МАТЕМАТИКА
Задачник

Методические указания по решению задач
и выполнению контрольных заданий

Санкт-Петербург
2020

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

**«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПРОМЫШЛЕННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ДИЗАЙНА»**

ВЫСШАЯ ШКОЛА ТЕХНОЛОГИИ И ЭНЕРГЕТИКИ

Кафедра высшей математики

МАТЕМАТИКА
Задачник

**Методические указания по решению задач
и выполнению контрольных заданий**

**Направления:
38.03.02 «Менеджмент»
54.03.01 «Дизайн»**

**Санкт-Петербург
2020**

УДК 510 (075.8)

Математика. Задачник: методические указания по решению задач и выполнению контрольных заданий. / сост.: И. Ю. Малова, О. Е. Куляхтина, Н. Ю. Косовская; ВШТЭ СПбГУПТД.-СПб.,2020.-76 с.

Приведены типовые задачи и варианты контрольных работ по всем темам годичного курса высшей математики. Для каждой темы подробно разобраны аналогичные задания и дан необходимый теоретический материал.

Предназначены для студентов очной формы обучения направлений 38.03.02 «Менеджмент» и 54.03.01 «Дизайн».

Рецензент: ведущий научный сотрудник Малов С. В., Центр геномной биоинформатики им.Ф. Добржанского.

Подготовлены и рекомендованы к печати кафедрой высшей математики ВШТЭ (протокол № 6 от 2 февраля 2020 г.)

Утверждены к изданию методической комиссией института теплоэнергетики и автоматизации ВШТЭ СПбГУПТД (протокол № 5 от 12 апреля 2020 г.)

Введение

Настоящий задачник предназначен для студентов очной формы обучения направлений 38.03.02 «Менеджмент» и 54.03.01 «Дизайн». В учебном плане этих направлений стоит годовой курс математики, а не двухгодичный, как для остальных направлений. Для направления 38.03.02 в первом семестре дисциплины «Математика» рассматриваются темы: элементы линейной алгебры, векторная алгебра, аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве, теория пределов и дифференциальное исчисление функций одной переменной. Во втором семестре – интегральное исчисление и элементы теории вероятностей. В задачнике подробно разобраны задачи по всем указанным темам, приведены задачи для самостоятельного решения и предложены по 10 вариантов каждой из расчетно-графической и контрольных работ. Для направления 54.03.01 в рабочий план включаются дисциплины «Прикладная математика» и «Элементы математического анализа и теории вероятности в промышленном дизайне». В практические занятия этих дисциплин включаются вышеуказанные темы и данные методические указания подходят для работы студентов этого направления. Также задачник может быть использован преподавателями вузов для подготовки практических занятий.

Элементы линейной алгебры

Матрица A размера $n \times m$ – это прямоугольная таблица из n строк и m столбцов, состоящая из чисел a_{ij} (или иных математических выражений) для $i = 1,2,\dots,n; j = 1,2,\dots,m$. Часто записывается в виде $A = \left(a_{ij}\right)$. Матрица размера $n \times n$ называется квадратной матрицей n-го порядка.

Сумма матриц A и B одинакового размера – это матрица того же размера с элементами $\left(a_{ij}\right) + \left(b_{ij}\right) = \left(a_{ij} + b_{ij}\right)$.

Умножение матрицы A *на число* k – это матрица того же размера с элементами $k \cdot \left(a_{ij}\right) = \left(k \cdot a_{ij}\right)$.

Произведением матриц A размера $n \times m$ и B размера $m \times k$ называется матрица C размера $n \times k$ (обозначается $A \cdot B$) такая, что

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^{m} a_{is} \cdot b_{sj}\text{, для всех } i = 1,2,\dots,n;\ j = 1,2,\dots,k.$$

Матрица, у которой все строки равны соответствующим столбцам матрицы A, называется матрицей, *транспонированной* к A, и обозначается A^T, т.е. $a_{ij}^T = a_{ji}$.

Единичной матрицей (обозначается E) называется квадратная матрица, у которой на главной диагонали стоят единички, а остальные элементы равны нулю.

Матрица (обозначается A^{-1}) называется *обратной* к квадратной матрице A, если $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$ ($\det A \neq 0$).

Любой квадратной матрице A можно сопоставить некое число (или математическое выражение, если элементы матрицы – не только числа), которое называется *определителем* матрицы A и обозначается $\det A$ или $|A|$. Определитель матрицы 2-го порядка равен разности произведения элементов матрицы на главной диагонали и произведения элементов на второстепенной диагонали: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Определитель матрицы 3-го порядка равен следующему выражению:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Определитель любого порядка можно вычислить *по формуле разложения по строке* (или по столбцу), которая сводит вычисление определителя n-го порядка к вычислению n штук определителей порядка $n-1$. Например, определитель третьего порядка раскладывается по первой строке следующим образом:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

А вот так раскладывается по первой строке определитель четвертого порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} +$$

$$+a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}.$$

Т.е. мы умножаем элементы первой строки на определители меньшего порядка, получаемые из исходной матрицы вычеркиванием строки и столбца, соответствующего элементу, но берем их, чередуя знаки.

Алгебраическим дополнением A_{ij} к элементу a_{ij} квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ назовем произведение $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$, где *минор* M_{ij} – это определитель матрицы, составленной из элементов A, оставшихся после вычеркивания i-той строки и j-го столбца. Тогда разложение определителя по i-той строке или k-му столбцу можно записать формулой:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \cdot A_{kj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{ik}.$$

Очевидно, что предпочтительней выбирать ту строку или столбец, где больше всего нулей, тем самым уменьшая количество вычислений.

С помощью алгебраических дополнений можно вычислить обратную матрицу по формуле $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \left(A_{ij}\right)^{T}$.

Элементарными преобразованиями матрицы называются следующие действия:

1. Перемена мест двух строк (столбцов).
2. Умножение строки (столбца) на число, отличное от нуля.
3. Прибавление к элементам одной строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца).

Матрица B, полученная из матрицы A с помощью элементарных преобразований, называется *эквивалентной* матрице A, обозначается $A \sim B$.

Минором k–го порядка произвольной матрицы A называется определитель, составленный из элементов матрицы, расположенных на пересечении каких-либо k строк и k столбцов. *Рангом* матрицы A называется наибольший из порядков ее миноров, не равных нулю, обозначается $r(A)$. В задачах мы часто будем пользоваться тем, что при элементарных преобразованиях ранг матрицы не меняется и ранг ступенчатой матрицы равен количеству ее ненулевых строк.

Система линейных уравнений называется *совместной*, если имеет хотя бы одно решение. Система, не имеющая ни одного решения, называется *несовместной*. Система называется *определенной*, если она имеет единственное решение, и *неопределенной*, если она имеет более одного решения. По теореме Кронекера-Капелли:

1) $r(A) < r(A|B) \Leftrightarrow$ система несовместная;

2) $r(A) = r(A|B) = n \Leftrightarrow$ система совместная и определенная;

3) $r(A) = r(A|B) < n \Leftrightarrow$ система совместная и неопределенная.

Решения типовых задач линейной алгебры

1. Найти матрицу $7A-5B$, если $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\ 3 & 5 & -1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3 & 1 & -3\\ 5 & 4 & 2\end{pmatrix}$.

Решение:

$$7A=\begin{pmatrix}7\cdot 2 & 7\cdot 1 & 7\cdot 4\\ 7\cdot 3 & 7\cdot 5 & 7\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14 & 7 & 28\\ 21 & 35 & -7\end{pmatrix};$$

$$5B=\begin{pmatrix}5\cdot 3 & 5\cdot 1 & 5\cdot(-3)\\ 5\cdot 5 & 5\cdot 4 & 5\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15 & 5 & -15\\ 25 & 20 & 10\end{pmatrix};$$

$$7A-5B=\begin{pmatrix}14 & 7 & 28\\ 21 & 35 & -7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}15 & 5 & -15\\ 25 & 20 & 10\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}14-15 & 7-5 & 28-(-15)\\ 21-25 & 35-20 & -7-10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 43\\ -4 & 15 & -17\end{pmatrix}.$$

Ответ: $7A-5B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 43\\ -4 & 15 & -17\end{pmatrix}$.

2. Найти произведение матриц AB, если

$$A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 1 & 4\\ 1 & 5 & 2 & -1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}6 & -3 & 5\\ 7 & 2 & 1\\ 3 & -5 & 2\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}.$$

Решение:

Так как матрица A размера 2×4, а матрица B размера 4×3, то умножение матриц возможно и его результатом будет матрица размера 2×3. Приведем вычисления элементов матрицы $C=A\cdot B$:

$c_{11}=2\cdot 6+(-3)\cdot 7+1\cdot 3+4\cdot 1=-2;$

$c_{12}=2\cdot(-3)+(-3)\cdot 2+1\cdot(-5)+4\cdot 0=-17;$

$c_{13}=2\cdot 5+(-3)\cdot 1+1\cdot 2+4\cdot 3=21;$

$c_{21}=1\cdot 6+5\cdot 7+2\cdot 3+(-1)\cdot 1=46;$

$c_{22}=1\cdot(-3)+5\cdot 2+2\cdot(-5)+(-1)\cdot 0=-3;$

$c_{23}=1\cdot 5+5\cdot 1+2\cdot 2+(-1)\cdot 3=11.$

Ответ: $AB=\begin{pmatrix}-2 & -17 & 21\\ 46 & -3 & 11\end{pmatrix}$.

3. Для матриц $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 4\\ 2 & 5 & 3\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}0 & 6 & -3\\ 1 & 2 & 1\\ 5 & -1 & 3\end{pmatrix}$ вычислить матричный многочлен $A^2-BA+3A$.

Решение:

Вычислим каждое слагаемое:

$$A^2=\begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}1 & 0 & 4\end{matrix}}\\ \boxed{\begin{matrix}2 & 5 & 3\end{matrix}}\\ \boxed{\begin{matrix}1 & -1 & 2\end{matrix}}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}1\\2\\1\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}0\\5\\-1\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}4\\3\\2\end{matrix}}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot1+0\cdot2+4\cdot1 & 1\cdot0+0\cdot5+4\cdot(-1) & 1\cdot4+0\cdot3+4\cdot2\\ 2\cdot1+5\cdot2+3\cdot1 & 2\cdot0+5\cdot5+3\cdot(-1) & 2\cdot4+5\cdot3+3\cdot2\\ 1\cdot1-1\cdot2+2\cdot1 & 1\cdot0-1\cdot5+2\cdot(-1) & 1\cdot4-1\cdot3+2\cdot2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}5 & -4 & 12\\ 15 & 22 & 29\\ 1 & -7 & 5\end{pmatrix};$$

$$BA=\begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}0 & 6 & -3\end{matrix}}\\ \boxed{\begin{matrix}1 & 2 & 1\end{matrix}}\\ \boxed{\begin{matrix}5 & -1 & 3\end{matrix}}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}1\\2\\1\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}0\\5\\-1\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}4\\3\\2\end{matrix}}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0\cdot1+6\cdot2-3\cdot1 & 0\cdot0+6\cdot5-3\cdot(-1) & 0\cdot4+6\cdot3-3\cdot2\\ 1\cdot1+2\cdot2+1\cdot1 & 1\cdot0+2\cdot5+1\cdot(-1) & 1\cdot4+2\cdot3+1\cdot2\\ 5\cdot1-1\cdot2+3\cdot1 & 5\cdot0-1\cdot5+3\cdot(-1) & 5\cdot4-1\cdot3+3\cdot2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}9 & 33 & 12\\ 6 & 9 & 12\\ 6 & -8 & 23\end{pmatrix};$$

$$3A=3\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 4\\ 2 & 5 & 3\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0 & 12\\ 6 & 15 & 9\\ 3 & -3 & 6\end{pmatrix}.$$

Итого:

$$A^2-BA+3A=\begin{pmatrix}5 & -4 & 12\\ 15 & 22 & 29\\ 1 & -7 & 5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}9 & 33 & 12\\ 6 & 9 & 12\\ 6 & -8 & 23\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 0 & 12\\ 6 & 15 & 9\\ 3 & -3 & 6\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}5-9+3 & -4-33+0 & 12-12+12\\ 15-6+6 & 22-9+15 & 29-12+9\\ 1-6+3 & -7+8-3 & 5-23+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -37 & 12\\ 15 & 28 & 26\\ -2 & -2 & -12\end{pmatrix}.$$

Ответ: $A^2 - BA + 3A = \begin{pmatrix} -1 & -37 & 12 \\ 15 & 28 & 26 \\ -2 & -2 & -12 \end{pmatrix}$.

4. Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 7 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение: Очевидно, что ранг не больше 4, так как ранг не может быть большим, чем число строк и число столбцов, и что ранг не меньше 2, так как первый же минор не равен нулю: $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1$. Приведем матрицу к треугольному виду при помощи элементарных преобразований :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 7 & 1 \end{pmatrix} \underset{\sim}{II-4I} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 7 & 1 \end{pmatrix} \underset{\sim}{IV-3I} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & 7 & -8 \end{pmatrix} \sim$$

$$\underset{\sim}{II\leftrightarrow III} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 2 & -7 \\ 0 & 4 & -1 & 7 & -8 \end{pmatrix} \underset{\sim}{III-II} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & -7 \\ 0 & 4 & -1 & 7 & -8 \end{pmatrix} \underset{\sim}{IV-4II}$$

$$\underset{\sim}{IV-4II} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -16 \end{pmatrix} \underset{\sim}{II\leftrightarrow -III} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 16 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & -7 \end{pmatrix} \underset{\sim}{IV+5III}$$

$$\underset{\sim}{IV+5III} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 73 \end{pmatrix}.$$

У полученной матрицы ранг равен 4, так как минор из первых четырех столбцов не равен нулю (он равен произведению диагональных элементов, т.е. пяти). Значит, и у исходной, эквивалентной ей, матрицы ранг равен 4.

Ответ: $\mathrm{r}(A) = 4$.

5. Найти матрицу, обратную матрице $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение:

Найдем обратную матрицу через союзную матрицу по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T,$$

Определитель матрицы

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 5 \cdot 4 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot 1 - 3 \cdot 4 \cdot 3 - (-1) \cdot 2 \cdot 2 - 5 \cdot 1 \cdot 1 =$$

$$= 40 - 3 + 6 - 36 + 4 - 5 = 6 \neq 0,$$

а алгебраические дополнения к элементам матрицы находятся следующим образом:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -10;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -8;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -13;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 22.$$

Тогда

$$A^{-1}=\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix}7 & -1 & -10\\ 5 & 1 & -8\\ -13 & 1 & 22\end{pmatrix}^T=\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix}7 & 5 & -13\\ -1 & 1 & 1\\ -10 & -8 & 22\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{7}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{13}{6}\\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6}\\ -\frac{10}{6} & -\frac{8}{6} & \frac{22}{6}\end{pmatrix}.$$

А теперь найдем обратную матрицу другим способом – методом Гаусса. Для этого необходимо элементарными преобразованиями над строками перевести матрицу A к единичной, тогда приписанная справа единичная матрица перейдет в A^{-1}: $(A|E)\sim(E|A^{-1})$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}5 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\overset{I-2II}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -9 & 1 & 1 & -2 & 0\\ 2 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\overset{II-2I}{\sim}$$

$$\overset{II-2I}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -9 & 1 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 22 & -1 & -2 & 5 & 0\\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\overset{III-3I}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -9 & 1 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 22 & -1 & -2 & 5 & 0\\ 0 & 28 & -1 & -3 & 6 & 1\end{array}\right)\overset{III-II}{\sim}$$

$$\overset{III-II}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -9 & 1 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 22 & -1 & -2 & 5 & 0\\ 0 & 6 & 0 & -1 & 1 & 1\end{array}\right)\overset{\frac{1}{6}III}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -9 & 1 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 22 & -1 & -2 & 5 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6}\end{array}\right)\overset{III\leftrightarrow II}{\sim}$$

$$\overset{III\leftrightarrow II}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -9 & 1 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6}\\ 0 & 22 & -1 & -2 & 5 & 0\end{array}\right)\overset{III-22II}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -9 & 1 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6}\\ 0 & 0 & -1 & \frac{10}{6} & \frac{8}{6} & -\frac{22}{6}\end{array}\right)\overset{-III}{\sim}$$

$$\overset{-III}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -9 & 1 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6}\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{10}{6} & -\frac{8}{6} & \frac{22}{6}\end{array}\right)\overset{I+9II}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 1 & -\frac{3}{6} & -\frac{3}{6} & \frac{9}{6}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6}\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{10}{6} & -\frac{8}{6} & \frac{22}{6}\end{array}\right)\overset{I-III}{\sim}$$

$$\overset{I-III}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & \frac{7}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{13}{6}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6}\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{10}{6} & -\frac{8}{6} & \frac{22}{6}\end{array}\right).$$

Разумеется, и этим способом мы получили тот же ответ.

