МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРОМЫШЛЕННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ДИЗАЙНА»

ВЫСШАЯ ШКОЛА ТЕХНОЛОГИИ И ЭНЕРГЕТИКИ

Кафедра высшей математики

МАТЕМАТИКА

Методические указания и контрольные задания

для студентов заочной формы ускоренного обучения

(I семестр)

Санкт-Петербург

2019

УДК 51(07.07)
ББК 22.1р
О-627

Математика: методические указания и контрольные задания для студентов заочной формы ускоренного обучения (I семестр) / сост.: Н.Л. Белая, Б.Ф. Иванов, И.Э. Апакова, И.Ю. Малова, М.Э. Юдовин; ВШТЭ СПбГУПТД. СПб., 2019. – 36 с.

Приводится теоретический материал с разобранными решениями типичных примеров из соответствующих контрольных работ. Предназначено для студентов заочной формы ускоренного обучения всех направлений (I семестр).

Рецензент: зав. кафедрой высшей математики № 1 СПбГЭТУ ЛЭТИ д-р физ.-мат. наук Н.А. Бодунов.

Подготовлено и рекомендовано к изданию кафедрой высшей математики ВШТЭ СПбГУПТД (протокол № 6 от 06.02.2019 г.).

Утверждено к изданию методической комиссией ВШТЭ СПбГУПТД (протокол № 3 от 07.02.2019 г.).

Редактор и корректор В.А Басова

Техн. редактор Л.Я.Титова Темплан 2019 г., поз.71

Подп. к печати 17. 10. 2019. Формат 60x84/16. Бумага тип №1.
Печать офсетная. Объем 2,5 печ.л.; 2,5 уч.-изд.л.
Тираж 70 экз. Изд. № 71. Цена «С». Заказ

Ризограф Высшей школы технологии и энергетики ВШТЭ СПбГУПТД, 198095, Санкт-Петербург, ул. Ивана Черных, 4.

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящих методических указаниях рассмотрены вопросы, соответствующие первому семестру заочной индивидуальной формы обучения, дается теоретический материал для подготовки к решению задач из контрольных работ № 1 и № 2 с подробным разбором примеров из указанных контрольных.

Настоящие методические указания написаны для помощи студентам заочной индивидуальной формы обучения в решении заданий, а также для лучшего усвоения ими теоретического материала по указанным темам.

Для более детального и глубокого изучения материала по теме «Дифференциальные уравнения авторы рекомендуют студентам изучить литературу, приведенную в библиографическом списке.

НЕОБХОДИМЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ФОРМУЛЫ И ВЫРАЖЕНИЯ

В этом разделе в виде краткого справочника приведены теоретические материалы, необходимые для решения контрольных работ за первый семестр.

Определителем второго порядка называют число, вычисляемое по следующему правилу:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \quad . \tag{1}$$

Определителем третьего порядка называют число, вычисляемое по следующему правилу:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \tag{2}$$

Это же выражение называется «разложением определителя третьего порядка по элементам первой строки».

Длина отрезка AB:

$$d=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2+\left(z_B-z_A\right)^2}\ , \tag{3}$$

где x_A, y_A, z_A - координаты точки A, а x_B, y_B, z_B - координаты точки B соответственно.

Общее уравнение прямой на плоскости:

$$ax+by+c=0\ . \tag{4}$$

Уравнение прямой с угловым коэффициентом:

$$y=kx+b\ . \tag{5}$$

Здесь k - *угловой коэффициент*, равный тангенсу угла наклона прямой к оси Ox:

$$k=tg\alpha\ ,$$

а параметр b равен отрезку, отсекаемому прямой на оси Oy.

Условия параллельности и перпендикулярности прямых:

Если прямая l_1 параллельна прямой l_2, то их угловые коэффициенты равны:

$$k_1=k_2\ . \tag{6}$$

Если прямая l_1 перпендикулярна прямой l_2, то их угловые коэффициенты связаны соотношением:

$$k_2=-\frac{1}{k_1}\ . \tag{7}$$

Уравнение прямой A_1A_2, проходящей через две заданные точки $A_1\left(x_1, y_1\right)$ и $A_2\left(x_2, y_2\right)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \quad . \tag{8}$$

Уравнение прямой A_1A_2, проходящей через данную точку $M_0\left(x_0, y_0\right)$ с данным угловым коэффициентом k:

$$y-y_0=k\left(x-x_0\right) \tag{9}$$

Вектор – это направленный отрезок прямой, обозначается $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$.

Длиной или *модулем* вектора $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ называется длина отрезка AB и обозначается $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\vec{a}\right|=d$.

Координатами вектора $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ называется тройка чисел:

$$\begin{aligned} a_x &= x_B - x_A, \\ a_y &= y_B - y_A, \\ a_z &= z_B - z_A, \end{aligned} \tag{10}$$

и вектор через координаты обозначается:

$$\vec{a}=\left(a_x, a_y, a_z\right).$$

Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\alpha \quad ,$$

где α угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Через координаты вектора скалярное произведение находится по формуле:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z \quad , \tag{11}$$

где (a_x, a_y, a_z) - координаты вектора $\vec{a}$, (b_x, b_y, b_z) - координаты вектора $\vec{b}$.

Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ находится по формуле:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}. \tag{12}$$

Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется новый вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий трем условиям:

1. $|\vec{c}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\alpha$;
2. Вектор $\vec{c}$ перпендикулярен плоскости, в которой расположены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
3. Направление вектора $\vec{c}$ выбрано так, что наблюдатель, глядя с конца вектора $\vec{c}$ на плоскость, в которой расположены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, видит кратчайший поворот от первого сомножителя ко второму против часовой стрелки.

Векторное произведение вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ обозначают $\vec{a}\times\vec{b}$ и вычисляют по формуле:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}, \tag{13}$$

где (a_x, a_y, a_z) - координаты вектора $\vec{a}$, (b_x, b_y, b_z) - координаты вектора $\vec{b}$.

Смешанным произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, вычисляемое по формуле:

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} . \qquad (14)$$

Общее уравнение плоскости в пространстве имеет вид:

$$Ax + By + Cz + D = 0 . \qquad (15)$$

Вектор $\vec{n} = \left(A, B, C\right)$ называется *нормальным вектором плоскости* или *нормалью к плоскости*.

Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки, имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 , \qquad (16)$$

где $\left(x_1, y_1, z_1\right)$ - координаты точки A_1,

$\left(x_2, y_2, z_2\right)$ - координаты точки A_2,

$\left(x_3, y_3, z_3\right)$ - координаты точки A_3.

Канонические уравнения прямой в пространстве имеют вид:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} . \qquad (17)$$

Здесь $M_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$ - точка, лежащая на прямой, $M\left(x, y, z\right)$- произвольная точка на этой же прямой, $\vec{S} = \left(m, n, p\right)$ - *направляющий вектор данной прямой*.

Уравнения прямой в пространстве, проходящей через две данные точки $A_1\left(x_1, y_1, z_1\right)$ и $A_2\left(x_2, y_2, z_2\right)$, находятся по формуле:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \quad . \tag{18}$$

Угол между прямой и плоскостью находится по формуле:

$$\sin\varphi=\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}} \quad , \tag{19}$$

где A, B, C - координаты нормали к плоскости, а m, n, p - координаты направляющего вектора прямой.

Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_3}$, находится по формуле:

$$S_n=\left|A_1A_2\times A_1A_3\right|=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}. \tag{20}$$

Объём параллелепипеда, построенной на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ находится по формуле:

$$V_{пар}=\pm\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \quad . \tag{21}$$

Знак берётся так, чтобы объём V был положительным.

Уравнения прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данной плоскости ищется по формуле:

$$\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{C} \quad , \tag{22}$$

где $M_0(x_0, y_0, z_0)$ - точка, через которую проходит прямая, a(A, B, C) - координаты нормального вектора плоскости.

Кривые второго порядка

Алгебраическое уравнение второй степени в общем виде:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

Возможны лишь следующие случаи:

Уравнение не определяет ни одной точки на плоскости. Например:

$$x^2 + y^2 + 1 = 0.$$

Уравнение может определять одну точку на плоскости. Например, уравнение:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 0$$

определяет единственную точку (1, 2).

Уравнение может определять две прямые. Например, уравнение:

$$(y-2x+1)(y-2x+2) = 0$$

определяет две параллельные прямые: $y-2x+1=0$; $y-2x+2=0$.

Уравнение может определять окружность:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5^2.$$

Кроме того, уравнение может определять одну из кривых: эллипс, гиперболу или параболу, смещенную относительно начала координат и повернутую на некоторый угол.

Каноническое уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{23}$$

Каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{24}$$

Каноническое уравнение параболы

$$y^2 = 2px. \tag{25}$$

Пределы. Непрерывность функции. Производные. Исследование функции

Определение 1. Число A называется *пределом функции* $y = f(x)$ при x, стремящемся к a, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, будет выполняться неравенство:

$$0 < |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Тот факт, что число A является пределом функции $y = f(x)$ при x, стремящемся к a, записывается следующим образом:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

Определение 2. Число A_1 называется *пределом функции* $y = f(x)$ *слева* при x, стремящемся к a, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $x \in (a - \delta, a)$, будет выполняться неравенство:

$$0 < |f(x) - A_1| < \varepsilon.$$

Тот факт, что число A_1 является пределом функции $y = f(x)$ слева при x, стремящемся к a, записывается следующим образом:

$$\lim_{x\to a-0} f\left(x\right) = A_1 .$$

Определение 3. Число A_2 называется *пределом функции* $y = f\left(x\right)$ *справа* при x, стремящемся к a, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $x \in \left(a, a+\delta\right)$, будет выполняться неравенство

$$0 < \left| f\left(x\right) - A_1 \right| < \varepsilon .$$

Тот факт, что число A_2 является пределом функции $y = f\left(x\right)$ справа при x, стремящемся к a, записывается следующим образом:

$$\lim_{x\to a+0} f\left(x\right) = A_2 .$$

Первый замечательный предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 . \tag{26}$$

Второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e . \tag{27}$$

Приведём ещё два важных предела, которые понадобятся при решении примеров:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{A}{x} = 0 , \tag{28}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{A}{\varepsilon} = \infty . \tag{29}$$

Здесь A - любое число.

