**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

**«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПРОМЫШЛЕННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ДИЗАЙНА»**

**ВЫСШАЯ ШКОЛА ТЕХНОЛОГИИ И ЭНЕРГЕТИКИ
Кафедра высшей математики**

Теория вероятностей

**Методическое пособие для студентов всех форм обучения
(III семестр)**

**Санкт-Петербург
2019**

УДК 51(075)
ББК 22.1я7
Т 338

Теория вероятностей: методическое пособие для студентов всех форм обучения (III семестр) / сост.: З.Л. Абжандадзе, Н.Л.Белая, Е.Г.Иванова, Н.Ю. Косовская. - ВШТЭ СПбГУПТД. СПб., 2019. – 16с.

Содержится краткое изложение основных разделов курса теории вероятностей: классическое определение вероятности, теоремы сложения и умножения вероятностей, полная вероятность и формулы Байеса и Бернулли. Понятие случайной величины, её числовые характеристики. Предназначены для студентов всех форм обучения (III семестр).

Подготовлено и рекомендовано к изданию кафедрой высшей математики ВШТЭ СПбГУПТД (протокол № 1 от 03.09.2019 г.).

Утверждено к изданию институтом энергетики и автоматики ВШТЭ СПбГУПТД (протокол № 3 от 26.11.2019 г.).

Редактор и корректор Т.А. Смирнова
Техн. редактор Л.Я.Титова Темплан 2019 г., поз.132

Подп. к печати 27.12.2019. Формат 60x84/16. Бумага тип №1.
Печать офсетная. Объем 1,25 печ.л.; 1,25 уч.-изд.л.
Тираж 70 экз. Изд. № 132. Цена «С». Заказ

Ризограф Высшей школы технологии и энергетики ВШТЭ СПбГУПТД, 198095, Санкт-Петербург, ул. Ивана Черных, 4.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предметом теории вероятностей является изучение вероятностных закономерностей массовых однородных случайных событий. Знание этих закономерностей позволяет предвидеть, как эти события будут протекать. Методы теории вероятностей применяются в теории надежности, теории массового обслуживания, в теоретической физике, астрономии, теории стрельбы, теории ошибок наблюдений, теории автоматического управления, общей теории связи и многого другого.

Первые работы, которые можно отнести к теории вероятностей, появились в шестнадцатом веке. Этими задачами занимались Кардано, Гюйгенс, Паскаль, Ферма и многие другие. В семнадцатом веке появились работы Якоба Бернулли. Выведенную им формулу мы встретим ниже. Он же доказал знаменитую теорему, получившую название «Закона больших чисел». В дальнейшем были работы Муавра, Лапласа, Гаусса, Пуассона. Окончательно теория вероятностей оформилась как наука в конце девятнадцатого – начале двадцатого века в работах Чебышева, Маркова, Ляпунова, Колмагорова.

1. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

1.1 Классическое определение вероятности

В теории вероятности рассматриваются события, которые называются: невозможные, достоверные и случайные.

Определение. Событие называется *невозможным* и обозначается Ø, если оно не произойдет ни при каких условиях.

Определение. Событие называется *достоверным* и обозначается Ω, если оно произойдет в любом случае.

Определение . Событие называется *случайным* и обозначается заглавными латинскими буквами A, B, C…, если оно может произойти или не произойти в зависимости от случайных факторов.

Классическое определение вероятности: Вероятность события A равна отношению числа благоприятных исходов события A к общему числу исходов:

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где m – благоприятное число исходов события A, n – общее число исходов события A.

Вероятность случайного события обозначается латинской буквой P. Соответственно $P(A)$ – это вероятность случайного события A.

