И. Ю. Малова
О. Е. Куляхтина
Н. Ю. Косовская
Е. В. Федорова

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

Практикум

Санкт-Петербург
2022

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«Санкт-Петербургский государственный университет промышленных технологий и дизайна»
Высшая школа технологии и энергетики

И. Ю. Малова
О. Е. Куляхтина
Н. Ю. Косовская
Е. В. Федорова

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

Практикум

Утверждено Редакционно-издательским советом ВШТЭ СПбГУПТД

Санкт-Петербург
2022

УДК 512+514(075)
ББК 22.14/22.15я7
А 45

Рецензент
профессор кафедры физики Санкт-Петербургского государственного университета промышленных технологий и дизайна
В. И. Лейман

А 45 Алгебра и геометрия: Практикум / И. Ю. Малова, О. Е. Куляхтина, Н. Ю. Косовская, Е. В. Федорова. – СПб.: ВШТЭ СПбГУПТД, 2022. – 68 с.

Практикум соответствует программам и учебным планам дисциплины «Алгебра и геометрия» для студентов, обучающихся по направлению подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика». В практикуме приведены задачи для выполнения контрольных работ по дисциплине, представлен необходимый теоретический материал и разобраны аналогичные задания.

Практикум предназначен для подготовки бакалавров очной формы обучения.

УДК 512+514(075)
ББК 22.14/22.15я7

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Практикум по дисциплине «Алгебра и геометрия» предназначен для студентов первого курса очной формы обучения, обучающихся по направлению подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика». Изучение данной дисциплины включает в себя следующие темы: элементы линейной алгебры, векторная алгебра, аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве. В первом семестре студент должен успешно выполнить одну расчетно-графическую работу и одну контрольную работу. В практикуме предложено 10 вариантов расчетно-графической работы для самостоятельного решения, еще один аналогичный вариант с подробным разбором, несколько типовых задач линейной алгебры с решениями и, кроме того, приведен необходимый теоретический материал.

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Необходимый теоретический материал

Матрица A размера $n \times m$ – это прямоугольная таблица из n строк и m столбцов, состоящая из чисел a_{ij} (или иных математических выражений) для $i = 1,2,\dots,n$; $j = 1,2,\dots,m$. Часто записывается в виде $A = (a_{ij})$. Матрица размера $n \times n$ называется квадратной матрицей n-го порядка.

Сумма матриц A и B одинакового размера – это матрица того же размера со следующими элементами:

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}).$$

Умножение матрицы A *на число* k – это матрица того же размера со следующими элементами:

$$k \cdot (a_{ij}) = (k \cdot a_{ij}).$$

Произведением матриц A размера $n \times m$ и B размера $m \times k$ называется матрица C размера $n \times k$ (обозначается $A \cdot B$) такая, что

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^{m} a_{is} \cdot b_{sj}, \text{ для всех } i = 1,2,\dots,n;\ j = 1,2,\dots,k.$$

Матрица, у которой все строки равны соответствующим столбцам матрицы A, называется матрицей, *транспонированной* к A, и обозначается A^T, то есть $a^T_{ij} = a_{ji}$.

Единичной матрицей (обозначается E) называется квадратная матрица, у которой на главной диагонали стоят единицы, а остальные элементы равны нулю.

Матрица (обозначается A^{-1}) называется *обратной* к квадратной матрице A, если $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

Любой квадратной матрице A можно сопоставить некое число (или математическое выражение, если элементы матрицы – не только числа), которое называется *определителем* матрицы A и обозначается $\det A$ или $|A|$.

Определитель матрицы 2-го порядка равен разности произведения элементов матрицы на главной диагонали и произведения элементов на второстепенной диагонали:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Определитель матрицы 3-го порядка равен следующему выражению:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Данную формулу легко запомнить, если мысленно нарисовать поверх матрицы треугольники: с плюсом берем произведение элементов главной диагонали и произведения элементов, находящихся в вершинах треугольников со стороной, параллельной главной диагонали, а со знаком «минус» берем произведение элементов второстепенной диагонали и произведения элементов, находящихся в вершинах треугольников со стороной, параллельной второстепенной диагонали.

Определитель любого порядка можно вычислить по формуле разложения по строке (или по столбцу), которая сводит вычисление определителя n-го порядка к вычислению n определителей порядка $n - 1$. Например, определитель третьего порядка раскладывается по первой строке следующим образом:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

А вот так раскладывается по первой строке определитель четвертого порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} +$$

$$+a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}.$$

То есть мы умножаем элементы первой строки на определители меньшего порядка, получаемые из исходной матрицы вычеркиванием строки и столбца, соответствующего элементу.

Алгебраическим дополнением A_{ij} к элементу a_{ij} квадратной матрицы $A = \left(a_{ij}\right)$ назовем произведение $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$, где *минор* M_{ij} – это определитель матрицы, составленной из элементов A , оставшихся после вычеркивания i-ой строки и j-го столбца.

Тогда разложение определителя по k-ой строке или k-му столбцу можно записать формулой:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \cdot A_{kj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{ik}.$$

Очевидно, что предпочтительней выбирать ту строку или столбец, где больше всего нулей, тем самым уменьшая количество вычислений.

С помощью алгебраических дополнений можно вычислить обратную матрицу по формуле $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \left(A_{ij}\right)^{T}$.

Элементарными преобразованиями матрицы называются следующие действия:

1. Перемена мест двух строк (столбцов).
2. Умножение строки (столбца) на число, отличное от нуля.
3. Прибавление к элементам одной строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца).

Матрица B , полученная из матрицы A с помощью элементарных преобразований, называется *эквивалентной* матрице A, обозначается $A{\sim}B$.

Минором k-го порядка произвольной матрицы A называется определитель, составленный из элементов матрицы, расположенных на пересечении каких-либо k строк и k столбцов.

Рангом матрицы A называется наибольший из порядков ее миноров, не равных нулю, обозначается $r(A)$. В задачах мы часто будем пользоваться тем, что при элементарных преобразованиях ранг матрицы не изменяется и ранг ступенчатой матрицы равен количеству ее ненулевых строк.

Система линейных уравнений называется *совместной*, если имеет хотя бы одно решение. Система, не имеющая ни одного решения, называется *несовместной*. Система называется *определенной*, если она имеет единственное решение, и *неопределенной*, если она имеет более одного решения.

Для системы

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, A|B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

По теореме Кронекера-Капелли:

1) $r(A) < r(A|B) \Leftrightarrow$ система несовместная;
2) $r(A) = r(A|B) = n \Leftrightarrow$ система совместная и определенная;
3) $r(A) = r(A|B) < n \Leftrightarrow$ система совместная и неопределенная.

Для системы

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1i}x_i + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2i}x_i + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{ni}x_i + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1i} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots a_{2i} \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots a_{ni} \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots b_1 \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots b_2 \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots b_n \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

По правилу Крамера: система имеет *единственное* решение, если

$\Delta \neq 0$, и тогда каждый $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$.

Задачи с решениями

1. Найти матрицу $7A - 5B$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение:

$$7A = \begin{pmatrix} 7\cdot 2 & 7\cdot 1 & 7\cdot 4 \\ 7\cdot 3 & 7\cdot 5 & 7\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 7 & 28 \\ 21 & 35 & -7 \end{pmatrix};$$

$$5B = \begin{pmatrix} 5\cdot 3 & 5\cdot 1 & 5\cdot(-3) \\ 5\cdot 5 & 5\cdot 4 & 5\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 5 & -15 \\ 25 & 20 & 10 \end{pmatrix};$$

$$7A - 5B = \begin{pmatrix} 14 & 7 & 28 \\ 21 & 35 & -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 15 & 5 & -15 \\ 25 & 20 & 10 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 14-15 & 7-5 & 28-(-15) \\ 21-25 & 35-20 & -7-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 43 \\ -4 & 15 & -17 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $7A - 5B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 43 \\ -4 & 15 & -17 \end{pmatrix}$.

2. Найти произведение матриц AB, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 5 \\ 7 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение:

Так как матрица A размера 2×4, а матрица B размера 4×3, то умножение матриц возможно и его результатом будет матрица размера 2×3. Приведем вычисления элементов матрицы $C = A \cdot B$:

$c_{11} = 2\cdot 6 + (-3)\cdot 7 + 1\cdot 3 + 4\cdot 1 = -2;$

$c_{12} = 2\cdot(-3) + (-3)\cdot 2 + 1\cdot(-5) + 4\cdot 0 = -17;$

$c_{13} = 2\cdot 5 + (-3)\cdot 1 + 1\cdot 2 + 4\cdot 3 = 21;$

$c_{21} = 1\cdot 6 + 5\cdot 7 + 2\cdot 3 + (-1)\cdot 1 = 46;$

$c_{22} = 1\cdot(-3) + 5\cdot 2 + 2\cdot(-5) + (-1)\cdot 0 = -3;$

$c_{23} = 1\cdot 5 + 5\cdot 1 + 2\cdot 2 + (-1)\cdot 3 = 11.$

Ответ: $AB = \begin{pmatrix} -2 & -17 & 21 \\ 46 & -3 & 11 \end{pmatrix}$.

3. Для матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & 6 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ вычислить матричный многочлен $A^2 - BA + 3A$.

Решение:

Вычислим каждое слагаемое:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot 2 + 4\cdot 1 & 1\cdot 0 + 0\cdot 5 + 4\cdot(-1) & 1\cdot 4 + 0\cdot 3 + 4\cdot 2 \\ 2\cdot 1 + 5\cdot 2 + 3\cdot 1 & 2\cdot 0 + 5\cdot 5 + 3\cdot(-1) & 2\cdot 4 + 5\cdot 3 + 3\cdot 2 \\ 1\cdot 1 - 1\cdot 2 + 2\cdot 1 & 1\cdot 0 - 1\cdot 5 + 2\cdot(-1) & 1\cdot 4 - 1\cdot 3 + 2\cdot 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & -4 & 12 \\ 15 & 22 & 29 \\ 1 & -7 & 5 \end{pmatrix};$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 6 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0\cdot 1 + 6\cdot 2 - 3\cdot 1 & 0\cdot 0 + 6\cdot 5 - 3\cdot(-1) & 0\cdot 4 + 6\cdot 3 - 3\cdot 2 \\ 1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 1\cdot 1 & 1\cdot 0 + 2\cdot 5 + 1\cdot(-1) & 1\cdot 4 + 2\cdot 3 + 1\cdot 2 \\ 5\cdot 1 - 1\cdot 2 + 3\cdot 1 & 5\cdot 0 - 1\cdot 5 + 3\cdot(-1) & 5\cdot 4 - 1\cdot 3 + 3\cdot 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & 33 & 12 \\ 6 & 9 & 12 \\ 6 & -8 & 23 \end{pmatrix};$$

$$3A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 12 \\ 6 & 15 & 9 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Итого:

$$A^2 - BA + 3A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 12 \\ 15 & 22 & 29 \\ 1 & -7 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 33 & 12 \\ 6 & 9 & 12 \\ 6 & -8 & 23 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 12 \\ 6 & 15 & 9 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 - 9 + 3 & -4 - 33 + 0 & 12 - 12 + 12 \\ 15 - 6 + 6 & 22 - 9 + 15 & 29 - 12 + 9 \\ 1 - 6 + 3 & -7 + 8 - 3 & 5 - 23 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -37 & 12 \\ 15 & 28 & 26 \\ -2 & -2 & -12 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $A^2 - BA + 3A = \begin{pmatrix} -1 & -37 & 12 \\ 15 & 28 & 26 \\ -2 & -2 & -12 \end{pmatrix}$.

4. Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 7 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение:

Очевидно, что ранг не больше 4, так как ранг не может быть большим, чем число строк и число столбцов, и что ранг не меньше 2, так как первый же минор не равен нулю: $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1$. Так как элементарные преобразования не меняют ранг матрицы, то приведем с их помощью матрицу к треугольному виду:

$$\begin{pmatrix}1&0&2&0&3\\4&1&3&2&5\\0&1&0&2&2\\3&4&5&7&1\end{pmatrix}\underset{\sim}{II-4I}\begin{pmatrix}1&0&2&0&3\\0&1&-5&2&-7\\0&1&0&2&2\\3&4&5&7&1\end{pmatrix}\underset{\sim}{IV-3I}\begin{pmatrix}1&0&2&0&3\\0&1&-5&2&-7\\0&1&0&2&2\\0&4&-1&7&-8\end{pmatrix}\sim$$

$$\underset{\sim}{II\leftrightarrow III}\begin{pmatrix}1&0&2&0&3\\0&1&0&2&2\\0&1&-5&2&-7\\0&4&-1&7&-8\end{pmatrix}\underset{\sim}{III-II}\begin{pmatrix}1&0&2&0&3\\0&1&0&2&2\\0&0&-5&0&-7\\0&4&-1&7&-8\end{pmatrix}\underset{\sim}{IV-4II}$$

$$\underset{\sim}{IV-4II}\begin{pmatrix}1&0&2&0&3\\0&1&0&2&2\\0&0&-5&0&-7\\0&0&-1&-1&-16\end{pmatrix}\underset{\sim}{II\leftrightarrow -III}\begin{pmatrix}1&0&2&0&3\\0&1&0&2&2\\0&0&1&1&16\\0&0&-5&0&-7\end{pmatrix}\underset{\sim}{IV+5III}$$

$$\underset{\sim}{IV+5III}\begin{pmatrix}1&0&2&0&3\\0&1&0&2&2\\0&0&1&1&16\\0&0&0&5&73\end{pmatrix}.$$

У полученной матрицы ранг равен 4, так как очевидно, что минор из первых четырех столбцов не равен нулю (он равен произведению диагональных элементов, то есть пяти). Значит, и у исходной, эквивалентной ей, матрицы ранг равен 4.