Определение 4. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* $x = a$, если существует конечный предел функции в этой точке и он равен значению функции в этой точке:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A = f(a).$$

Если предел не существует или не равен значению функции в данной точке, или равен бесконечности (хотя бы один из пределов слева или справа), то функция в этой точке имеет *разрыв.*

Определение 5. Точка разрыва называется *точкой разрыва первого рода*, если существуют конечные пределы слева и справа.

Определение 6. Точка разрыва называется *точкой разрыва второго рода*, если хотя бы один из односторонних пределов (слева или справа) не существует или равен бесконечности.

Производная сложной функции вычисляется по формуле:

$$f'_x(u(x)) = f'_u(u) \cdot u'_x. \tag{30}$$

Теорема 1. Если дифференцируемая на интервале (a,b) функция $y = f(x)$ возрастает (убывает), то $f'(x) \geq 0$ $\left(f'(x) \leq 0\right)$ на этом интервале. Верно и обратное. Если $f'(x) > 0$ $\left(f'(x) < 0\right)$ на интервале (a,b), то функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) на этом интервале.

Теорема 2. Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке x_0, то её производная в этой точке равна нулю:

$$f'(x_0) = 0.$$

Теорема 3. Если непрерывная функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0, причем $f'(x_0) = 0$, и при переходе через эту точку (слева направо) производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус, то точка x_0 есть точка максимума, с минуса на плюс – точка минимума.

Теорема 4. Если в точке x_0 первая производная функции $y = f(x)$ равна нулю: $f'(x_0) = 0$, а вторая производная в точке x_0 существует и отлична от нуля, то при $f''(x_0) < 0$ в точке x_0 функция $y = f(x)$ имеет максимум, а при $f''(x_0) > 0$ в точке x_0 функция $y = f(x)$ имеет минимум.

Теорема 5. Если во всех точках интервала (a,b) вторая производная функции $y = f(x)$ отрицательна, т. е. $f''(x_0) < 0$, то кривая на этом интервале выпукла. Если во всех точках интервала (a,b) вторая производная функции $y = f(x)$ положительна, т. е. $f''(x_0) > 0$, то кривая на этом интервале вогнута.

Определение 7. Число M называется наибольшим значением функции $y = f(x)$ на отрезке $[a,b]$, если для всех $x \in [a,b]$ выполняется неравенство $f(x) \leq M$. Аналогично, число N называется наименьшим значением функции $y = f(x)$ на отрезке $[a,b]$, если для всех $x \in [a,b]$ выполняется неравенство $f(x) \geq N$.

Наибольшее и наименьшее значения функции достигаются в точках экстремума или на концах отрезка $[a,b]$.

Определение 8. Асимптотой кривой называется прямая, расстояние до которой от точки, лежащей на кривой, стремится к нулю при неограниченном удалении от начала координат этой точки по кривой.

Неопределенный интеграл. Формула вычисления определенного интеграла

Определение 1. Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $y=f(x)$ на интервале (a,b), если в каждой точке этого интервала выполняется равенство $F'(x)=f(x)$.

Определение 2. Множество всех первообразных для функции $y=f(x)$ на интервале (a,b) называется неопределенным интегралом от функции $y=f(x)$: $\int f(x)dx = F(x)+c, c = const$.

Формула Ньютона – Лейбница. Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $F(x)$ какая-либо её первообразная на $[a,b]$, то имеет место формула:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a).$$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №1

Задачи №№ 11-20

Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$: $A_1(1,2,-3)$, $A_2(2,-1,3)$, $A_3(1,4,0)$, $A_4(-1,5,8)$.

1. Длину ребра A_1A_2 находим, используя формулу (3) как расстояние между двумя точками:

$$|A_1A_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

Так как $A_1(1,2,-3)$, $A_2(2,-1,3)$, то

$$|A_1A_2| = \sqrt{(2-1)^2+(-1-2)^2+(3-(-3))^2} = \sqrt{1+9+36} = \sqrt{46}.$$

2. Угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4.

Сначала вычисляем координаты векторов по формуле (10):

$$\overrightarrow{A_1A_2} = (x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1) = (1,-3,6),$$

$$\overrightarrow{A_1A_4} = (x_4-x_1, y_4-y_1, z_4-z_1) = (-2,3,11),$$

а затем их скалярное произведение, используя формулу (11):

$$\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_4} = 1\cdot(-2)+(-3)\cdot 3+6\cdot 11 = 55.$$

Длина ребра A_1A_2 вычислена в п.1 $|A_1A_2| = \sqrt{46} \approx 6,8$.

Вычислим длину ребра A_1A_4 аналогично:

$$|A_1A_4| = \sqrt{(-1-1)^2+(5-2)^2+(8+3)^2} = \sqrt{4+9+121} = \sqrt{134} \approx 11,6.$$

Длина ребра A_1A_2 совпадает с длиной вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$, а длина ребра A_1A_4 совпадает с длиной вектора $\overrightarrow{A_1A_4}$. Подставим полученные данные в формулу (12):

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_4}}{\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right| \cdot \left|\overrightarrow{A_1A_4}\right|} = \frac{55}{\sqrt{46}\sqrt{134}} \approx 0,7 .$$

Окончательно получаем:

$$\alpha = arccos\left(0,7\right) \approx 0,7954 .$$

3. Угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$. Для начала запишем уравнение прямой A_1A_4, используя формулу (17). Направляющим вектором может быть вектор, соединяющий две точки на прямой, например $\overrightarrow{A_1A_4}$. Из пункта 2 возьмем координаты этого вектора:

$$\overrightarrow{A_1A_4} = \left(-2,3,11\right).$$

Таким образом, $m = -2, n = 3, p = 11$.