Исходя из классического определения вероятности, вероятность невозможного события $P(\varnothing)=0$. В этом случае нет благоприятных исходов, значит $m=0$:

$$P(A) = \frac{0}{n} = 0.$$

С другой стороны, вероятность достоверного события $P(\Omega)=1$. В этом случае все исходы благоприятные и $m=n$.

$$P(A) = \frac{n}{n} = 1.$$

Таким образом, вероятность случайного события лежит между этими двумя значениями: $0<P(A)<1$.

1.2. Вероятность произведения двух событий

Определение. *Произведением двух событий* А и В называется событие ***А·В***. , состоящее в совместном появлении событий А и В. Знак умножение означает союз «***и***», т.е ***А·В=«АиВ».***

Случайные события бывают зависимыми и независимыми.

Определение. События А и В называются *независимыми*, если появление одного из них не меняет вероятности появления другого. Событие А называется *зависимым* от события В, если вероятность события А меняется в зависимости от того, произошло событие В или нет.

Например, событие А выпадение герба при бросании монеты и В выпадение шестерки на игральном кубике – два независимых события. Другой пример: мы последовательно достаем из колоды две карты. Событие А – выбор дамы, и событие В – выбор после этого бубнового туза – являются зависимыми событиями.

Определение. *Условной вероятностью* $P_A(B)$ называется вероятность события В при условии, что событие А уже произошло.

Теорема умножения вероятностей

Если события А и В независимые, то вероятность совместного появления этих двух событий равна произведению их вероятностей:

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$$

Если события А и В зависимые, то вероятность совместного появления этих двух событий равна произведению вероятности одного из этих событий на условную вероятность другого, при условии, что первое событие наступило:

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P_A(B)$$

1.3. Вероятность суммы двух событий

Определение . *Суммой двух событий* А и В называется событие ***А+В*** , состоящее в том, что появится или событие ***А,*** или событие ***В,*** или оба события А и В сразу. Знак суммы означает союз «***или***», т.е. ***А+В=АилиВ.***

Определение. Случайные события бывают совместными и несовместными. Случайные события называются *несовместными* в данном испытании, если никакие два из них не могут появиться вместе. В противоположном случае они называются *совместными*.

Теорема сложения вероятностей

Если события А и В несовместные, то вероятность появления одного из этих двух событий, безразлично какого, равна сумме их вероятностей:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

Если события А и В совместные, то вероятность появления одного из этих двух событий, безразлично какого, равна сумме их вероятностей без вероятности их совместного появления:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)$$

Противоположные события

Определение. Несколько событий образуют *полную группу* , если в результате испытания появится хотя бы одно из них.

Определение. *Противоположными событиями* называют два единственно возможных события, образующих полную группу. Если одно из этих событий ***А***, то второе называется противоположным или «не ***А***» и обозначается $\overline{A}$.

Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$P\left(A\right)+P(\overline{A})=1$$

1.4. Формула полной вероятности

Пусть событие ***A*** может наступать при условии появления одного из несовместных событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$, которые образуют полную группу событий. Пусть известны их вероятности $P(B_1), P(B_2), \ldots, P(B_n)$ и условные вероятности события ***A*** при условии, что произошло соответствующее событие B_i :

$$P\left(A_{B_1}\right), P\left(A_{B_2}\right), \ldots, P\left(A_{B_n}\right).$$

Тогда вероятность события ***A*** находится по формуле:

$$P(A) = P(B_1)P\left(A_{B_1}\right) + P(B_2)P\left(A_{B_2}\right) + \ldots + P(B_n)P\left(A_{B_n}\right).$$

Эта формула называется формулой полной вероятности.

1.5. Формула Бернулли.

Если проводятся испытания, при которых вероятность появления события А в каждом испытании не зависит от исходов в других испытаниях, то такие испытания называются независимыми относительно события А. Рассмотрим случай, когда проводятся n-независимых испытаний, с вероятностью $P(A) = p$, и вероятностью противоположного события $P(\overline{A}) = q$. В этих испытаниях событие А происходит ровно k раз. Тогда вероятность того, что в n-независимых испытаниях событие А происходит ровно k раз находится по формуле:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

которая называется формулой Бернулли.