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{13}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{10}{6} & -\frac{8}{6} & \frac{22}{6} \end{pmatrix}$.

6. Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 6x_3 = 1, \\ 4x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 9. \end{cases}$$

Решение:

Вычислим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 4 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 168 + 10 - 48 + 42 - 160 - 12 = 0.$$

Так как $\Delta = 0$, то метод Крамера не применить. Применим метод Гаусса, т.е. приведем расширенную матрицу к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований над строками:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -6 & 1 \\ 4 & 7 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 8 & 9 \end{array}\right) \overset{II-I}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 8 & 9 \end{array}\right) \overset{III-II}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right).$$

Ранг расширенной матрицы больше ранга матрицы системы. Следовательно, система несовместная, т.е. не имеет ни одного решения. Это очевидно, если переписать последнюю строку в виде уравнения: 0=7.

Ответ: система не имеет решений.

7. Решить методом Гаусса систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5, \\ -3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -7, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_2 = 2. \end{cases}$$

Решение:

Вычислим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -3 & -5 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 20 + 9 + 6 - 5 - 18 - 12 = 0.$$

Так как $\Delta = 0$, то метод Крамера не применить. Применим метод Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ -3 & -5 & 3 & -7 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \overset{I\leftrightarrow III}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 \\ -3 & -5 & 3 & -7 \\ 2 & 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} \overset{II+3I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} \overset{III-2I}{\sim}$$

$$\overset{III-2I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \overset{III-II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{III+II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ранг расширенной матрицы равен рангу матрицы системы $r(A) = r(A|B) = 2$, но меньше числа неизвестных $n = 3$. Следовательно, система совместна, но неопределенна, т.е. имеет бесконечно много решений, выражаемых через один параметр. Пусть переменные x_1, x_2 будут базисными, а переменная x_3 – свободная. Выразим базисные переменные через свободную:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \overset{I-2II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 4x_3 = 4, \\ x_2 - 3x_3 = -1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -4t + 4, \\ x_2 = \quad 3t - 1, \\ x_3 = \quad t. \end{cases}$$

Общее решение можно записать в виде $(-4t + 4, 3t - 1, t)$ или

$$X = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Частные решения системы получаются при подстановке произвольного t, например, при $t = 0$: $(4; -1; 0)$, а при $t = 3$: $(-8; 8; 3)$.

Ответ: система имеет бесконечно много решений, общее решение можно записать в виде $(-4t + 4;\ 3t - 1;\ t)$.

8. Найти коэффициенты разложения вектора $\bar{b}(3; -2; 7)$ по векторам $\overline{a_1}(1; 4; 2), \overline{a_2}(0; 1; 3), \overline{a_3}(2; -1; 1)$.

Решение:

Решение этой задачи идентично решению линейной системы:

$$\begin{cases} x_1 \qquad + 2x_3 = 3, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = -2, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$$

Решим ее методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 + 24 - 4 - 0 + 3 = 24;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 7 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 0 - 12 - 14 - 0 + 9 = -14;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & -2 & -1 \\ 2 & 7 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 6 + 56 + 8 - 12 + 7 = 51;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 7 + 0 + 36 - 6 - 0 + 6 = 43;$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{14}{24} = -\frac{7}{12};\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{51}{24} = \frac{17}{8};\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{43}{24}.$$

Ответ: $\bar{b} = -\frac{7}{12}\overline{a_1} + \frac{17}{8}\overline{a_2} + \frac{43}{24}\overline{a_3}$.

Решение расчетно-графической работы

1. Вычислить определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & -3 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 17, \\ x_1 - 3x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 15. \end{cases}$$

Найти ее решение:

a) методом Крамера;

b) с помощью обратной матрицы;

c) методом Гаусса.

Решение: 1) Разложим определитель по первой строке:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & -3 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} - (-3) \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= (20 - 6 - 6 - 16 + 45 + 1) + 3(-8 + 3 + 18 + 8 - 18 - 3) +$$

$$+2(2 + 15 + 12 - 2 - 12 - 15) - (6 - 20 + 6 - 1 + 16 - 45) =$$

$$= 38 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - (-38) = 76.$$

Отметим, что если бы в матрице были нули, то мы бы разложили определитель по той строке или столбцу, где нулей больше всего.

2а) Решим систему уравнений по формулам Крамера. Найдем определитель матрицы системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 5 \cdot (-3) \cdot 4 + 2 \cdot (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 3 - 2 \cdot (-3) \cdot 3 - 1 \cdot (-1) \cdot$$
$$\cdot 5 - 1 \cdot 2 \cdot 4 = -60 - 4 + 3 + 18 + 5 - 8 = -46.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то существует единственное решение.

Теперь найдем определитель, получающийся из Δ заменой первого столбца на столбец свободных членов:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 17 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \\ 15 & 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 17 \cdot (-3) \cdot 4 + 2 \cdot (-1) \cdot 15 + 2 \cdot 1 \cdot 3 - 15 \cdot (-3) \cdot 3 - 1 \cdot (-1) \cdot$$
$$\cdot 17 - 2 \cdot 2 \cdot 4 = -204 - 30 + 6 + 135 + 17 - 16 == -92.$$

И, заменяя второй и третий столбец на столбец свободных членов, мы получаем соответственно второй и третий вспомогательные определители:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 17 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 15 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 5 \cdot 2 \cdot 4 + 17 \cdot (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 15 \cdot 3 - 2 \cdot 2 \cdot 3 - 15 \cdot (-1) \cdot 5 -$$
$$-1 \cdot 17 \cdot 4 = 40 - 34 + 45 - 12 + 75 - 68 = 46;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 17 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 15 \end{vmatrix} =$$

$$= 5 \cdot (-3) \cdot 15 + 2 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 17 - 2 \cdot (-3) \cdot 17 - 1 \cdot 2 \cdot 5 - 1 \cdot$$
$$\cdot 2 \cdot 15 = -225 + 8 + 17 + 102 - 10 - 30 = -138.$$

И по формулам Крамера получаем решение:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-92}{-46} = 2; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{46}{-46} = -1; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-138}{-46} = 3.$$

2b) Решим систему с помощью обратной матрицы. Найдем матрицу A^{-1}, обратную матрице системы $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T .$$

Определитель матрицы системы уже найден: $\det A = \Delta = -46 \neq 0$, а алгебраические дополнения к элементам матрицы находятся следующим образом:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = (-3) \cdot 4 - (-1) \cdot 1 = -11;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -(1 \cdot 4 - (-1) \cdot 2) = -6;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - (-3) \cdot 2 = 7;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -(2 \cdot 4 - 3 \cdot 1) = -5;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 14;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(5 \cdot 1 - 2 \cdot 2) = -1;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) - 3 \cdot (-3) = 7;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(5 \cdot (-1) - 3 \cdot 1) = 8;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-3) - 2 \cdot 1 = -17.$$

Тогда $A^{-1} = \frac{1}{-46} \cdot \begin{pmatrix} -11 & -6 & 7 \\ -5 & 14 & -1 \\ 7 & 8 & -17 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{-46} \cdot \begin{pmatrix} -11 & -5 & 7 \\ -6 & 14 & 8 \\ 7 & -1 & -17 \end{pmatrix} ==$

$\begin{pmatrix} \frac{11}{46} & \frac{5}{46} & -\frac{7}{46} \\ \frac{6}{46} & -\frac{14}{46} & -\frac{8}{46} \\ -\frac{7}{46} & \frac{1}{46} & \frac{17}{46} \end{pmatrix}$.

И мы находим решение системы из равенства матриц:

$$X = A^{-1}B;$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{46} & \frac{5}{46} & -\frac{7}{46} \\ \frac{6}{46} & -\frac{14}{46} & -\frac{8}{46} \\ -\frac{7}{46} & \frac{1}{46} & \frac{17}{46} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 17 \\ 2 \\ 15 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{46} \begin{pmatrix} -11 & -5 & 7 \\ -6 & 14 & 8 \\ 7 & -1 & -17 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 17 \\ 2 \\ 15 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{46} \begin{pmatrix} (-11) \cdot 17 + (-5) \cdot 2 + 7 \cdot 15 \\ (-6) \cdot 17 + 14 \cdot 2 + 8 \cdot 15 \\ 7 \cdot 17 + (-1) \cdot 2 + (-17) \cdot 15 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{46} \begin{pmatrix} -187 - 10 + 105 \\ -102 + 28 + 120 \\ 119 - 2 - 255 \end{pmatrix} = -\frac{1}{46} \begin{pmatrix} -92 \\ 46 \\ -138 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2с) Теперь решим данную систему линейных уравнений методом Гаусса. Для этого приведем расширенную матрицу системы к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований над строками (так называемый прямой ход):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 3 & 17 \\ 1 & -3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 15 \end{array}\right) \overset{I \leftrightarrow II}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & 3 & 17 \\ 2 & 1 & 4 & 15 \end{array}\right) \overset{II-5I}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 17 & 8 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 15 \end{array}\right) \overset{III-2I}{\sim}$$

$$\overset{III-2I}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -3 & -1 & 2\\0 & 17 & 8 & 7\\0 & 7 & 6 & 11\end{array}\right)\overset{\frac{1}{17}II}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -3 & -1 & 2\\0 & 1 & \frac{8}{17} & \frac{7}{17}\\0 & 7 & 6 & 11\end{array}\right)\overset{III-7II}{\sim}$$

$$\overset{III-7II}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -3 & -1 & 2\\0 & 1 & \frac{8}{17} & \frac{7}{17}\\0 & 0 & \frac{46}{17} & \frac{138}{17}\end{array}\right)\overset{\frac{17}{46}III}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -3 & -1 & 2\\0 & 1 & \frac{8}{17} & \frac{7}{17}\\0 & 0 & 1 & 3\end{array}\right).$$

Видно, что ранг расширенной матрицы совпадает с рангом матрицы системы, а значит, система имеет единственное решение. Теперь с помощью элементарных преобразований приведем правую часть полученной матрицы к единичной матрице (так называемый обратный ход):

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -3 & -1 & 2\\0 & 1 & \frac{8}{17} & \frac{7}{17}\\0 & 0 & 1 & 3\end{array}\right)\overset{II-\frac{8}{17}III}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -3 & -1 & 2\\0 & 1 & 0 & -1\\0 & 0 & 1 & 3\end{array}\right)\overset{I+III}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -3 & 0 & 5\\0 & 1 & 0 & -1\\0 & 0 & 1 & 3\end{array}\right)\overset{I+3II}{\sim}$$

$$\overset{I+3II}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 2\\0 & 1 & 0 & -1\\0 & 0 & 1 & 3\end{array}\right).$$

Тогда правый столбец и будет решением исходной системы.

Варианты расчетно-графической работы

В первой задаче – вычислить определитель указанной матрицы.
Во второй задаче необходимо данную систему линейных уравнений решить тремя методами – методом Крамера, с помощью обратной матрицы и методом Гаусса.

Вариант 1. 1) $\begin{pmatrix}2 & 1 & 4 & 5\\-1 & 3 & -2 & 0\\4 & 2 & -1 & 1\\5 & -3 & 3 & 1\end{pmatrix}$ 2) $\begin{cases}2x_1 + x_2 + 2x_3 = 12,\\3x_1 - 2x_2 + x_3 = 7,\\2x_1 + x_2 - x_3 = 6.\end{cases}$

Вариант 2. 1) $\begin{pmatrix}4 & 2 & 1 & -1\\-3 & -1 & 3 & 5\\1 & 2 & 1 & 2\\-1 & 3 & -2 & 1\end{pmatrix}$ 2) $\begin{cases}4x_1 + 2x_2 + x_3 = -5,\\x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -1,\\-2x_1 - x_2 + 3x_3 = 6.\end{cases}$

Вариант 3. 1) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -7 & 9 \\ 1 & -3 & 1 & 13 \\ 2 & 1 & -5 & 5 \\ -1 & 2 & 0 & -10 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 28, \\ 5x_2 - x_3 = -15, \\ -2x_1 - x_2 + 3x_3 = 15. \end{cases}$

Вариант 4. 1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{cases} 5x_1 + 4x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 13, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 13. \end{cases}$

Вариант 5. 1) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1, \\ 4x_1 - 5x_2 + x_3 = -1, \\ 7x_1 - 3x_2 = -2. \end{cases}$

Вариант 6. 1) $\begin{pmatrix} 11 & -3 & -4 & 1 \\ 5 & 1 & -10 & 2 \\ -3 & -1 & 7 & -1 \\ 1 & 0 & 6 & -1 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -5, \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

Вариант 7. 1) $\begin{pmatrix} 6 & 1 & -14 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & -8 & 5 \\ 2 & 1 & -13 & 4 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 17, \\ x_1 - 3x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 15. \end{cases}$

Вариант 8. 1) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{cases} 3x_1 - 7x_2 + x_3 = 7, \\ -2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 2, \\ 5x_1 + x_2 - 9x_3 = 3. \end{cases}$

Вариант 9. 1) $\begin{pmatrix} 13 & -8 & 9 & 1 \\ 4 & -3 & 3 & 3 \\ 7 & -6 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -1, \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 7. \end{cases}$

Вариант 10. 1) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -8 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{cases} 5x_1 + 10x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = -7, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 11. \end{cases}$

Векторная алгебра

Координаты вектора – это коэффициенты разложения вектора по базисным векторам: $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$, и вектор обычно записывают в виде $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$.

Длина вектора $\vec{a}$ определяется по формуле $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.
Обозначим за α, β, γ углы которые вектор $\vec{a}$ образует с координатными осями Ox, Oy, Oz соответственно. Тогда направление вектора $\vec{a}$ определяется с помощью направляющих косинусов $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$, которые следующим образом выражаются через координаты:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \qquad \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \qquad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}.$$

Причем направляющие косинусы связаны соотношением

$$(\cos\alpha)^2 + (\cos\beta)^2 + (\cos\gamma)^2 = 1.$$

Если $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$ и $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$, то

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z};$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \left(a_x + b_x; a_y + b_y; a_z + b_z\right);$$

$$\lambda \cdot \vec{a} = \left(\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z\right).$$

Если вектор задан точками $A(x_1; y_1; z_1), B(x_2; y_2; z_2)$, то его координаты равны разности координат точки конца и точки начала:

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1).$$

Скалярное произведение двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – это число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла φ между ними: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$.

Скалярное произведение очень просто вычисляется в координатах. Если $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z), \vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$, то скалярное произведение

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Часто используется критерий ортогональности:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \perp \vec{b} \ (\text{или } \vec{a} = 0, \text{или } \vec{b} = 0).$$

Векторным произведение неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, определяемый условиями:

1) $\vec{c} \perp \vec{a},\ \vec{c} \perp \vec{b}$;
2) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$, где φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
3) векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку.

Обозначается векторное произведение $\vec{a} \times \vec{b}$.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$,

$\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$, то

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}; - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right).$$

Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, можно вычислить как длину векторного произведения: $S = |\vec{a} \times \vec{b}|$.

Аналитическая геометрия на плоскости

Расстояние между двумя точками на плоскости $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Если точка M делит отрезок AB в отношении λ, т.е. $\lambda = \frac{|AM|}{|MB|}$ и $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$, то координаты точки M находятся по формулам:

$$x_M = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y_M = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

В частности, точка с координатами $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ – это середина отрезка AB, если $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$.

Площадь треугольника с вершинами $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2), C(x_3; y_3)$ можно вычислить по формуле:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|$$

или же используя определитель $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$.

Общее уравнение прямой на плоскости:

$$ax + by + c = 0,$$

где a, b, c – числа, причем a и b не обращаются в нуль одновременно.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом:

$$y = kx + b,$$

где угловой коэффициент k равен тангенсу угла наклона прямой к оси ox ($k = \operatorname{tg}\alpha$), а число b – ордината точки пересечения прямой с oy.

Уравнение прямой, проходящей через точку $A(x_1; y_1)$ с заданным угловым коэффициентом k, находится из равенства

$$(y - y_1) = k(x - x_1).$$

Уравнение прямой, проходящей через точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$, находится из равенства:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Угловой коэффициент прямой, проходящей через две данные точки, равен

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Если $x_2 = x_1$, то уравнение прямой имеет вид $x = x_1$.

Если $y_2 = y_1$, то уравнение прямой имеет вид $y = y_1$.