Ответ: $\mathrm{r}(A) = 4$.

5. Найти матрицу, обратную матрице $A = \begin{pmatrix}5&-1&3\\2&4&1\\3&1&2\end{pmatrix}$.

Решение:

Найдем обратную матрицу через союзную матрицу по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\cdot\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}\\A_{21}&A_{22}&A_{23}\\A_{31}&A_{32}&A_{33}\end{pmatrix}^T,$$

Определитель матрицы

$$\det A = \begin{vmatrix}5&-1&3\\2&4&1\\3&1&2\end{vmatrix}$$
$$= 5\cdot4\cdot2-1\cdot1\cdot3+3\cdot2\cdot1-3\cdot4\cdot3-(-1)\cdot2\cdot2-5\cdot1\cdot1 =$$
$$= 40-3+6-36+4-5 = 6 \neq 0,$$

а алгебраические дополнения к элементам матрицы находятся следующим образом:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -10;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -8;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -13;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 22.$$

Тогда $A^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -1 & -10 \\ 5 & 1 & -8 \\ -13 & 1 & 22 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 5 & -13 \\ -1 & 1 & 1 \\ -10 & -8 & 22 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} \frac{7}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{13}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{10}{6} & -\frac{8}{6} & \frac{22}{6} \end{pmatrix}.$$

А теперь найдем обратную матрицу другим способом – методом Гаусса. Для этого необходимо элементарными преобразованиями над строками перевести матрицу A к единичной, тогда приписанная справа единичная матрица перейдет в A^{-1}.

$$(A|E)\sim(E|A^{-1});$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}5 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\overset{I-2II}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -9 & 1 & 1 & -2 & 0\\ 2 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\overset{II-2I}{\sim}$$

$$\overset{II-2I}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -9 & 1 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 22 & -1 & -2 & 5 & 0\\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\overset{III-3I}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -9 & 1 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 22 & -1 & -2 & 5 & 0\\ 0 & 28 & -1 & -3 & 6 & 1\end{array}\right)\overset{III-II}{\sim}$$

$$\overset{III-II}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -9 & 1 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 22 & -1 & -2 & 5 & 0\\ 0 & 6 & 0 & -1 & 1 & 1\end{array}\right)\overset{\frac{1}{6}III}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -9 & 1 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 22 & -1 & -2 & 5 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6}\end{array}\right)\overset{III\leftrightarrow II}{\sim}$$

$$\overset{III\leftrightarrow II}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -9 & 1 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6}\\ 0 & 22 & -1 & -2 & 5 & 0\end{array}\right)\overset{III-22II}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -9 & 1 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6}\\ 0 & 0 & -1 & \frac{10}{6} & \frac{8}{6} & -\frac{22}{6}\end{array}\right)\overset{-III}{\sim}$$

$$\overset{-III}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -9 & 1 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6}\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{10}{6} & -\frac{8}{6} & \frac{22}{6}\end{array}\right)\overset{I+9II}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 1 & -\frac{3}{6} & -\frac{3}{6} & \frac{9}{6}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6}\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{10}{6} & -\frac{8}{6} & \frac{22}{6}\end{array}\right)\overset{I-III}{\sim}$$

$$\overset{I-III}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & \frac{7}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{13}{6}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6}\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{10}{6} & -\frac{8}{6} & \frac{22}{6}\end{array}\right).$$

Разумеется, и этим способом мы получили тот же ответ.

Ответ: $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{7}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{13}{6}\\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6}\\ -\frac{10}{6} & -\frac{8}{6} & \frac{22}{6}\end{pmatrix}.$

6. Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases}3x_1+5x_2-6x_3=1,\\ 4x_1+7x_2+2x_3=3,\\ x_1+2x_2+8x_3=9.\end{cases}$$

Решение:
Прежде всего вычислим определитель системы:

$$\Delta=\begin{vmatrix}3 & 5 & -6\\ 4 & 7 & 2\\ 1 & 2 & 8\end{vmatrix}=168+10-48+42-160-12=0.$$

Так как $\Delta=0$, то метод Крамера не применить. Применим метод Гаусса, то есть приведем расширенную матрицу к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований над строками:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}3 & 5 & -6 & 1\\ 4 & 7 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 8 & 9\end{array}\right)\overset{II-I}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}3 & 5 & -6 & 1\\ 1 & 2 & 8 & 2\\ 1 & 2 & 8 & 9\end{array}\right)\overset{III-II}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}3 & 5 & -6 & 1\\ 1 & 2 & 8 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 7\end{array}\right).$$

Ранг расширенной матрицы больше ранга матрицы системы. Следовательно, система несовместная, то есть не имеет ни одного решения. Это очевидно, если переписать последнюю строку в виде уравнения: 0=7.
Ответ: система не имеет решений.

7. Решить методом Гаусса систему линейных уравнений:

$$\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3=5,\\ -3x_1-5x_2+3x_3=-7,\\ x_1+2x_2-2x_2=2.\end{cases}$$

Решение:
Прежде всего, вычислим определитель системы:

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & 3 & -1\\ -3 & -5 & 3\\ 1 & 2 & -2\end{vmatrix}=20+9+6-5-18-12=0.$$

Так как $\Delta=0$, то метод Крамера не применить. Применим метод Гаусса, то есть приведем расширенную матрицу к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований над строками:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2 & 3 & -1 & 5\\ -3 & -5 & 3 & -7\\ 1 & 2 & -2 & 2\end{array}\right)\overset{I\leftrightarrow III}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -2 & 2\\ -3 & -5 & 3 & -7\\ 2 & 3 & -1 & 5\end{array}\right)\overset{II+3I}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -2 & 2\\ 0 & 1 & -3 & -1\\ 2 & 3 & -1 & 5\end{array}\right)\overset{III-2I}{\sim}$$

$$\overset{III-2I}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -2 & 2\\ 0 & 1 & -3 & -1\\ 0 & -1 & 3 & 1\end{array}\right)\overset{III-II}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -2 & 2\\ 0 & 1 & -3 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\overset{III+II}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -2 & 2\\ 0 & 1 & -3 & -1\end{array}\right).$$

Ранг расширенной матрицы равен рангу матрицы системы $r(A)=r(A|B)=2$, но меньше числа неизвестных $n=3$. Следовательно, система совместна, но неопределенна, то есть имеет бесконечно много решений, выражаемых через один параметр. Пусть переменные x_1, x_2 будут базисными, а переменная x_3 – свободная. Выразим базисные переменные через свободную:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -2 & 2\\ 0 & 1 & -3 & -1\end{array}\right)\overset{I-2II}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 4 & 4\\ 0 & 1 & -3 & -1\end{array}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+4x_3=4,\\ x_2-3x_3=-1.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=-4t+4,\\ x_2=3t-1,\\ x_3=t.\end{cases}$$

Общее решение можно записать в виде $(-4t+4, 3t-1, t)$ или

$$X = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Частные решения системы получаются при подстановке произвольного t, например, при $t = 0$: $(4; -1; 0)$, а при $t = 3$: $(-8; 8; 3)$.

Ответ: система имеет бесконечно много решений, общее решение: $(-4t + 4;\ 3t - 1;\ t)$.

8. Найти коэффициенты разложения вектора $\bar{b}(3; -2; 7)$ по векторам $\overline{a_1}(1; 4; 2), \overline{a_2}(0; 1; 3), \overline{a_3}(2; -1; 1)$.

Решение:

Решение этой задачи идентично решению линейной системы:

$$\begin{cases} x_1 \qquad + 2x_3 = 3, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = -2, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$$

Решим ее методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 + 24 - 4 - 0 + 3 = 24;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 7 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 0 - 12 - 14 - 0 + 9 = -14;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & -2 & -1 \\ 2 & 7 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 6 + 56 + 8 - 12 + 7 = 51;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 7 + 0 + 36 - 6 - 0 + 6 = 43;$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{14}{24} = -\frac{7}{12};\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{51}{24} = \frac{17}{8};\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{43}{24}.$$

Ответ: $\bar{b} = -\frac{7}{12}\overline{a_1} + \frac{17}{8}\overline{a_2} + \frac{43}{24}\overline{a_3}$.

Расчетно-графическая работа

1. Вычислить определитель матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & -3 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 17, \\ x_1 - 3x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 15. \end{cases}$$

   Найти ее решение:
   a) методом Крамера;
   b) с помощью обратной матрицы;
   c) методом Гаусса.

Решения:

(1) Разложим определитель по первой строке:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & -3 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} - (-3) \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= (20 - 6 - 6 - 16 + 45 + 1) + 3(-8 + 3 + 18 + 8 - 18 - 3) +$$

$$+2(2 + 15 + 12 - 2 - 12 - 15) - (6 - 20 + 6 - 1 + 16 - 45) =$$

$$= 38 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - (-38) = 76.$$

Отметим, что если бы в матрице были нули, то мы бы разложили определитель по той строке или столбцу, где нулей больше всего.

(2a) Решим систему уравнений по формулам Крамера. Найдем определитель матрицы системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 5 \cdot (-3) \cdot 4 + 2 \cdot (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 3 - 2 \cdot (-3) \cdot 3 - 1 \cdot (-1) \cdot$$

$$\cdot 5 - 1 \cdot 2 \cdot 4 = -60 - 4 + 3 + 18 + 5 - 8 = -46.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то существует единственное решение.

Теперь найдем определитель, получающийся из Δ заменой первого столбца на столбец свободных членов:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 17 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \\ 15 & 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 17 \cdot (-3) \cdot 4 + 2 \cdot (-1) \cdot 15 + 2 \cdot 1 \cdot 3 - 15 \cdot (-3) \cdot 3 - 1 \cdot (-1) \cdot$$

$$\cdot 17 - 2 \cdot 2 \cdot 4 = -204 - 30 + 6 + 135 + 17 - 16 == -92.$$

И, заменяя второй и третий столбец на столбец свободных членов, мы получаем соответственно второй и третий вспомогательные определители:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 17 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 15 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 5 \cdot 2 \cdot 4 + 17 \cdot (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 15 \cdot 3 - 2 \cdot 2 \cdot 3 - 15 \cdot (-1) \cdot 5 -$$

$$-1 \cdot 17 \cdot 4 = 40 - 34 + 45 - 12 + 75 - 68 = 46;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 17 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 15 \end{vmatrix} =$$

$$= 5 \cdot (-3) \cdot 15 + 2 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 17 - 2 \cdot (-3) \cdot 17 - 1 \cdot 2 \cdot 5 - 1 \cdot$$

$$\cdot 2 \cdot 15 = -225 + 8 + 17 + 102 - 10 - 30 = -138.$$

И по формулам Крамера получаем решение:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-92}{-46} = 2; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{46}{-46} = -1; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-138}{-46} = 3.$$

(2b) Решим систему с помощью обратной матрицы. Найдем матрицу A^{-1}, обратную матрице системы $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T.$$

Определитель матрицы системы уже найден: $\det A = \Delta = -46 \neq 0$, а алгебраические дополнения к элементам матрицы находятся следующим образом:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = (-3) \cdot 4 - (-1) \cdot 1 = -11;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -(1 \cdot 4 - (-1) \cdot 2) = -6;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - (-3) \cdot 2 = 7;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -(2 \cdot 4 - 3 \cdot 1) = -5;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 14;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(5 \cdot 1 - 2 \cdot 2) = -1;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) - 3 \cdot (-3) = 7;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(5 \cdot (-1) - 3 \cdot 1) = 8;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-3) - 2 \cdot 1 = -17.$$

Тогда $A^{-1} = \frac{1}{-46} \cdot \begin{pmatrix} -11 & -6 & 7 \\ -5 & 14 & -1 \\ 7 & 8 & -17 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{-46} \cdot \begin{pmatrix} -11 & -5 & 7 \\ -6 & 14 & 8 \\ 7 & -1 & -17 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} \frac{11}{46} & \frac{5}{46} & -\frac{7}{46} \\ \frac{6}{46} & -\frac{14}{46} & -\frac{8}{46} \\ -\frac{7}{46} & \frac{1}{46} & \frac{17}{46} \end{pmatrix}.$$

И мы находим решение системы из равенства матриц:

$$X = A^{-1}B;$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{46} & \frac{5}{46} & -\frac{7}{46} \\ \frac{6}{46} & -\frac{14}{46} & -\frac{8}{46} \\ -\frac{7}{46} & \frac{1}{46} & \frac{17}{46} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 17 \\ 2 \\ 15 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{46} \begin{pmatrix} -11 & -5 & 7 \\ -6 & 14 & 8 \\ 7 & -1 & -17 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 17 \\ 2 \\ 15 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{46} \begin{pmatrix} (-11) \cdot 17 + (-5) \cdot 2 + 7 \cdot 15 \\ (-6) \cdot 17 + 14 \cdot 2 + 8 \cdot 15 \\ 7 \cdot 17 + (-1) \cdot 2 + (-17) \cdot 15 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{46} \begin{pmatrix} -187 - 10 + 105 \\ -102 + 28 + 120 \\ 119 - 2 - 255 \end{pmatrix} = -\frac{1}{46} \begin{pmatrix} -92 \\ 46 \\ -138 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(2c) Теперь решим данную систему линейных уравнений методом Гаусса.