Здесь C_n^k - число сочетаний из n по k - вычисляется по формуле:

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \quad .$$

1.6. Локальная теорема Лапласа

Формулой Бернулли неудобно пользоваться, если число испытаний n велико.

Теорема. Если вероятность p появления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_n(k,)$ того, что событие A появится в n испытаниях ровно k раз, приближённо равна:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npk}} \varphi(x),$$

где
$$x = \frac{k-np}{\sqrt{npk}}.$$

Эта формула называется асимптотической формулой из локальной теоремы Лапласа или просто теоремой Лапласа и даёт приближённое, хотя и очень точное, значение вероятности $P_n(k)$.

1.7. Интегральная теорема Лапласа

Пусть число испытаний n велико и нам надо вычислить вероятность того, что событие A произойдет не меньше k_1 раз и не больше k_2 раз.

Теорема. Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_n(k_1, k_2)$ того, что событие A появится в n испытаниях не меньше k_1 раз и не больше k_2 раз, приближённо равна определённому интегралу

$$P_n\left(k_1,k_2\right)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x_2}e^{-\frac{z^2}{2}}dz,$$

где $$x_1=\frac{k_1-np}{\sqrt{npk}},\; x_2=\frac{k_2-np}{\sqrt{npk}}.$$

Интеграл справа в формуле называется функцией Лапласа и обозначается:

$$\Phi\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x_2}e^{-\frac{z^2}{2}}dz.$$

Значения функции Лапласа известны. Их можно найти в таблице, расположенной в конце любого задачника по теории вероятностей или в интернете. С учетом функции Лапласа формула для искомой вероятности имеет вид:

$$P_n\left(k_1,k_2\right)\approx\Phi\left(x_2\right)-\Phi\left(x_1\right),$$

где $$x_1=\frac{k_1-np}{\sqrt{npk}},\; x_2=\frac{k_2-np}{\sqrt{npk}}.$$

2. СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА

Определение. *Случайной величиной* называется такая величина, которая в результате опыта может принимать различные значения, причем заранее неизвестно, какое именно. Можно говорить только о вероятности, с которой случайная величина принимает каждое конкретное значение.

Случайная величина бывает дискретной и непрерывной.

Определение. *Дискретная случайная величина* – это величина, значения которой можно перенумеровать (пересчитать).

Пример: Число родившихся девочек среди ста новорожденных за последний месяц - это дискретная случайная величина, которая может принимать значения 1,2,3,…

Определение. *Непрерывная случайная величина* – это такая величина, значения которой заполняют целиком некоторый промежуток числовой оси или всю числовую ось.

Пример: Расстояние, которое пролетит снаряд при выстреле - это непрерывная случайная величина, значения которой принадлежат некоторому промежутку [а; в].

Определение. Любое соотношение, устанавливающее связь между всеми возможными значениями случайной величины и их вероятностями, называется *законом распределения* случайной величины.

Чтобы задать случайную величину, надо указать ее закон распределения. Случайные величины принято обозначать большими латинскими буквами X, Y, Z, а их возможные значения – маленькими латинскими буквами с индексами x_i, y_i, z_i

2.1. Закон распределения дискретной случайной величины

Определение. *Законом распределения дискретной случайной* величины называется таблица, в первой строке которой стоят возможные значения случайной величины, - x_i а во второй - их вероятности p_i.

x_i	x_1	x_2	…...	x_n
p_i	p_1	p_2	…..	p_n

2.2. Функция распределения случайной величины

Определение. *Функцией распределения случайной величины* называют функцию F(x), определяющую вероятность того, что случайная величина X в результате испытания примет значение, меньшее x, т.е.:

$$F\left(x\right)=P\left(X<x\right)$$

Геометрически это равенство можно истолковать так: F(x) –есть вероятность того, что случайная величина примет значение, которое изображается на числовой оси точкой, лежащей левее точки x.