Угол между прямыми $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$ вычисляется по формуле:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

В частности:

$$(y = k_1 x + b_1 \quad \| \quad y = k_2 x + b_2) \quad \Leftrightarrow \quad k_2 = k_1;$$

$$(y = k_1 x + b_1 \quad \perp \quad y = k_2 x + b_2) \quad \Leftrightarrow \quad k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

Расстояние d от точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой $ax + by + c = 0$ – это длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую, и оно может быть найдено по формуле:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Каноническое уравнение окружности с центром в точке с координатами $(a; b)$ и с радиусом R:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

Каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где число a называется большой полуосью эллипса, а число b – малой полуосью эллипса, $a > b$. Точки $F_1(-c; 0)$ и $F_2(c; 0)$ называются фокусами, и числа a, b, c связаны соотношением $c^2 = a^2 - b^2$. Сумма расстояний от любой точки эллипса до фокусов постоянна. При построении эллипс удобно вписывать в прямоугольник $x = \pm a, y = \pm b$.

Если $a = b$, то уравнение эллипса задает окружность с центром в 0 и радиусом, равным a.

Аналитическая геометрия в пространстве

Расстояние между двумя точками в пространстве $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$: $|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Если точка M делит отрезок AB в отношении λ, т.е. $\lambda = \frac{|AM|}{|MB|}$ и $A(x_1; y_1; z_1), B(x_2; y_2; z_2)$, то координаты точки M находятся по формулам:

$$x_M = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y_M = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z_M = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

В частности, точка с координатами $\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}; \frac{z_1+z_2}{2}\right)$ – это середина отрезка AB.

Общее уравнение плоскости:

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

причем числа A, B, C не обращаются в нуль одновременно. Всякий ненулевой вектор, перпендикулярный данной плоскости, называется *нормальным вектором* этой плоскости. В частности, вектор $\vec{n} = (A; B; C)$ – нормальный вектор плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$.

Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$, перпендикулярно вектору $\vec{n} = (A; B; C)$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки $M_1(x_1; y_1; z_1), M_2(x_2; y_2; z_2), M_3(x_3; y_3; z_3)$, находится из условия компланарности векторов $\overrightarrow{MM_1}, \overrightarrow{M_2M_1}, \overrightarrow{M_3M_1}$:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Пусть две плоскости заданы уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z = 0$. *Углом между плоскостями* в пространстве называется угол между нормальными векторами этих плоскостей. Т.е.

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}|},$$

Так как $\overrightarrow{n_1} = (A_1; B_1; C_1)$, $\overrightarrow{n_2} = (A_2; B_2; C_2)$ – нормальные вектора , то получаем формулу через координаты:

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

В частности:

$$A_1x + B_1y + C_1z = 0 \parallel A_2x + B_2y + C_2z = 0 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2};$$

$$A_1x + B_1y + C_1z = 0 \perp A_2x + B_2y + C_2z = 0 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Расстояние d от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + d = 0$ – это длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость, и оно может быть найдено по формуле:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Канонические уравнения прямой, проходящей через точку $(x_0; y_0; z_0)$ параллельно направляющему вектору $\vec{s} = (m, n, p)$, имеют вид

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

Обращение в нуль одного из знаменателей означает обращение в нуль соответствующего числителя.

В *векторной форме* уравнения прямой: $\vec{r} = \overrightarrow{r_0} + \vec{s}t$, где $\overrightarrow{r_0} = (x_0; y_0; z_0)$, $\vec{s} = (m; n; p)$.

Параметрические уравнения прямой:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt, \end{cases}$$

где t – переменный параметр, $t \in \mathbb{R}$.

Уравнения прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, имеют вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Решения задач векторной алгебры и аналитической геометрии:

1. Даны две точки $A(3;-2;4)$ и $B(3;1;7)$. Найти координаты вектора $\overrightarrow{AB}$.

   • Координаты вектора равны разности координат конца и начала:

   $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A) = (3-3; 1-(-2); 7-4) = (0;3;3)$.

2. Найти координаты вектора $\vec{a}$, если известно, что он направлен в противоположную сторону к вектору $\vec{b} = 2\vec{\imath} - 5\vec{\jmath} + 14\vec{k}$ и его модуль равен 3.

   •Найдем длину (модуль) вектора $\vec{b}$:

   $$|\vec{b}| = \sqrt{2^2 + (-5)^2 + 14^2} = \sqrt{225} = 15.$$

   И так как по условию $\vec{a} = 3 \cdot \frac{-\vec{b}}{|\vec{b}|}$, то $\vec{a} = \frac{3}{15} \cdot (-\vec{b}) = -\frac{2}{5}\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \frac{14}{5}\vec{k}$. Итого $\vec{a} = \left(-\frac{2}{5}; 1; -\frac{14}{5}\right)$.

3. Вектор $\vec{a}$ образует с осями Ox и Oy углы $\alpha = 135°$ и $\beta = 60°$, и его длина равна 4. Найти координаты этого вектора.

   • Обозначим искомые координаты вектора $\vec{a} = (x; y; z)$. Направляющие косинусы связаны соотношением

   $$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

   Следовательно

   $$\cos^2\gamma = 1 - \cos^2 135° - \cos^2 60° = 1 — \frac{\sqrt{2}}{2}2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

   а значит, $\cos\gamma = \frac{1}{2}$ или $\cos\gamma = -\frac{1}{2}$. Т.е. условию задачи удовлетворяют два вектора . Найдем их координаты.

   $$\cos\alpha = \frac{x}{|\vec{a}|}, \cos\beta = \frac{y}{|\vec{a}|}, \cos\gamma = \frac{z}{|\vec{a}|},$$

   $$x = |\vec{a}|\cos\alpha = 4 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2\sqrt{2};$$

   $$y = |\vec{a}|\cos\beta = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2;$$

   $$z = |\vec{a}|\cos\gamma \Rightarrow z_1 = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2; z_2 = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -2.$$

   Итого $\vec{a_1} = (-2\sqrt{2}; 2; 2)$ и $\vec{a_2} = (-2\sqrt{2}; 2; -2)$.

4. Для каких чисел α и β векторы $\vec{a} = 3\vec{\imath} - \alpha\vec{\jmath} + 5\vec{k}$ и $\vec{b} = -2\vec{\imath} + 7\vec{\jmath} + \beta\vec{k}$ коллинеарны?

   • Векторы коллинеарны, когда их координаты пропорциональны, а значит,

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{3}{-2} = \frac{-\alpha}{7} = \frac{5}{\beta} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha = \dfrac{21}{2}, \\ \beta = -\dfrac{10}{3}. \end{cases}$$

5. Найти косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, где точки $A(6;5;1)$, $B(0;1;2)$, $C(2;1;0)$.

   • Найдем координаты векторов и вычислим их длины:

$$\overrightarrow{AB} = (0-6; 1-5; 2-1) = (-6; -4; 1),$$
$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-6)^2 + (-4)^2 + 1^2} = \sqrt{53},$$
$$\overrightarrow{AC} = (2-6; 1-5; 0-1) = (-4; -4; -1),$$
$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2 + (-1)^2} = \sqrt{33}.$$

   Мы знаем связь скалярного произведения и косинуса угла между векторами

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \cos\alpha,$$

   и мы знаем как через координаты найти скалярное произведение

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-6)\cdot(-4) + (-4)\cdot(-4) + 1\cdot(-1) = 39.$$

   Таким образом, получаем, что косинус угла равен

$$\cos\alpha = \frac{39}{\sqrt{53} \cdot \sqrt{33}}.$$

6. На оси Oz найти точку M, равноудаленную от точек $A(2;3;5)$ и $B(4;-1;-6)$.

   • Точка M лежит на оси Oz, значит ее кординаты $M(0;0;z)$. Так как $|MA| = |MB|$, то

$$2^2 + 3^2 + (z-5)^2 = 4^2 + (-1)^2 + \big(z-(-6)\big)^2.$$

7. Найти уравнение плоскости перпендикулярной прямой

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y+5}{-8} = \frac{z-7}{4}$$

   и проходящей через точку $M(6;2;-9)$.

   • Направляющий вектор прямой $\vec{s} = (1;-8;4)$ можно взять в качестве нормального вектора плоскости. Тогда уравнение плоскости

$$(x-6) - 8(y-2) + 4(z+9) = 0;$$
$$x - 8y + 4z + 46 = 0.$$

Кроме того, на с.29 приведен разбор контрольных задач по этим темам.

Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Определение предела функции:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x\colon 0 < |x - x_0| < \delta\ \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon;$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0\ \exists N > 0\ \forall x > N\ \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon);$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow (\forall M > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x\colon 0 < |x - x_0| < \delta\ \Rightarrow f(x) > M);$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow (\forall M > 0\ \exists N > 0\ \forall x > N\ \Rightarrow f(x) > M).$$

Операции над пределами функции:

1. $\lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x) \pm g(x)\big) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;
2. $\lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x)\cdot g(x)\big) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;
3. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, если $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$.

Первый замечательный предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

Второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными:

$$\alpha(x)\sim\beta(x)\ \Leftrightarrow\ \lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1.$$

Часто используемые эквивалентности: если $x\to 0$, тогда

$$\sin x\ \sim x,\ \ 1 - \cos x\ \sim \frac{x^2}{2},\ \ \operatorname{tg} x\ \sim x,$$

$$\arcsin x\ \sim x,\ \ \operatorname{arctg} x\ \sim x,\ \ \ln(1 + x)\ \sim x.$$

Определение производной функции $f(x)$ в точке x_0:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Таблица производных:

1. $(c)' = 0, c = \text{const}$;
2. $(x^n)' = nx^{n-1}, n \in \mathbb{R}$;
3. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a\,, a > 0$;
4. $\log_a x = \frac{1}{x \ln a}, a > 0, a \neq 1$;
5. $(\sin x)' = \cos x\,$;
6. $(\cos x)' = -\sin x\,$;
7. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{(\cos x)^2}$;
8. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{(\sin x)^2}$;
9. $(\arcsin x)' = (-\arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
10. $(\operatorname{arctg} x)' = (-\operatorname{arcctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

Правила дифференцирования:

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$;
2. $(u \cdot v)' = u'v + uv'$;
3. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$;
4. $f\big(u(x)\big)' = f'(u) \cdot u'(x)$.

Разбор варианта контрольной работы

1. Даны три точки на плоскости $A(1;2), B(3;4), C(5;-1)$. Найти:
   a) длину и уравнение медианы из вершины C;
   b) длину и уравнение высоты из вершины C.
2. Даны два вектора. $\vec{a} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - \vec{k}, \vec{b} = \vec{\jmath} + 4\vec{k}$. Найти:
   a) скалярное произведение векторов $\vec{a} - 2\vec{b}$ и $\vec{b} + \vec{a}$;
   b) векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

3. Даны три точки в пространстве $M_1(1;2;3), M_2(-2;1;0), M_3(3;-1;2)$. Найти уравнение плоскости $M_1M_2M_3$ и уравнение прямой, проходящей через точку $N(5;2;1)$ перпендикулярно плоскости $M_1M_2M_3$.
4. Найти пределы функций:

$$a)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^3-5x^2+8}{x-6x^3};\ b)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2-x-2};\ c)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{3x}.$$

5. Вычислить производные функций:

$$a)\ y=\frac{25-x^3}{x+8};\ b)\ y=(\sin x)^{2016}.$$

Решение:

1а) Для нахождения длины и уравнения медианы CM найдем координаты точки M. Эта точка делит сторону AB пополам, а значит, имеет координаты: $x_M=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{1+3}{2}=2$ и $y_M=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{2+4}{2}=3$. Тогда медиана CM имеет длину

$$|CM|=\sqrt{(x_M-x_C)^2+(y_M-y_C)^2}=\sqrt{(2-5)^2+\big(3-(-1)\big)^2}=$$

$$=\sqrt{(-3)^2+4^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5.$$

А прямая, проходящая через медиану CM, имеет уравнение:

$$(y-y_M)=\frac{y_C-y_M}{x_C-x_M}(x-x_M),$$

$$y-3=\frac{-1-3}{5-2}(x-2),$$

$$y-3=-\frac{4}{3}(x-2),$$

$$y=-\frac{4}{3}x+\left(\frac{4}{3}\cdot 2+3\right),$$

$$y=-\frac{4}{3}x+\frac{17}{3}.$$

1b) Высота из вершины C (обозначим ее CH) перпендикулярна стороне AB, поэтому вначале найдем уравнение прямой, проходящей через AB, причем в двух формах:

$$(y-y_B)=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}(x-x_B),$$

$$y-4=\frac{2-4}{1-3}(x-3),$$

$$y-4=\frac{-2}{-2}(x-3),$$

$$y=x-3+4,$$

$$y=x+1 \text{ (уравнение } AB \text{ с угловым коэффициентом)},$$

$$x-y+1=0 \text{ (общее уравнение } AB\text{)}.$$

Мы получили, что $k_{AB}=1$, а так как CH перпендикулярна AB, то $k_{CH}\cdot k_{AB}=-1$ и значит, $k_{CH}=-1$. Тогда

$$(y-y_C)=-1\cdot(x-x_C),$$

$$y-(-1)=-(x-5),$$

$$y=-x+5-1,$$

$$y=-x+4.$$

Длина высоты CH равна расстоянию от точки C до прямой AB, а значит, может быть вычислена по формуле: $|CH|=\frac{|ax_C+by_C+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$, если $ax+by+c=0$ – общее уравнение прямой AB. Тогда

$$|CH|=\frac{|1\cdot 5-1\cdot(-1)+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}},$$

$$|CH|=\frac{7}{\sqrt{2}}.$$

Обратите внимание, что мы нашли длину и уравнение высоты CH, не находя координаты точки H.

2а) Рассмотрим два способа нахождения скалярного произведения линейных комбинаций данных векторов $(\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{b}+\vec{a})$.

Способ 1.

Найдем координаты векторов $\vec{a}-2\vec{b}$ и $\vec{b}+\vec{a}$:

$$\vec{a}-2\vec{b}=(2\vec{\imath}+3\vec{\jmath}-\vec{k})-2(\vec{\jmath}+4\vec{k})==2\vec{\imath}+(3-2)\vec{\jmath}+(-1-2\cdot 4)\vec{k}$$
$$=2\vec{\imath}+\vec{\jmath}-9\vec{k},$$

$$\vec{b}+\vec{a}=\left(\vec{j}+4\vec{k}\right)+\left(2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}\right)=2\vec{i}+(1+3)\vec{j}+(4-1)\vec{k}=$$
$$=2\vec{i}+4\vec{j}+3\vec{k}.$$

Тогда скалярное произведение равно:

$$\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{b}+\vec{a}\right)=\left(2\vec{i}+\vec{j}-9\vec{k}\right)\cdot\left(2\vec{i}+4\vec{j}+3\vec{k}\right)=$$
$$=2\cdot 2+1\cdot 4+(-9)\cdot 3=-19.$$

Способ 2. Прежде всего вычислим скалярное произведение самих векторов a и b и квадраты их длин (т.е. модулей). Это легко сделать, так как координаты этих векторов нам уже даны:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}\right)\cdot\left(\vec{j}+4\vec{k}\right)=2\cdot 0+3\cdot 1+(-1)\cdot 4=-1,$$
$$|\vec{a}|^2=\left|2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}\right|^2=2^2+3^2+(-1)^2=4+9+1=14,$$
$$\left|\vec{b}\right|^2=\left|\vec{j}+4\vec{k}\right|^2=0^2+1^2+4^2=1+16=17.$$

Теперь раскроем скобки в искомом скалярном произведении и подставим найденные значения:

$$\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{b}+\vec{a}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{a}-2\vec{b}\cdot\vec{b}-2\vec{b}\cdot\vec{a}==\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}^2-2\vec{b}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}$$
$$=-\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}|^2-2\left|\vec{b}\right|^2==-(-1)+14-2\cdot 17=1+14-34$$
$$=-19.$$

Второй способ вычисления удобней, когда в задании все равно необходимо вычислить $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $|\vec{a}|$ и $\left|\vec{b}\right|$.

2b) По формуле выражения векторного произведения через координаты получаем:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_a & y_a & z_a\\ x_b & y_b & z_b\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 3 & -1\\ 0 & 1 & 4\end{vmatrix}==\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & 4\end{vmatrix}\cdot\vec{i}-\begin{vmatrix}2 & -1\\ 0 & 4\end{vmatrix}\cdot\vec{j}+\begin{vmatrix}2 & 3\\ 0 & 1\end{vmatrix}\cdot\vec{k}$$
$$==\left(3\cdot 4-1\cdot(-1)\right)\vec{i}-\left(2\cdot 4-0\cdot(-1)\right)\vec{j}+(2\cdot 1-0\cdot 3)\vec{k}=$$
$$=13\vec{i}-8\vec{j}+2\vec{k}.$$

3) Уравнение плоскости, проходящей через данные три точки, может быть получено из компланарности векторов MM_1, M_2M_1, M_3M_1:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0, \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -2-1 & 1-2 & 0-3 \\ 3-1 & -1-2 & 2-3 \end{vmatrix}=0,$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -3 & -1 & -3 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix}=0,$$

$$(x-1)\cdot\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}-(y-2)\cdot\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}+(z-3)\cdot\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}=0,$$

$$(x-1)\cdot(-8)-(y-2)\cdot 9+(z-3)\cdot 11=0,$$

$$-8x-9y+11z+(8+18-33)=0,$$

$$8x+9y-11z+7=0.$$

Чтобы избежать арифметических ошибок, проверим полученное уравнение. При подстановке любой из точек M_1, M_2, M_3 полученное уравнение должно превращаться в тождество:

$$8\cdot 1+9\cdot 2-11\cdot 3+7=0,$$

$$8\cdot(-2)+9\cdot 1-11\cdot 0+7=0,$$

$$8\cdot 3+9\cdot(-1)-11\cdot 2+7=0.$$

И это действительно так.