Для этого приведем расширенную матрицу системы к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований над строками (так называемый прямой ход):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 3 & 17 \\ 1 & -3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 15 \end{array}\right) \overset{I \leftrightarrow II}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & 3 & 17 \\ 2 & 1 & 4 & 15 \end{array}\right) \overset{II-5I}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 17 & 8 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 15 \end{array}\right) \overset{III-2I}{\sim}$$

$$\overset{III-2I}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 17 & 8 & 7 \\ 0 & 7 & 6 & 11 \end{array}\right) \overset{\frac{1}{17}II}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{8}{17} & \frac{7}{17} \\ 0 & 7 & 6 & 11 \end{array}\right) \overset{III-7II}{\sim}$$

$$\overset{III-7II}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{8}{17} & \frac{7}{17} \\ 0 & 0 & \frac{46}{17} & \frac{138}{17} \end{array}\right) \overset{\frac{17}{46}III}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{8}{17} & \frac{7}{17} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Видно, что ранг расширенной матрицы совпадает с рангом матрицы системы, а значит, система имеет единственное решение. Теперь с помощью элементарных преобразований приведем правую часть полученной матрицы к единичной матрице (так называемый обратный ход):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \dfrac{8}{17} & \dfrac{7}{17} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \overset{II-\frac{8}{17}III}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \overset{I+III}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \overset{I+3II}{\sim}$$

$$\overset{I+3II}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Тогда правый столбец и будет решением исходной системы.

Варианты индивидуальных заданий РГР

Вариант 1

1. Вычислить определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 12, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 7, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 6. \end{cases}$$

   Найти ее решение:
   a) методом Крамера;
   b) с помощью обратной матрицы;
   c) методом Гаусса.

Вариант 2

1. Вычислить определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = -5, \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -1, \\ -2x_1 - x_2 + 3x_3 = 6. \end{cases}$$

Найти ее решение:

a) методом Крамера;
b) с помощью обратной матрицы;
c) методом Гаусса.

Вариант 3

1. Вычислить определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -7 & 9 \\ 1 & -3 & 1 & 13 \\ 2 & 1 & -5 & 5 \\ -1 & 2 & 0 & -10 \end{pmatrix}.$$

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 28, \\ \qquad 5x_2 - x_3 = -15, \\ -2x_1 - x_2 + 3x_3 = 15. \end{cases}$$

Найти ее решение:

a) методом Крамера;
b) с помощью обратной матрицы;
c) методом Гаусса.

Вариант 4

1. Вычислить определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 5x_1 \quad + \quad 4x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 13, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 13. \end{cases}$$

Найти ее решение:

a) методом Крамера;
b) с помощью обратной матрицы;
c) методом Гаусса.

Вариант 5

1. Вычислить определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1, \\ 4x_1 - 5x_2 + x_3 = -1, \\ 7x_1 - 3x_2 \quad = -2. \end{cases}$$

   Найти ее решение:
   a) методом Крамера;
   b) с помощью обратной матрицы;
   c) методом Гаусса.

Вариант 6

1. Вычислить определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} 11 & -3 & -4 & 1 \\ 5 & 1 & -10 & 2 \\ -3 & -1 & 7 & -1 \\ 1 & 0 & 6 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -5, \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

   Найти ее решение:
   a) методом Крамера;
   b) с помощью обратной матрицы;
   c) методом Гаусса.

Вариант 7

1. Вычислить определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & -14 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & -8 & 5 \\ 2 & 1 & -13 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 17, \\ x_1 - 3x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 15. \end{cases}$$

Найти ее решение:
a) методом Крамера;
b) с помощью обратной матрицы;
c) методом Гаусса.

Вариант 8

1. Вычислить определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 - 7x_2 + x_3 = 7, \\ -2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 2, \\ 5x_1 + x_2 - 9x_3 = 3. \end{cases}$$

Найти ее решение:
a) методом Крамера;
b) с помощью обратной матрицы;
c) методом Гаусса.

Вариант 9

1. Вычислить определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} 13 & -8 & 9 & 1 \\ 4 & -3 & 3 & 3 \\ 7 & -6 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -1, \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 7. \end{cases}$$

Найти ее решение:
a) методом Крамера;
b) с помощью обратной матрицы;
c) методом Гаусса.

Вариант 10

1. Вычислить определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -8 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 5x_1 + 10x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = -7, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 11. \end{cases}$$

   Найти ее решение:
   a) методом Крамера;
   b) с помощью обратной матрицы;
   c) методом Гаусса

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Необходимый теоретический материал

1. Векторная алгебра

Координаты вектора – это коэффициенты разложения вектора по базисным векторам: $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$, и вектор обычно записывают в виде $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$.

Длина вектора $\vec{a}$ определяется по формуле:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Вектор $\vec{a}$ образует с координатными осями Ox, Oy, Oz углы α, β, γ соответственно. Направление вектора $\vec{a}$ определяется с помощью *направляющих косинусов* $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$, которые следующим образом выражаются через координаты:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \qquad \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \qquad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|},$$

причем направляющие косинусы связаны соотношением

$$(\cos\alpha)^2 + (\cos\beta)^2 + (\cos\gamma)^2 = 1.$$

Если $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$ и $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$, то

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z};$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \left(a_x + b_x; a_y + b_y; a_z + b_z\right);$$

$$\lambda \cdot \vec{a} = \left(\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z\right).$$

Если вектор задан точками $A(x_1; y_1; z_1), B(x_2; y_2; z_2)$, то его координаты равны разности координат точки конца и точки начала:

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1).$$

Скалярное произведение двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – это число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла φ между ними:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi.$$

Скалярное произведение очень просто вычисляется в координатах. Если $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z), \vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$, то скалярное произведение:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Часто используется критерий ортогональности:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}\perp\vec{b}\ (\text{или } \vec{a} = 0, \text{или } \vec{b} = 0).$$

Векторным произведением неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, определяемый условиями:

1) $\vec{c}\perp\vec{a},\ \vec{c}\perp\vec{b}$;
2) $|\vec{c}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi$, где φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
3) векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку.

Обозначается векторное произведение $\vec{a}\times\vec{b}$.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$, $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$, то

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\right).$$

Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, можно вычислить как длину векторного произведения:

$$S = |\vec{a}\times\vec{b}|.$$

2. Аналитическая геометрия на плоскости

Расстояние между двумя точками на плоскости $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Если точка M делит отрезок AB в отношении λ, то есть $\lambda = \frac{AM}{MB}$ и $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$, то координаты точки M находятся по формулам:

$$x_M = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y_M = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}.$$

В частности, точка с координатами $\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ – это середина отрезка AB, если $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$.

Площадь треугольника с вершинами $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2), C(x_3; y_3)$ можно вычислить по формуле:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|$$

или как модуль некого определителя, что то же самое, но легче для запоминания: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|\Delta|$, где

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Общее уравнение прямой на плоскости:

$$ax + by + c = 0,$$

где a, b, c – числа, причем a и b не обращаются в нуль одновременно.

Уравнение прямой *с угловым коэффициентом*:

$$y = kx + b,$$

где угловой коэффициент k равен тангенсу угла наклона прямой к оси ox ($k = \operatorname{tg}\alpha$), а число b – ордината точки пересечения прямой с oy.

Уравнение прямой, проходящей через точку $A(x_1; y_1)$ с заданным угловым коэффициентом k, находится из равенства

$$(y - y_1) = k(x - x_1).$$

Уравнение прямой, проходящей через точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ находится из равенства:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Угловой коэффициент прямой, проходящей через две данные точки, равен

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Если $x_2 = x_1$, то уравнение прямой имеет вид $x = x_1$.

Если $y_2 = y_1$, то уравнение прямой имеет вид $y = y_1$.

Угол между прямыми $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ вычисляется по формуле:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

В частности:

$$(y = k_1 x + b_1 \quad \| \quad y = k_2 x + b_2) \quad \Leftrightarrow \quad k_2 = k_1;$$

$$(y = k_1 x + b_1 \quad \perp \quad y = k_2 x + b_2) \quad \Leftrightarrow \quad k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

Расстояние d от точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой $ax + by + c = 0$ – это длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую, и оно может быть найдено по формуле:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Каноническое уравнение окружности с центром в точке с координатами $(a; b)$ и с радиусом R:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

Каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где число a называется большой полуосью эллипса, а число b – малой полуосью эллипса, $a > b$. Точки $F_1(-c; 0)$ и $F_2(c; 0)$ называются фокусами, и числа a, b, c связаны соотношением $c^2 = a^2 - b^2$. Сумма расстояний от любой точки эллипса до фокусов постоянна. При построении эллипс удобно вписывать в прямоугольник $x = \pm a, y = \pm b$.

3. Аналитическая геометрия в пространстве

Расстояние между двумя точками в пространстве $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$: $|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Если точка M делит отрезок AB в отношении λ, то есть $\lambda = \frac{AM}{MB}$ и $A(x_1; y_1; z_1), B(x_2; y_2; z_2)$, то координаты точки M находятся по формулам:

$$x_M = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y_M = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z_M = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

В частности, точка с координатами $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}; \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$ – это середина отрезка AB.

Общее уравнение плоскости:

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

причем числа A, B, C не обращаются в нуль одновременно. Всякий ненулевой вектор, перпендикулярный данной плоскости, называется *нормальным вектором* этой плоскости. В частности, вектор $\vec{n} = (A; B; C)$ – нормальный вектор плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$.

Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (A; B; C)$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки $M_1(x_1; y_1; z_1), M_2(x_2; y_2; z_2), M_3(x_3; y_3; z_3)$ находится из условия компланарности векторов $\overrightarrow{MM_1}, \overrightarrow{M_2M_1}, \overrightarrow{M_3M_1}$:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Пусть две плоскости заданы уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. *Углом между плоскостями* в пространстве называется угол между нормальными векторами этих плоскостей. То есть:

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}|},$$

Так как $\overrightarrow{n_1} = (A_1; B_1; C_1)$, $\overrightarrow{n_2} = (A_2; B_2; C_2)$ – нормальные вектора, то получаем формулу через координаты:

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

В частности:

$$A_1x + B_1y + C_1z = 0 \parallel A_2x + B_2y + C_2z = 0 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2};$$

$$A_1x + B_1y + C_1z = 0 \perp A_2x + B_2y + C_2z = 0 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Расстояние d от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ – это длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость, и оно может быть найдено по формуле:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Канонические уравнения прямой, проходящей через точку $(x_0; y_0; z_0)$ параллельно направляющему вектору $\vec{s} = (m, n, p)$, имеют вид:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

(Обращение в нуль одного из знаменателей означает обращение в нуль соответствующего числителя.)

В *векторной форме* уравнения прямой: $\vec{r} = \overrightarrow{r_0} + \vec{s}t$, где $\overrightarrow{r_0} = (x_0; y_0; z_0)$, $\vec{s} = (m; n; p)$.

Параметрические уравнения прямой:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt, \end{cases}$$

где t – переменный параметр, $t \in \mathbb{R}$.

Уравнения прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ имеют вид:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Задачи с решениями

1. Даны две точки $A(5; -2; 4)$ и $B(3; 1; 7)$. Найти координаты вектора $\overrightarrow{AB}$.
   Решение: Координаты вектора равны разности координат конца и начала: $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A) = (3 - 5; 1 - (-2); 7 - 4) = (-2; 3; 3)$.
2. Найти координаты вектора $\vec{a}$, если известно, что он направлен в противоположную сторону к вектору $\vec{b} = 2\vec{i} - 5\vec{j} + 14\vec{k}$ и его модуль равен 3.
   Решение: Найдем длину (модуль) вектора $\vec{b}$:
   $$|\vec{b}| = \sqrt{2^2 + (-5)^2 + 14^2} = \sqrt{225} = 15.$$
   И так как по условию $\vec{a} = 3 \cdot \frac{-\vec{b}}{|\vec{b}|}$, то $\vec{a} = \frac{3}{15} \cdot \left(-\vec{b}\right) = -\frac{2}{5}\vec{i} + \vec{j} - \frac{14}{5}\vec{k}$. Итого $\vec{a} = \left(-\frac{2}{5}; 1; -\frac{14}{5}\right)$.

3. Вектор $\vec{a}$ образует с осями Ox и Oy углы $\alpha = 135°$ и $\beta = 60°$, и его длина равна 4. Найти координаты этого вектора.

   Решение: Обозначим искомые координаты вектора $\vec{a} = (x; y; z)$. Направляющие косинусы связаны соотношением

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

   Следовательно

$$\cos^2\gamma = 1 - \cos^2 135° - \cos^2 60° = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

   а значит, $\cos\gamma = \frac{1}{2}$ или $\cos\gamma = -\frac{1}{2}$. То есть условию задачи удовлетворяют два вектора . Найдем их координаты. Так как:

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\vec{a}|}, \cos\beta = \frac{y}{|\vec{a}|}, \cos\gamma = \frac{z}{|\vec{a}|},$$

   то

$$x = |\vec{a}|\cos\alpha = 4\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2\sqrt{2};$$

$$y = |\vec{a}|\cos\beta = 4\cdot\frac{1}{2} = 2;$$

$$z = |\vec{a}|\cos\gamma \Rightarrow z_1 = 4\cdot\frac{1}{2} = 2; z_2 = 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -2.$$

   Итого $\overrightarrow{a_1} = \left(-2\sqrt{2}; 2; 2\right)$ и $\overrightarrow{a_2} = \left(-2\sqrt{2}; 2; -2\right)$.

4. Для каких чисел α и β векторы $\vec{a} = 3\vec{\imath} - \alpha\vec{\jmath} + 5\vec{k}$ и $\vec{b} = -2\vec{\imath} + 7\vec{\jmath} + \beta\vec{k}$ коллинеарны?