Иногда вместо термина «функция распределения» используется термин «интегральная функция».

Свойства функции распределения:

Свойство 1: Значения функции распределения принадлежат интервалу [0;1].

Свойство 2: F(x) - неубывающая функция.

2.3 Плотность распределения непрерывной случайной величины.

Непрерывную случайную величину можно задать, используя функцию, которую называют плотностью распределения или плотностью вероятности (дифференциальной функцией).

Определение. *Плотностью распределения вероятностей* непрерывной случайной величины X называют функцию f(x)- первую производную от функции распределения F(x).

$$F'(x) = f(x)$$

Свойства плотности распределения:

Свойство 1: Плотность распределения - неотрицательная функция:f(x)>0.

Свойство 2: Несобственный интеграл от плотности распределения в пределах от 0 до ∞ равен 1

$$\int_{0}^{\infty} f(x)dx = 1$$

Плотность распределения часто называют законом распределения непрерывной случайной величины.

2.4. Числовые характеристики случайной величины

Закон распределения полностью описывает случайную величину. Но зачастую достаточно указать только отдельные числовые параметры, до некоторой степени характеризующие существенные черты распределения случайной величины. Такие характеристики, назначение которых – выразить в сжатой форме наиболее существенные особенности распределения, называют числовыми характеристиками случайной величины. В теории вероятностей и математической статистике применяется большое количество различных числовых характеристик, имеющих различное назначение и различные области применения. Из них в настоящем курсе мы введем только некоторые, наиболее часто применяемые.

2.5. Математическое ожидание

Определение. *Математическое ожидание дискретной случайной величины* X - это величина

$$M\left(X\right)=\sum_{i=1}^{n}x_i p_i\ ,$$

где x_i - значения случайной величины, p_i - их вероятности, n- число возможных значений случайной величины.

Определение . *Математическое ожидание непрерывной случайной величины* X – это величина

$$M\left(X\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf\left(x\right)dx,$$

где f(x)- плотность распределения вероятностей

Свойства математического ожидания.

Свойство 1: Математическое ожидание постоянной величины равно этой величине $M\left(c\right)=c$.

Свойство 2: Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания.

$$M\left(cX\right)=cM\left(X\right)\ .$$

Свойство 3: Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий.

$$M\left(XY\right)=M\left(X\right)M\left(Y\right)$$

Свойство 4: Математическое ожидание алгебраической суммы двух случайных величин равно алгебраической сумме математических ожиданий слагаемых.

$$M\left(X+Y\right)=M\left(X\right)+M\left(Y\right).$$

Математическое ожидание - это некоторое среднее значение, вокруг которого группируются значения случайной величины.

2.6. Дисперсия и среднеквадратическое отклонение

Дисперсия показывает, как рассеяны возможные значения случайной величины около ее математического ожидания.

Отклонением случайной величины называют разность между случайной величиной и ее математическим ожиданием.

Определение. *Дисперсией случайной величины* X называется математическое ожидание квадрата отклонения X от ее математического ожидания.

$$D\left(X\right)=M\left(\left(X-M\left(X\right)\right)^2\right)$$

Теорема: Дисперсия случайной величины равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины и квадратом ее математического ожидания.

$$D\left(X\right)=M\left(X^2\right)-\left(M\left(X\right)\right)^2$$

Свойства дисперсии.

Свойство 1: Дисперсия постоянной величины равна 0. $D(c)=0$.

Свойство 2: Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возведя его в квадрат.

$$D(cX)=c^2D(X).$$

Свойство 3: Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин.

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y).$$

Свойство 4: Дисперсия разности двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий.

$$D(X-Y)=D(X)-D(Y).$$

Библиографический список

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 2011.

2. Письменный Д.Т. Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам: учебн. пособие для вузов. – М.: Айрис-Пресс, 2010.

Содержание