Теперь найдем уравнение прямой, проходящей через точку $N(5;2;1)$, перпендикулярно плоскости $M_1M_2M_3$. Из уравнения плоскости найдем вектор, перпендикулярный ей. Это вектор с координатами, равными коэффициентам уравнения плоскости:

$$8x+9y-11z+7=0 \ \perp \ \vec{n}=(8;\ 9;\ -11).$$

Т.е. этот вектор $\vec{n}$ можно взять за направляющий вектор искомой прямой. Тогда каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $N(5;2;1)$ параллельно вектору $\vec{n}=(8;\ 9;\ -11)$, имеет вид:

$$\frac{x-5}{8}=\frac{y-2}{9}=\frac{z-1}{-11}.$$

4а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-5x^2+8}{x-6x^3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{x^3}-5\frac{x^2}{x^3}+8\frac{1}{x^3}}{\frac{x}{x^3}-6\frac{x^3}{x^3}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-5\frac{1}{x}+8\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^2}-6}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}1-5\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}+8\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}}{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}-\lim\limits_{x\to\infty}6}=$

$=\frac{1-5\cdot 0+8\cdot 0}{0-6}=-\frac{1}{6}.$

4b) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2-x-2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x+3)}{(x+1)}=\frac{2+3}{2+1}=\frac{5}{3}$.

4c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{3x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{4\cdot\sin 4x}{3\cdot 4x}=[x\to 0, t=4x \Rightarrow\ t\to 0]=$

$=\frac{4}{3}\cdot\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=$ [по 1му замечательному пределу] $=\frac{4}{3}\cdot 1==\frac{4}{3}$.

5a) Так как $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$, то

$y'=\left(\frac{25-x^3}{x+8}\right)'=\frac{(-3x^2)(x+8)-(25-x^3)\cdot 1}{(x+8)^2}=\frac{-3x^3-24x^2-25+x^3}{(x+8)^2}=\frac{-2x^3-24x^2-25}{(x+8)^2}$.

5b) Так как $f\big(u(x)\big)'=f'(u)\cdot u'(x)$ и $(x^n)'=n\cdot x^{n-1}$, то

$y'=((\sin x)^{2016})'=2016\cdot(\sin x)^{2015}\cdot(\sin x)'=2016\cdot(\sin x)^{2015}\cdot\cos x$.

Варианты контрольных заданий

Вариант 1

1. Даны три точки на плоскости: $A(-3;1), B(2;-1), C(3;4)$. Найти:
   a) длину и уравнение медианы из вершины C;
   b) длину и уравнение высоты из вершины C.
2. Даны два вектора: $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}, \vec{b}=4\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$. Найти:
   a) скалярное произведение векторов $3\vec{a}-\vec{b}$ и $\vec{b}+2\vec{a}$;
   b) векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
3. Даны три точки в пространстве: $M_1(4;1;0), M_2(3;2;-1), M_3(1;-2;3)$. Найти уравнение плоскости $M_1M_2M_3$ и уравнение прямой, проходящей через точку $N(0;5;2)$ перпендикулярно плоскости $M_1M_2M_3$.
4. Найти пределы функций:
   a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^4-x^3-6x^2}{3x^4+7}$; b) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x^2+x-12}$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x}{\mathrm{tg}(7x)}$.
5. Вычислить производные функций: a) $y=\frac{2\sin x}{x^3-5x+1}$; b) $y=\sqrt[7]{\ln x}$.

Вариант 2

1. Даны три точки на плоскости: $A(4;-1), B(1;3), C(2;0)$. Найти:
   a) длину и уравнение медианы из вершины C;
   b) длину и уравнение высоты из вершины C.
2. Даны два вектора: $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}, \vec{b} = 3\vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k}$. Найти:
   a) скалярное произведение векторов $\vec{a} - \vec{b}$ и $2\vec{b} + \vec{a}$;
   b) векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
3. Даны три точки в пространстве: $M_1(1;-4;2), M_2(5;2;-3), M_3(2;0;1)$. Найти уравнение плоскости $M_1M_2M_3$ и уравнение прямой, проходящей через точку $N(4;-1;3)$ перпендикулярно плоскости $M_1M_2M_3$.
4. Найти пределы функций:
   a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-x^3+2}{3x^3+7x}$; b) $\lim\limits_{x\to-2} \frac{x^2+7x+10}{3x^2+5x-2}$; c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x+2}{x}\right)^{3x}$.
5. Вычислить производные функций: a) $y = \frac{2\sin x}{x^3-5x+1}$; b) $y = 25^{3x+8}$.

Вариант 3

1. Даны три точки на плоскости: $A(2;-2), B(6;3), C(-3;0)$. Найти:
   a) длину и уравнение медианы из вершины C;
   b) длину и уравнение высоты из вершины C.
2. Даны два вектора: $\vec{a} = \vec{i} + 5\vec{k}, \vec{b} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$. Найти:
   a) скалярное произведение векторов $3\vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{b} + 2\vec{a}$;
   b) векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
3. Даны три точки в пространстве: $M_1(0;5;-3), M_2(-2;0;3), M_3(4;-2;1)$. Найти уравнение плоскости $M_1M_2M_3$ и уравнение прямой, проходящей через точку $N(1;3;8)$ перпендикулярно плоскости $M_1M_2M_3$.
4. Найти пределы функций:
   a) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x - \sqrt{x^2 - 5x + 2}\right)$; b) $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^3-x^2+x-1}{x^3+x^2-2x}$; c) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\operatorname{tg} x+\sin x}{3x}$.
5. Вычислить производные функций: a) $y = 5x^3 \cdot \cos x$; b) $y = 9^{\sin x}$.

Вариант 4

1. Даны три точки на плоскости: $A(0;8), B(-2;4), C(5;3)$. Найти:
   a) длину и уравнение медианы из вершины C;
   b) длину и уравнение высоты из вершины C.
2. Даны два вектора: $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}, \vec{b} = 6\vec{i} - 3\vec{j}$. Найти:
   a) скалярное произведение векторов $\vec{a} - \vec{b}$ и $2\vec{b} + \vec{a}$;
   b) векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
3. Даны три точки в пространстве: $M_1(-2;3;1), M_2(0;-2;4), M_3(4;1;-5)$. Найти уравнение плоскости $M_1M_2M_3$ и уравнение прямой, проходящей через точку $N(-1;4;3)$ перпендикулярно плоскости $M_1M_2M_3$.
4. Найти пределы функций:

   a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1+x^3-5x^2}{4-9x^3}$;b) $\lim\limits_{x\to-3} \frac{x^3+3x^2-x-3}{x^2-9}$; c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)^{x^2}$.
5. Вычислить производные функций: a) $y = \frac{2+e^x}{1-e^x}$; b) $y = (3x+2)^{45}$.

Вариант 5

1. Даны три точки на плоскости: $A(2;-2), B(6;5), C(0;3)$. Найти:
   a) длину и уравнение медианы из вершины C;
   b) длину и уравнение высоты из вершины C.
2. Даны два вектора: $\vec{a} = 3\vec{j} - \vec{k}, \vec{b} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$. Найти:
   a) скалярное произведение векторов $3\vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{b} + 2\vec{a}$;
   b) векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
3. Даны три точки в пространстве: $M_1(2;-3;1), M_2(5;2;2), M_3(0;1;-3)$. Найти уравнение плоскости $M_1M_2M_3$ и уравнение прямой, проходящей через точку $N(3;1;-5)$ перпендикулярно плоскости $M_1M_2M_3$.
4. Найти пределы функций:

   a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+2x^2-x^4}{4x^4+1}$; b) $\lim\limits_{x\to4} \frac{x^3-4x^2}{x^2+x-20}$; c) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\operatorname{arctg} 3x}{2x}$.
5. Вычислить производные функций: a) $y = (\sqrt{x^3}) \cdot \ln x$; b)$y = \frac{1}{\sin x}$.

Вариант 6

1. Даны три точки на плоскости: $A(2;5), B(0;3), C(-3;-1)$. Найти:
   a) длину и уравнение медианы из вершины C;
   b) длину и уравнение высоты из вершины C.
2. Даны два вектора: $\vec{a} = -\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + \vec{k}, \vec{b} = -3\vec{\jmath} + 4\vec{k}$. Найти:
   a) скалярное произведение векторов $\vec{a} - \vec{b}$ и $2\vec{b} + \vec{a}$;
   b) векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
3. Даны три точки в пространстве: $M_1(-1;3;2), M_2(0;1;2), M_3(5;-2;-1)$. Найти уравнение плоскости $M_1M_2M_3$ и уравнение прямой, проходящей через точку $N(3;-1;4)$ перпендикулярно плоскости $M_1M_2M_3$.
4. Найти пределы функций:
   a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{2016-x^2}$; b) $\lim\limits_{x\to-5} \frac{x^2+10x+25}{x^2-x-30}$; c) $\lim\limits_{x\to0} \sqrt[x]{(1+4x)^3}$.
5. Вычислить производные функций: a) $y = \frac{2^x}{5x+1}$; b) $y = \log_5(\cos x)$.

Вариант 7

1. Даны три точки на плоскости: $A(4;-2), B(8;0), C(1;4)$. Найти:
   a) длину и уравнение медианы из вершины C;
   b) длину и уравнение высоты из вершины C.
2. Даны два вектора: $\vec{a} = 3\vec{\imath} + 2\vec{k}, \vec{b} = \vec{\imath} - \vec{\jmath} + 4\vec{k}$. Найти:
   a) скалярное произведение векторов $3\vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{b} + 2\vec{a}$;
   b) векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
3. Даны три точки в пространстве: $M_1(1;-2;1), M_2(0;-3;2), M_3(5;1;-3)$. Найти уравнение плоскости $M_1M_2M_3$ и уравнение прямой, проходящей через точку $N(-2;1;4)$ перпендикулярно плоскости $M_1M_2M_3$.
4. Найти пределы функций:
   a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{100x^2+53}{1+x^3}$; b) $\lim\limits_{x\to3} \frac{26x-25-x^2}{x^3+x^2-2x}$; c) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\cos x-1}{5x^2}$.
5. Вычислить производные функций: a) $y = e^x \cdot x^{13}$; b) $y = \operatorname{arctg}\frac{x+3}{x+5}$.

Вариант 8

1. Даны три точки на плоскости: $A(4;-2), B(-2;3), C(1;0)$. Найти:
   a) длину и уравнение медианы из вершины C;
   b) длину и уравнение высоты из вершины C.
2. Даны два вектора: $\vec{a} = 4\vec{i} - 2\vec{j}, \vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$. Найти:
   a) скалярное произведение векторов $\vec{a} - \vec{b}$ и $2\vec{b} + \vec{a}$;
   b) векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
3. Даны три точки в пространстве: $M_1(2;-2;1), M_2(0;3;4), M_3(-5;1;-3)$. Найти уравнение плоскости $M_1M_2M_3$ и уравнение прямой, проходящей через точку $N(-2;0;7)$ перпендикулярно плоскости $M_1M_2M_3$.
4. Найти пределы функций:
   a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^{13}+x^{10}}{13x^{12}+100x}$; b) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x^3-2x^2+x-2}$; c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3x}{e^x-1}$.
   b) Вычислить производные функций: a) $y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+5}$; b) $y = \cos(\sin x)$.

Вариант 9

1. Даны три точки на плоскости: $A(5;-2), B(1;5), C(-3;1)$. Найти:
   a) длину и уравнение медианы из вершины C;
   b) длину и уравнение высоты из вершины C.
2. Даны два вектора: $\vec{a} = 4\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}, \vec{b} = 7\vec{i} - 5\vec{j}$. Найти:
   a) скалярное произведение векторов $3\vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{b} + 2\vec{a}$;
   b) векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
3. Даны три точки в пространстве: $M_1(2;-3;1), M_2(4;0;-1), M_3(-1;5;3)$. Найти уравнение плоскости $M_1M_2M_3$ и уравнение прямой, проходящей через точку $N(5;-3;1)$ перпендикулярно плоскости $M_1M_2M_3$.
4. Найти пределы функций:
   a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3-2+x^2}{3-4x^3}$; b) $\lim\limits_{x\to 7} \frac{x^2-6x-7}{x^2-7x}$; c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{8x}$.
5. Вычислить производные функций:
   a) $y = (x - 2x^5) \cdot \operatorname{arctg} x$; b) $y = \arcsin\sqrt{x}$.

Вариант 10

1. Даны три точки на плоскости: $A(2; 3), B(-6; -1), C(1; 4)$. Найти:
   1) длину и уравнение медианы из вершины C;
   2) длину и уравнение высоты из вершины C.
2. Даны два вектора: $\vec{a} = 3\vec{\imath} - 2\vec{k}, \vec{b} = \vec{\imath} - 4\vec{\jmath} + \vec{k}$. Найти:
   1) скалярное произведение векторов $\vec{a} - \vec{b}$ и $2\vec{b} + \vec{a}$;
   2) векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
3. Даны три точки в пространстве: $M_1(2; -1; 3), M_2(1; 4; -2), M_3(-5; 1; 0)$. Найти уравнение плоскости $M_1M_2M_3$ и уравнение прямой, проходящей через точку $N(-3; 1; 7)$ перпендикулярно плоскости $M_1M_2M_3$.
4. Найти пределы функций:
   1) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{21-x}{x^2+1}$;
   2) $\lim\limits_{x\to-1} \frac{5+4x-x^2}{7+6x-x^2}$;
   3) $\lim\limits_{x\to0} \frac{6x}{\operatorname{arctg} 3x-x}$.
5. Вычислить производные функций:
   1) $y = \frac{\ln x}{x^2}$;
   2) $y = \sin(11x^3 + 36)$.

Неопределенный интеграл

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на интервале $(a;b)$, и существует функция $F(x)$, такая, что $F'(x) = f(x)$ на этом интервале, тогда будем называть $F(x)$ *первообразной* для функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$.

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$ называется совокупность всех возможных первообразных функции $f(x)$. А так как они для фиксированной функции отличаются лишь на константу, то

$$\int f(x)dx = F(x) + c.$$

Таблица неопределенных интегралов.

$\int x^n dx = \frac{x^n}{n+1} + c; n \neq 1;$

$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c;$

$\int e^x dx = e^x + c;$

$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c;$

$\int \cos x\, dx = -\cos x + c;$

$\int \sin x\, dx = -\cos x + c;$

$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c;$

$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c;$

$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c;$

$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c;$

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c;$

$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\frac{x-a}{x+a} + c.$

Замена переменной в неопределенном интеграле

Если $\int f(x)dx = F(x) + c$; *c=const,* то $\int f(u)du = F(u) + c$, где *u=g(x),* *du=g'(x)dx*. В частности, $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + c$.

Если f(x) непрерывна , то , полагая *x*=g(t) ,где g(t) и g'(t) непрерывны,

$$\int f(x)dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t)dt.$$

Пример

$$\int \frac{2x+7}{x^2+7x+2000}dx = \int \frac{dt}{t} = ln\left|t\right| + c = ln\left|x^2+7x+2000\right| + c,$$

При этом $t=x^2+7x+2000$; $dt=(2x+7)dx$.

Интегрирование по частям в неопределенном интеграле

Пусть u(x) и v(x) – дифференцируемые функции, тогда $\int \boldsymbol{udv} = \boldsymbol{uv} - \int \boldsymbol{vdu}$.

Применять данную формулу имеет смысл, если $\int vdu$ проще, чем исходный интеграл.

Пример.

$$\int(3x+2)cosxdx = (3x+2)sinx - 3\int sinx = (3x+2)cosx + 3cosx + c,$$

$$u=3x+2 \qquad dv=cosxdx$$

$$du=3dx \qquad v=sinx$$

Интегрирование дробно-рациональных функций

Дробно-рациональной называется функция вида

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ – многочлены степеней n и m соответственно. Если $n \geq m$, то рациональная дробь называется *неправильной*, а если $n < m$, то *правильной*. Интегрирование дробно-рациональных функций основано на следующем утверждении: любую правильную рациональную дробь можно представить в виде суммы простейших дробей 4-х типов.