   Решение: Векторы коллинеарны, когда их координаты пропорциональны, а значит,

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{3}{-2} = \frac{-\alpha}{7} = \frac{5}{\beta} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha = \frac{21}{2}, \\ \beta = -\frac{10}{3}. \end{cases}$$

5. На оси Oz найти точку M , равноудаленную от точек $A(2; 3; 5)$ и $B(4; -1; -6)$.

   Решение: Точка M лежит на оси Oz, значит ее кординаты $M(0; 0; z)$. Так как $|MA| = |MB|$, то

   $2^2 + 3^2 + (z-5)^2 = 4^2 + (-1)^2 + (-6-z)^2$, и после преобразований $z = -\frac{15}{22}$. Таким образом, $M(0; 0; -\frac{15}{22})$.

6. Найти уравнение плоскости перпендикулярной прямой:

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y+5}{-8}=\frac{z-7}{4}$$

и проходящей через точку $M(6;2;-9)$.

Решение: Направляющий вектор прямой $\vec{s}=(1;-8;4)$ можно взять в качестве нормального вектора плоскости. Тогда уравнение плоскости $(x-6)-8(y-2)+4(z+9)=0$; и окончательно $x-8y+4z+46=0$.

Пример решения контрольной работы

1. Даны три точки на плоскости $A(1;2), B(3;4), C(5;-1)$. Найти:
   a) длину и уравнение медианы из вершины C;
   b) длину и уравнение высоты из вершины C.

2. Даны два вектора. $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}, \vec{b}=\vec{j}+4\vec{k}$. Найти:
   a) скалярное произведение векторов $\vec{a}-2\vec{b}$ и $\vec{b}+\vec{a}$;
   b) векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

3. Даны три точки в пространстве $M_1(1;2;3), M_2(-2;1;0), M_3(3;-1;2)$. Найти уравнение плоскости $M_1M_2M_3$ и уравнение прямой, проходящей через точку $N(5;2;1)$ перпендикулярно плоскости $M_1M_2M_3$.

Решения:

(1a) Для нахождения длины и уравнения медианы CM найдем координаты точки M. Эта точка делит сторону AB пополам, а значит, имеет координаты: $x_M=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{1+3}{2}=2$ и $y_M=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{2+4}{2}=3$.

Тогда медиана CM имеет длину:

$$|CM|=\sqrt{(x_M-x_C)^2+(y_M-y_C)^2}=\sqrt{(2-5)^2+\left(3-(-1)\right)^2}==\sqrt{(-3)^2+4^2}$$
$$=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5.$$

Уравнение прямой, проходящей через точки C и M, имеет вид:

$$(y-y_M)=\frac{y_C-y_M}{x_C-x_M}(x-x_M),$$

$$y-3=\frac{-1-3}{5-2}(x-2),$$

$$y - 3 = -\frac{4}{3}(x - 2),$$

$$y = -\frac{4}{3}x + \left(\frac{4}{3} \cdot 2 + 3\right),$$

$$y = -\frac{4}{3}x + \frac{17}{3}.$$

(1b) Высота из вершины C (обозначим ее CH) перпендикулярна стороне AB, поэтому вначале найдем уравнение прямой, проходящей через AB, причем в двух формах:

$$(y - y_B) = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}(x - x_B),$$

$$y - 4 = \frac{2 - 4}{1 - 3}(x - 3),$$

$$y - 4 = \frac{-2}{-2}(x - 3),$$

$$y = x - 3 + 4,$$

$$y = x + 1 \text{ (уравнение } AB \text{ с угловым коэффициентом)},$$

$$x - y + 1 = 0 \text{ (общее уравнение } AB\text{)}.$$

Мы получили, что $k_{AB} = 1$, а так как CH перпендикулярна AB, то

$k_{CH} \cdot k_{AB} = -1$ и значит, $k_{CH} = -1$. Тогда

$$(y - y_C) = -1 \cdot (x - x_C),$$

$$y - (-1) = -(x - 5),$$

$$y = -x + 5 - 1,$$

$$y = -x + 4.$$

Длина высоты CH равна расстоянию от точки $C\ (x_0, y_0)$ до прямой AB, а значит, может быть вычислена по формуле: $|CH| = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, если $ax + by + c = 0$ – общее уравнение прямой AB. Тогда

$$|CH| = \frac{|1 \cdot 5 - 1 \cdot (-1) + 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}},$$

$$|CH| = \frac{7}{\sqrt{2}}.$$

(Обратите внимание, что мы нашли длину и уравнение высоты CH, не находя координаты точки H.)

(2a) Рассмотрим два способа нахождения скалярного произведения линейных комбинаций данных векторов $(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{b} + \vec{a})$.

Способ 1

Найдем координаты векторов $\vec{a} - 2\vec{b}$ и $\vec{b} + \vec{a}$:

$$\vec{a} - 2\vec{b} = (2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - \vec{k}) - 2(\vec{\jmath} + 4\vec{k}) == 2\vec{\imath} + (3 - 2)\vec{\jmath} + (-1 - 2 \cdot 4)\vec{k}$$
$$= 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 9\vec{k},$$
$$\vec{b} + \vec{a} = (\vec{\jmath} + 4\vec{k}) + (2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - \vec{k}) = 2\vec{\imath} + (1 + 3)\vec{\jmath} + (4 - 1)\vec{k} =$$
$$= 2\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 3\vec{k}.$$

Тогда скалярное произведение равно:

$$(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{b} + \vec{a}) = (2\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 9\vec{k}) \cdot (2\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 3\vec{k}) =$$
$$= 2 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + (-9) \cdot 3 = -19.$$

Способ 2

Прежде всего вычислим скалярное произведение самих векторов a и b и квадраты их длин (то есть модулей). Это легко сделать, так как координаты этих векторов нам уже даны:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - \vec{k}) \cdot (\vec{\jmath} + 4\vec{k}) = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 4 = -1,$$
$$|\vec{a}|^2 = |2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - \vec{k}|^2 = 2^2 + 3^2 + (-1)^2 = 4 + 9 + 1 = 14,$$
$$|\vec{b}|^2 = |\vec{\jmath} + 4\vec{k}|^2 = 0^2 + 1^2 + 4^2 = 1 + 16 = 17.$$

Теперь раскроем скобки в искомом скалярном произведении и подставим найденные значения:

$$(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{b} + \vec{a}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{a} - 2\vec{b} \cdot \vec{b} - 2\vec{b} \cdot \vec{a} == \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a}^2 - 2\vec{b}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$
$$= -\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{a}|^2 - 2|\vec{b}|^2 == -(-1) + 14 - 2 \cdot 17 = 1 + 14 - 34$$
$$= -19.$$

Второй способ вычисления удобней, когда в задании все равно необходимо вычислить $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $|\vec{a}|$ и $|\vec{b}|$.

(2b) По формуле выражения векторного произведения через координаты получаем:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_a & y_a & z_a\\ x_b & y_b & z_b\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 3 & -1\\ 0 & 1 & 4\end{vmatrix}==\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & 4\end{vmatrix}\cdot\vec{i}-\begin{vmatrix}2 & -1\\ 0 & 4\end{vmatrix}\cdot\vec{j}+\begin{vmatrix}2 & 3\\ 0 & 1\end{vmatrix}\cdot\vec{k}=$$
$$=\big(3\cdot 4-1\cdot(-1)\big)\vec{i}-\big(2\cdot 4-0\cdot(-1)\big)\vec{j}+(2\cdot 1-0\cdot 3)\vec{k}=$$
$$=13\vec{i}-8\vec{j}+2\vec{k}.$$

(3) Уравнение плоскости, проходящей через данные три точки, может быть получено из компланарности векторов MM_1, M_2M_1, M_3M_1:

$$\begin{vmatrix}x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}=0,$$
$$\begin{vmatrix}x-1 & y-2 & z-3\\ -2-1 & 1-2 & 0-3\\ 3-1 & -1-2 & 2-3\end{vmatrix}=0,$$
$$\begin{vmatrix}x-1 & y-2 & z-3\\ -3 & -1 & -3\\ 2 & -3 & -1\end{vmatrix}=0,$$
$$(x-1)\cdot\begin{vmatrix}-1 & -3\\ -3 & -1\end{vmatrix}-(y-2)\cdot\begin{vmatrix}-3 & -3\\ 2 & -1\end{vmatrix}+(z-3)\cdot\begin{vmatrix}-3 & -1\\ 2 & -3\end{vmatrix}=0,$$
$$(x-1)\cdot(-8)-(y-2)\cdot 9+(z-3)\cdot 11=0,$$
$$-8x-9y+11z+(8+18-33)=0,$$
$$8x+9y-11z+7=0.$$

Чтобы избежать арифметических ошибок, проверим полученное уравнение. При подстановке любой из точек M_1, M_2, M_3 полученное уравнение должно превращаться в тождество:

$$8\cdot 1+9\cdot 2-11\cdot 3+7=0,$$
$$8\cdot(-2)+9\cdot 1-11\cdot 0+7=0,$$
$$8\cdot 3+9\cdot(-1)-11\cdot 2+7=0.$$

И это действительно так.

Теперь найдем уравнение прямой, проходящей через точку $N(5;2;1)$ перпендикулярно плоскости $M_1M_2M_3$. Из уравнения плоскости найдем вектор, перпендикулярный ей. Это вектор с координатами, равными коэффициентам уравнения плоскости:

$$8x+9y-11z+7=0\ \perp\ \vec{n}=(8;\ 9;\ -11).$$

То есть этот вектор $\vec{n}$ можно взять за направляющий вектор искомой прямой. Тогда каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $N(5;2;1)$ параллельно вектору $\vec{n}=(8;\ 9;\ -11)$, имеет вид:

$$\frac{x-5}{8}=\frac{y-2}{9}=\frac{z-1}{-11}.$$

Дополнительные задачи

1. Найти расстояние от точки $M_0(-2,-4,3)$ до плоскости $2x-y+2z+3=0$.

Решение. Используем формулу:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|2\cdot(-2)-1\cdot(-4)+2\cdot 3+3|}{\sqrt{4+1+4}}=3.$$

Ответ: $d=3$.

2. Найти расстояние между параллельными плоскостями

$$P_1:\ x-2y-2z-6=0;\quad P_2:\ x-2y-2z-12=0.$$

Решение:

Первый способ. Выберем произвольно точку M_0 на плоскости P_2. Пусть, например, $x_0=y_0=0$. Тогда $z_0=-6$. Следовательно, $M_0(0,0,-6)$. Найдем расстояние d от точки M_0 до плоскости P_1, по формуле (1.5):

$$d=\frac{|A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D_1|}{\sqrt{A_1{}^2+B_1{}^2+C_1{}^2}}=\frac{12-6}{\sqrt{1+4+4}}=2.$$

Второй способ. Очевидно, что плоскости P_1 и P_2 лежат по одну сторону относительно начала координат $O(0,0,0)$.

Обозначим через p_1 расстояние от начала координат до плоскости P_1, через p_2 – до плоскости P_2 (рис. 1).

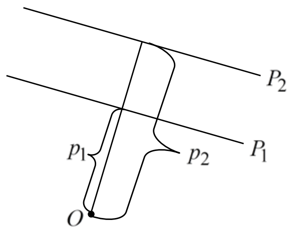


Рис. 1

$$p_1 = \frac{|D_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} = \frac{6}{3} = 2$$

$$p_2 = \frac{|D_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} = \frac{12}{3} = 4.$$

Расстояние между плоскостями равно $d = p_2 - p_1$.

Отсюда находим d = 2.

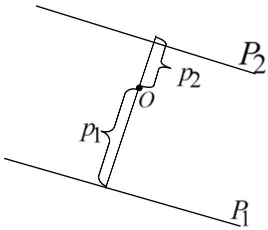


Рис. 2

Варианты контрольных заданий

Вариант 1

1. Даны три точки на плоскости: $A(-3; 1), B(2; -1), C(3; 4)$. Найти:
   a) длину и уравнение медианы из вершины C;
   b) длину и уравнение высоты из вершины C.

2. Даны два вектора: $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}, \vec{b} = 4\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$. Найти:
   a) скалярное произведение векторов $3\vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{b} + 2\vec{a}$;
   b) векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

3. Даны три точки в пространстве: $M_1(4; 1; 0), M_2(3; 2; -1), M_3(1; -2; 3)$. Найти уравнение плоскости $M_1M_2M_3$ и уравнение прямой, проходящей через точку $N(0; 5; 2)$ перпендикулярно плоскости $M_1M_2M_3$.

Вариант 2

1. Даны три точки на плоскости: $A(4; -1), B(1; 3), C(2; 0)$. Найти:
   a) длину и уравнение медианы из вершины C;
   b) длину и уравнение высоты из вершины C.

2. Даны два вектора: $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}, \vec{b} = 3\vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k}$. Найти:
   a) скалярное произведение векторов $\vec{a} - \vec{b}$ и $2\vec{b} + \vec{a}$;
   b) векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

3. Даны три точки в пространстве: $M_1(1; -4; 2), M_2(5; 2; -3), M_3(2; 0; 1)$. Найти уравнение плоскости $M_1M_2M_3$ и уравнение прямой, проходящей через точку $N(4; -1; 3)$ перпендикулярно плоскости $M_1M_2M_3$.

Вариант 3

1. Даны три точки на плоскости: $A(2;-2), B(6;3), C(-3;0)$. Найти:
   a) длину и уравнение медианы из вершины C;
   b) длину и уравнение высоты из вершины C.