Окончательно уравнение прямой A_1A_4 имеет вид:

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+3}{11}.$$

Составим уравнение плоскости $A_1A_2A_3$, пользуясь формулой (16):

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+3 \\ 1 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \left(x-1\right)\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - \left(y-2\right)\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + \left(z+3\right)\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(x-1\right)\left(-9-12\right) - \left(y-2\right)\left(3-0\right) + \left(z+3\right)\left(2-0\right) =$$

$$-17x - 3y + 2z + 29 = 0.$$

Угол между прямой и плоскостью определяется по формуле (19): Подставляя в неё наши данные, получаем:

$$\sin\varphi = \frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}} =$$

$$= \frac{(-17)\cdot(-2)+(-3)\cdot 3+2\cdot 11}{\sqrt{(-17)^2+(-3)^2+2^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+3^2+11^2}} \approx 0,23.$$

Таким образом,

$$\varphi = \arcsin(0,23) \approx 0,232.$$

4. Площадь грани $A_1A_2A_3$ - $S_{A_1A_2A_3}$ - это площадь треугольника, построенного на векторах $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_3}$. Площадь треугольника равна половине площади параллелограмма, построенного на этих же векторах:

$$S_{A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}\right|.$$

Для вычисления площади найдем:

1) координаты векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_3}$ (см. п.2):

$$\overrightarrow{A_1A_2} = (x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1) = (1,-3,6),$$

$$\overrightarrow{A_1A_3} = (x_3-x_1, y_3-y_1, z_3-z_1) = (0,2,3).$$

2) векторное произведение $\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}$, пользуясь формулой (13):

$$\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -3 & 9 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -27\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}.$$

3) длину векторного произведения $\left|\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}\right|$ по формуле (3):

$$\left|\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}\right| = \sqrt{(-27)^2+(-3)^2+2^2} = \sqrt{742}\,.$$

Тогда площадь грани $A_1A_2A_3$

$$S_{A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{742} \approx 8,7\left(ед^2\right).$$

5. Объем пирамиды $A_1A_2A_3A_4$ равен 1/6 объема параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$. Находим координаты векторов по формуле (10):

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \left(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\right) = \left(1,-3,6\right);$$

$$\overrightarrow{A_1A_3} = \left(x_3-x_1, y_3-y_1, z_3-z_1\right) = \left(0,2,3\right);$$

$$\overrightarrow{A_1A_4} = \left(x_4-x_1, y_4-y_1, z_4-z_1\right) = \left(-2,3,11\right).$$

Объем параллелепипеда, построенного на векторах, равен смешанному произведению этих векторов (формула (14)):

$$(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1A_4}) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 11 \end{vmatrix} = 55\left(ед^3\right).$$

Окончательно объем пирамиды

$$V_{пир} = \frac{1}{6}(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1A_4}) = \frac{55}{6}\left(ед^3\right) \approx 9,17\left(ед^3\right).$$

6. Уравнения прямой A_1A_2 находятся по формуле (18):

$$\frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{p},$$

где (x_1, y_1, z_1) – координаты точки, через которую проходит прямая. В нашем примере это точка $A_1(1,2,-3)$, а (m,n,p) – координаты направляющего вектора прямой.

Так как прямая A_1A_2 проходит через две точки, то

$$m = x_2 - x_1 = 2 - 1 = 1,$$

$$n = y_2 - y_1 = -1 - 2 = -3,$$

$$p = z_2 - z_1 = 3 - (-3) = 6.$$

Итак, уравнения прямой A_1A_2:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+3}{6}.$$

7. Уравнение плоскости $A_1A_2A_3$ было найдено в п.3:

$$-17x - 3y + 2z + 29 = 0.$$

8. Уравнения высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$. Это фактически задача о нахождении уравнений прямой, проходящей через заданную точку (вершина A_4) перпендикулярно заданной плоскости (плоскость $A_1A_2A_3$). Воспользуемся формулой (22):

$$\frac{x-x_0}{A} = \frac{y-y_0}{B} = \frac{z-z_0}{C}.$$

Подставив координаты точки $A_4(-1,5,8)$ и координаты нормали плоскости $A_1A_2A_3$ $\vec{n} = (-17,-3,2)$ в формулу (22), получаем:

$$\frac{x+1}{-17} = \frac{y-5}{-3} = \frac{z-8}{2}.$$

9. Чертёж. Вспоминаем косоугольную проекцию (школьный курс) и рисуем как получится.

Задачи №№ 21-30

Рассмотрим один из вариантов задачи.

Даны вершины $A(2,3), B(9,4), C(6,8)$ трапеции $ABCD$, причём $AD \parallel BC$. Известно, что диагонали трапеции взаимно перпендикулярны. Найти координаты вершины D этой трапеции.