Поэтому при интегрировании дробно-рациональных функций необходимо придерживаться следующего алгоритма:

1. Если рациональная дробь неправильная, то выделим ее целую часть.

Для выделения целой части можно пользоваться различными приемами. Наиболее надежный – разделить числитель дроби на знаменатель «уголком». В результате деления мы получим многочлен, являющийся целой частью дроби и остаток, являющийся правильной дробью.

Пример. Выделим целую часть дроби $\dfrac{x^3-2x+1}{x^2-1}$.

$$\begin{array}{l|l} -\,x^3-3x+1 & x^2-1 \\ \cline{2-2} \quad \underline{x^3-\;x\quad} & x \\ \qquad -2x+1 & \end{array}$$

Окончательно

$$\frac{x^3-2x+1}{x^2-1}=x+\frac{-2x+1}{x^2-1}$$

2. У правильной дроби раскладываем знаменатель на множители. Методов разложения существует достаточно много. Наиболее распространенные это нахождение (в том числе и подбором) корней многочлена, метод группировки и использование формул сокращенного умножения.

3. Раскладываем правильную дробь на простейшие. Для дробей с действительными коэффициентами существует 4 вида простейших дробей, знаменатели которых есть всевозможные делители знаменателя исходной дроби. Перечислим эти 4 вида:

1. $\dfrac{A}{x-a}$;
2. $\dfrac{A}{(x-a)^n}$;
3. $\dfrac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$;
4. $\dfrac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}$;

где числа A, B, a, b, c – вещественные, а степень $n \geq 2$ натуральная.

Разберем метод интегрирования каждой из этих дробей.

1. $\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A \cdot \ln|x-a| + c;$

2. $\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = A\int \frac{d(x-a)}{(x-a)^n} = A \cdot \frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + c;$

Заметим, что в обоих случаях использовался метод «подведения под знак дифференциала».

3. $$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx = \begin{bmatrix} \text{выделяем} \\ \text{в числителе} \\ \text{производную} \\ \text{знаменателя} \end{bmatrix} = \int \frac{(2ax+b)k+p}{ax^2+bx+c}dx,$$

где коэффициенты k и p подбираются таким образом, чтобы преобразованный числитель был равен исходному. Следующим шагом интеграл разбивается на два интеграла $\int \frac{(2ax+b)k+p}{ax^2+bx+c}dx = \int \frac{(2ax+b)k}{ax^2+bx+c}dx + \int \frac{p}{ax^2+bx+c}dx$.

Первый интеграл вычисляется методом «подведения под знак дифференциала».

$$\int \frac{(2ax+b)k}{ax^2+bx+c}dx = k\int \frac{(2ax+b)}{ax^2+bx+c}dx = k\int \frac{d(ax^2+bx+c)}{ax^2+bx+c} = k\ln\left|ax^2+bx+c\right| + c$$

Во втором интеграле выделяем в знаменателе полный квадрат $\int \frac{p}{ax^2+bx+c}dx = p\int \frac{dx}{a(x+t)^2+h}$, где коэффициенты t и h подбираются таким образом, чтобы преобразованный знаменатель был равен исходному. Далее в зависимости от знака перед h интеграл заменой переменных сводится или к 8 или к 13 табличным интегралам.

4. Процесс взятия интеграла $\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^{\alpha}}dx$ отличается от предыдущего только тем, что после разделения на две части ко второму интегралу надо применить рекуррентную формулу.

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = I_n, \quad I_n = \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{a^2}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot I_{n-1}$$

Таким образом, зная, как берутся интегралы от всех простейших дробей, можно найти интеграл от любой дробно-рациональной функции.

Рассмотрим серию примеров.

Пример. Вычислить $\int \frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}dx$.

Подынтегральная функция – правильная дробь, значит, выделять целую часть не нужно и первый шаг алгоритма пропускаем. Знаменатель дан в виде произведения неприводимых множителей, значит, и второй шаг пропускаем тоже. Следующим шагом необходимо разложить подынтегральную дробь на простейшие. Используем для разложения метод неопределенных коэффициентов.

Приводим дроби в правой части к общему знаменателю, записываем равенство для числителей и, сравнивая значения, найдем коэффициенты.

$$\frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)} = \frac{A(x-2)(x-4)+B(x-1)(x-4)+C(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-4)}.$$

$$x^2+2x+6 = A(x-2)(x-4)+B(x-1)(x-4)+C(x-1)(x-2),$$

при $x=1 \quad 9=3A \Rightarrow A=3,$

при $x=2 \quad 14=-2B \Rightarrow B=-7,$

при $x=4 \quad 30=6C \Rightarrow C=5.$

Итак, исходная дробь представима в виде суммы простейших дробей следующим образом: $\frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)} = \frac{3}{x-1} - \frac{7}{x-2} + \frac{5}{x-4}$. В итоге

$$\int \frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}dx = \int \frac{3}{x-1}dx - \int \frac{7}{x-2}dx + \int \frac{5}{x-4}dx = 3\ln|x-1| - 7\ln|x-2| +$$
$$+5\ln|x-4|+c$$

Пример. Вычислить $\int \frac{x}{(x-1)(x^3-1)}dx$.

Подынтегральное выражение – правильная дробь, т.е. выделять целую часть не нужно.

Разложим знаменатель в произведение степеней неприводимых многочленов: $(x-1)(x^3-1) = (x-1)^2(x^2+x+1)$. Дискриминант второго множителя отрицателен, следовательно, перед нами – искомое разложение.

Выпишем разложение подынтегральной функции в сумму простейших дробей с неопределенным коэффициентами:

$$\frac{x}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1}.$$

Найдем неопределенные коэффициенты. Для этого приведем правую часть последнего равенства к общему знаменателю и перейдем к равенству числителей.

$$\frac{x}{(x-1)^2(x^2+x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}=$$

$$=\frac{A(x-1)(x^2+x+1)+B(x^2+x+1)+(Cx+D)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}.$$

$$x=A(x-1)(x^2+x+1)+B(x^2+x+1)+(Cx+D)(x-1)^2$$

Найдем неопределенные коэффициенты.

Подставим $x=1: 1=3B \Rightarrow B=\frac{1}{3}$

Подставим $x=0: 0=A+B+D \Rightarrow A+D=-\frac{1}{3}$

Приравняем коэффициенты при соответствующих степенях.

$x^3:\ 0=A+C \Rightarrow A=-C$

$x^2:\ 0=B+D-2C \Rightarrow -\frac{1}{3}=D-2C \Rightarrow D=2C-\frac{1}{3}$

$x:\ 1=B+C-2D \Rightarrow \frac{2}{3}=C-2D \Rightarrow \frac{2}{3}=C-2(2C-\frac{1}{3}) \Rightarrow 0=-3C \Rightarrow C=0$

Тогда $D=-\frac{1}{3}, A=0.$

Итак, разложение $\frac{x}{(x-1)^2(x^2+x+1)}=\frac{\frac{1}{3}}{(x-1)^2}+\frac{-\frac{1}{3}}{x^2+x+1}.$

Вычислим исходный интеграл

$$\int\frac{x}{(x-1)^2(x^2+x+1)}dx=\int\frac{\frac{1}{3}}{(x-1)^2}+\frac{-\frac{1}{3}}{x^2+x+1}dx=\frac{1}{3}\left(\int\frac{dx}{(x-1)^2}-\int\frac{dx}{x^2+x+1}\right).$$

Вычислим полученные интегралы по отдельности.

$$\int\frac{dx}{(x-1)^2}=\int\frac{d(x-1)}{(x-1)^2}=-\frac{1}{x-1}+c\ .$$

$$\int\frac{dx}{x^2-x+1}=\int\frac{dx}{x^2-2\cdot\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=\int\frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}=\begin{bmatrix} y=x-\frac{1}{2} \\ dy=dx \end{bmatrix}=\int\frac{dy}{y^2+\frac{3}{4}}=$$

$$=\int\frac{dy}{\frac{3}{4}(\frac{4}{3}y^2+1)}.$$

Сведем интеграл к табличному:

$$\int\frac{dy}{\frac{3}{4}(\frac{4}{3}y^2+1)}=\begin{bmatrix} t=\frac{2}{\sqrt{3}}y \\ dt=\frac{2}{\sqrt{3}}dy \end{bmatrix}=\frac{2}{\sqrt{3}}\int\frac{dt}{t^2+1}=\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}(t)+c.$$

Осталось вернуться к исходной переменной

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}(t)+c=\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}(\frac{2}{\sqrt{3}}y)+c=\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(x-\frac{1}{2})\right)+c$$

Итак,

$$\int\frac{x}{(x-1)(x^3-1)}dx=-\frac{1}{x-1}+\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(x-\frac{1}{2})\right)+c$$

Интегрирование тригонометрических функций

Приведем несколько основных приемов интегрирования тригонометрических функций.

1. Интегралы от функций вида $\sin^m(x)\cos^n(x)$.

1.1. Если хотя бы одна из степеней нечетная, можно сделать замену $y=\sin x$ или $y=\cos(x)$ (заменяем ту функцию, которая входит в подынтегральное выражение в четной степени).

Пример. Вычислить $\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$.

$$\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx=\begin{bmatrix} y=\cos x \\ dy=-\sin x dx \end{bmatrix}=-\int\frac{dy}{y^2}=\frac{1}{y}+c=\frac{1}{\cos x}+c.$$

1.2. Если обе степени четные, предварительно нужно применить формулы понижения степени.

Формулы понижения степени:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}.$$

Пример. Вычислить $\int \sin^2 x dx$.

$$\int \sin^2 x dx = \int \frac{1-\cos(2x)}{2} dx = \frac{1}{2}\left(\int 1dx - \int \cos(2x) dx\right) = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin(2x) + c.$$

1.3. Если подынтегральное выражение – произведение синусов или косинусов *разных* аргументов, то подынтегральное выражение можно упростить при помощи следующих формул тригонометрии:

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\big), \qquad \cos x \cos y = \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) + \cos(x+y)\big),$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}\big(\sin(x-y) + \sin(x+y)\big).$$

Пример. Вычислить $\int \sin(5x)\cos(x)dx$.

$$\int \sin(5x)\cos(x)dx = \frac{1}{2}\Big(\int \sin(4x) + \sin(6x)\Big)dx = -\frac{1}{8}\cos(4x) - \frac{1}{12}\cos(6x) + c.$$

1.4. Если подынтегральная функция – рациональная функция от $\sin(x), \cos(x)$, то соответствующий интеграл сводится к интегралу от рациональной функции при помощи *универсальной тригонометрической замены* $y = \operatorname{tg}(\frac{x}{2})$. При этом $\frac{1}{2(1+y^2)}dy = dx$, а основные тригонометрические функции выражаются так: $\sin x = \frac{2y}{1+y^2}, \cos x = \frac{1-y^2}{1+y^2}$.

Пример. Вычислить $\int \frac{1}{1+8\cos x}dx$.

$$\int \frac{1}{1+8\cos x}dx = \begin{bmatrix} y = \operatorname{tg}(\frac{x}{2}) \\ \cos x = \frac{1-y^2}{1+y^2} \\ dx = \frac{1}{2(1+y^2)}dy \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{9-7y^2}dy.$$

Таким образом, исходный интеграл сведен к интегралу от дробно-рациональной функции. Технику вычисления таких интегралов мы подробно рассмотрели ранее. Закончим вычисления, не приводя полностью технические подробности.

$$\frac{1}{2}\int\frac{1}{9-7y^2}dy=\frac{1}{12}\left(\int\frac{1}{3-\sqrt{7}y}dy+\int\frac{1}{3+\sqrt{7}y}dy\right)=\frac{1}{12\sqrt{7}}\ln\left|\frac{3+\sqrt{7}y}{3-\sqrt{7}y}\right|+c=$$

$$=\frac{1}{12\sqrt{7}}\ln\left|\frac{3+\sqrt{7}tg(\frac{x}{2})}{3-\sqrt{7}tg(\frac{x}{2})}\right|+c.$$

Итоговый ответ:

$$\int\frac{1}{1+8\cos x}dx=\frac{1}{12\sqrt{7}}\ln\left|\frac{3+\sqrt{7}\,\mathrm{tg}(\frac{x}{2})}{3-\sqrt{7}\,\mathrm{tg}(\frac{x}{2})}\right|+c.$$

Разумеется, перечисленными приемами способы интегрирования тригонометрических функций не исчерпываются. Мы перечислили лишь наиболее распространенные.

Определенный интеграл

Определение Пусть функция $f(x)$ определена на интервале $[a;b]$ и $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Тогда определенным интегралом функции $f(x)$ на $[a;b]$ называется предел интегральных сумм

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max|\Delta x_i| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i,$$

где $c_i \in (x_i; x_i + 1)$, $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$. Число a называется нижним пределом интегрирования, а число b – верхним пределом интегрирования.

Заметим, что если результат вычисления неопределенного интеграла – функция с точностью до константы, то результат вычисления определенного интеграла – число.

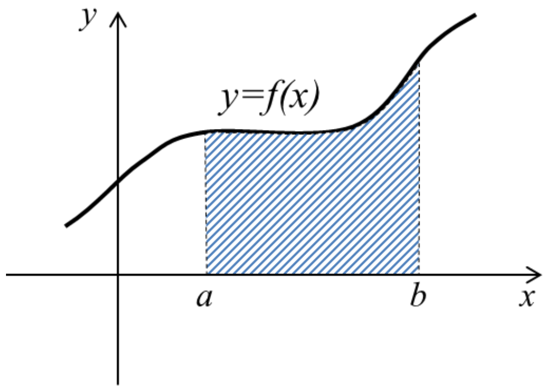

Рис. 1

Геометрический смысл определенного интеграла (точнее, модуля определенного интеграла) – площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = f(x)$, $y = 0, x = a, x = b$ (рис. 1).

Свойства определенного интеграла

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b \left(f(x)+g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b c\cdot f(x)\,dx = c\cdot\int_a^b f(x)\,dx$$

Формула Ньютона-Лейбница

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на интервале $[a;b]$, а $F(x)$ – ее первообразная, т.е. $F'(x)=f(x)$. Тогда выполнено следующее равенство

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a).$$

Эта формула называется *формулой Ньютона-Лейбница*. Двойную подстановку справа обычно обозначают $F(b)-F(a)=F(x)|_a^b$.

Пример. Вычислить определенный интеграл $\int_1^5 x^2dx$.

Решение: Применим формулу Ньютона-Лейбница:

$$\int_1^{10} x^2dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^{10} = \frac{10^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{1000-1}{3} = 333.$$

Замена переменной в определенном интеграле

Если функция $f(x)$ непрерывна на интервале $[a;b]$, а функции $g(t)$, $g'(t)$ непрерывны на интервале $[p;q]$, где $g(p)=a$, $g(q)=b$, причем $f\left(g(t)\right)$ определена и непрерывна на интервале $[p;q]$, то можно произвести замену переменной:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_p^q f\left(g(t)\right)g'(t)dt.$$

Замечание. В отличие от замены переменной в неопределенном интеграле, при использовании этого приема для определенного интеграла преобразованию подвергается не только подынтегральная функция, но и пределы интегрирования.

Пример. Вычислить

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx.$$

Решение: Сделаем замену переменной в определенном интеграле.

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx = \begin{bmatrix} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x}dx \\ x = 1 \Rightarrow t = \ln 1 = 0 \\ x = e \Rightarrow t = \ln e = 1 \end{bmatrix} = \int_0^1 tdt = \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{0}{2} = \frac{1}{2}.$$

Интегрирование по частям

Формула интегрирования по частям для определенного интеграла аналогична соответствующей формуле для неопределенного интеграла:

$$\int_a^b udv = uv|_a^b - \int_a^b vdu.$$

Пример. Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^1 x \cdot \mathrm{arctg}x\, dx.$$

Решение: Найдем первообразную:

$$\int x \cdot \mathrm{arctg}x\, dx = \begin{bmatrix} u = \mathrm{arctg}x & dv = xdx \\ du = \dfrac{dx}{1+x^2} & v = \dfrac{x^2}{2} \end{bmatrix} = \frac{x^2}{2} \cdot \mathrm{arctg}x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{1+x^2};$$

$$\int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx = \frac{1}{2} \cdot \int dx - \frac{1}{2} \cdot \int \frac{dx}{1+x^2} =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot x - \frac{1}{2} \cdot \mathrm{arctg}x.$$

Теперь применим формулу Ньютона-Лейбница:

$$\int_0^1 x \cdot \mathrm{arctg}x\, dx = \left(\frac{x^2}{2} \cdot \mathrm{arctg}x - \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot \mathrm{arctg}x\right)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{3\pi - 4}{8}.$$

Теперь рассмотрим геометрические приложения определенного интеграла – использование его для вычисления площадей плоских фигур, длин дуг плоских кривых и объёмов тел вращения.

