МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРОМЫШЛЕННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ДИЗАЙНА»

ВЫСШАЯ ШКОЛА ТЕХНОЛОГИИ И ЭНЕРГЕТИКИ
Кафедра высшей математики

КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Методическое пособие
для студентов всех форм обучения
(III семестр)

Санкт-Петербург
2019

УДК 51(075)
ББК 22.1я7
К786

Кратные и криволинейные интегралы: методическое пособие для студентов всех форм обучения (III семестр)/ сост.: И.Э. Апакова, Н.Л. Белая, Б.Ф. Иванов, Е.Г. Иванова; ВШТЭ СПбГУПТД. – СПб., 2019. – 17 с.

В методическом пособии содержится краткое изложение основных разделов курса теории кратных и криволинейных интегралов: определение и свойства двойных, тройных и криволинейных интегралов, способы их вычисления, примеры решения задач. Предназначено для студентов всех форм обучения (III семестр).

Рецензент: доцент кафедры высшей математики ВШТЭ СПбГУПТД, канд. физ.-мат. наук З.Л. Абжандадзе.

Подготовлено и рекомендовано к изданию кафедрой высшей математики ВШТЭ СПбГУПТД (протокол № 1 от 03.09.2019 г.).

Утверждено к изданию институтом энергетики и автоматизации ВШТЭ СПбГУПТД (протокол № 3 от 26.11.2019 г.).

Редактор и корректор Т.А. Смирнова
Техн. редактор Л.Я. Титова Темплан 2019., поз.131

Подп. к печати 19.12.2019 г. Формат 60x84/16. Бумага тип №1.
Печать офсетная. Объем 1,25 печ.л.; 1,25 уч.-изд.л.
Тираж 70 экз. Изд. № 131. Цена «С». Заказ

Ризограф Высшей школы технологии и энергетики ВШТЭ СПбГУПТД, 198095, Санкт-Петербург, ул. Ивана Черных, 4

ВВЕДЕНИЕ

В настоящем методическом пособии рассмотрены теоретические вопросы, соответствующие первому разделу третьего семестра всех форм обучения: кратные и криволинейные интегралы. Дается материал для подготовки к решению задач по двойным и тройным интегралам для самостоятельной работы по указанным темам. Рассматриваются типовые задания контрольных работ.

Настоящее пособие написано для помощи студентам всех форм обучения в решении задач, а также лучшего усвоения ими теоретического материала по указанным темам и помощи в сдаче экзаменов и зачетов.

Для более детального и глубокого изучения материала по теме «Кратные и криволинейные интегралы» авторы рекомендуют студентам изучить литературу, приведенную в библиографическом списке. Теоретический материал имеет лишь справочный характер. Особое внимание в данной работе уделено разбору примеров.

Для успешного решения задач контрольных работ следует основательно изучить терминологию, важные теоретические положения раздела «Кратные и криволинейные интегралы», которые приведены в настоящем пособии.

Перед началом выполнения контрольной работы рекомендуется изучить теорию по данному разделу в учебниках [1], [2]. Не следует приступать к выполнению контрольного задания, не решив достаточного количества задач, соответствующих этому заданию, которые можно найти в задачниках [3], [4].

1. Двойной интеграл

Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x.y)$, которая определена и непрерывна в замкнутой ограниченной области D плоскости Oxy.

Разобьем область произвольным образом на n элементарных областей $D_1, D_2,\ldots, D_n$, имеющих площади $\Delta S_1, \Delta S_2,\ldots, \Delta S_n$ и диаметры $d_1, d_2,\ldots, d_n$ (диаметром называется наибольшее расстояние между двумя точками границы области), соответственно. В каждой из этих областей выберем произвольную точку $M_i(x_i,y_i)$, i = 1, 2,…, n и вычислим значение функции в этой точке.

Определение 1: Интегральной суммой для функции $z = f(x.y)$ в области D называется выражение:

$$f(M_1)\Delta S_1 + f(M_2)\Delta S_2 + \ldots + f(M_n)\Delta S_n =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta x_i \Delta y_i \quad .$$

Обозначим за λ наибольший из диаметров частичных областей D_i, i = 1, 2,…, n.