Эта задача на тему «прямая на плоскости». Уравнение прямой BC найдем, используя формулу (8):

$$\frac{x-9}{6-9}=\frac{y-4}{8-4}.$$

Преобразуем полученное равенство в общее уравнение прямой на плоскости (смотри формулу (4)):

$$4x+3y-48=0.$$

Уравнение стороны AD найдем как уравнение прямой, проходящей через точку A параллельно прямой BC. Нам потребуется угловой коэффициент прямой BC. Проведём преобразования:

$$4x+3y-48=0,\ 3y=-4x+48,\ y=\frac{-4x+48}{3},\ y=-\frac{4}{3}x+\frac{48}{3}.$$

Посмотрев на формулу (5), получаем, что угловой коэффициент прямой BC равен $k_{BC}=-\dfrac{4}{3}$. По условию параллельности прямых (формула (6)):

$$k_{AD}=k_{BC}=-\frac{4}{3}.$$

Далее, пользуясь формулой (9), получаем:

$$y-3=-\frac{4}{3}(x-2),\ y-3+\frac{4}{3}x-\frac{8}{3}=0,\ 4x+3y-17=0.$$

Задачи №№ 31-40

Это задание на тему «Кривые второго порядка». Рассмотрим следующий пример. Дано: составить уравнение линии, каждая точка которой удалена от точки $A(5,1)$ ровно на 6 единиц.

Обозначим точку искомой кривой $M(x,y)$. Чтобы найти расстояние между двумя точками, воспользуемся формулой (3), записанной для плоскости:

$$d=\sqrt{\left(x_M-x_A\right)^2+\left(y_M-y_A\right)^2}\ .$$

Подставляем данные задачи в эту формулу:

$$\sqrt{(x-5)^2+(y-1)^2}=6\,,$$

возводя обе части этого равенства в квадрат, имеем:

$$(x-5)^2+(y-1)^2=6^2\ .$$

Итак, получили каноническое уравнение окружности. В более сложной задаче надо провести ряд алгебраических преобразований и получить одно из уравнений: эллипса (формула (23)), гиперболы (формула (24)) или параболы (формула (25)).

Задачи №№ 41-50

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+7x+2}{9x^2+3x+4}$.

Прямая подстановка даёт неопределённость типа $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Находим старшую степень переменной x и выносим соответствующее слагаемое за скобки:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+7x+2}{9x^2+3x+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{7}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(9+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{7}{x}+\frac{2}{x^2}}{9+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}.$$

В последнем действии сократились x^2. Учитывая что, слагаемые вида $\frac{A}{x}$ и вида $\frac{A}{x^2}$ при $x\to\infty$ стремятся к нулю (формула (28)), получаем:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{7}{x}+\frac{2}{x^2}}{9+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}=\frac{1}{9}.$$

б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-6x+9}{x-3}$.

При непосредственной подстановке получаем неопределённость вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Так как $x_1=x_2=3$ корни квадратного уравнения $x^2-6x+9=0$, то раскладывая числитель на множители, получаем:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-6x+9}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)^2}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x-3)=0 .$$

Ещё один вариант пункта б): $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2-\sqrt{8-x^2}}{x-2}$.

Опять неопределённость вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Домножаем и числитель, и знаменатель на выражение, сопряжённое выражению в числителе данной дроби, в нашем случае на $2+\sqrt{8-x^2}$. Получаем:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2-\sqrt{8-x^2}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(2-\sqrt{8-x^2}\right)\left(2+\sqrt{8-x^2}\right)}{\left(2+\sqrt{8-x^2}\right)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{4-8+x^2}{\left(2+\sqrt{8-x^2}\right)(x-2)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{\left(2+\sqrt{8-x^2}\right)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{\left(2+\sqrt{8-x^2}\right)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)}{\left(2+\sqrt{8-x^2}\right)}=$$

$$=\frac{2+2}{2+\sqrt{8-2^2}}=\frac{4}{4}=1 \quad .$$

в) Задание на первый замечательный предел (формула (26)) и тригонометрические формулы из программы средней школы. В качестве примера рассмотрим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}\cos x=\lim_{x\to 0}\frac{5\sin 5x}{5x}\lim_{x\to 0}\cos x=$$

$$\lim_{x\to 0}5\left(\frac{\sin 5x}{5x}\right)\lim_{x\to 0}\cos x=5\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 5x}{5x}\right)\lim_{x\to 0}\cos x=5\cdot 1\cdot 1=5\,.$$

Первый предел равен единице по формуле (26), второй - тоже единице (прямая подстановка).