Вычисление площадей

Площадь плоской фигуры, ограниченной двумя непрерывными кривыми $y = f(x)$, $y = g(x)$, где $g(x) \geq f(x)$, и двумя прямыми $x = a$, $x = b$, где $a < b$, равна значению следующего определенного интеграла:

$$S=\int_a^b \big(g(x)-f(x)\big)dx.$$

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $f(x)=x^2-4$, $g(x)=4x-7$ (рис.2).

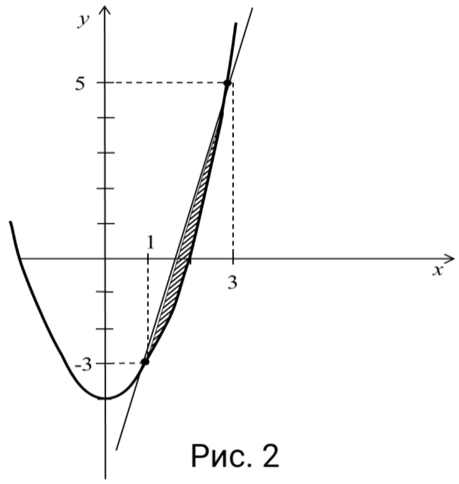

Рис. 2

Решение: Найдем точки пересечения:

$$x^2-4=4x-7 \Rightarrow x^2-4x+3=0 \Rightarrow x_1=1, x_2=3.$$

На интервале $[1;3]$ больше функция $g(x)$, поэтому искомая площадь равна

$$S=\int_1^3 \big(4x-7-(x^2-4)\big)dx=\int_1^3 (4x-3-x^2)dx=\left(2x^2-3x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^3=$$

$$=(18-9-9)-\left(2-3-\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3}.$$

Вычисление длин дуг

Длина дуги отрезка гладкой (непрерывно дифференцируемой) кривой $y=f(x)$ для $x\in[a;b]$ равна значению определенного интеграла

$$I=\int_a^b \sqrt{1+\big(f'(x)\big)^2}dx.$$

Пример. Вычислить длину дуги кривой $f(x)=x^{\frac{3}{2}}$ для $x\in[0;4]$ (рис.3). *Решение.* Продифференцируем функцию

$$f'(x)=\left(x^{\frac{3}{2}}\right)'=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}.$$

Следовательно, искомая длина равна (при нахождении первообразной используем линейную замену)

$$I=\int_1^4\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\,dx=\int_1^4\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx=\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^4=$$

$$=\frac{8}{27}\left(10\sqrt{10}-\frac{13\sqrt{13}}{8}\right).$$

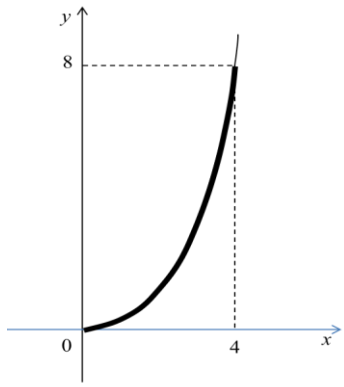

Рис. 3

Вычисление объемов тел вращения

Объем тела, полученного вращением ветви графика $y=f(x)$, $x\in[a;b]$ вокруг оси Ox, равен

$$V_x=\pi\int_a^b f^2(x)dx.$$

Пример. Вычислить объем тела, полученного вращением отрезка прямой $y=x$, $x\in[0;2]$ вокруг оси Ox (рис.4).

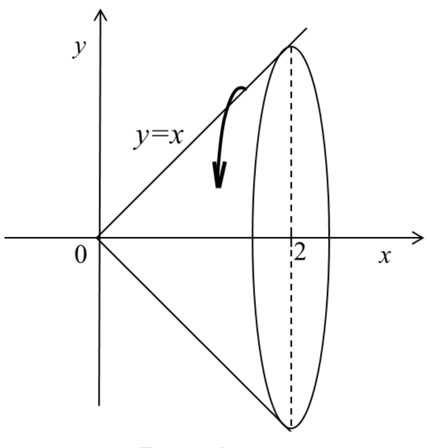

Рис. 4

Решение: Искомый объем равен

$$V_x=\pi\int_0^2 x^2dx=\pi\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^2=\frac{8\pi}{3}.$$

Варианты контрольных заданий

Вариант 1

$$\int \frac{x^5}{x^6+22}dx; \int (7x-1)e^x dx; \int \frac{x+3}{x^2+5x+33}dx; \int sin^3 3xdx.$$

Вариант 2

$$\int \frac{x^2}{x^6+16}dx; \int (13x+21)e^{3x} dx; \int \frac{7x+3}{x^2+15x+3}dx; \int cos^4 2xdx.$$

Вариант 3

$$\int \frac{1}{x\ln x}dx; \int (6x+17)\cos\frac{x}{2} dx; \int \frac{x+3}{(x+2)(x+11)}dx; \int sin^5 \frac{x}{5}dx.$$

Вариант 4

$$\int \sin^3 x cosxdx; \int (3x+2)\sin 4x dx; \int \frac{x}{x^3-1}dx; \int sin^4 5xdx.$$

Вариант 5

$$\int \ln^3 x\frac{1}{x}dx; \int (2-7x)\sin 6x dx; \int \frac{x}{(x+7)(x-2)}dx; \int sin^2 2xcos^2 2xdx.$$

Вариант 6

$$\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx; \int (4x+1)e^{3x} dx; \int \frac{3x+4}{x^2+5x+3}dx; \int cos^4 \frac{x}{2}dx.$$

Вариант 7

$$\int \frac{tg^4 x}{cos^2 x}dx; \int (3x+2)\ln x\, dx; \int \frac{1}{x^3+1}dx; \int sin^5 5xdx.$$

Вариант 8

$$\int \frac{1}{x\ln^3 x}dx; \int x^2\cos\frac{x}{2} dx; \int \frac{x-3}{(x+4)(x+1)}dx; \int sin^5 \frac{x}{5}dx.$$

Вариант 9

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+4}dx; \int x^4\, lnxdx; \int \frac{x}{x^2+5x+4}dx; \int sin^4 \frac{x}{5}dx.$$

Вариант 10

$$\int 2^x\sin(2^x)dx; \int (x+1)\cos\frac{x}{4} dx; \int \frac{x+3}{(x+2)(x-1)^2}dx; \int sin^6 \frac{x}{4}dx.$$

Теория вероятностей

Основные комбинаторные понятия

Событие называется *случайным*, если оно может либо произойти, либо не произойти. Например, при бросании игральной кости может выпасть шестерка, либо какое-то другое количество очков (следовательно, шестерка не выпадет). Кроме того, случайные события дополняют *достоверными* и *невозможными*.

Событие называется *достоверным*, если оно всегда происходит в эксперименте. Достоверное событие принято обозначать буквой Ω. Например, если у вас на полке стоят только учебники по математике, то какую книгу вы ни возьмете, она окажется по этой дисциплине. Соответственно, взять учебник по математике – достоверное событие, поскольку других вариантов у вас нет.

Событие называется *невозможным*, если оно никогда не происходит в эксперименте. Невозможное событие обозначается символом $\varnothing$. Например, вытащить красный шар из коробки с зелеными – невозможное событие.

Суммой событий $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ называется такое событие, которое состоит в том, что происходит хотя бы одно из событий $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ (при этом не исключается возможность наступления обоих событий). Сумму событий $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ записывают $\boldsymbol{A+B}$.

Произведением событий $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ называется такое событие, которое состоит в том, что происходят оба события. Обозначают произведение событий *A* и *B* следующим образом: $\boldsymbol{A \cdot B}$.

Событие называется *противоположным* событию $\boldsymbol{A}$, если оно заключается в том, что событие $\boldsymbol{A}$ не наступило. Противоположное событие обозначается как $\boldsymbol{\overline{A}}$.

События $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ называются *несовместными*, если их произведение – невозможное событие.

Задача 1. Опыт состоит в бросании двух монет. Определить противоположные для следующих событий: 1) выпадение двух орлов; 2) выпадение орла и решки; 3) выпадение хотя бы одного орла.

Решение.

1) Событие – выпадение двух орлов – не наступит, если при бросании появится хотя бы одна решка.
2) Событие – выпадения орла и решки – не наступит, если выпадут либо два орла, либо две решки.
3) Событие – выпадение хотя бы одного орла – не произойдёт, если выпадут две решки.

Задача 2. Два стрелка производят залп по мишени. Обозначим через A_i – событие, заключающееся в том, что i-й стрелок поразил мишень. Выразить с помощью операций над событиями A_1 и A_2 следующие события: 1) мишень поражена; 2) в мишень попала только одна пуля; 3) мишень не поражена; 4) в мишень попало две пули; 5) промахнулся второй стрелок.

Решение.

1) Если мишень поражена, то в неё попал хотя бы один стрелок, поэтому искомое событие равно $A_1 + A_2$. Т. е. происходит либо событие A_1, либо событие A_2, либо оба одновременно.
2) События A_1 и A_2 соответствуют попаданиям стрелков по мишени, а события $\overline{A_1}$ и $\overline{A_2}$ – промахам. Если в мишень попала только одна пуля, то такая ситуация возможна, когда первый стрелок попал, а второй – промахнулся или же когда первый стрелок промахнулся, а второй – попал. Поэтому искомое событие есть сумма событий $\overline{A_1} \cdot A_2 + A_1 \cdot \overline{A_2}$.
3) Если мишень не поражена, то промахнулись оба стрелка, следовательно, искомое событие является произведением $\overline{A_1} \cdot \overline{A_2}$.
4) Если в мишень попало две пули, то оба стрелка поразили мишень, поэтому искомое событие $A_1 \cdot A_2$.
5) Событие – промахнулся второй стрелок – противоположно событию A_2, следовательно, это событие равно $\overline{A_2}$.

Для решения многих задач теории вероятностей требуется подсчитать число благоприятных исходов, т.е. тех событий, вероятность которых необходимо определить. Этот подсчёт можно упростить, используя простейшие комбинаторные формулы.

Рассмотрим множество, состоящее из n элементов $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$. Выбираем из них k элементов, где $k \leq n$. Этот набор называется *соединение* из n по k или *выборка* k элементов из n элементов. Различают два вида соединений: *сочетания* и *размещения* – упорядоченная выборка и неупорядоченная.

Сочетания – это соединения, которые отличаются друг от друга только составом элементов.

Размещения – это соединения, которые отличаются друг от друга как составом элементов, так и порядком их следования.

Число различных сочетаний из n по k обозначается C_n^k и может быть вычислено по формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!},$$

где $n!$ – стандартное обозначение для произведения всех натуральных чисел от 1 до n включительно и произносится как «эн факториал». Число различных размещений обозначается A_n^k и вычисляется по формуле

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Для чисел C_n^k выполнены ряд тождеств облегчающих вычисления. Наиболее часто используется «правило симметрии»:

$$C_n^k = C_n^{n-k}.$$

Например, число способов выбрать 5 объектов из 7 равно числу способов выбрать 2 объекта из 7 (выберем ту 2ку, которая не вошла в выбранную 5ку).

Задача 3. Каким количеством различных способов можно посадить двух пассажиров в электричку из пяти вагонов так, чтобы они не сидели в одном вагоне.

*Решение***.** Посадка двух пассажиров в разные вагоны является, по существу, выборкой двух вагонов из пяти. Эта выборка является упорядоченной, поскольку посадка первого пассажира в i-й вагон, а второго – в j-й вагон отличается от посадки первого пассажира в j-й вагон, а второго в i-й. Поэтому данная выборка есть размещение из 5 по 2. Следовательно, число различных посадок равно:

$$A_2^5 = \frac{5!}{2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 60.$$

Задача 4. Каким количеством различных способов можно выбрать два шара одного цвета из урны, содержащей пять белых и три чёрных шара.

*Решение***.** Событие – выбор двух шаров одного цвета – является суммой двух событий: выбор двух шаров белого цвета и выбор двух шаров чёрного цвета. Обозначим число благоприятных для этих событий исходов через m_1 и m_2 соответственно. Тогда общее число различных выборок одноцветных шаров $m = m_1 + m_2$. Найдём значения m_1 и m_2. Выборка шаров одного цвета является неупорядоченной, поскольку нас интересует только состав выборки. Поэтому числа m_1 и m_2 находятся по формуле числа сочетаний. Так как белые шары выбираются только из белых, а чёрные только из чёрных, то имеем

$$m_1 = C_5^2 = \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{(1 \cdot 2) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3)} = 10,$$

$$m_2 = C_3^2 = \frac{3!}{2!\,1!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{(1 \cdot 2) \cdot (1)} = 3,$$

а значит наш ответ $m = 10 + 3 = 13$.

Вероятность событий

Анализ случайных событий показывает, что одни события происходят чаще, чем другие. Количественная мера, характеризующая частоту появления события и выраженная в долях единицы, называется *вероятностью случайного события.* Чем ближе к единице вероятность события, тем чаще оно наступает в испытаниях, и, наоборот, чем ближе к нулю вероятность случайного события, тем реже оно наступает в теоретиковероятностном эксперименте. Если вероятность события равна единице, то это означает, что событие наступает практически всегда в эксперименте, а если она равна нулю, то событие практически никогда не наступает в нём.

Обозначают вероятность события A через $P(A)$ и требуют выполнения следующих свойств – «аксиом»:

1) вероятность любого события не меньше нуля и не больше единицы:

$$0 \le P(A) \le 1;$$

2) вероятность достоверного события $P(\Omega)$ равна единице:

$$P(\Omega) = 1;$$

3) вероятность суммы двух несовместных событий A и B равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Приведём важнейшие следствия этих аксиом:

1) вероятность невозможного события равна нулю:

$$P(\emptyset) = 0;$$

2) вероятность противоположного события равна разности между единицей и вероятностью исходного события:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A);$$

3) если событие A влечёт событие B, то вероятность события A не превосходит вероятности события B:

$$P(A) \le P(B).$$

Для определения вероятности события A рассмотрим подробнее события, которые происходят в эксперименте. Их можно разбить на два класса: простые (элементарные) события и сложные (составные) события.

Элементарным событием или *исходом* называется такое событие, которое для любого события A рассматриваемого эксперимента находится в одном из двух отношений: либо оно влечёт событие A, либо оно влечёт противоположное событие $\bar{A}$. Из определения элементарного события следует, что оно не может быть суммой других событий нашего эксперимента, а сложное событие A есть сумма всех элементарных событий, которые являются частными случаями A. Совокупность элементарных событий называется *пространством элементарных событий*. Оно обозначается буквой Ω, а элементарные события, входящие в него, обозначаются $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n, \ldots$. Если число элементарных событий в эксперименте конечно, то такой эксперимент называется конечным. Для конечных экспериментов вероятность события A равна

$$P(A) = \sum_{\omega_k \subset A} P(\omega_k), \tag{1}$$

где суммирование ведётся по всем элементарным событиям, являющимся частными случаями события A.

Пример. Из урны, в которой пять белых шаров и три чёрных, вынимается шар. Для этого эксперимента элементарным событием является выборка какого-то шара. Всего в этом эксперименте восемь элементарных событий:

$$w_i - \text{вынули шар под номером } i, 1 \le i \le 8.$$

Сложными событиями здесь будут: выборка белого шара и выборка чёрного шара, поскольку они являются суммой, соответственно, пяти и трёх элементарных событий.

Если элементарные события равновозможны, то формула (1) может быть записана следующим образом:

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где в знаменателе стоит n – общее число элементарных событий (исходов), а в числителе стоит m – число благоприятных A элементарных событий (исходов, влекущих событие A).

Задача 5. В ящике находятся 3 зеленых, 2 желтых и 5 белых шаров. Какова вероятность, что случайным образом вынутый шар окажется зеленым?

Решение. Общее количество исходов соответствует общему количеству шаров, т.е. $n = 10$. Благоприятных исходов столько же, сколько зеленых шаров в ящике, т.е. $m = 3$. Получаем, что

$$P(\text{вынули зелёный шар}) = \frac{3}{10}.$$

Задача 6. В партии из десяти деталей четыре детали бракованые. Из партии выбирают три детали. Какова вероятность того, что две из них будут стандартными, а одна бракованная?

Решение. Обозначим через A интересующие нас событие – две детали стандартные, а одна бракованная. Общее количество исходов n равно числу сочетаний C_{10}^3, поскольку для нашей выборки важен только состав элементов, но не их порядок. Число благоприятных исходов m равно произведению числа способов выбора двух стандартных деталей из шести C_6^2 на число способов выбора одной дефектной детали из четырех C_4^1. Окончательно получаем:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_6^2 \cdot C_4^1}{C_{10}^3} = \frac{21}{40}.$$

Задача 7. Из колоды 36 карт выбираются случайные три карты. Какова вероятность того, что две из них будут одной масти, а одна – другой.