Определение 2: Если существует конечный предел при $\lambda \to 0$ интегральной суммы при любом произвольном разбиении области D на части и произвольном выборе точек $M_i(x_i,y_i)$, то такой предел называется двойным интегралом функции $f(x,y)$ в области D:

$$\iint\limits_D f(x,y)dS = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta x_i \Delta y_i = \iint\limits_D f(x,y)dxdy\,.$$

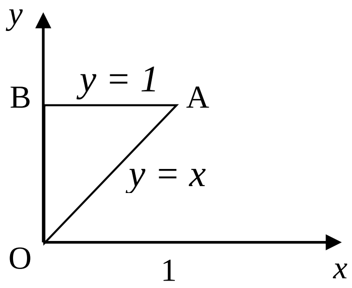
Пример:

Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D xdxdy,$

где область D - треугольник OAB с вершинами $O(0,0)$, $A(1,1)$, $B(0,1)$.

Решение.

Нарисуем область D:



Перейдем от двойного интеграла к повторному. Для этого определим пределы изменения для переменных x и y: $0 \le x \le 1$, $x \le y \le 1$.

Тогда

$$\iint\limits_D xdxdy = \int\limits_0^1 xdx \int\limits_x^1 dy.$$

Интегрируя сначала внутренний интеграл, а затем внешний, получаем:

$$\int\limits_0^1 xdx \int\limits_x^1 dy = \int\limits_0^1 xdx \cdot y \Big|_x^1 = \int\limits_0^1 x(1-x)dx = \int\limits_0^1 (x - x^2)dx =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

2. Замена переменных в двойном интеграле

Многие задачи на двойной интеграл достаточно трудно решить в прямоугольных координатах, но при этом задачи существенно упрощаются, если сделать замену переменных. Заменяя переменные, в подынтегральном выражении появляется якобиан $|J|$:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_D F(u,v)\,|\,J\,|\,dudv.$$

В этой формуле

$$x = \varphi(u,v),\, y = \psi(u,v),$$

$$F(u,v) = f(\varphi(u,v),\psi(u,v)), \left|J\right| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

При переходе в двойном интеграле от прямоугольных координат x и y к полярным ρ и φ, связанными с прямоугольными соотношениями:

$$x = \rho cos\varphi,\ \ y = \rho sin\varphi\ ,$$

имеет место формула

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_D f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi.$$

Если область интегрирования D ограничена лучами $\rho=\alpha,\ \rho=\beta\ (\alpha<\beta)$ и кривыми $\rho=\rho_1(\varphi)$ и $\rho=\rho_2(\varphi)$, где $\rho_1(\varphi)$ и $\rho_2(\varphi)$ однозначные функции при $\alpha \le \varphi \le \beta$, то двойной интеграл может быть вычислен по формуле

$$\iint\limits_D F(\varphi,\rho)\rho d\rho d\varphi = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} F(\varphi,\rho)\rho d\rho,$$

где $F(\varphi,\rho) = f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$.

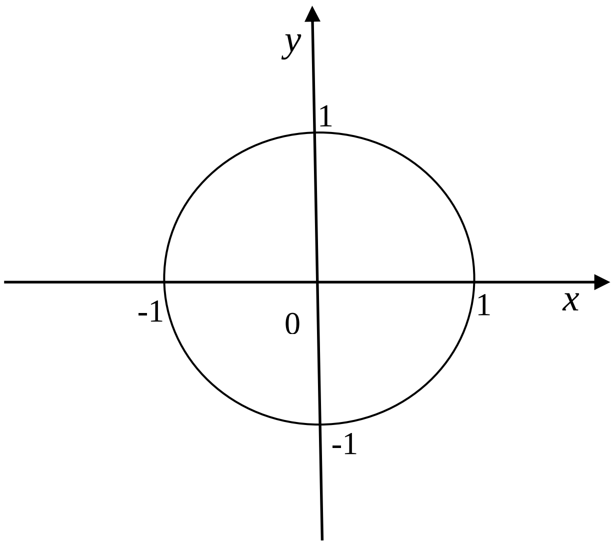
Величину φ полагают постоянной при вычислении внутреннего интеграла

$$\int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} F(\varphi,\rho)\rho d\rho.$$

Пример: Если область интегрирования - круг радиуса R=1 с центром в начале координат, то перейдя к полярным координатам, вычислить

$$\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy.$$

Решение. Изобразим область интегрирования:



Полагая, что $x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi,$

получаем $\sqrt{1-x^2-y^2} = \sqrt{1-(\rho\cos\varphi)^2-(\rho\sin\varphi)^2} = \sqrt{1-\rho^2}$.

