2 – попадание в мишень 1-м и 2-м стрелком соответственно, через B – поражение мишени. Мишень будет поражена, если в нее попадет хотя бы один стрелок, поэтому событие B равносильно сумме событий $A_1 + A_2$. Тогда, учитывая, что события A_1 и A_2 совместны и независимы, используя формулы сложения и умножения вероятностей, получим:

$$P(B)=P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1)\cdot P(A_2)=0{,}6+0{,}8-0{,}6\cdot 0{,}8=0{,}92.$$

Эту задачу можно решить и другим способом, используя формулу для вычисления вероятности противоположного события. Так как событие – оба стрелка промахнулись – противоположно событию – мишень поражена, то имеем:

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2})=1-0{,}4\cdot 0{,}2=0{,}92.$$

Ответ: 0,92.

Пример 22. Рабочие изготавливают однотипные детали. Вероятность брака у 1-го рабочего равна 0,01, а у 2-го – 0,05. Из партии в 500 деталей, 200 из которых сделаны 1-м рабочим, а 300 – 2-м, выбирается одна деталь. Какова вероятность того, что эта деталь бракованная?

Решение. Рассматриваемая ситуация является двухэтапной: первый этап – изготовление деталей рабочими, а второй – выбор детали из партии. Пусть событие B_i – изготовление детали i-м рабочим, i=1,2, а событие A – выбор бракованной детали. Заметим, что любая деталь изготавливается только одним рабочим, поэтому события B_1 и B_2 несовместны. Кроме того, каждая деталь из партии изготавливается только этими рабочими и, следовательно, сумма событий B_1 и B_2 есть достоверное событие. Это означает, что события B_1 и B_2 образуют полную группу событий и для определения вероятности события A нужно использовать формулу полной вероятности

$$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2).$$

Определим значения вероятностей, входящих в правую часть этого равенства. Так как по условию общее число деталей – 500, 200 и 300 деталей изготовлены 1-м и 2-м рабочим соответственно, то вероятности $P(B_1)$ и $P(B_2)$ равны: $P(B_1) = \frac{200}{500} = \frac{2}{5}$ и $P(B_2) = \frac{300}{500} = \frac{3}{5}$.

По условию, если деталь изготовлена 1-м рабочим, то вероятность брака равна 0,01, а если 2-м, то 0,05. Поэтому $P(A|B_1) = 0{,}01$ и $P(A|B_2) = 0{,}05$.

Подставляя полученные значения в формулу полной вероятности, получим: $P(A) = 0{,}01 \cdot \frac{2}{5} + 0{,}05 \cdot \frac{3}{5} = 0{,}034$.

Ответ: 0,034.

Пример 23. Игральная кость бросается 5 раз. Какова вероятность того, что в этой серии бросков выпадет ровно две «двойки»?

Решение. Обозначим через A событие – выпадение «двойки» при одном броске. Вероятность этого события $P(A) = p = \frac{1}{6}$. Вероятность выпадения двух «двоек» определяем по формуле Бернулли: $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$, где $P_n(k)$ – вероятность наступления события A ровно k раз в n опытах. По условию n = 5, а k = 2 и искомая вероятность равна $P_5(2) = C_5^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{1250}{7776} \approx 0{,}1608$.

Если **число испытаний** ***n*** в серии **достаточно велико**, то применение формулы Бернулли затруднительно и для решения подобных задач при больших числах n используют приближенные формулы подсчета $P_n(k)$ – локальную и интегральную формулы Муавра-Лапласа и формулу Пуассона [4].

Ответ: 0,1608.

Пример 24. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X, заданной рядом распределения

X	2	5	7	8
P	0,1	0,2	0,4	0,3

Для вычислений используем следующие формулы:

$$M(X)=\sum_i x_i\cdot p_i\,,\quad D(X)=\sum_i x_i^2\cdot p_i-(M(X))^2,\quad \sigma(X)=\sqrt{D(X)}.$$

$$M(X)=2\cdot 0{,}1+5\cdot 0{,}2+7\cdot 0{,}4+8\cdot 0{,}3=6{,}4;$$

$$M(X^2)=4\cdot 0{,}1+25\cdot 0{,}2+49\cdot 0{,}4+64\cdot 0{,}3=44{,}2;$$

$$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2=44{,}2-6{,}4^2=3{,}24;$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{3{,}24}=1{,}8.$$

Ответ: $M(X)=6{,}4,\quad D(X)=3{,}24,\quad \sigma(X)=1{,}8.$

Пример 25. Найти плотность распределения непрерывной случайной величины *X*, если известна ее функция распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ \frac{1}{2}(x^2-x), & 1<x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$$

Решение. Зная определение плотности распределения непрерывной случайной величины, сразу получаем **ответ:**

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ \frac{1}{2}(2x-1), & 1<x\le 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$$

Пример 26. Непрерывная случайная величина задана плотностью распределения:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ \frac{1}{2}(2x-1), & 1<x\le 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$$

Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

Решение. Для вычислений используем следующие формулы:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x)dx,\quad D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot f(x)dx-(M(X))^2.$$

$$M(X)=\int_1^2 x\cdot\frac{1}{2}(2x-1)dx=\frac{1}{2}\int_1^2(2x^2-x)dx=$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_1^2=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{4}\Big|_1^2=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}-1+\frac{1}{4}=\frac{19}{12};$$

$$M(X^2)=\int_1^2 x^2\cdot\frac{1}{2}(2x-1)dx=\frac{1}{2}\int_1^2(2x^3-x^2)dx=$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_1^2=\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{6}\Big|_1^2=4-\frac{1}{4}-\frac{4}{3}+\frac{1}{6}=\frac{31}{12};$$

$$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2=\frac{31}{12}-\left(\frac{19}{12}\right)^2=\frac{11}{144}.$$

Ответ: $M(X)=\frac{19}{12}$, $D(X)=\frac{11}{144}$.