Решение. В колоде из 36 карт четыре масти – пики, трефы, бубны и черви, а в каждой масти по 9 карт. Общее число различных выборок трёх карт из колоды вычисляется по формуле числа сочетаний (выборка неупорядоченная):

$$n = C_{36}^3 = \frac{36!}{3!\,33!} = \frac{34 \cdot 35 \cdot 36}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 7140.$$

Для подсчёта благоприятных исходов m заметим, что процесс выбора карт можно представить в виде двух этапов. Сначала выбирают две масти (первый этап), а затем выбирают карты из этих мастей (второй этап). Число различных выборок двух мастей из четырёх вычисляется по формуле числа размещений, так как число карт первой масти не равно числу карт второй масти. Действительно, наборы карт (♠,♠,♦) и (♦,♦,♠) будут различны, хотя выбраны одинаковые масти. Когда масти выбраны, то число различных выборок карт этих мастей равно числу выборок карт первой масти, умноженному на число выборок карт второй масти. Поскольку здесь не важен порядок выбора, то эти числа находятся по формуле числа сочетаний. Таким образом, число благоприятных исходов равно

$$m = A_4^2 \cdot C_9^2 \cdot C_9^1 = \frac{4!}{2!} \cdot \frac{9!}{2!\,1!} \cdot \frac{9!}{1!\,8!} = 3888.$$

Итого, искомая вероятность равна $P = \frac{3888}{7140} \approx 0{,}545.$

Формулы сложения и умножения вероятностей

Для любых двух событий A и B вероятность их суммы:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B). \tag{2}$$

Эта формула называется *формулой сложения вероятностей*, она обобщает аксиому сложения вероятностей для несовместных событий, ведь для любых двух несовместных событий

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

Часто приходится определять вероятность события, когда известно, что другое событие произошло. Вероятность события A, вычисленная при условии, что событие B наступило, называется *условной вероятностью* события A относительно события B и обозначается $P(A|B)$ и по определению равна

$$P(A|B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}. \tag{3}$$

Приведем одно из определений независимости событий. События A и B называются независимыми, если вероятность наступления одного из них не зависит от наступления другого, т.е.

$$P(A|B) = P(A) \text{ и } P(B|A) = P(B).$$

Из формулы (3) следует формула вычисления вероятности произведения событий A и B, которую называют *формулой умножения веротяностей*:

$$P(A \cdot B) = P(A|B) \cdot P(B). \tag{4}$$

Для независимых событий это формула принимает более простой вид:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B). \tag{5}$$

Отметим, что так как события $A \cdot B$ и $B \cdot A$ совпадают, то справедлива и аналогичная формула

$$P(A \cdot B) = P(B|A) \cdot P(A).$$

Задача 8. Два стрелка поражают мишень с вероятностью 0,6 и 0,8 соответственно. Они произвели залп по мишени. Требуется определить вероятность того, что мишень будет поражена.

Решение.

Способ 1. Обозначим через A_1 и A_2 – попадание в мишень первым стрелком и вторым стрелком соответственно, а через B – поражение мишени. Мишень будет поражена, если в неё попадёт хотя бы один стрелок, поэтому событие B равносильно сумме $A_1 + A_2$. Тогда, учитывая формулы сложения и умножения вероятностей, а также то, что события A_1 и A_2 независимы (меткость – это внутреннее свойство стрелка), получим

$$P(B) = P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1) \cdot P(A_2) =$$
$$= 0{,}6 + 0{,}8 - 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}92.$$

Способ 2. Событие – мишень поражена – противоположно событию – оба стрелка промахнулись. Поэтому

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2}) = 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2})$$
$$= 1 - (1 - 0{,}6) \cdot (1 - 0{,}8) = 1 - 0{,}4 \cdot 0{,}2 = 0{,}92.$$

Задача 9. Из колоды карт в 36 листов последовательно выбираются две карты. Первая выбранная карта оказалась красной масти. Определить вероятность того, что и вторая карта будет красной масти.

Решение. Пусть A и B – появление карты красной масти при первой и второй выборках соответственно. В колоде 18 карт красной масти и 18 карт чёрной масти. Так как при первой выборке произошло событие A, то состав колоды изменился: в колоде стало 17 карт красной масти и 18 карт чёрной. Вычисляя $P(B|A)$ как отношение благоприятного числа исходов к общему, получим

$$P(B|A) = \frac{17}{35}.$$

Задача 10. В урне 3 белых и 5 чёрных шаров; из урны последовательно вынули два шара, которые оказались разноцветными. Какова вероятность, что первым был вынут белый шар?

Решение. Введём обозначения для событий:

A_i – появление белого шара при i-й выборке;

B_i – появление чёрного шара при i-й выборке;

C – вынуты разноцветные шары.

В задаче требуется найти $P(A_1|C)$, поэтому, исходя из определения условной вероятности, найдем вероятности $P(C)$ и $P(A_1 \cdot C)$. Событие – выборка разноцветных шаров – есть сумма двух несовместных событий: первый вынутый шар белый, а второй — чёрный; первый вынутый шар чёрный, а второй – белый. Поэтому

$$P(C) = P(A_1 \cdot B_2) + P(B_1 \cdot A_2).$$

По формуле умножения вероятностей (4) получим

$$P(C) = P(B_2|A_1) \cdot P(A_1) + P(A_2|B_1) \cdot P(B_1).$$

По условию в урне 3 белых и 5 чёрных шаров, а их общее число равно 8. Вероятности событий A_1 и B_1 определяем как отношение благоприятного числа исходов к общему:

$$P(A_1) = \frac{3}{8}; P(B_1) = \frac{5}{8}.$$

Если произошло событие A_1 или B_1, то состав шаров в урне изменился. Условные вероятности событий A_2 и B_2 находим аналогично:

$$P(A_2|B_1) = \frac{3}{7}; P(B_2|A_1) = \frac{5}{7}.$$

Тогда вероятность события C равна

$$P(C) = \frac{5}{7} \cdot \frac{3}{8} + \frac{3}{7} \cdot \frac{5}{8} = \frac{15}{28}.$$

Для того чтобы определить вероятность $P(A_1 \cdot C)$, заметим, что события A_1 и C происходят совместно только в том случае, когда происходит событие B_2. Это означает, что события $A_1 \cdot C$ и $A_1 \cdot B$_2 совпадают и, следовательно

$$P(A_1 \cdot C) = P(A_1 \cdot B_2) = P(B_2|A_1) \cdot P(A_1) = \frac{5}{7} \cdot \frac{3}{8} = \frac{15}{56}.$$

Окончательно получаем ответ $P(A_1|C) = \frac{15/56}{15/28} = \frac{1}{2}$.

Задача 11. Для сигнализации об аварии установлены три независимо работающих устройства. Вероятность того, что при аварии сработает первое устройство равна 0,85, второе – 0,92 , третье – 0,75. Найти вероятность того, что при аварии сработает: a) только одно устройство; b) только два устройства; c) все три устройства.

Решение: Обозначим события A_i — сработало i-тое устройство. По формулам умножения (5) и сложения (2) вероятностей имеем:

a) $P(A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} + \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3) =$

$$= P(A_1) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2) \cdot P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(A_3) =$$
$$= 0{,}85 \cdot (1 - 0{,}92) \cdot (1 - 0{,}75) + (1 - 0{,}85) \cdot 0{,}92 \cdot (1 - 0{,}75) +$$
$$+(1 - 0{,}85) \cdot (1 - 0{,}92) \cdot 0{,}75 = 0{,}1835.$$

b) $P(A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} + A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot A_3 + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot A_3) =$

$$= P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(\overline{A_3}) + P(A_1) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(A_3) + P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) =$$
$$= 0{,}85 \cdot 0{,}92 \cdot (1 - 0{,}75) + 0{,}85 \cdot (1 - 0{,}92) \cdot 0{,}75 +$$
$$+(1 - 0{,}85) \cdot 0{,}92 \cdot 0{,}75 = 0{,}247.$$

c) $P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0{,}85 \cdot 0{,}92 \cdot 0{,}75 = 0{,}586.$

Формула полной вероятности.

События A_1, A_2, …, A_n образуют полную группу событий, если выполнены два условия: они попарно несовместны и сумма всех событий является достоверным событием. Если события A_1, A_2, …, A_n образуют полную группу, то вероятность любого события B можно определить по формуле

$$P(B) = P(B|A_1) \cdot P(A_1) + P(B|A_2) \cdot P(A_2) + \dots + P(B|A_n) \cdot P(A_n),$$

которая называется *формулой полной вероятности*.

Задача 12. Рабочие изготавливают однотипные детали. Вероятность брака у первого рабочего — 0,01, а у второго — 0,05. Из партии в пятьсот деталей, двести из которых сделаны первым рабочим, а триста – вторым, выбирается одна деталь. Какова вероятность того, что эта деталь бракованая?

Решение. Рассматриваемая ситуация является двухэтапной: первый этап – изготовление деталей рабочими, а второй – выбор детали из партии. Пусть событие A_i — изготовление детали i-м рабочим, а событие B — выбор бракованой детали. Заметим, что любая деталь изготавливается только одним рабочим, поэтому события A_1 и A_2 несовместны. Кроме того, каждая деталь из партии изготавливается только этими рабочими и, следовательно, сумма событий A_1 и A_2 есть достоверное событие. Это означает, что события A_1 и A_2 образуют полную группу событий и для определения вероятности события B можно использовать формулу полной вероятности

$$P(B) = P(B|A_1) \cdot P(A_1) + P(B|A_2) \cdot P(A_2).$$

Найдем значения вероятностей, входящих в правую часть этого равенства. Так как общее число деталей – пятьсот, а двести и триста деталей изготовлены первым и вторым рабочим соответственно, то вероятности

$$P(A_1) = \frac{200}{500} = 0{,}4; \;\; P(A_2) = \frac{300}{500} = 0{,}6.$$

По условию, если деталь изготовлена первым рабочим, то вероятность брака равна 0,01, а если вторым, то 0,05. Поэтому

$$P(B|A_1) = 0{,}01; \quad P(B|A_2) = 0{,}05.$$

Подставляя полученные значения в формулу полной вероятности, получим

$$P(B) = 0{,}01 \cdot 0{,}4 + 0{,}05 \cdot 0{,}6 = 0{,}034.$$

Задача 13. У рыбака два излюбленных места лова, которые он посещает с вероятностями 0,2 и 0,6 соответственно. На первом месте лова он вылавливает не меньше 2 кг рыбы с вероятностью 0,7, а на втором не меньше 2 кг рыбы вылавливает с вероятностью 0,4. Какова вероятность того, что рыбак вернётся с как минимум 2 кг рыбы?

Решение. Обозначим события A_i – рыбак ловил рыбу на i-м месте, B – он выловил не меньше 2 кг рыбы. Из условия задачи имеем

$$P(A_1) = 0{,}2; \quad P(A_2) = 0{,}6; \quad P(B|A_1) = 0{,}7; \quad P(B|A_2) = 0{,}4.$$

Подставим в формулу полной вероятности и получим искомую ответ

$$P(B) = 0{,}7 \cdot 0{,}2 + 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}38.$$

Последовательность независимых испытаний. Формулы Бернулли, Муавра-Лапласа, Пуассона

Большой круг задач практического характера может быть сведён к схеме Бернулли. Рассматривается n одинаковых и независимых друг от друга опытов, в которых наблюдается событие A. Вероятность наступления события A одна и та же для каждого опыта и обозначается p. В этих условиях обычно рассматриваются две основные задачи: определение вероятности наступления события A ровно k раз в n опытах; определение вероятности того, что событие А произойдёт не менее k_1 раз и не более k_2 раз в n опытах. Соответствующие вероятности обозначаются через $P_n(k)$ и $P_n(k_1; k_2)$.

Решение первой задачи может быть получено по *формуле Бернулли*

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \tag{6}$$

где p — вероятность наступления события A в одном опыте, а $q = 1 - p$ это вероятность противоположного события $\bar{A}$.

Однако для больших n применение формулы Бернулли очень затруднительно ввиду сложности вычислений. Поэтому для решения первой задачи при больших n используют приближённые формулы подсчёта – локальную формулу Муавра-Лапласа (обычно для $npq > 20$) и формулу Пуассона (обычно для $npq < 10$).

Согласно локальной формуле Муавра-Лапласа, величина $P_n(k)$ приближенно равна

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi\left(\frac{k - np}{\sqrt{npq}}\right), \tag{7}$$

где значения функции Гаусса приводятся в таблице 1 (с.73)

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Для редких событий по формуле Пуассона

$$P_n(k) \approx \frac{(np)^k \cdot e^{-k}}{k!}. \tag{8}$$

Если нас интересует вероятность того, что в n опытах рассматриваемое событие произойдёт не менее k_1 раз и не более k_2, то эту вероятность хорошо приближается значениями функции Лапласа по формуле Муавра-Лапласа в случае когда n достаточно велико и $npq > 20$:

$$P_n(k_1; k_2) = \Phi_0\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi_0\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right), \tag{9}$$

где значения функции Лапласа

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt$$

приводятся в таблице 2 (с.74).

Задача 14. Бросается пять раз игральная кость. Какова вероятность, что в этой серии бросков выпадет: 1) ровно две тройки; 2) не менее четырех троек; 3) хотя бы одна тройка?

Решение. Событие A — выпадение на игральной кости тройки, вероятность этого события равна $p = P(A) = \frac{1}{6}$.

Вероятность выпадения двух троек определяем по формуле Бернулли (6) для $n = 5$ и $k = 2$:

$$P_5(2) = C_5^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{1250}{7776} \approx 0{,}1608.$$

Вероятность выпадения не менее четырех троек определяем дважды применяя формулу Бернулли (6):

$$P_5(4;5) = P_5(4) + P_5(5) \approx 0{,}0032 + 0{,}0001 = 0{,}0033.$$

Вероятность выпадения хотя бы одной тройки также можно вычислить по той же формуле Бернулли пять раз её применяя, но гораздо проще её определить, переходя к противоположному событию – не выпало ни одной тройки. Тогда

$$P_5(1;5) = 1 - P_5(0) = 1 - C_5^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 \approx 1 - 0{,}4019 = 0{,}5981.$$

Задача 15. Стрелок поражает мишень с вероятностью 0,8. Он произвел серию из ста выстрелов. Требуется определить вероятность следующих событий: 1) попадание в мишень ровно 75 раз; 2) попадание в мишень не менее 70 раз и не более 80 раз; 3) попадание в мишень не более 70 раз.

Решение. Поскольку число испытаний *n* достаточно велико, а произведение *np* существенно больше единицы, то для ответа на первый вопрос используем локальную формулу Муавра-Лапласа (7). Имеем $n = 100$, $k = 75$, $p = 0{,}8$, $q = 0{,}2$ и $\sqrt{npq} = 4$. Тогда

$$P_{100}(75) \approx \frac{1}{4} \cdot \varphi\left(\frac{75-80}{4}\right) \approx \frac{1}{4} \cdot \varphi(-1{,}25) \approx \frac{1}{4} \cdot 0{,}1826 \approx 0{,}0457.$$

При этом мы использовали свойство чётности функции Гаусса и значение $\varphi(1{,}25)$ нашли по таблице 1.

Для решения второго вопроса используем интегральную формулу Муавра-Лапласа (9). Имеем $n = 100$, $k_1 = 70$, $k_2 = 80$, $p = 0{,}8$, $q = 0{,}2$ и $\sqrt{npq} = 4$. Тогда

$$P_{100}(70;80) \approx \Phi_0\left(\frac{80-80}{4}\right) - \Phi_0\left(\frac{70-80}{4}\right) = \Phi_0(0) - \Phi_0(-2{,}5) \approx$$
$$\approx 0 - (-0{,}4938) = 0{,}4938.$$

При этом мы использовали свойство нечётности функции Φ_0 и её значение нашли по таблице 2. Аналогично решается и третий пункт задачи:

$$P_{100}(0;70) \approx \Phi_0\left(\frac{70-80}{4}\right) - \Phi_0\left(\frac{0-80}{4}\right) = \Phi_0(-2{,}5) - \Phi_0(-20) \approx$$
$$\approx (-0{,}4938) - (-0{,}5) = 0{,}0062.$$

Задачи по теории вероятности для самостоятельной работы.