Так как в области D координата ρ при любом φ изменяется от 0 до 1, а φ изменяется от 0 до 2π, то

$$\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho\sqrt{1-\rho^2}\,d\rho =$$

$$= \varphi\Big|_0^{2\pi} \int\limits_0^1 (-\frac{1}{2})\sqrt{1-\rho^2}\,d(1-\rho^2) = 2\pi(-\frac{1}{2})\frac{(1-\rho^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 =$$

$$= -\frac{2}{3}\pi(0-1) = \frac{2}{3}\pi.$$

3.Вычисление площадей с помощью двойного интеграла

С помощью двойного интеграла можно вычислять площадь фигуры. Если область задана в виде пересекающихся прямых, парабол, гипербол или показательных функций, то удобнее использовать прямоугольную систему координат. В случае задания области с помощью окружностей или эллипсов лучше работать с полярными координатами.

1. Площадь плоской области D в прямоугольных координатах.

Если область D определена неравенствами $a \le x \le b, \varphi(x) \le y \le \psi(x),$

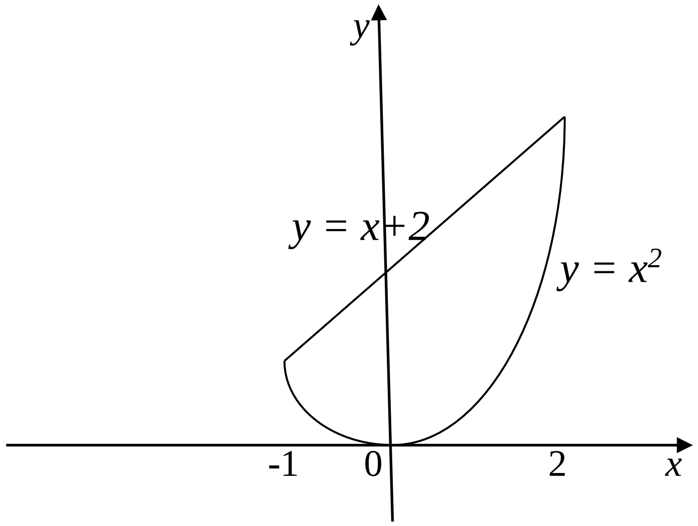
то $$S = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy.$$

2. Площадь в полярных координатах. Если область D определена неравенствами $\alpha \le \varphi \le \beta,\ f(\varphi) \le \rho \le F(\varphi),$

то $$S = \iint\limits_D \rho d\varphi d\rho = \int\limits_\alpha^\beta d\varphi \int\limits_{f(\varphi)}^{F(\varphi)} \rho d\rho.$$

Пример: Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $x=-1, x=2, y=x^2, y=x+2$.

Решение. Изобразим фигуру, площадь которой надо найти:



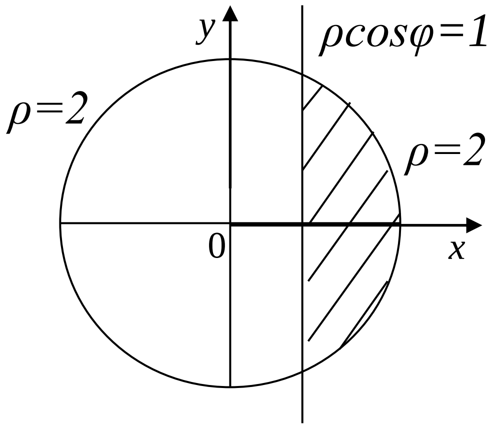
$$S=\iint_D dxdy=\int_{-1}^{2}dx\int_{x^2}^{x+2}dy=\int_{-1}^{2}dx\cdot y\Bigg|_{x^2}^{x+2}=\int_{-1}^{2}(x+2-x^2)dx=$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}+2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{2}=2+4-\frac{8}{3}-\left(\frac{1}{2}-2+\frac{1}{3}\right)=4{,}5.$$

Площадь фигуры равна $4{,}5$ (ед^2).

Пример: Найти площадь фигуры, ограниченной прямой $\rho cos\varphi=1$ и окружностью радиуса $\rho=2$. Имеется в виду область, не содержащая полюса.