2. Даны два вектора: $\vec{a} = \vec{\imath} + 5\vec{k}, \vec{b} = 4\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 2\vec{k}$. Найти:
   a) скалярное произведение векторов $3\vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{b} + 2\vec{a}$;
   b) векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

3. Даны три точки в пространстве: $M_1(0;5;-3), M_2(-2;0;3), M_3(4;-2;1)$. Найти уравнение плоскости $M_1M_2M_3$ и уравнение прямой, проходящей через точку $N(1;3;8)$ перпендикулярно плоскости $M_1M_2M_3$.

Вариант 4

1. Даны три точки на плоскости: $A(0;8), B(-2;4), C(5;3)$. Найти:
   a) длину и уравнение медианы из вершины C;
   b) длину и уравнение высоты из вершины C.

2. Даны два вектора: $\vec{a} = 3\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 2\vec{k}, \vec{b} = 6\vec{\imath} - 3\vec{\jmath}$. Найти:
   a) скалярное произведение векторов $\vec{a} - \vec{b}$ и $2\vec{b} + \vec{a}$;
   b) векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

3. Даны три точки в пространстве: $M_1(-2;3;1), M_2(0;-2;4), M_3(4;1;-5)$. Найти уравнение плоскости $M_1M_2M_3$ и уравнение прямой, проходящей через точку $N(-1;4;3)$ перпендикулярно плоскости $M_1M_2M_3$.

Вариант 5

1. Даны три точки на плоскости: $A(2;-2), B(6;5), C(0;3)$. Найти:
   a) длину и уравнение медианы из вершины C;
   b) длину и уравнение высоты из вершины C.

2. Даны два вектора: $\vec{a} = 3\vec{\jmath} - \vec{k}, \vec{b} = 2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + \vec{k}$. Найти:
   a) скалярное произведение векторов $3\vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{b} + 2\vec{a}$;
   b) векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

3. Даны три точки в пространстве: $M_1(2;-3;1), M_2(5;2;2), M_3(0;1;-3)$. Найти уравнение плоскости $M_1M_2M_3$ и уравнение прямой, проходящей через точку $N(3;1;-5)$ перпендикулярно плоскости $M_1M_2M_3$.

Вариант 6

1. Даны три точки на плоскости: $A(2;5), B(0;3), C(-3;-1)$. Найти:
   a) длину и уравнение медианы из вершины C;
   b) длину и уравнение высоты из вершины C.

2. Даны два вектора: $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}, \vec{b} = -3\vec{j} + 4\vec{k}$. Найти:
   a) скалярное произведение векторов $\vec{a} - \vec{b}$ и $2\vec{b} + \vec{a}$;
   b) векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

3. Даны три точки в пространстве: $M_1(-1; 3; 2), M_2(0; 1; 2), M_3(5; -2; -1)$. Найти уравнение плоскости $M_1M_2M_3$ и уравнение прямой, проходящей через точку $N(3; -1; 4)$ перпендикулярно плоскости $M_1M_2M_3$.

Вариант 7

1. Даны три точки на плоскости: $A(4; -2), B(8; 0), C(1; 4)$. Найти:
   a) длину и уравнение медианы из вершины C;
   b) длину и уравнение высоты из вершины C.

2. Даны два вектора: $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{k}, \vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$. Найти:
   a) скалярное произведение векторов $3\vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{b} + 2\vec{a}$;
   b) векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

3. Даны три точки в пространстве: $M_1(1; -2; 1), M_2(0; -3; 2), M_3(5; 1; -3)$. Найти уравнение плоскости $M_1M_2M_3$ и уравнение прямой, проходящей через точку $N(-2; 1; 4)$ перпендикулярно плоскости $M_1M_2M_3$.

Вариант 8

1. Даны три точки на плоскости: $A(4; -2), B(-2; 3), C(1; 0)$. Найти:
   a) длину и уравнение медианы из вершины C;
   b) длину и уравнение высоты из вершины C.

2. Даны два вектора: $\vec{a} = 4\vec{i} - 2\vec{j}, \vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$. Найти:
   a) скалярное произведение векторов $\vec{a} - \vec{b}$ и $2\vec{b} + \vec{a}$;
   b) векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

3. Даны три точки в пространстве: $M_1(2; -2; 1), M_2(0; 3; 4), M_3(-5; 1; -3)$. Найти уравнение плоскости $M_1M_2M_3$ и уравнение прямой, проходящей через точку $N(-2; 0; 7)$ перпендикулярно плоскости $M_1M_2M_3$.

Вариант 9

1. Даны три точки на плоскости: $A(5; -2), B(1; 5), C(-3; 1)$. Найти:
   a) длину и уравнение медианы из вершины C;
   b) длину и уравнение высоты из вершины C.

2. Даны два вектора: $\vec{a} = 4\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}, \vec{b} = 7\vec{i} - 5\vec{j}$. Найти:
   a) скалярное произведение векторов $3\vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{b} + 2\vec{a}$;
   b) векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

3. Даны три точки в пространстве: $M_1(2;-3;1), M_2(4;0;-1), M_3(-1;5;3)$. Найти уравнение плоскости $M_1M_2M_3$ и уравнение прямой, проходящей через точку $N(5;-3;1)$ перпендикулярно плоскости $M_1M_2M_3$.

Вариант 10

1. Даны три точки на плоскости: $A(2;3), B(-6;-1), C(1;4)$. Найти:
   a) длину и уравнение медианы из вершины C;
   b) длину и уравнение высоты из вершины C.

2. Даны два вектора: $\vec{a} = 3\vec{\imath} - 2\vec{k}, \vec{b} = \vec{\imath} - 4\vec{\jmath} + \vec{k}$. Найти:
   a) скалярное произведение векторов $\vec{a} - \vec{b}$ и $2\vec{b} + \vec{a}$;
   b) векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

3. Даны три точки в пространстве: $M_1(2;-1;3), M_2(1;4;-2), M_3(-5;1;0)$. Найти уравнение плоскости $M_1M_2M_3$ и уравнение прямой, проходящей через точку $N(-3;1;7)$ перпендикулярно плоскости $M_1M_2M_3$.

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Необходимый теоретический материал

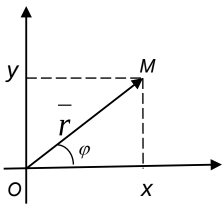
1. Понятие комплексного числа

Комплексным числом z называется выражение вида $z = x + iy$, где x и y – действительные числа, а i – так называемая *мнимая единица*, $i^2 = -1$.

Если $x = 0$, то число $0 + iy = iy$ называется *чисто мнимым*; если $y = 0$, то число $x + i0 = x$ отождествляется с действительным числом x, а это означает, что множество R всех действительных чисел является подмножеством множества C всех комплексных чисел, т. е. $R \subset C$.

Число x – *действительная часть* комплексного числа z и обозначается $x = \operatorname{Re} z$, а y – *мнимая часть* z, $y = \operatorname{Im} z$.

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ $z_2 = x_2 + iy_2$ называются *равными* тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части. Понятия больше и меньше для комплексных чисел не вводятся. Два комплексных числа, отличающиеся лишь знаком мнимой части, называются *сопряженными*.



Всякое комплексное число можно изобразить точкой $M(x,y)$ плоскости Oxy такой, что $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется *комплексной плоскостью*.

Ось абсцисс – действительная ось, ось ординат – мнимая. Комплексное число можно задать в виде радиус вектора $\bar{r} = \overline{OM}$. Длина вектора $\bar{r}$ называется *модулем* этого числа и обозначается $|\bar{z}|$ или r.

Величина угла между положительным направлением действительной оси и вектором $\bar{r}$, изображающим комплексное число – *аргумент* этого числа, обозначается Arg z или φ. Аргумент комплексного числа z=0 не определен. Аргумент комплексного числа $z \neq 0$ – величина многозначная и определяется с точностью до слагаемого $2\pi k$ ($k = 0,-1,1,-2,2,\ldots$): $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k$, где arg z – *главное значение аргумента,* заключенное в промежутке $(-\pi;\pi]$, т. е. $-\pi < \arg z \leq \pi$ (иногда в качестве главного аргумента берут величину из промежутка $[0;2\pi)$).

2. Формы записи комплексного числа

Запись числа в виде $z = x + iy$ называют *алгебраической формой* комплексного числа. Модуль r и аргумент φ можно рассматривать как полярные координаты вектора $\bar{r} = \overline{OM}$, изображающего комплексное число $z = x + iy$. Тогда получаем $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Следовательно, комплексное число можно записать в виде $z = r\cos\varphi + ir\sin\varphi$ или $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Такая запись называется *тригонометрической формой.*

Модуль $r = |z|$ однозначно определяется по формуле $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Например, $|i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$. Аргумент φ определяется из формул:

$$\cos\varphi = \frac{x}{r},\ \ \sin\varphi = \frac{y}{r},\ \ tg\varphi = \frac{y}{x}.$$

Так как $\varphi = Argz = \arg z + 2\pi k$, то $\cos\varphi = \cos(\arg z + 2\pi k) = \cos(\arg z)$,

$$\sin\varphi = \sin\arg z.$$

Поэтому при переходе от алгебраической формы комплексного числа к тригонометрической достаточно определить лишь главное значение аргумента z, т.е. считать $\varphi = \arg z$.

Так как $-\pi < \arg z \le \pi$, то из формулы $tg\varphi = \dfrac{y}{x}$ получаем, что

$$\arg Z = \begin{cases} arctg\dfrac{y}{x}, & если \quad x > 0, \\ \pi + arctg\dfrac{y}{x}, & если \quad x < 0, y \ge 0, \\ -\pi + arctg\dfrac{y}{x}, & если \quad x < 0, y < 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, & если \quad x = 0, y > 0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, & если \quad x = 0, y < 0, \\ 0, & если \quad x > 0, y = 0, \\ \pi, & если \quad x < 0, y = 0. \end{cases}$$

Используя формулу Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + \sin\varphi$, комплексное число $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ можно записать в *показательной* (или *экспоненциальной*) *форме* $z = re^{i\varphi}$, где $r = |z|$ – модуль комплексного числа, а угол $\varphi = Argz = \arg z + 2\pi k$.

В силу формулы Эйлера функция $e^{i\varphi}$ – периодическая с основным периодом 2π. Для записи комплексного числа *z* в показательной форме, достаточно найти главное значение аргумента комплексного числа, т.е. считать $\varphi = \arg z$.

Пример 1: Записать комплексные числа $z_1 = -1+i$ и $z_2 = -1$ в тригонометрической и показательной формах.

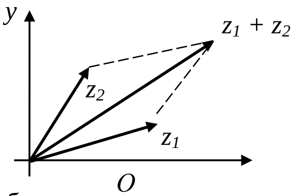
Решение: Для числа z_1 имеем:

$$|z| = r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2} \qquad \arg z = arctg(\frac{1}{-1}) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}\text{ , т.е. } \varphi = \frac{3\pi}{4}.$$

Поэтому $-1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

Для z_2 имеем $r = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1$ $\quad \arg z = \arg(-1) = \pi$ т.е. $\varphi = \pi$.

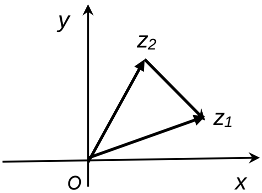
Поэтому $-1 = \cos\pi + i\sin\pi = e^{i\pi}$.



3. Действия над комплексными числами

Суммой двух комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число, определяемое равенством $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$.

Сложение комплексных чисел обладает переместительным (коммутативным) и сочетательным (ассоциативным) свойствами. Из определения следует, что комплексные числа складываются как векторы. Из рисунка видно, что $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$. Это соответствие называют неравенством треугольника.



Разностью двух комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число z, которое будучи сложенным с z_2, дает число z_1, т.е. $z = z_1 - z_2$, если $z + z_2 = z_1$.

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

Из равенства следует, что геометрически комплексные числа вычитаются как векторы. Из рисунка видно, что $|z_1 - z_2| \ge |z_1| - |z_2|$.

Отметим, что $|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = d$, т. е. модуль разности двух комплексных чисел равен расстоянию d между точками, изображающими эти числа на плоскости.

Поэтому, например, равенство $|z - 2i| = 1$ определяет на комплексной плоскости множество точек z, находящихся на расстоянии 1 от точки $z_0 = 2i$, т. е. окружность с центром в $z_0 = 2i$ и радиусом 1.

Произведением комплексных чисел $z_1 = x_1+iy_1$ и $z_2 = x_2+iy_2$ называется комплексное число, определяемое равенством:

$$z = z_1z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)$$

Произведение комплексных чисел можно находить путем формального перемножения двучленов $x_1 + iy_1$ и $x_2 + iy_2$, учитывая, что $i^2 = -1$.

Например, $(2-3i)(-5+4i) = -10+8i+15i-12i^2 = -10+23i+12 = 2+23i$.

Заметим, что $z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2$ – действительное число.

Умножение комплексных чисел обладает переместительным, сочетательным и распределительным свойствами.

Найдем произведение комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме: $z_1z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$

$$= r_1r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) =$$

$$= r_1r_2\big((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)\big) =$$
$$= r_1r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

Мы показали, что при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются. Это правило распространяется на любое конечное число множителей. В частности:

$$z^n = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$ – *формула Муавра.*

Пример 2: Найти $(1+\sqrt{3}i)^9$

Решение: Запишем сначала число $z = 1+\sqrt{3}i$ в тригонометрической форме:

$$r = \sqrt{1+(\sqrt{3})^2} = 2; \quad \arg z = arctg\frac{\sqrt{3}}{1} \Rightarrow \arg z = \frac{\pi}{3}, \quad z = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$$

По формуле Муавра имеем:

$$z^9 = (1+\sqrt{3}i)^9 = 2^9(\cos 9\frac{\pi}{3} + i\sin 9\frac{\pi}{3}) = 2^9(\cos 3\pi + i\sin 3\pi) = 2^9(-1) = -512$$

Частным двух комплексных чисел z_1 и $z_2 \neq 0$ называется комплексное число z, которое, будучи умноженным на z_2, дает число z_1, т.е. $\frac{z_1}{z_2} = z$, если $z_2z = z_1$.