г) Это задание на второй замечательный предел (формула (27)) и алгебраические преобразования из курса средней школы. Рассмотрим:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x-1}\right)^x \quad .$$

Обозначим $x-1=y$, тогда $x+5=y+6$, $x=y+1$. Подставим полученные равенства в исходный предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x-1}\right)^x=\lim_{y\to\infty}\left(\frac{y+6}{y}\right)^{y+1}=\lim_{y\to\infty}\left(\frac{y}{y}+\frac{6}{y}\right)^{y+1}=$$

$$=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{6}{y}\right)^{y+1}=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{6}{y}\right)^{y}\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{6}{y}\right)^{1}.$$

Для получения последнего равенства использовали формулу $a^{m+n}=a^m a^n$ и свойства пределов. Далее:

$$\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{6}{y}\right)^{y}\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{6}{y}\right)^{1}=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{6}{y}\right)^{\frac{y}{6}6}\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{6}{y}\right)^{1}=$$

$$=\left(\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{6}{y}\right)^{\frac{y}{6}}\right)^6\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{6}{y}\right)^{1}=e^6.$$

Предел в первой скобке равен e по формуле (27), а второй предел равен единице (прямая проверка).

Задачи №№ 51-60

Задана функция $f(x)=5^{\frac{1}{x+2}}$ и два её аргумента $x_1=+1$, $x_2=-2$. Требуется:

1. Установить, является ли данная функция непрерывной или разрывной для каждого из данных значений аргумента.
2. В случае разрыва функции найти её пределы в точках разрыва слева и справа.
3. Сделать схематический чертёж.

Рассмотрим решение задачи. Подставляем в функцию значение аргумента $x_1 = +1$:

$$f(1) = 5^{\frac{1}{1+2}} = 5^{\frac{1}{3}} .$$

Найдём предел функции в этой точке:

$$\lim_{x\to 1} 5^{\frac{1}{1+2}} = 5^{\frac{1}{3}} .$$

Предел функции существует и равен значению функции в этой точке. Значит в данной точке функция непрерывна (см. определение 4). При подстановке в функцию значение аргумента $x_2 = -2$ в степени получаем деление на ноль. В этой точке функция не существует. Найдём односторонние пределы рассматриваемой функции в точке $x_2 = -2$ (см. определения 2 и 3, а также формулы (28) и (29)):

$$\lim_{x\to -2-0} 5^{\frac{1}{-2-0+2}} = 5^{\frac{1}{-0}} = 5^{-\infty} = 0 ,$$

$$\lim_{x\to -2+0} 5^{\frac{1}{-2+0+2}} = 5^{\frac{1}{0}} = 5^{\infty} = \infty .$$

Следовательно, в точке $x_2 = -2$ имеется разрыв и это разрыв второго рода (см. определение 6).

Что касается чертежа, то это материал средней школы и здесь не рассматривается.

Задачи №№ 61-70

Найти производные данных функций. Таблица производных и правила дифференцирования общедоступны и входят в школьный курс, так что здесь не приводятся.

Рассмотрим первые три примера на дифференцирование сложной функции (см. формулу (30)).

а) $$y=\frac{x^2}{(2x-3)^5}\,,\quad \text{найти } y'.$$

$$y'=\left(\frac{x^2}{(2x-3)^5}\right)'=\frac{\left(x^2\right)'\cdot(2x-3)^5-x^2\cdot\left((2x-3)^5\right)'}{\left((2x-3)^5\right)^2}=$$

$$=\frac{2x\cdot(2x-3)^5-x^2\cdot 5(2x-3)^4\cdot 2}{(2x-3)^{10}}.$$

б) $$y=\frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}\,,\quad \text{найти } y'.$$

$$y'=\left(\frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}\right)'=\frac{\left(\sin^3 x\right)'\cdot\left(1+\cos^2 x\right)-\sin^3 x\cdot\left(1+\cos^2 x\right)'}{\left(1+\cos^2 x\right)^2}=$$

$$=\frac{3\sin^2 x(\cos x)\cdot\left(1+\cos^2 x\right)-\sin^3 x\cdot(0+2\cos x\sin x)}{\left(1+\cos^2 x\right)^2}.$$

в) $$y=\ln x\cdot\frac{x-2}{x},\quad \text{найти } y'.$$

$$y'=\left(\ln x\cdot\frac{x-2}{x}\right)'=(\ln x)'\cdot\frac{x-2}{x}+\ln x\cdot\left(\frac{x-2}{x}\right)'=$$

$$=\frac{1}{x}\cdot\frac{x-2}{x}+\ln x\cdot\frac{1\cdot x-(x-2)\cdot 1}{x^2}.$$

г) Рассмотрим последний пример.

Дано $y=(\sin x)^{tgx}$, найти y'. Для начала прологарифмируем исходную функцию по основанию e. Получим:

$$\ln y=\ln(\sin x)^{tgx}=tgx\cdot\ln(\sin x).$$

Теперь вычислим производную от неявной функции (см. литературу из библиографического списка):

$$(\ln y)'=\frac{1}{y}\cdot y'=(tgx)'\cdot\ln(\sin x)+tgx\cdot(\ln(\sin x))'=$$

$$=\frac{1}{\cos x}\cdot\ln(\sin x)+tgx\cdot\frac{1}{\sin x}(\sin x)'=$$

$$=\frac{1}{\cos x}\cdot\ln(\sin x)+tgx\cdot\frac{1}{\sin x}\cos x.$$

Находим y':

$$y'=\left(\frac{1}{\cos x}\cdot\ln(\sin x)+tgx\cdot\frac{1}{\sin x}\cos x\right)\cdot y.$$

Подставив вместо y его значение из условия задачи, окончательно получаем:

$$y'=\left(\frac{1}{\cos x}\cdot\ln(\sin x)+tgx\cdot\frac{1}{\sin x}\cos x\right)\cdot(\sin x)^{tgx}.$$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №2

Задачи №№ 71-80

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^2 - 10x$ на отрезке $[1, 6]$.