Решение. Изобразим фигуру, площадь которой надо найти:



Решение. Найдем точки пересечения окружности и прямой:

$$\begin{cases} \rho = 2, \\ \rho cos\varphi = 1, \end{cases} \Rightarrow 2cos\varphi = 1 \Rightarrow cos\varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{3} \le \varphi \le \frac{\pi}{3},$$

при этом $\dfrac{1}{\cos\varphi} \le \rho \le 2.$

$$S = \iint\limits_D \rho d\rho d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_{\frac{1}{\cos\varphi}}^{2} \rho d\rho = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \cdot \frac{\rho^2}{2}\Bigg|_{1/\cos\varphi}^{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (4 - \frac{1}{\cos^2\varphi})d\varphi = \frac{1}{2}(4\varphi - tg\varphi)\Bigg|_{-\pi/3}^{\pi/3} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(4(\frac{\pi}{3} - (-\frac{\pi}{3})) - (tg\frac{\pi}{3} - tg(-\frac{\pi}{3}))\right) = \frac{1}{2}\left(4 \cdot \frac{2\pi}{3} - 2\sqrt{3}\right) =$$

$$= \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}.$$

Площадь фигуры равна $\dfrac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$ (ед^2).

4. Тройной интеграл

Рассмотрим функцию трех переменных $u = f(x, y, z)$, которая определена и непрерывна в некоторой замкнутой пространственной области V. Разобьем эту область произвольным образом на n элементарных областей $V_1, V_2, \ldots, V_n$, имеющих объемы $\Delta V_1, \Delta V_2, \ldots, \Delta V_n$ и диаметры $d_1, d_2, \ldots, d_n$, соответственно.

В каждой из этих областей выберем произвольную точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$ и вычислим значение функции в этой точке, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Определение 1: Интегральной суммой для функции $u = f(x, y, z)$ в пространственной области V называется выражение:

$$f(M_1)\Delta V_1 + f(M_2)\Delta V_2 + \ldots + f(M_n)\Delta V_n =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta V_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i \ .$$

Обозначим за λ наибольший из диаметров частичных областей V_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Определение 2: Если существует конечный предел при $\lambda \to 0$ интегральной суммы при любом произвольном разбиении области V на части и произвольном выборе точек $M_i(x_i, y_i, z_i)$, то такой предел называется тройным интегралом функции $f(x, y, z)$ в области V:

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dV = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i =$$

$$= \iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz\,.$$

С помощью тройного интеграла находятся:

1. Объем тела

$$V = \iiint\limits_V dxdydz.$$

2. Масса тела, занимающего область V:

$$m = \iiint\limits_V \gamma(x, y, z)dxdydz,$$ где $\gamma(x, y, z)$ - объемная плотность распределения массы в точке $M(x,y,z)$ тела.

3. Статические моменты тела относительно координатных плоскостей:

$$M_{XY} = \iiint\limits_V z\gamma(x, y, z)dxdydz,$$

$$M_{YZ} = \iiint\limits_V x\gamma(x, y, z)dxdydz,$$

$$M_{XZ} = \iiint\limits_V y\gamma(x, y, z)dxdydz.$$

4. Координаты центра тяжести тела $\bar{x} = \dfrac{M_{YZ}}{m}, \bar{y} = \dfrac{M_{ZX}}{m}, \bar{z} = \dfrac{M_{XY}}{m}$.

Пример: Вычислить $\iiint\limits_V x^3 y^2 z dxdydz$, где область V определяется неравенствами: $0 \le x \le 1, 0 \le y \le x, 0 \le z \le xy$.

Решение. Для решения перейдем к повторному интегралу:

$$\iiint\limits_D x^3 y^2 z dxdydz = \int\limits_0^1 x^3 dx \int\limits_0^x y^2 dy \int\limits_0^{xy} zdz.$$

Находим по очереди сначала внутренние интегралы по переменным y и z, а затем внешний интеграл по переменной x:

$$\int_0^1 x^3dx\int_0^x y^2dy\int_0^{xy} zdz = \int_0^1 x^3dx\int_0^x y^2dy\cdot\frac{z^2}{2}\Big|_0^{xy} =$$

$$\int_0^1 x^3dx\int_0^x y^2dy\cdot\frac{(xy)^2}{2} = \frac{1}{2}\int_0^1 x^5dx\int_0^x y^4dy = \frac{1}{2}\int_0^1 x^5dx\cdot\frac{y^5}{5}\Big|_0^x =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^1 x^5dx\cdot\frac{x^5}{5} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\int_0^1 x^{10}dx = \frac{1}{10}\cdot\frac{x^{11}}{11}\Big|_0^1 = \frac{1}{110}.$$

5. Криволинейные интегралы

Рассмотрим функцию $z = f(x, y)$, которая определена и непрерывна в каждой точке M некоторой гладкой кривой C, заданной уравнением: $y = \varphi(x), \quad a \le x \le b$. Разобьем эту кривую произвольным образом на n частичных дуг с длинами Δs_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

В каждой частичной дуге выберем произвольную точку M_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, и вычислим значение функции в этой точке.