1. Студент знает 45 из 60 ответов на вопросы программы. Каждый экзаменационный билет содержит три вопроса. Найти вероятность того, что: а) студент знает ответы на все три вопроса, содержащихся в его экзаменационном билете; б) студент знает ответы только на два вопроса своего экзаменационного билета; в) студент ответы знает только на один вопрос своего экзаменационного билета.
2. В каждой из двух урн находятся 5 белых и 10 черных шаров. Из первой урны во вторую переложили наудачу один шар, а затем из второй урны вынули наугад один шар. Найти вероятность того, что шар, вынутый из второй урны, окажется черным.
3. Три стрелка в одинаковых и независимых условиях произвели по одному выстрелу по одной и той же цели. Вероятность поражения цели первым стрелком равна 0,9, вторым – 0,8, третьим – 0,7. Найти вероятность того, что: а) только один из стрелков попадет в цель; б) только два стрелка попадут в цель; в) все три стрелка попадут в цель.
4. Вероятность наступления события в каждом из одинаковых и независимых испытаний равна 0,7. Найти вероятность того, что в 1600 испытаниях событие наступит 900 раз.
5. Для сигнализации об аварии установлены три независимо работающих устройства. Вероятность того, что при аварии сработает первое устройство, равно 0,9, второе – 0,95 и третье – 0,85. Найти вероятность того, что при аварии сработает: а) только одно устройство; б) только два устройства; в) все три устройства.
6. Вероятность наступления события в каждом из одинаковых и независимых испытаний равна 0,07. Найти вероятность того, что в 1460 испытаниях событие наступит 28 раз.
7. В партии из 1000 изделий имеется 10 дефектных. Найти вероятность того, что среди наудачу взятых из этой партии 50 изделий ровно 5 окажутся дефектными.
8. Вероятность наступления события в каждом из одинаковых и независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что в 225 испытаниях событие наступит не менее 75 и не более 90 раз.
9. На трёх станках при одинаковых и независимых условиях изготовливаются детали одного наименования. На первом станке изготовливается 10 %, на втором - 30 %, на третьем - 60 % всех деталей. Для каждой детали вероятность быть бездефектной равна 0,7, если она изготовлена на первом станке; 0,8 - если она изготовлена на втором станке; 0,9 - если она изготовлена на третьем станке. Найти вероятность того, что наугад взятая деталь окажется бездефектной.
10. Два брата входят в состав двух различных спортивных команд, каждая из которых состоит из 12 человек. В двух урнах имеется по 12 билетов с номерами от 1 до 12. Члены каждой команды вынимают наудачу по одному

билету из определенной урны (без возвращения). Найти вероятность того, что оба брата вытащат номер 6.

11. Из колоды в 36 карт вытащили две. Найти вероятность того, что это картинки разной масти. Картинками называют карты Валет, Дама, Король, Туз.

12. У Алисы в кармане шесть волшебных пирожков — два пирожка увеличивают рост в два раза, а остальные уменьшают рост в два раза. Алиса съела случайные четыре пирожка. Найдите вероятность того, что Алиса в итоге прежнего роста.

13. В пещере разбойников Али-Баба нашел три сундука. В первом сундуке было 100 серебряных и 50 медных монет. Во втором сундуке было 50 золотых, 100 серебряных и 50 медных монет, а в третьем сундуке лежали 100 золотых и 50 серебряных монет. Али-Баба схватил сундук наугад и побежал домой. Дома он достал из сундука первую попавшуюся монету. Какова вероятность того, что она была серебряная?

14. Устройство состоит из трех параллельно соединенных элементов. Вероятность работы без поломок первого элемента равна 0,6, второго — 0,7 и третьего — 0,65. Какова вероятность того, что устройство будет работать?

15. Найти вероятность того, что событие A произойдет более 10 раз в серии из 13 независимых испытаний, если вероятность появления события A в одном испытании равна 0,57.

16. Игральную кость бросили три раза. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков равна 5.

17. У Алисы в кармане шесть волшебных пирожков — два увеличивающих (съешь – вырастешь), а остальные уменьшающие (съешь – уменьшишься). Когда Алиса встретила Мэри Энн, она по доброте душевной, не глядя, отдала половину пирожков Мэри. Найдите вероятность того, что Мэри достались только уменьшающие пирожки.

18. В комнате собаки «с глазами как блюдца» лежат 7 ящиков с медью и 3 ящика с золотом, в комнате собаки «с глазами как мельничные колеса» лежат 8 ящиков с серебром и 2 ящика с золотом, а в комнате собаки «с глазами как Круглая Башня» лежат 10 ящиков с золотом. Солдат вошел в случайно выбранную комнату и схватил первый попавшийся ящик. Какова вероятность того, что он добыл ящик с золотом?

19. В схеме последовательно соединены три транзистора. Вероятность того, что откажет первый транзистор равна 0,03, второй — 0,07, третий — 0,05. Найти вероятность выхода из строя схемы.

20. Найти вероятность того, что событие A произойдет не более трёх раз в серии из 8 независимых испытаний, если вероятность появления события A в одном испытании равна 0,75.

21. Подбросим правильную монету 100 раз. Какова вероятность того, что выпадет ровно 48 орлов? Какова вероятность того, что число выпавших орлов попало в промежуток от 45 до 58 включительно?

Варианты контрольных заданий по теории вероятностей

Вариант 1	Вариант 2
1. В партии из 22 изделий имеется 4 бракованных. Из этой партии наудачу отбирается 7 изделий. Найти вероятность того, что среди них окажется равно 2 бракованных.	1. В партии из 20 изделий имеется 3 бракованных. Из этой партии наудачу отбирается 6 изделий. Найти вероятность того, что среди них окажется равно 1 бракованное.
2. Студент забыл последнюю цифру телефона своего товарища и набирает ее наудачу. Найти вероятность того, что для правильного набора номера студенту придется звонить не более 3 раз.	2. Студент забыл последнюю цифру телефона своего товарища и набирает ее наудачу. Найти вероятность того, что для правильного набора номера студенту придется звонить не более 3 раз, если известно, что последняя цифра четная.
3. В группе спортсменов имеются 10, стреляющих отлично, 8 – хорошо, 5 – удовлетворительно и 2 – плохо. Вероятности попадания в мишень при одном выстреле для них соответственно равны 0,95, 0,85, 0,7 и 0,5. Дан выстрел, в результате которого мишень оказалась пораженной. Найти вероятность того, что его произвел спортсмен, стреляющий отлично.	3. В группе спортсменов имеются 10, стреляющих отлично, 8 – хорошо, 5 – удовлетворительно и 2 – плохо. Вероятности попадания в мишень при одном выстреле для них соответственно равны 0,95, 0,85, 0,7 и 0,5. Дан выстрел, в результате которого мишень оказалась пораженной. Найти вероятность того, что его произвел спортсмен, стреляющий хорошо.
4. По каналу связи передается 1000 знаков. Каждый знак может быть искажен независимо от остальных с вероятностью 0,005. Найти вероятность того, что будет искажено не более 3 знаков.	4. Вероятность изготовления бракованной детали равна 0,01. Изготовлено 200 деталей. Найти вероятность того, что среди них бракованных будет не больше 3.

Вариант 3	Вариант 4
1. В ящике 7 белых и 3 красных шара. Наудачу выбираются 2 шара. Найти вероятность того, что: а) оба шара красные; б) хотя бы один шар белый.	1. В ящике 5 белых, 1 черный и 3 красных шара. Наудачу выбираются три шара. Найти вероятность того, что: а) все три шара черные; б) хотя бы один шар белый.
2. Испытываются 4 двигателя, вероятность отказа двигателя равна 0,08. Найти вероятность того, что откажет хотя бы один двигатель.	2. Номер телефона состоит из 5 цифр. Найти вероятность того, что все цифры различны.
3. В команде 5 спортсменов, стреляющих отлично, 4 – хорошо и 2 – удовлетворительно. Вероятности попадания в мишень при одном выстреле для отличного стрелка равна 0,95, для хорошего - 0,85, для удовлетворительного - 0,7. Наудачу вызывается 1 спортсмен, который производит 1 выстрел. Найти вероятность попадания в мишень.	3. На спортивной площадке играют 10 мальчиков, забрасывая мяч в кольцо. Для 5 из них вероятность попадания в кольцо равна 0,6, для 3 других – 0,5 и для остальных – 0,3. Мяч, брошенный одним из мальчиков, попал в кольцо. Какова вероятность того, что мяч брошен мальчиком из первой группы?
4. Вероятность того, что лампочка окажется бракованной, равна 0,0025. Проверяется 1000 лампочек. Найти вероятность того, что бракованных окажется 3.	4. Вероятность изготовления бракованной детали равна 0,001. Найти вероятность того, что среди 5000 изготовленных изделий не содержится брака.

Вариант 5	Вариант 6
1. В квадрат $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ наудачу ставится точка. Найти вероятность того, что точка окажется под кривой $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$.	1. В прямоугольник $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 1$ наудачу ставится точка. Найти вероятность попадания точки в область выше кривой $y = \frac{x^2}{4}$.
2. В ящике 10 деталей, из которых 4 окрашены. Наудачу извлекаются 3 детали. Найти вероятность того, что хотя бы одна из взятых деталей окрашена.	2. В ящике 3 синих и 8 красных кубиков. Из ящика извлекают 2 кубика. Найти вероятность того, что оба кубика разного цвета.
3. На трех линиях изготавливаются однотипные детали. 1-ая линия дает 70%, вторая – 20% и третья – 10% всей продукции. Вероятность получения брака на каждой линии соответственно равна 0,02, 0,01 и 0,05 Взятая наудачу деталь оказалась бракованной. Найти вероятность того, что эта деталь изготовлена на 1-той линии.	3. Электрические приборы поставляются в магазин тремя заводами. Первый завод поставляет 50%, второй – 20% и третий – 30% всей продукции. Вероятность изготовления прибора высшего качества каждым заводом соответственно равна 0,92, 0,85, 0,8. Найти вероятность того, что купленный в магазине прибор окажется высшего качества.
4. Производятся испытания двигателей. Вероятность того, что двигатель выдержит испытание, равна 0,9. Найти вероятность того, что из 100 проверяемых не выдержит испытания 1 двигатель.	4. Производятся испытания двигателей. Вероятность того, что двигатель выдержит испытание, равна 0,9. Найти вероятность того, что из 100 проверяемых не выдержит испытания не более 5 двигателей.

Вариант 7.	Вариант 8
1. В круг радиуса $R_1 = 30$ см. наудачу ставится точка. В круге проведены две концентрические окружности с радиусами $R_2 = 20$ см. и $R_3 = 10$ см. Найти вероятность попадания точки в кольцо с внутренним радиусом R_3 и внешним R_2.	1. В круг радиуса $R_1 = 30$ см. наудачу ставится точка. В круге проведены две концентрические окружности с радиусами $R_2 = 20$ см. и $R_3 = 10$ см. Найти вероятность того, что точка упадет вне кольца с внутренним радиусом R_3 и внешним R_2.
2. В ящике 3 синих и 8 красных кубиков. Из ящика извлекают 2 кубика. Найти вероятность того, что оба кубика синие.	2. В ящике 3 синих и 8 красных кубиков. Из ящика извлекают 2 кубика. Найти вероятность того, что оба кубика красные.
3. Для участия в КВН выбрали с факультета БЖ — 4 студента, факультета социологии — 6 человек, с факультета физики — 5 человек. Вероятности того, что студент факультета БЖ, социологии, физики попадет в сборную университета, соответственно равны 0,9; 0,7; 0,8. Наудачу выбранный студент в итоге попал в сборную. К какому факультету вероятнее всего принадлежал этот студент?	3. В клинику поступают в среднем 50% больных с заболеванием К, 30% — с заболеванием L, 20% — с заболеванием М. Вероятность полного излечения болезни К равна 0,7; для болезней L и М эти вероятности соответственно равны 0,8 и 0,9. Больной, поступивший в клинику, через некоторое время был выписан здоровым. Какова вероятность того, что этот больной страдал заболеванием К?
4. Вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле равна 0,75. Найти приближенно вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена не менее 70 и не более 80 раз.	4. Вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле равна 0,75. Найти приближенно вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена не более 70 раз.

Окончание контрольных заданий

Вариант 9	Вариант 10
1. В ящике 7 белых и 3 красных шара. Наудачу выбираются 2 шара. Найти вероятность того, что: а) оба шара красные; б) хотя бы один шар белый.	1. В ящике 5 белых, 1 черный и 3 красных шара. Наудачу выбираются 3 шара. Найти вероятность того, что: а) все три шара черные; б) хотя бы один шар белый.
2. Испытываются 4 двигателя, вероятность отказа двигателя равна 0,08. Найти вероятность того, что откажет хотя бы один двигатель.	2. Номер телефона состоит из 5 цифр. Найти вероятность того, что все цифры различны.
3. В команде 5 спортсменов, стреляющих отлично, 4 – хорошо и 2 – удовлетворительно. Вероятности попадания в мишень при одном выстреле для отличного стрелка равна 0,95, для хорошего - 0,85, для удовлетворительного - 0,7. Наудачу вызывается 1 спортсмен, который производит 1 выстрел. Найти вероятность попадания в мишень.	3. На спортивной площадке играют 10 мальчиков, забрасывая мяч в кольцо. Для 5 из них вероятность попадания в кольцо равна 0,6, для 3 других – 0,5 и для остальных – 0,3. Мяч, брошенный одним из мальчиков, попал в кольцо. Какова вероятность того, что мяч брошен мальчиком из первой группы?
4. Вероятность того, что лампочка окажется бракованной, равна 0,0025. Проверяется 1000 лампочек. Найти вероятность того, что бракованных окажется 3.	4. Вероятность изготовления бракованной детали равна 0,001. Найти вероятность того, что среди 5000 изготовленных изделий не содержится брака.

Таблица 1. Таблица значений функции Гаусса

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

x	...0	...1	...2	...3	...4	...5	...6	...7	...8	...9
0,0...	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1...	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2...	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3...	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3726	0,3712	0,3698
0,4...	0,3683	0,3668	0,3652	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5...	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6...	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7...	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8...	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9...	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0...	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1...	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2...	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3...	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4...	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5...	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6...	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7...	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8...	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9...	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0...	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1...	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0395	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2...	0,0353	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3...	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4...	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5...	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6...	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7...	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8...	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9...	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0...	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1...	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2...	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3...	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4...	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5...	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6...	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7...	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8...	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9...	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001

Таблица 2. Таблица значений функции Лапласа

Значение функции $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	Сотые доли x									
0,0	0,0000	0040	0080	0112	0160	0199	0239	0279	0319	0359
0,1	0398	0438	0478	0517	0557	0596	0636	0675	0714	0754
0,2	0793	0832	0871	0910	0948	0987	1026	1064	1103	1141
0,3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0,4	1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
0,5	1915	1950	1985	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2224
0,6	2258	2291	2324	2357	2389	2422	2454	2486	2518	2549
0,7	2580	2612	2642	2673	2704	2734	2764	2794	2823	2852
0,8	2881	2910	2939	2967	2996	3023	3051	3079	3106	3133
0,9	3159	3186	3212	3238	3264	3289	3315	3340	3365	3389
1,0	3413	3438	3461	3485	3508	3531	3553	3577	3599	3621
1,1	3643	3665	3686	3708	3729	3749	3770	3790	3810	3830
1,2	3849	3869	3888	3907	3925	3944	3962	3980	3997	4015
1,3	4032	4049	4066	4082	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1,4	4192	4207	4222	4236	4251	4265	4279	4292	4306	4319
1,5	4332	4345	4357	4370	4382	4394	4406	4418	4430	4441
1,6	4452	4463	4474	4485	4495	4505	4515	4525	4535	4545
1,7	4554	4564	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633
1,8	4641	4649	4656	4664	4671	4678	4686	4693	4700	4706
1,9	4713	4719	4726	4732	4738	4744	4750	4756	4762	4767
	Десятые доли x									
2,	4773	4821	4861	4893	4918	4938	4953	4965	4974	4981
3,	4987	4990	4993	4995	4997	4998	4998	4999	4999	5000^8

Библиографический список

1. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. – М.: ООО «Издательство Оникс»: ООО «Издательство «Мир и Образование», 2008.
2. Лунгу К.Н. и др. Сборник задач по высшей математике. 1 курс – М.: Айрис-пресс, 2008.
3. Лунгу К. Н. и др. Сборник задач по высшей математике. 2 курс – М.: Айрис-пресс, 2007.
4. Гмурман В. Е. Руководство по решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высшее образование, 2009.

Содержание

Ирина Юрьевна Малова
Ольга Евгеньевна Куляхтина
Надежда Юрьевна Косовская

МАТЕМАТИКА
ЗАДАЧНИК
Методические указания по решению задач
и выполнению контрольных заданий

Редактор и корректор Т. А. Смирнова
Техн. редактор Л. Я. Титова Темплан 2020 г., поз. 69

Подп. к печати 01.06.2020. Э.И.
Объем 5,0 печ.л. 5,0 уч.-изд. л. Изд.№ 69.

Высшая школа технологии и энергетики СПбГУПТД,
198095, Санкт-Петербург, ул. Ивана Черных, 4