МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПРОМЫШЛЕННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ДИЗАЙНА»

ВЫСШАЯ ШКОЛА ТЕХНОЛОГИИ И ЭНЕРГЕТИКИ
Кафедра высшей математики

Функции нескольких переменных

Методическое пособие для студентов всех форм обучения
(III семестр)

Санкт-Петербург
2019

УДК 51 (075)
ББК 22.1я7
Ф945

Функции нескольких переменных: методическое пособие для студентов всех форм обучения (III семестр) / сост.: Н.Л.Белая, Б.Ф. Иванов, Е.Г.Иванова, М.Э. Юдовин. - ВШТЭ СПбГУПТД. - СПб., 2019. – 15 с.

В методическом пособии представлено краткое изложение основных разделов курса теории функции нескольких переменных: свойства функции нескольких переменных, непрерывность, частные производные первого и второго порядка. Предназначены для студентов всех форм обучения (III семестр).

Подготовлено и рекомендовано к изданию кафедрой высшей математики ВШТЭ СПбГУПТД (протокол № 1 от 03.09.2019 г.).

Утверждено к изданию институтом энергетики и автоматики ВШТЭ СПбГУПТД (протокол № 3 от 26.11.2019 г.).

Редактор и корректор Т.А. Смирнова
Техн. редактор Л.Я.Титова Темплан 2019 г., поз.133

Подп. к печати 27.12.2019. Формат 60х84/16. Бумага тип №1.
Печать офсетная. Объем 1,0 печ.л.; 1,0 уч.-изд.л.
Тираж 70 экз. Изд. № 133. Цена «С». Заказ

Ризограф Высшей школы технологии и энергетики ВШТЭ СПбГУПТД, 198095, Санкт-Петербург, ул. Ивана Черных, 4.

ВВЕДЕНИЕ

В пособии рассмотрены теоретические вопросы, соответствующие первому разделу второго семестра индивидуальной формы обучения: функции нескольких переменных. Дается материал для самостоятельной подготовки к решению задач по функциям двух переменных. Рассматриваются типовые задания контрольных работ.

Настоящее пособие написано для помощи студентам всех форм обучения в решении задач, а также лучшего усвоения ими теоретического материала по указанным темам и помощи в сдаче экзаменов и зачетов.

Для более детального и глубокого изучения материала по теме «Функции нескольких переменных» авторы рекомендуют студентам изучить литературу, приведенную в библиографическом списке. Теоретический материал имеет лишь справочный характер. Особое внимание в данной работе уделено разбору примеров.

Для успешного решения задач контрольных работ следует основательно изучить терминологию, важные теоретические положения раздела «Функции нескольких переменных», которые приведены в настоящем пособии.

Перед началом выполнения контрольной работы рекомендуется изучить теорию по данному разделу в учебниках [1],[2]. Не следует приступать к выполнению контрольного задания, не решив достаточного количества задач, соответствующих этому заданию, которые можно найти в задачниках [3],[4].

1. Основные понятия

Определение 1: Функцией двух переменных (x,y) называется такая величина Z, что для каждой совокупности значений (x,y) из области определения соответствует единственное определенное значение Z

$$z = f(x, y).$$

Определение 2: Функцией трех переменных (x,y,z) называется такая величина U, что для каждой совокупности значений (x,y,z) из области определения соответствует единственное определенное значение U

$$u = f(x, y, z).$$

Пример 1*:* Выразить объем конуса как функцию его образующей x и радиуса основания y.

Решение: Из геометрии известно, что объем конуса равен $V = \frac{1}{3}\pi y^2 h,$ где h – высота конуса. Но $h = \sqrt{x^2 - y^2}$. Следовательно, получаем

$$V = \frac{1}{3}\pi y^2 \sqrt{x^2 - y^2}.$$

Под областью определения функции $z = f(x, y)$ понимается совокупность точек (x,y) плоскости OXY, в которых функция определена.

Аналогично под областью определения функции трех переменных $u = f(x, y, z)$ понимается некоторое тело в пространстве OXYZ.

Пример 2: Найти область существования функции

$$z = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}.$$

Решение: Функция имеет вещественные значения, если $4-x^2-y^2>0$ или $x^2+y^2>4.$ Решение последнего неравенства – это множество всех точек внутри круга радиуса 2.

2 Непрерывность и разрывы

Определение 1: Число **A** называется пределом функции $z=f(x,y)$ при стремлении точки $P'(x,y)$ к точке $P(a,b)$, если для любого ϵ>0 существует такое δ>0, что при 0<ρ<δ, имеет место неравенство: $|f(x,y)-A|<\varepsilon$, где $\rho=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ - расстояние между точками P, P'. В этом случае пишут:

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y)=A$$

Определение 2: Функция $z=f(x,y)$ называется непрерывной в точке $P(a,b)$, если $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y)=f(a,b)\cdot$

Функция, непрерывная во всех точках некоторой области, называется непрерывной на всей области.

Нарушение условий непрерывности для функции $z=f(x,y)$ может происходить как в отдельных точках (изолированная точка разрыва), так и в точках, образующих одну или несколько линий (линий разрыва).