Определение 1: Интегральной суммой функции $f(x,y) = f(M)$ по дуге C называется выражение:

$$f(M_1)\Delta s_1 + f(M_2)\Delta s_2 + \ldots + f(M_n)\Delta s_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta s_i\ .$$

Обозначим за λ наибольшую из длин частичных дуг.

Определение 2: Если существует конечный предел при $\lambda \to 0$ интегральной суммы при любом произвольном разбиении кривой C на части и произвольном выборе точек M_i, то такой предел называется криволинейным интегралом 1-го рода:

$$\int\limits_C f(x,y)ds = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta s_i \ .$$

Криволинейный интеграл 1-го рода не зависит от направления пути интегрирования и вычисляется по формуле:

$$\int\limits_C f(x,y)ds = \int\limits_a^b f(x,\varphi(x))\sqrt{1+(\varphi'(x))^2}\,dx.$$

Если подынтегральную функцию интерпретировать как линейную плотность вещества в точке M дуги C, то криволинейный интеграл 1-го рода представляет собой массу материальной дуги C.

Пример: Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_C \frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$, если C - отрезок прямой, соединяющий точки $O(0,0)$ и $A(1,2)$.

Решение. Уравнение прямой, содержащей отрезок $[O,A]$ имеет вид: $y = 2x$, а $y' = 2$. Подставляя в приведенную выше формулу выражения для y и y', будем иметь:

$$\int\limits_C \frac{ds}{\sqrt{x^2+y^2+4}} = \int\limits_0^1 \frac{\sqrt{1+2^2}}{\sqrt{x^2+(2x)^2+4}}dx = \int\limits_0^1 \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5x^2+4}}dx =$$

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+\frac{4}{5}}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+\frac{4}{5}}\right|\Big|_0^1 = \ln\left|\frac{\sqrt{5}+3}{2}\right|.$$

Рассмотрим функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$, которые определены и непрерывны в каждой точке M некоторой гладкой кривой AB, заданной уравнением: $y=\varphi(x), \quad a\le x\le b$, $x = a$ - абсцисса точки A, $x = b$ - абсцисса точки B.

Определение 3: Криволинейные интегралы $\int\limits_{AB} P(x,y)dx$ и $\int\limits_{AB} Q(x,y)dy$ по координатам x и y, или криволинейные интегралы 2-го рода, определяются аналогично, как пределы интегральных сумм функций $P(x,y) = P(M)$ и $Q(x,y) = Q(M)$, взятых по дуге AB, с той лишь разницей, что при составлении этих сумм значения функции в точке M_i умножаются не на длины частичных дуг Δs_i, а на их проекции Δx_i и Δy_i на соответствующие координатные оси. Криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ обозначает сумму криволинейных интегралов указанных видов.

Криволинейный интеграл 2-го рода меняет свой знак на противоположный при изменении направления пути интегрирования.

Механически интеграл 2-го рода можно интерпретировать как работу, которую совершает сила $\overrightarrow{F} = \{P(x,y), Q(x,y)\}$, действующая на точку при перемещении ее по дуге AB.

Криволинейный интеграл 2-го рода вычисляется по формуле:

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_a^b (P(x,\varphi(x)) + Q(x,\varphi(x))\varphi'(x))dx\,.$$

Пример: Вычислить криволинейный интеграл: $\int\limits_{AB}(x^2 - 2xy)dx + (2xy + y^2)dy$ по дуге параболы $y = x^2$ от точки $A(1,\ 1)$ до точки $B(2,\ 4)$.

Решение.

$$\int\limits_{AB} (x^2 - 2xy)dx + (2xy + y^2)dy =$$

$$= \int\limits_1^2 ((x^2 - 2x\cdot x^2) + (2x\cdot x^2 + (x^2)^2)\cdot 2x)dx =$$

$$= \int\limits_1^2 (x^2 - 2x^3 + 4x^4 + 2x^5)dx =$$

$$(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + \frac{4x^5}{5} + \frac{x^6}{3})\Big|_1^2 = 40\frac{19}{30}.$$

Библиографический список

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов.– М.: Наука, 2010. Т 2.

2. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. Полный курс. – М.: Айрис-Пресс, 2009.

3. Сборник задач по высшей математике. С контрольными работами. /сост.: К.Н. Лунгу, Д.Т. Письменный, С.Н. Федин, Ю.А. Шевченко. – М.: Айрис-Пресс, 2008.

4. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике. – СПб., М., Краснодар: Лань, 2005.

Содержание