Нам понадобятся теоремы 1 - 4 и определение 7. Находим производную данной функции

$$y' = \left(x^2 - 10x\right)' = 2x - 10 .$$

Приравниваем её к нулю (теорема 2):

$$y' = 2x - 10 = 0 .$$

Получаем корень $x = 5$. Находим значение функции в этой точке и на концах интервала (определение 7)

$$y_1 = 1^2 - 10 \cdot 1 = 1 - 10 = -9 ;$$

$$y_2 = 5^2 - 10 \cdot 5 = 25 - 50 = -25 ;$$

$$y_3 = 6^2 - 10 \cdot 6 = 36 - 60 = -24 .$$

Сравниваем полученные значения функции между собой и выбираем из них наибольшее и наименьшее: наибольшее значение достигается на левой границе интервала в точке $x = 1$ и равно $y_1 = -9$, наименьшее - в точке экстремума $x = 5$ и равно $y_2 = -25$.

Задачи №№ 81-90

Исследование функции $y = f(x)$. Понадобятся теоремы 1-5. План работы:

1. Найти область определения функции - множество таких значений переменной x, при которых данная функция определена. Например, область

определения функции функция $y = \ln x$ - это промежуток $(0, \infty)$, а область определения функции $y = \dfrac{1}{x-2}$ есть объединение двух промежутков $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$, так как в точке $x = 2$ эта функция не определена.

Найти точки разрыва функции (точки, где функция не существует) и вычислить пределы слева и справа в этих точках (определения 2 и 3).

2. Найти множество значений функции, то есть промежуток задания переменной y. Например, для функции $y = e^x$ это интервал $y \in (0, +\infty)$.

3. Найти точки пересечения данной функции с координатными осями.

4. Найти интервалы возрастания и убывания функции (теорема 1) и экстремумы функции, для чего необходимо вычислить производную данной функции $y = f(x)$, затем приравнять её к нулю (теорема 2):

$$y' = f'(x) = 0,$$

получить корни производной. Используя теоремы 2 и 3, найти экстремумы функции, а также интервалы ее монотонности.

5. Найти промежутки выпуклости и вогнутости функции, для чего необходимо вычислить вторую производную данной функции, приравнять ее к нулю, найти корни. Используя теорему 5, найти требуемые промежутки.

6. Найти асимптоты графика функции (определение 8) по формулам:

$$y = kx + b$$

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - kx \right)$$

Заметим, что при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$ могут быть разные пределы. Таким образом, асимптот может быть две.

7. Построить график функции.

Задачи №№ 91-100

Нахождение частных производных первого и второго порядка.

Дана функция $z = \ln\left(y + x^2\right)$, доказать, что

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} - 2\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{4y}{\left(y + x^2\right)^3}.$$

В задаче дана функция двух переменных x и y. Соответственно имеется две производные. Они называются частными производными по переменным x и y, соответственно и обозначаются:

$$\frac{\partial z}{\partial x} \text{ и } \frac{\partial z}{\partial y}.$$

При нахождении частной производной по x надо помнить, что в этом случае переменная y считается постоянной. Итак,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\ln\left(y + x^2\right)\right) = \frac{1}{y + x^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(y + x^2\right) = \frac{2x}{y + x^2}.$$

Аналогично при нахождении частной производной по переменной y переменная x считается постоянной. Итак,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\ln\left(y + x^2\right)\right) = \frac{1}{y + x^2} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(y + x^2\right) = \frac{1}{y + x^2}.$$

Частных производных второго порядка у нас уже четыре.

Частная производная второго порядка от функции z по переменной x:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2x}{y+x^2}\right) = \frac{(2x)'\cdot\left(y+x^2\right)-(2x)\cdot\left(y+x^2\right)'}{\left(y+x^2\right)^2} =$$

$$= \frac{2\cdot\left(y+x^2\right)-(2x)\cdot(2x)}{\left(y+x^2\right)^2} = \frac{2y-2x^2}{\left(y+x^2\right)^2} \quad .$$

Смешанная частная производная второго порядка по переменным $y \quad и \quad x$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2x}{y+x^2}\right) = 2x\cdot(-1)\left(y+x^2\right)^{-2}\cdot 1 = -\frac{2x}{\left(y+x^2\right)^2}.$$

Смешанная частная производная второго порядка по переменным $x \quad и \quad y$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{y+x^2}\right) = (-1)\left(y+x^2\right)^{-2}\cdot(2x) = -\frac{2x}{\left(y+x^2\right)^2}.$$

И последняя производная - частная производная второго порядка по переменной y:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y+x^2}\right) = (-1)\left(y+x^2\right)^{-2} = -\frac{1}{\left(y+x^2\right)^2} \quad .$$

Теперь подставим полученные частные производные в исходное равенство и проверяем его верность:

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} - 2\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} =$$

$$= \frac{2x}{y+x^2}\left(-\frac{2x}{\left(y+x^2\right)^2}\right) - 2\frac{1}{y+x^2}\cdot\frac{2y-2x^2}{\left(y+x^2\right)^2} = -\frac{4y}{\left(y+x^2\right)^3} \quad .$$

Верно. Что и требовалось доказать.