Пример 27. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины X равны соответственно 10 и 2. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение в интервале (12,14).

Решение. Воспользуемся формулой:

$$P(\alpha < X < \beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right),$$ где a=10, σ=2, α=12, β=14,

Ф(x) – функция Лапласа, значения которой находят по таблице, приведенной в [4, 5]. Тогда

$$P(12 < X < 14)=\Phi\left(\frac{14-10}{2}\right)-\Phi\left(\frac{12-10}{2}\right)=$$

$$\Phi(2)-\Phi(1)=0,4772-0,3413=0,1359\approx 0,14;$$

$$P(12 < X < 14)=0,14.$$

Ответ: 0,14.

Пример 28. Выборочная совокупность задана таблицей распределения

x_i	1	2	3	4
n_i	20	15	10	5

Найти выборочную среднюю, выборочную дисперсию, выборочное среднее квадратическое и эмпирическую функцию распределения данной выборки, построить ее график.

Решение. Для вычисления числовых характеристик выборки воспользуемся формулами:

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}x_i\cdot n_i,\quad D_B=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i-\bar{x})^2\cdot n_i,\quad \sigma_B=\sqrt{D_B},\quad n=\sum_{i=1}^{k}n_i$$ – объем выборки.

Найдем объем выборки: n = 20+15+10+5 = 50. Тогда получим:

$\bar{x} = \frac{1 \cdot 20 + 2 \cdot 15 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 5}{50} = \frac{100}{50} = 2,$

$D_B = \frac{(1-2)^2 \cdot 20 + (2-2)^2 \cdot 15 + (3-2)^2 \cdot 10 + (4-2)^2 \cdot 5}{50} = \frac{50}{50} = 1,$

$\sigma_B = \sqrt{1} = 1.$

Эмпирическая функция распределения выборки определяется формулой: $F^*(x) = \frac{n_x}{n}$, где x – любое действительное число, n_x – число вариант, меньших x, n – объем выборки. Наименьшая варианта равна 1, значит, $F^*(x) = 0$, при $x \le 1$. Значение $X < 2$, а именно $x_1 = 1$, наблюдалось 20 раз, значит $F^*(x) = \frac{20}{50} = \frac{2}{5} = 0{,}4$ при $1 < x \le 2$. Значения $X < 3$, а именно $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$, наблюдались 20+15 = 35 раз, значит $F^*(x) = \frac{35}{50} = \frac{7}{10} = 0{,}7$ при $2 < x \le 3$. Значения $X < 4$, а именно $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ и $x_3 = 3$ наблюдались 20+15+10 = 45 раз, значит $F^*(x) = \frac{45}{50} = \frac{9}{10} = 0{,}9$ при $3 < x \le 4$. Так как $x_4 = 4$ – наибольшая варианта, то $F^*(x) = 1$ при $x > 4$. Таким образом, искомая эмпирическая функция распределения выборки $F^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 1, \\ 0{,}4 & \text{при } 1 < x \le 2, \\ 0{,}7 & \text{при } 2 < x \le 3, \\ 0{,}9 & \text{при } 3 < x \le 4, \\ 1 & \text{при } x > 4. \end{cases}$. График подобной функции можно найти в [4].

Ответ: $\bar{x} = 2$, $D_B = 1$, $\sigma_B = 1$, $F^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 1, \\ 0{,}4 & \text{при } 1 < x \le 2, \\ 0{,}7 & \text{при } 2 < x \le 3, \\ 0{,}9 & \text{при } 3 < x \le 4, \\ 1 & \text{при } x > 4. \end{cases}$.

Пример 29. Найти доверительный интервал, если выборочное среднее $x_в$=75,17, объем выборки n=36**,** со средним квадратическим отклонением σ=6, с надежностью γ=0,95**.**

Решение. Интервальной оценкой (с надежностью γ) математического ожидания a нормально распределенного количественного признака X по выборочной средней $x_в$ при известном среднем квадратическом отклонении σ генеральной совокупности служит доверительный интервал:

$$x_в - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < x_в + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

где n – объем выборки, t – значение аргумента функции Лапласа $\Phi(t)=\gamma/2$.

Для решения задачи не хватает t. Найдем его из формулы $\Phi(t)=\gamma/2$=0,95/2=0,475. По таблице значений функции Лапласа находим

Φ(1,96)=0,475, следовательно, t=1,96. Подставим все данные задачи в формулу для нахождения доверительного интервала:

$$75,17-1,96\frac{6}{\sqrt{36}}<a<75,17+1,96\frac{6}{\sqrt{36}}.$$

Таким образом, неизвестное математическое ожидание находится с надежностью 0,95 в интервале (73,21;77,13).

Ответ: неизвестное математическое ожидание находится с надежностью 0,95 в интервале (73,21;77,13).

Библиографический список

1. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления для ВТУЗов [Текст] / Н. С. Пискунов.– М.: Наука, 2010. Т 2.
2. Лунгу, К. Н. Сборник задач по высшей математике. С контрольными работами. [Текст]/ К. Н. Лунгу, Д. Т. Письменный, С. Н. Федин, Ю. А. Шевченко. – М.: Айрис-Пресс, 2008.
3. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. Полный курс [Текст] / Д. Т. Письменный. – М.: Айрис-Пресс, 2009.
4. Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике [Текст] / В. Е. Гмурман. – М.: Высшая школа, 2002.
5. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] / В. Е. Гмурман.. – М.: Высшее образование, 2008.