Если положить $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2 \neq 0$, $z = x + iy$, то из равенства $(x_2 + iy_2)(x + iy) = x_1 + iy_1$ следует:

$$\begin{cases} xx_2 - yy_2 = x_1 \\ xy_2 + yx_2 = y_1 \end{cases}$$

Решая систему, найдем значения x и y:

$$x = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \quad y = \frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

На практике частное двух комплексных чисел находят путем умножения числителя и знаменателя на число, сопряженное знаменателю.

Пример 3: Выполнить деление $\frac{1+3i}{2+i}$

Решение: $\frac{1+3i}{2+i} = \frac{(1+3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{2-i+6i+3}{4+1} = \frac{5+5i}{5} = 1+i.$

Для тригонометрической формы комплексного числа деление имеет вид: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right]$,

т. е. $$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = Argz_1 - Argz_2.$$

Корнем n-ой степени из комплексного числа z называется комплексное число $\omega = \sqrt[n]{z}$, удовлетворяющее равенству $\omega^n = z$.

Если положить $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, а $\omega = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, то по определению корня и формуле Муавра, получаем

$$z = \omega^n = \rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Отсюда имеем $\rho^n = r, \quad n\theta = \varphi + 2\pi k, \quad k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

Т. е. $\theta = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}, \quad \rho = \sqrt[n]{r}$ (арифметический корень).

Поэтому корень n-ой степени из комплексного числа имеет n различных значений, которые находятся по формуле:

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),\ k=0,1,\dots,n-1.$$

Точки, соответствующие значениям $\sqrt[n]{z}$, являются вершинами правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $R=\sqrt[n]{|z|}$ с центром в начале координат.

Пример 4: Найти все значения $\sqrt[4]{1-i}$.

Решение: Запишем комплексное число $1-i$ в тригонометрической форме:

$$1-i=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right),$$

$$\sqrt[4]{1-i}=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{4}+2\pi k}{4}+i\sin\frac{-\frac{\pi}{4}+2\pi k}{4}\right).$$

$$k=0,\quad \sqrt[4]{1-i}=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16}-i\sin\frac{\pi}{16}\right),$$

$$k=1,\quad \sqrt[4]{1-i}=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{16}+i\sin\frac{7\pi}{16}\right),$$

$$k=2,\quad \sqrt[4]{1-i}=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{15\pi}{16}+i\sin\frac{15\pi}{16}\right),$$

$$k=3,\quad \sqrt[4]{1-i}=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{23\pi}{16}+i\sin\frac{23\pi}{16}\right).$$

Пример 5: Какое множество точек на комплексной плоскости определяется условием $-\frac{\pi}{2}\le\arg(z+1-i)\le\frac{3\pi}{4}$?

Решение: Комплексное число $z+1-i=z-(-1+i)$ изображается вектором, началом которого является точка $-1+i$, а концом – точка z. Угол между этим вектором и осью ox есть $\arg(z+1-i)$, и он меняется в пределах от $-\frac{\pi}{2}$ до $-\frac{3\pi}{4}$

Следовательно, данное неравенство определяет угол между прямыми, выходящими из точки $-1+i$ и образующими с осью ox углы : $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{4}$.

4. Действия над комплексными числами в показательной форме

Пусть $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ и $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, тогда:

1. Произведение $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$;
2. Частное $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$;
3. Возведение в n – ю степень $z^n = \left(re^{i\varphi}\right)^n = r^n e^{in\varphi}$;
4. Извлечение корня n – й степени $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{re^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{\frac{\varphi+2\pi k}{n}\cdot i}$, $k = 0,1,2,\ldots,n-1$.

Формулы Эйлера:

Рассмотрим разложение функции $y = e^x$ по формуле Маклорена.

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} + \ldots$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Если действительную переменную *x* заменить комплексной переменной *z*, то получим ряд по степеням *z*:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots \qquad (1)$$

Аналогично определяются тригонометрические функции $\sin z$ и $\cos z$ комплексной переменной *z*:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots \qquad (2)$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots \qquad (3)$$

Подставим в (1) iz вместо z и сгруппируем в правой части все слагаемые, содержащие множитель i и не содержащие этот множитель.

$$e^{iz} = 1 + \frac{iz}{1!} + \frac{i^2 z^2}{2!} + \frac{i^3 z^3}{3!} + \frac{i^4 z^4}{4!} + \frac{i^5 z^5}{5!} + \ldots = \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots\right) + i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots\right)$$

Сравнивая полученный результат с формулами (2) и (3), получаем

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z \qquad \text{и} \qquad e^{-iz} = \cos z - i\sin z.$$

Таким образом, с помощью понятия комплексного числа устанавливается связь между тригонометрическими и показательной функциями.

Складывая и вычитая эти два выражения, получим:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}; \ \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Используя понятие комплексных чисел, вводится понятие гиперболических синуса и косинуса:

$$chz = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}; \qquad shz = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}.$$

Из формулы Эйлера следует, что

$$ch(zi) = \cos z; \qquad sh(iz) = i\sin z.$$

Известные из элементарной математики формулы:

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}, \qquad \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1 - z_2};$$

$$\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2; \cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2,$$

справедливы и для комплексных значений аргументов z_1 и z_2.

5. Основная теорема алгебры

Функция вида $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, где n – натуральное число, a_i – постоянные коэффициенты, называется *многочленом n-ой степени* с действительными коэффициентами (или целой рациональной функцией).

Корнем многочлена называется такое значение x_0 (вообще говоря комплексное) переменной x, при котором многочлен обращается в нуль.

Теорема 1: Если x_1 есть корень многочлена $P_n(x)$, то многочлен делится без остатка на $x–x_1$, т.е. $P_n(x)=(x-x_1)\cdot P_{n-1}(x)$, где $P_{n-1}(x)$ – многочлен степени $(n–1)$.

Теорема 2 (основная теорема алгебры): Всякий многочлен n-ой степени ($n>0$) имеет по крайней мере один корень, действительный или комплексный.

Теорема 3: Всякий многочлен $P_n(x)$ можно представить в виде

$$P_n(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n),$$

где $x_1, x_2,\ldots,x_n$ – корни многочлена, a_0 – коэффициент многочлена при x^n.

Множители $(x-x_i)$ называются *линейными множителями.*

Пример 1: Разложить многочлен $P_3(x)=x^3-2x^2-x-2$ на множители.

Решение: Многочлен $P_3(x)=x^3-2x^2-x-2$ обращается в нуль при $x=-1,\quad x=1,\quad x=2$. Следовательно $x^3-2x^2-x-2=(x+1)(x-1)(x-2)$.

Пример 2: Представить выражение x^3-x^2+4x-4 в виде произведения линейных множителей.

Решение: Легко проверить, что $x=1$ является корнем данного многочлена.

$$x^3-x^2+4x-4 = x^2(x-1)+4(x-1)=(x-1)(x^2+4)$$

Уравнение $x^2+4=0$ имеет два комплексных корня $x_1=2i$ и $x_2=-2i$.

Следовательно, $x^3-x^2+4x-4=(x-1)(x+2i)(x-2i)$.

Если в разложении многочлена какой-либо корень встретился k раз, то он называется *корнем кратности k*. Тогда разложение многочлена можно записать в виде: $P_n(x)=a_0(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\ldots(x-x_r)^{k_r}$, где $k_1,k_2,\ldots,k_r$ – кратности соответственно корней $x_1,x_2,\ldots,x_r$.

Теорема 4: Если многочлен $P_n(x)$ с действительными коэффициентами имеет комплексный корень $a+ib$, то он имеет сопряженный корень $a-ib$.

Перемножив линейные множители,

$$(x-(a+ib))(x-(a-ib))=((x-a)-ib)((x-a)+ib)=(x-a)^2+b^2=x^2-2ax+a^2+b^2$$

получили трехчлен второй степени с действительными коэффициентами:

$(x-(a+ib))(x-(a-ib))=x^2+px+q$, где $p=-2a,\ q=a^2+b^2$.

Таким образом, произведение линейных множителей, соответствующих сопряженным корням, можно заменить квадратным трехчленом с действительными коэффициентами. Поэтому справедлива следующая теорема:

Теорема 5: Всякий многочлен *n*-ой степени с действительными коэффициентами может быть разложен на множители первой и второй степени с действительными коэффициентами:

$$P_n(x) = a_0(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2}\ldots(x - x_r)^{k_r}(x^2 + p_1x + q_1)^{s_1}\ldots(x^2 + p_mx + q_m)^{s_m}$$

где $k_1 + k_2 + \ldots + k_r + 2(s_1 + s_2 + \ldots + s_m) = n$, $x_1, x_2, \ldots, x_r$ – корни многочлена, а все квадратные трехчлены не имеют действительных корней.

Пример 3: Представить многочлен $P_n(x) = x^4 - x^3 - 5x^2 - x - 6$ в виде произведения множителей.

Решение: данный многочлен имеет корни: $x_1 = -2$ и $x_2 = 3$, других действительных корней нет. Тогда $P_n(x) = (x + 2)(x - 3)(x^2 + 1)$.

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В R^n

Необходимый теоретический материал

1. Основные определения

В математическом анализе изучаются функции, аргументом и значением которых являются действительные числа. Мы будем изучать функции, аргументом и значением которых векторы $n-$мерного линейного пространства R^n. При этом мы ограничимся простейшим типом таких функций, а именно, линейными преобразованиями или линейными операторами.

Определение 1. Пусть каждому вектору $\overline{x} \in R^n$ поставлен в соответствие единственный вектор $\overline{y} \in R^n$. Функция $\overline{y} = A(\overline{x})$ называется преобразованием или оператором из R^n в R^n. При этом вектор $\overline{x}$ называется прообразом, а $\overline{y}$ – образом оператора.

Оператор A называется *линейным*, если для любых $x_1, x_2 \in R^n$ выполняются равенства:

$$A(\overline{x}_1 + \overline{x}_2) = A\overline{x}_1 + A\overline{x}_2$$

$$A(\lambda\overline{x}_1) = \lambda A\overline{x}_1;\ \lambda \in R$$

Примеры:

1) Пусть $A\ :\ R \to R$ – оператор. Очевидно, что он линейный $\Leftrightarrow A\overline{x} = a\overline{x} \quad (a \in R, \overline{x} \in R)$

2) Оператор подобия. Пусть оператор A – линейный; $k \in R, \overline{x} \in R, A\overline{x} = k\overline{x}$

$$A(\overline{x}_1 + \overline{x}_2) = k(\overline{x}_1 + \overline{x}_2) = k\overline{x}_1 + k\overline{x}_2 = A\overline{x}_1 + A\overline{x}_2$$

$$A(\lambda\overline{x}_1) = k(\lambda\overline{x}_1) = \lambda(k\overline{x}_1) = \lambda A\overline{x}_1$$

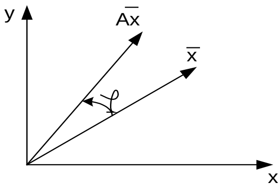
3) Оператор сдвига на вектор $\overline{x}_0$: $A\overline{x} = \overline{x} + \overline{x}_0$. Он является линейным тогда и только тогда, когда $\overline{x}_0 = 0$, т. е. $A\overline{x} = \overline{x}$.

В самом деле: $A\overline{x}_1 + A\overline{x}_0 = (\overline{x}_1 + \overline{x}_0) + (\overline{x}_0 + \overline{x}_0)$;

$$A(\overline{x}_1 + \overline{x}_2) = (\overline{x}_1 + \overline{x}_2) + \overline{x}_0 \Rightarrow \quad 2\overline{x}_0 = \overline{x}_0 = 0$$

4) Оператор поворота в R^2 на угол φ вокруг начала координат.

Этот оператор является линейным. В самом деле, $A(\overline{x}_1 + \overline{x}_2)$ означает, что векторы $\overline{x}_1$ и $\overline{x}_2$ сначала складываются, а затем их сумма поворачивается на угол φ. Сумма, означает, что векторы $\overline{x}_1$ и $\overline{x}_2$ сначала поворачиваются на угол φ, а затем складываются. Ясно, что результата один и тот же. Аналогично проверяется равенство $A(\lambda\overline{x}_1) = \lambda A\overline{x}_1$.



Определение 2. Пусть $\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n$ – базис (не обязательно ортонормированный) в R^n; A: $R^n \to R^n$ - линейный оператор, $A\overline{e}_1, ..., A\overline{e}_n$ – образы базисных векторов. Так как эти образы лежат в R^n, то их можно разложить по этому базису, т.е. записать в виде:

$$A\overline{e}_1 = a_{11}\overline{e}_1 + a_{12}\overline{e}_2 + ... + a_{n1}\overline{e}_n$$
$$A\overline{e}_2 = a_{12}\overline{e}_1 + a_{22}\overline{e}_2 + ... + a_{n2}\overline{e}_n$$
$$..$$
$$A\overline{e}_n = a_{1n}\overline{e}_1 + a_{2n}\overline{e}_2 + ... + a_{nn}\overline{e}_n$$

Образуем квадратную матрицу порядка n:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ..... & ..... & ..... & ..... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \text{(I)}$$

Эта матрица, которую будем обозначать через A, называется матрицей линейного оператора A в базисе $\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n$.