Пример: Найти точки разрыва функции

$$z=\frac{xy+1}{x^2-y}$$

Решение: Функция теряет смысл, если знаменатель обращается в 0, т.е. $x^2 - y = 0 \Rightarrow y = x^2$. Следовательно, данная функция имеет линией разрыва параболу $y = x^2$.

3.Частные производные

Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x, y)$. Зададим приращение функции сначала переменной x, а потом по y:

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y),$$
$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Такие приращения называются частными приращениями.

Определение 1: Частной производной функции Z по переменной X называется предел отношения частного приращения Z по X к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

Определение 2: Частной производной функции Z по переменной Y называется предел отношения частного приращения Z по Y к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Замечание: Для обозначения частных производных используют следующие обозначения: $z'_x = \frac{\partial z}{\partial x}, z'_y = \frac{\partial z}{\partial y}$.

Пример: Найти частные производные функции $z = \frac{x}{y} + x^3 y^5 + 5x - 3y^2$.

Решение:

Находим сначала частную производную по x, а потом по y. При нахождении частной производной по x надо помнить, что в этом случае переменная y считается постоянной, и наоборот.

$$z'_x = (\frac{x}{y} + x^3 y^5 + 5x - 3y^2)\Big|_x = \frac{1}{y} + 3x^2 y^5 + 5$$

$$z'_y = (\frac{x}{y} + x^3 y^5 + 5x - 3y^2)\Big|_y = -\frac{x}{y^2} + 5x^3 y^4 - 6y.$$

4. Производные высших порядков

Определение: Частными производными второго порядка функции двух переменных $z = f(x, y)$ называются частные производные от ее частных производных второго порядка.

$$z''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial x}) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y),$$

$$z''_{yy}=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial y})=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{yy}(x,y),$$

$$z''_{xy}=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x})=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x,y),$$

$$z''_{yx}=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x})=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f''_{yx}(x,y).$$

Производные z''_{xy}, z''_{yx} называются смешанными производными.

Теорема о равенстве смешанных производных:

Смешанные производные второго порядка функции двух переменных равны между собой: $z''_{xy}=z''_{yx}$.

Пример 1: Найти производные второго порядка функции $z=4x^5y^3-6x+7y^4$ и показать, что смешанные производные равны.

Решение: Найдем сначала первые производные

$$z'_x=20x^4y^3-6,\ z'_y=12x^5y^2+28y^3.$$

Теперь найдем четыре производные второго порядка и проверим, равны ли смешанные производные:

$$z''_{xx}=80x^3y^3,\ z''_{yy}=24x^5y+84y^2,$$

$$z''_{xy}=60x^4y^2.\ z''_{yx}=60x^4y^2.$$

Полученный результат на примере показывает правильность теоремы.

Пример 2*:*Дана функция $z=\ln\left(y+x^2\right)$, показать, что

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}-2\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{4y}{\left(y+x^2\right)^3}.$$

В задаче дана функция от двух переменных x и y. Соответственно имеются две производные. При нахождении частной производной по x надо помнить, что в этом случае переменная y считается постоянной. Итак,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\ln\left(y+x^2\right)\right)=\frac{1}{y+x^2}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(y+x^2\right)=\frac{2x}{y+x^2}.$$

Аналогично, разыскивая производную по переменной y, переменную x считаем постоянной.

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\ln\left(y+x^2\right)\right)=\frac{1}{y+x^2}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(y+x^2\right)=\frac{1}{y+x^2}.$$

Производных второго порядка у нас уже четыре.

Производная второго порядка от функции z по переменной x:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2x}{y+x^2}\right)=\frac{(2x)'\cdot\left(y+x^2\right)-(2x)\cdot\left(y+x^2\right)'}{\left(y+x^2\right)^2}=$$

$$=\frac{2\cdot\left(y+x^2\right)-(2x)\cdot(2x)}{\left(y+x^2\right)^2}=\frac{2y-2x^2}{\left(y+x^2\right)^2}.$$

Смешанная производная второго порядка по переменным yx:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2x}{y+x^2}\right)=2x\cdot(-1)\left(y+x^2\right)^{-2}\cdot 1=-\frac{2x}{\left(y+x^2\right)^2}.$$

Смешанная производная второго порядка по переменным x, y

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{y+x^2}\right)=(-1)\left(y+x^2\right)^{-2}\cdot(2x)=-\frac{2x}{\left(y+x^2\right)^2}.$$

И последняя производная - производная второго порядка по переменной y :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y+x^2}\right)=(-1)\left(y+x^2\right)^{-2}=-\frac{1}{\left(y+x^2\right)^2}.$$

Теперь просто подставляем и проверяем.

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}-2\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=$$

$$=\frac{2x}{y+x^2}\left(-\frac{2x}{\left(y+x^2\right)^2}\right)-2\frac{1}{y+x^2}\cdot\frac{2y-2x^2}{\left(y+x^2\right)^2}=-\frac{4y}{\left(y+x^2\right)^3},$$

что и требовалось доказать.

5. Производная по направлению и градиент функции

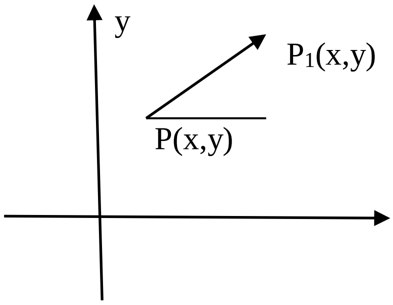
Определение 1: Производная функции двух переменных $z = f(x, y)$ по заданному направлению $\vec{l} = \overrightarrow{PP_1}$ называется пределом отношения разности значений функции в этих точках к расстоянию между точками и записывается:

$$\frac{\partial z}{\partial l}=\lim_{PP_1\to 0}\frac{f(P_1)-f(P)}{PP_1}.$$

Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируемая, то справедлива формула:

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\alpha,$$

где α – угол, образованный вектором направления с осью OX.



Аналогично находится производная по направлнению функции трех переменных

$$u = f(x, y, z).$$

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$$

Пример 1: Найти производную функция $z = 2x^2 - 3y^2$ в точке P(1,0) в направлении, составляющем с осью OX угол 2π/3.

Решение: Найдем частные производные и их значения в точке P:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x; (\frac{\partial z}{\partial x})_P = 4;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -6y; (\frac{\partial z}{\partial y})_P = 0.$$

Далее

$$\cos\alpha = \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}; \sin\alpha = \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Подставляя полученное в формулу для вычисления производной по направлению, получаем:

$$\frac{\partial z}{\partial l} = 4(-\frac{1}{2}) + 0\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = -2.$$

Определение 2: Градиентом функции двух переменных $z = f(x, y)$ называется вектор, проекциями которого на координатные оси являются соответствующие частные производные данной функции:

$$\overrightarrow{gradz} = \frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}.$$

Определение 3: Градиентом функции трех переменных $u = f(x, y, z)$ называется вектор, проекциями которого на координатные оси являются соответствующие частные производные данной функции:

$$\overrightarrow{gradu} = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}.$$

Направление градиента функции в данной точке есть направление наибольшей скорости возрастания функции в этой точке. Производная данной функции в направлении $\boldsymbol{l}$ связана с градиентом следующей формулой:

$$\frac{\partial z}{\partial l} = np_l\,\overrightarrow{gradz}.$$

Пример 2: Найти в точке $P(1,1)$ градиент функции $z = x^2 y.$

Решение: Вычислим частные производные и их значения в точке P:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy; (\frac{\partial z}{\partial x})_P = 2; \ \frac{\partial z}{\partial y} = x^2; (\frac{\partial z}{\partial y})_P = 1.$$

$$\overrightarrow{gradz} = -2\vec{i} + \vec{j}.$$

Пример 3: Дана функция $z = 2x - 3xy$, точка $A(-1,3)$ и вектор $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j}$ Найти $\overrightarrow{gradz}$ в точке $A(-1,3)$ и производную по направлению $\vec{a}$ от функции z в точке $A(-1,3)$.

Напомним,

$$\overrightarrow{gradz} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \vec{j} .$$

Вспоминаем предыдущую задачу и находим:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(2x - 3xy\right) = 2 - 3y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(2x - 3xy\right) = 0 - 3x = -3x .$$

Вычисляем эти производные при $x = -1, \quad y = 3$:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{A(-1,3)} = 2 - 3 \cdot 3 = -7 ,$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{A(-1,3)} = -3(-1) = 3 .$$

Подставляем:

$$\left.\overrightarrow{gradz}\right|_{A(-1,3)} = -7\vec{i} + 3\vec{j} \quad .$$

Производная по направлению находится по формуле:

$$\frac{\partial z}{\partial e} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\alpha \quad .$$

Здесь $\vec{e}$ - единичный вектор, имеющий то же направление, что и вектор $\vec{a}$.
Найдём его:

$$\vec{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{\vec{i} - \vec{j}}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{\vec{i} - \vec{j}}{\sqrt{2}} = \frac{\vec{i}}{\sqrt{2}} + \left(\frac{-\vec{j}}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j} \, .$$

Направляющие косинусы являются координатами вектора $\vec{e}$.

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad .$$

Подставляя, получаем:

$$\frac{\partial z}{\partial e} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\partial z}{\partial y}\frac{1}{\sqrt{2}} \, .$$

Значения производных в точке мы уже вычислили раньше. Окончательно:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial e}\right|_{A(-1,3)} = -7\frac{1}{\sqrt{2}} - 3\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{10}{\sqrt{2}} \quad .$$

Библиографический список

1. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов / под ред. Б.П. Демидовича. - М.: Интеграл-Пресс, 1997.

2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов.– М.: Наука, Т 2. 2010..

3. Сборник задач по высшей математике с контрольными работами /сост.: К.Н. Лунгу, Д.Т. Письменный, С.Н. Федин, Ю.А. Шевченко. – М.: Айрис-Пресс, 2008.

4. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. Полный курс. – М.: Айрис-Пресс, 2009.

5. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике. – СПб., М., Краснодар: Лань, 2005.

6. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высшая школа, 2002.

7. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшее образование, 2008.

Содержание