Примеры матриц операторов:

1. Матрица тождественного оператора $A\bar{x} = \bar{x}$:

$$\begin{matrix} A\bar{e}_1 = \bar{e}_1 \\ A\bar{e}_2 = \bar{e}_2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ A\bar{e}_n = \bar{e}_n \end{matrix} \Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E$$

2. Матрица оператора подобия:

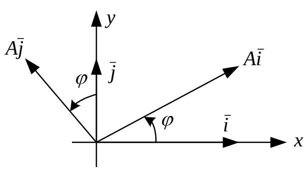
$$\begin{matrix} A\bar{e}_1 = k\bar{e}_1 \\ A\bar{e}_2 = k\bar{e}_2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ A\bar{e}_n = k\bar{e}_n \end{matrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & k \end{pmatrix} = kE$$

3. Оператор с матрицей в некотором базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n$ вида

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Называется диагональным (или простейшим). Его геометрический смысл состоит в том, что он растягивает вектор $\bar{x}$ по осям координат соответственно в $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ раз: $\bar{x} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ $A\bar{x} = \{\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, ..., \lambda_n x_n\}$

4. Матрица оператора поворота. Пусть $\bar{i}, \bar{j}$ – прямоугольная система координат в R^2. Раскладывая $A\bar{i}, A\bar{j}$ по базису $\bar{i}, \bar{j}$ получим:



$$A\bar{i} = \cos\bar{i} + \sin\varphi\bar{j}$$
$$A\bar{j} = -\sin\varphi\bar{i} + \cos\varphi\bar{j}$$
$$\Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Теорема 1. Если (I) – матрица линейного оператора A в базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n$, то для любого $\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + ... + x_n\bar{e}_n \in R$

$$A\bar{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} ... a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} ... a_{2n} \\ .... & \\ a_{n1} & a_{n2} ... a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .... \\ x_n \end{pmatrix} = A\bar{x}$$

Доказательство: Пусть $n = 2$ и A: $R^2 \to R^2$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

В базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2$. Тогда для любого $\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2$ из свойств линейности

$$A\bar{x} = A(x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2) = x_1 A\bar{e}_1 + x_2 A\bar{e}_2 = x_1(a_{11}\bar{e}_1 + a_{21}\bar{e}_2) +$$
$$+ x_2(a_{12}\bar{e}_1 + a_{22}\bar{e}_2) = (x_1 a_{11} + x_2 a_{12})\bar{e}_1 + (x_1 a_{21} + x_2 a_{22})\bar{e}_2 =$$
$$= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A\bar{x}$$

Итак, при преобразовании вектора, заданного координатами в некотором базисе, линейным оператором, матрица оператора в этим базисе умножается на вектор-столбец из координат.

Определение 3. Линейный оператор A : $R^n \to R^n$ называется самосопряженным, если в ортонормированном базисе его матрица $A = (a_{ij})$ является симметричной, т.е. $a_{ij} = a_{ji}$ для всех i, j.

Теорема 2. Если A: $R^n \to R^n$ – самосопряженный оператор, то для любых $\bar{x}, \bar{y} \in R^n$

$$(A\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}, A\bar{y})$$

Доказательство (для $n = 2$): Пусть в ортонормированном базисе $i, j \in R$ матрица оператора A симметричная, т. е.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$\overline{x} = x_1\overline{i} + x_2\overline{j}$, $\overline{y} = y_1\overline{i} + y_2\overline{j}$. Тогда

$$(A\overline{x}, \overline{y}) = \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) = \left(\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2)y_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2)y_2 =$$

$$= (a_{11}y_1 + a_{12}y_2)x_1 + (a_{21}y_1 + a_{22}y_2)x_2 =$$

$$= \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{pmatrix} \right) = (\overline{x}, A\overline{y})$$

2. Действия над линейными операторами

Суммой линейных операторов A и B в R^n называется линейный оператор $C = A + B$ такой, что для любого $\overline{x} \in R$

$$C\overline{x} = (A + B)\overline{x} = A\overline{x} + B\overline{x}$$

Нетрудно показать, что матрица оператора C в некотором базисе равна сумме матриц операторов A и B в этом базисе.

Произведением линейного оператора A *на число* $\lambda \in R$ называется линейный оператор $B = \lambda A$ такой, что для любого $\overline{x} \in R$:

$$B\overline{x} = (\lambda A)\overline{x} = \lambda(A\overline{x}).$$

Матрица оператора λA равна произведению λ на матрицу A оператора A.

Произведением линейных операторов A и B называется линейный оператор $C = A \cdot B$ такой, что для любого $\overline{x} \in R$:

$$C\overline{x} = (AB)\overline{x} = A(B\overline{x}),$$

Т. е. сначала вектор $\overline{x}$ преобразуется в вектор $\overline{y} = B\overline{x}$, а затем в вектор $\overline{z} = A\overline{y}$.

При перемножении операторов их матрицы перемножаются, поэтому в общем случае $AB \neq BA$.

Пример: Даны два линейных преобразования -

$$\begin{cases} x_1' = 5x_1 - x_2 + 3x_3 \\ x_2' = x_1 - 2x_2 \\ x_3' = 7x_2 - x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1'' = 2x_1' + x_3' \\ x_2'' = x_2' - 5x_3' \\ x_3'' = 2x_1' \end{cases}$$

Средствами матричного исчисления найти преобразование, выражающее x_1'', x_2'', x_3'' через x_1, x_2, x_3.

Решение: Перепишите каждое из преобразований в матричном виде:

$$\begin{cases} \bar{x}' = B\bar{x} \\ \bar{x}'' = A\bar{x}' \end{cases} \quad \text{Отсюда: } \bar{x}'' = A\bar{x}' = A(B\bar{x})$$

Следовательно, нужно найти матрицу произведения операторов

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 5 \\ 1 & -37 & 5 \\ 10 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Поэтому:

$$\begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 5 \\ 1 & -37 & 5 \\ 10 & -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Линейный оператор A^{-1} называется *обратным к линейному оператору* A, если $AA^{-1} = A^{-1}A = E$. Матрица оператора A^{-1} является обратной к матрице оператора A.

3. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора

Ненулевой вектор $x \in R^n$ называется собственным вектором линейного оператора A, если существует такое число λ, что выполняется равенство: $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$. Число λ называется *собственным значением* оператора A, отвечающим собственному вектору $\bar{x}$.

Множество собственных значений линейного оператора называется его спектром.

Рассмотрим матрицу оператора в некотором базисе:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a._{nn} \end{pmatrix}$$

Тогда соотношение $A\overline{x} = \lambda\overline{x}$ или ($A - \lambda\mathrm{E}$) $\overline{x} = 0$ эквивалентно следующему:

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Это есть однородная система $n-$ого порядка, всегда имеющая нулевое решение $\overline{x} = 0$. По правилу Крамера она будет иметь ненулевые решения тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю, т. е.:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (1)$$

Итак, собственные числа λ являются корнями алгебраического уравнения $n-$ого порядка (1), которое называется характеристическими уравнением, а его левая часть – характеристическим многочленом.

Заметим, что собственные значения не зависят от выбора базиса, в котором записывается матрица оператора A.

Пусть λ_0 – собственное значение, т. е. решение характеристического уравнения (1). Тогда собственный вектор $\overline{x}$, отвечающий этому собственному значению, будет решением однородной системы:

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda_0)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda_0)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn}-\lambda_0)x_n = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Так как множество решений линейной однородной системы является линейным пространством, то для нахождения собственных векторов $\overline{x}$, отвечающих собственному значению λ_0, достаточно найти базис этого пространства.

Пример: Найти собственные векторы и собственные значения линейного оператора A с матрицей

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Решение: Составим характеристическое уравнение (1):

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 8 & 9-\lambda \end{vmatrix}=0 \quad \text{или} \quad \lambda^2-14\lambda=13=0$$

Собственные значения: $\lambda_1=1;\ \lambda_2=13$. Для $\lambda_1=1$ составим систему (2):

$$\begin{cases} 4x_1+4x_2=0 \\ 8x_1+8x_2=0 \end{cases} \sim \quad x_1+x_2=0 \Rightarrow x_1=-x_2 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1=t \\ x_2=-t \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$ – одномерное линейное пространство собственных векторов с базисом $\overline{a}_1=\{1;-1\}$.

Для $\lambda_2=13$

$$\begin{cases} -8x_1+4x_2=0 \\ 8x_1-4x_2=0 \end{cases} \sim \quad 2x_1-x_2=0 \Rightarrow 2x_1=x_2 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1=t \\ x_2=2t \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$ – одномерное линейное пространство

собственных векторов с базисом $\overline{a}_2=\{1;2\}$.

Отметим, что векторы $\overline{a}_1, \overline{a}_2$ в R^2 образуют базис$\left(\overline{a}_1\right.$ не параллельно $\left.\overline{a}_2\right)$. Так как $A\overline{a}_1=1\cdot\overline{a}_1,\ A\overline{a}_2=13\overline{a}_2$, то матрица линейного оператора в том базисе будет диагональной:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 13 \end{pmatrix}$$

Теорема 1. Линейный оператор A в R^n приводится к диагональному виду тогда и только тогда, тогда его собственные векторы образуют базис в R^n.

Доказательство: Необходимость($\Rightarrow$). Пусть в базисе $\overline{e}_1,......,\overline{e}_n$ матрица оператора A диагональная:

$$A=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Тогда $A\overline{e}_1 = \lambda_1\overline{e}_1$, $A\overline{e}_2 = \lambda_2\overline{e}_2$,…., $A\overline{e}_n = \lambda_n\overline{e}_n$, т. е. базис $\overline{e}_1,.....,\overline{e}_n$ состоит из собственных векторов, отвечающих собственным значениям $\lambda_1,\lambda_2,....,\lambda_n$.

Достаточность $(\Leftarrow)$. Пусть $\overline{e}_1,\overline{e}_2,....,\overline{e}_n$ базис из собственных векторов, отвечающих собственным значениям $\lambda_1,\lambda_2,....,\lambda_n$. Тогда $A\overline{e}_1 = \lambda_1\overline{e}_1$,…., $A\overline{e}_n = \lambda_n\overline{e}_n$, и

$$A=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Отметим, что не всякий линейный оператор приводится к диагональному виду, т.к. не всякий линейный оператор имеет хотя бы один собственный вектор. Примером такого оператора является оператор поворота в R^2 на угол $0<\varphi<\pi$. Действительно, геометрически существование собственного вектора означает, что существует вектор, который растягивается оператором в λ раз, а оператор поворота все векторы не растягивает, а поворачивает.

Укажем достаточное условие приводимости оператора к диагональному виду.

Теорема 2. Если линейный оператор A в R^n имеет n различных собственных значений, то собственные векторы, отвечающие им, образуют базис в R^n, а матрица оператора в этом базисе диагональная.

*Доказательство (*для $n=2$*).* Пусть $\lambda_1 \neq \lambda_2$ – собственные значения, а $\overline{e}_1,\overline{e}_2$ – собственные векторы оператора A в R^2. Покажем, что эти векторы линейны независимы. Пусть $c_1\overline{e}_1 + c_2\overline{e}_2 = \overline{0} \Rightarrow$ $\overline{0} = A(c_1\overline{e}_1 + c_2\overline{e}_2) = c_1A\overline{e}_1 + c_2A\overline{e}_2$ и $c_1A\overline{e}_1 + c_2A\overline{e}_2 = \lambda_1c_1\overline{e}_1 + \lambda_2c_2\overline{e}_2 = (\lambda_1-\lambda_2)c_1\overline{e}_1$

Отсюда

$$(\lambda_1 - \lambda_2)c_1\bar{e}_1 = 0 \qquad (\lambda_1 \neq \lambda_2)$$

Значит, $c_1 = 0$. Аналогично, $c_2 = 0$. Теорема доказана.

Теорема 3. Для любого самосопряженного оператора A в R^n существует ортонормированный базис из собственных векторов, в котором его матрица является диагональной.

Доказательство в общем случае является очень сложным. Проведем его для $n = 2$, т. е. для оператора в R^2, матрица которого в ортонормированном базисе $\bar{i}, \bar{j}$ имеет вид:

$$\text{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad A = A^T, \ a_{12} \neq 0$$

– иначе оператор уже диагональный.

Оператор A имеет два различных собственных значения:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a^2{}_{12}) = 0.$$

Дискриминант:

$$D = (a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a^2{}_{12}) = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a^2{}_{12} > 0,$$

Следовательно, корни различные и действительные.

Собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны:

$$A\bar{e}_1 = \lambda_1\bar{e}_1, \quad A\bar{e}_2 = \lambda_2\bar{e}_2$$

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)(\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2) = \lambda_1(\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2) - \lambda_2(\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2) = (\lambda_1\bar{e}_1) \cdot \bar{e}_2 - \bar{e}_1(\lambda_2\bar{e}_2)$$

$$= (A\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2) - (\bar{e}_1 \cdot A\bar{e}_2) = \bar{0} \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) \cdot (\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2) = 0 \Rightarrow \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2 = 0$$

Значит $\bar{e}_1 \perp \bar{e}_2$. Из теоремы 2 и доказанных фактов вытекают все утверждения теоремы 3 для $n = 2$.

4. Квадратичные формы

Квадратичной формой от n переменных $x_1,......,x_n$ называется однородный многочлен 2-ой степени относительно этих переменных, т. е., например, при $n=3$

$$f(x_1,x_2,x_3)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}a_{ij}x_ix_j=a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+a_{13}x_1x_3+a_{21}x_1x_2+a_{22}x_2^2+ \qquad (1)$$

$$+a_{23}x_2x_3+a_{31}x_3x_1+a_{32}x_3x_2+a_{33}x_3^2=X^TAX\ ,$$

где

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\qquad X^T=(x_1,x_2,x_3),\qquad A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}.$$

Здесь приведены три различные формы записи квадратичной формы. Например, квадратичную форму:

$$f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2-3x_2^2+3x_1x_3+2x_1x_2$$

Можно представить в следующих видах:

$$f(x_1,x_2,x_3)=3x^2+x_1x_2+\frac{3}{2}x_1x_3+x_2x_1-3x_2^2+0\cdot x_2x_3+\frac{3}{2}x_3x_1+0\cdot x_3x_2+$$

$$+0\cdot x_3^2=(x_1x_2x_3)\begin{pmatrix}3&1&\frac{3}{2}\\1&-3&0\\\frac{3}{2}&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

Квадратичная форма от переменных $x_1,x_2,...,x_n$ будет вполне определена, если заданы ее коэффициенты a_{ij}, которые составляют матрицу AМатрица A называется матрицей квадратичной формы. Она всегда является симметричной. Переменные $x_1,x_2,...,x_n$ могут быть выражены через другие переменные $y_1,y_2,...,y_n$. Тогда первый набор называется старыми, а второй – новыми переменными. Если эти наборы связаны формулами:

$$\begin{cases} x_1 = q_{11}y_1 + \ldots + q_{1n}y_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = q_{n1}y_1 + \ldots + q_{nn}y_n \end{cases}, \tag{2}$$

то будем говорить, что задано линейное преобразование переменных с матрицей

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11}\ldots\ldots q_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_{n1}\ldots\ldots q_{nn} \end{pmatrix} \tag{3}$$

Преобразования, для которых $|Q| \neq 0$, называется невырожденным. Известно, что квадратичная форма от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с матрицей $A = (a_{ij})$ при линейном преобразовании (2) с матрицей Q преобразуется в квадратичную форму от новых переменных $y_1, y_2, \ldots, y_n$ с матрицей $B = (b_{ij})$, где $B = Q^T AQ$

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = q(y_1, y_2, \ldots, y_n) = Y^T BY \tag{4}$$

Ранг матрицы A называется рангом квадратичной формы и при невырожденном преобразовании (2) он не меняется.

Пример1: Дана квадратичная форма

$$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 5x_2^2 - 7x_3^2 + 3x_1x_2 - x_1x_3$$

И линейное преобразование неизвестных

$$x_1 = y_1 - y_2 + y_3; \qquad x_2 = y_1 - 3y_3; \qquad x_3 = y_1 - 2y_2 + y_3.$$

Найти вид квадратичной формы после этого преобразования.

Решение:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 5 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -7 \end{pmatrix}; \qquad Q=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Следовательно,

$$B=Q^T AQ=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 5 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 3 & 11 & -23 \\ 11 & 27 & 17 \\ -23 & 17 & 31 \end{pmatrix}$$

Таким образом, новая квадратичная форма имеет вид:

$$f(x_1,x_2,x_3)=q(y_1,y_2,y_3)=3y_1^2+22y_1y_2-46y_1y_3+27y_2^2+34y_2y_3+31y_3^2$$

Если квадратичная форма такова, что все $a_{ij}=0$ при $i\neq j$, то она называется квадратичной формой канонического вида. Очевидно, что матрица квадратичной формы является диагональной; будем квадратичную форму канонического вида записывать так:

$$f(x_1,...,x_n)=\lambda_1 x_1^2+...+\lambda_r x_r^2, \quad \lambda_i\neq 0 \quad (i=1,...,r),$$

где r – ранг квадратичной формы; $r\leq n$.

Теорема 1. Пусть $f(x_1,...,x_n)$ – произвольная квадратичная форма от n переменных. Тогда найдется такое линейное невырожденное преобразование переменных, которое эту форму приведет к каноническому виду.

Сформулируем правило приведения квадратичной формы к каноническому виду. Рассмотри два возможных случая.

1) Существует хотя бы одно $a_{ii} \neq 0$. Пусть, например, $a_{11} \neq 0$. Выделим в квадратичной форме группу членов, содержащих x_1 и дополним ее до полного квадрата, тогда получим:

$$f(x_1,...,x_n) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + ... + 2a_{1n-1}x_1x_{n-1} + 2a_{1n}x_1x_n + q(x_2,...,x_n) =$$
$$= \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n)^2 + \tilde{q}(x_2,...,x_n)$$

Здесь $\tilde{q}(x_2,...,x_n)$ есть квадратичная форма, полученная в результате приведения подобных членов из $q(x_2,...,x_n)$ и членов, появившихся в результате выделения полного квадрата; $\tilde{q}(x_2,...,x_n)$ уже не зависит от x_1. Можно применить линейное преобразование: $x_2 = y_2;...;x_n = y_n;\ a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = y_1$,

Получим: $f(x_1,...,x_n) = a_{11}^{-1}y_1^2 + \tilde{q}(y_2,...,y_n)$.

Если при этом квадратичная форма содержит хотя бы один квадрат, с ней поступают аналогично; в итоге получим сумму квадратов (канонический вид). Каждому выделению полного квадрата будет соответствовать невырожденное линейное преобразование переменных. Произведение всех этих преобразований, приводящим данную квадратичную форму к каноническому виду.

2) Пусть теперь все $a_{ii} = 0$; значит хотя бы один из $a_{ij} \neq 0$ при $i \neq j$. Пусть $a_{12} \neq 0$. Тогда нужно сделать преобразование переменных $x_1 = y_1 - y_2$; $x_2 = y_1 + y_2$; $x_3 = y_3;...;x_n = y_n$, в результате которого получим квадратичную форму, содержащую квадрат переменного, т.е. первый случай.

Пример 2. Привести квадратичную форму к каноническому виду $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3$.

Решение: Группу выделенных членов можно записать в виде:

$$x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 = (x_1 - 2x_2 + 2x_3) - 4_2^2 - 4x_3^2 + 8x_2x_3$$

Подставляя их в данную квадратичную форму и приводя подобные слагаемые, получаем

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-2x_2+2x_3)^2-4x_2^2-4x_3^2+8x_2x_3-2x_2^2-2x_3^2+8x_2x_3=$$
$$=(x_1-2x_2+2x_3)^2-6x_2^2-6x_3^2+16x_2x_3$$

Теперь рассмотрим группу членов $-6x_2^2-6x_3^2+16x_2x_3$

Проведем в ней выкладки, аналогичные выше приведенным, т. е.

$$-6x_2^2-6x_3^2+16x_2x_3=-6\left[(x_2-\frac{4}{3}x_3)^2-\frac{16}{9}x_3^2\right]-6x_3^2=$$
$$=-6(x_2-\frac{4}{3}x_3)^2+\frac{14}{3}x_3^2$$

Таким образом, данную квадратичную форму можно записать в виде:

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-2x_2+2x_3)^2-6(x_2-\frac{4}{3}x_3)^2+\frac{14}{3}x_3^2$$

Введем новые переменные:

$$y_1=x_1-2x_2+2x_3;\ y_2=x_2-\frac{4}{3}x_3;\ y_3=x_3 \quad \text{или}$$

$$x_1=y_1+2y_2+\frac{2}{3}y_3;\ x_2=y_2+\frac{4}{3}y_3;\ x_3=y_3$$

Последние равенства задают линейное преобразование переменных, которое приводит данную квадратичную форму к каноническому виду:

$$f(x_1,x_2,x_3)=g(y_1,y_2,y_3)=y_1^2-6y_2^2+\frac{14}{3}y_3^2.$$

Теперь будем рассматривать только действительные квадратичные формы. Действительное линейное *преобразование* неизвестных (2) *называется ортогональным*, если оно сумму квадратов неизвестных $x_1,...,x_n$ переводит в сумму квадратов $y_1,y_2,...,y_n$. Матрица $Q=(q_{ij})$ этого преобразования называется ортогональной.

Для приведения действительной квадратичной формы к каноническому виду можно использовать утверждения:

Теорема 2. Всякая действительная квадратичная форма $f(x_1,..,x_n)$ некоторым ортогональным преобразованием неизвестных может быть приведена к каноническому виду.

Теорема 3. Каково бы ни было ортогональное преобразование неизвестных, приводящее к каноническому виду квадратичную форму $f(x_1,..,x_n)$ с матрицей A, коэффициентами этого канонического вида являются характеристические корни матрицы A, взятые с их кратностями.

Таким образом, чтобы записать канонический вид квадратичной формы $f(x_1,..,x_n)$ с матрицей A, к которому она приводится посредством ортогонального преобразования неизвестных, согласно теореме 2 достаточно найти корни многочлена $|A-\lambda E|=0$

Если

$|A-\lambda E|=(-1)^n(\lambda-\lambda_1)^{k1}....(\lambda-\lambda\varsigma)^{k\varsigma} \quad (\lambda_i \neq \lambda_j) \quad при \quad i \neq j)$, то ее канонический вид с точностью до нумерации неизвестных следующий:

$$\lambda_1(y_1^2+....+y_{k1}^2)+...+\lambda_\varsigma(y_{n-k_\varsigma+1}^2+....+y_n^2)$$

Пример 3: Найти канонический вид, к которому приводится квадратичная форма $-3x_2^2+4x_1x_2+10x_1x_3-4x_2x_3$ посредствам ортогонального преобразования неизвестных, не находя этого преобразования.

$$Решение.\ A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 2 & -3 & -2 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

ее характеристический многочлен

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 5 \\ 2 & -3-\lambda & -2 \\ 5 & -2 & -\lambda \end{vmatrix}=-\lambda^3-3\lambda^2+33\lambda+35$$

имеет корни: $\lambda_1=5; \quad \lambda_2=-1; \quad \lambda_3=-7$. Тогда запишем канонический вид квадратичной формы: $5y_1^2-y_2^2-7y_3^2$.

Чтобы найти матрицу Q – матрицу искомого ортогонального преобразования, необходимо относительно $x_1, x_2, ..., x_n$ решить систему для каждого корня λ_i:

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda_i)x_1 + ... + a_{n1}x_n = 0 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + ... + (a_{nn}-\lambda_i)x_n = 0 \end{cases} \qquad (5)$$

Получим систему решений, подвергнем ее процессу ортогонализации и нормирования, получим систему координатных строк, которые составляют матрицу Q^T, по ней находим Q.

Пример 4: Для квадратичной формы $-3x_2^2 + 4x_1x_2 + 10x_1x_3 - 4x_2x_3$ найти ортогональное преобразование, приводящее ее каноническому виду.

Решение: Канонический вид этой формы найден выше; собственные значения имеют вид: $\lambda_1 = 5; \quad \lambda_2 = -1; \quad \lambda_3 = -7$.

Составляем систему (5):

$$1)\ \lambda_1 = 5 \Rightarrow \begin{cases} -5x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0 \\ 2x_1 - 8x_2 - 2x_3 = 0 \\ 5x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases} \approx$$

$$\approx \begin{cases} 2x_1 - 8x_2 - 3x_3 = 0 \\ 5x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x_1 = x_3 = t, \quad x_2 = 0$$

Т. е. получился вектор $\bar{e}_1 = t\{1,0,1\}, \quad t \in R$.

$$2)\ \lambda_2 = -1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = -t; x_2 = -2t; x_3 = t$$

Т. е. получился вектор $\bar{e}_2 = t\{-1,-2,1\}, \quad t \in R$.

$$3)\ \lambda_3 = -7 \Rightarrow \begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0 \\ 5x_1 - 2x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = -t; x_2 = t; x_3 = t$$

Т. е. получился вектор $\bar{e}_3 = t\{-1,1,1\}, \quad t \in R$.

Векторы $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ взаимно ортогональны при любых t. Нормируем эти векторы при $t = 1$: $\quad \bar{e}_i' = \bar{e}_i / |\bar{e}_i|$

$$\bar{e}_1' = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}};0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}; \quad \bar{e}_2' = \left\{-\frac{1}{\sqrt{6}};-\frac{2}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}; \quad \bar{e}_3' = \left\{-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$$

Следовательно,

$$Q^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Тогда

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Искомое преобразование неизвестных имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 - \frac{1}{\sqrt{6}} y_2 - \frac{1}{\sqrt{3}} y_3 \\ x_2 = \qquad\qquad -\frac{1}{\sqrt{6}} y_2 + \frac{1}{\sqrt{3}} y_3 \\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{6}} y_2 + \frac{1}{\sqrt{6}} y_3 \end{cases}$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. [Текст] / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова, С. П. Данко. – М.: ООО «Издательство Оникс»: ООО «Издательство «Мир и Образование», 2008. – Ч.1. – 304 с., Ч.2. – 416 с.

2. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике [Текст] / Д. Т. Письменный. – М.: Айрис-пресс, 2007. – 606 с.

3. Лунгу, К. Н. Сборник задач по высшей математике. 1 курс [Текст] / К. Н. Лунгу, Д. Т. Письменный, С. Н. Федин, Ю. А. Шевченко – М.: Айрис-пресс, 2008. – 576 с.

Учебное издание

Малова Ирина Юрьевна
Куляхтина Ольга Евгеньевна
Косовская Надежда Юрьевна
Федорова Евгения Владимировна

Алгебра и геометрия

Редактор и корректор А. А. Чернышева
Техн. редактор Д. А. Романова Темплан 2022 г., поз.5061/22

Подписано к печати 06.04.2022. Формат 60х84/16. Бумага тип № 1.
Печать офсетная. Печ.л. 4,2. Уч.-изд. л. 4,2.
Тираж 50 экз. Изд. № 5061/22. Цена «С». Заказ №

Ризограф Высшей школы технологии и энергетики СПбГУПТД,

198095, Санкт-Петербург, ул. Ивана Черных, 4.