Задачи №№ 101-110

Дана функция $z = 2x - 3xy$, точка $A(-1,3)$ и вектор $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j}$.

Найти $grad(z)$ в точке $A(-1,3)$ и производную по направлению вектора $\vec{a}$ от функции z в точке $A(-1,3)$.

Напомним,

$$grad(z) = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \vec{j}.$$

Вспоминаем предыдущую задачу и находим:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(2x - 3xy) = 2 - 3y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2x - 3xy) = 0 - 3x = -3x.$$

Вычисляем значения частных производных при $x = -1, \quad y = 3$:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{A(-1,3)} = 2 - 3 \cdot 3 = -7,$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{A(-1,3)} = -3(-1) = 3.$$

Подставляем найденные значения в формулу градиента функции:

$$\left. grad(z)\right|_{A(-1,3)} = -7\vec{i} + 3\vec{j}.$$

Производная функции по направлению находится по формуле:

$$\frac{\partial z}{\partial e} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\alpha.$$

Здесь $\vec{e}$ - единичный вектор, имеющий то же направление, что и вектор $\vec{a}$. Найдём его:

$$\vec{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{\vec{i} - \vec{j}}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{\vec{i} - \vec{j}}{\sqrt{2}} = \frac{\vec{i}}{\sqrt{2}} + \left(\frac{-\vec{j}}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{j} .$$

Направляющие косинусы являются координатами вектора $\vec{e}$:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}} .$$

Подставляя найденные значения в формулу производной функции по направлению, получаем:

$$\frac{\partial z}{\partial e} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\partial z}{\partial y} \frac{1}{\sqrt{2}} .$$

Значения производных в точке мы уже вычислили раньше. Окончательно

$$\left. \frac{\partial z}{\partial e} \right|_{A(-1,3)} = -7 \frac{1}{\sqrt{2}} - 3 \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{10}{\sqrt{2}} .$$

Задачи №№ 111-120

Вычисление неопределённых интегралов. Обширная тема, заслуживающая отдельного разговора, здесь - краткие подсказки.

а) Пример на замену переменных (формула 31);

б) Решается с применением формулы интегрирования по частям:

$$\int u dv = uv - \int v du ;$$

в) Интегрирование рациональных дробей;

г) Универсальная тригонометрическая подстановка (формулы 32).

К сожалению, объём методических указаний не позволяет подробно разобрать решения такого типа задач. По указанной теме имеется большое количество учебников и пособий и затруднений решение задач вызвать не должно.

Задачи №№ 121-130

Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость.

$$\int_2^7 \frac{dx}{(x-2)^5}.$$

Подынтегральная функция не существует при $x=2$. Имеем несобственный интеграл второго рода. Вычисляем:

$$\int_2^7 \frac{dx}{(x-2)^5} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{2+\varepsilon}^7 \frac{dx}{(x-2)^5} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{2+\varepsilon}^7 (x-2)^{-5}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left.\frac{(x-2)^{-5+1}}{-5+1}\right|_{2+\varepsilon}^7 =$$

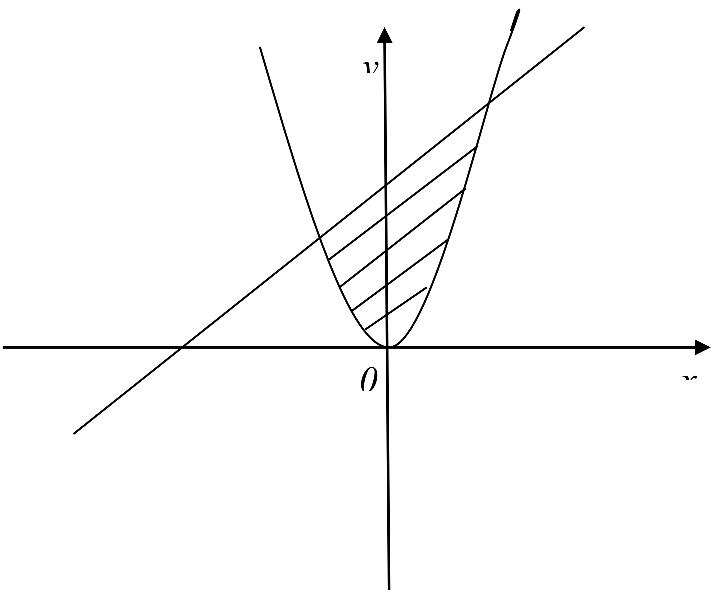
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{4}\left.\frac{1}{(x-2)^4}\right|_{2+\varepsilon}^7\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{4}\frac{1}{(7-2)^4} - \left(-\frac{1}{4}\frac{1}{(2+\varepsilon-2)^4}\right)\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5^4} + \frac{1}{4}\frac{1}{(\varepsilon)^4}\right) = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5^4} + \infty = \infty.$$

Задачи №№ 131-140

Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y=5x^2$ и прямой $y=x+3$.

Сделаем чертёж:



Нижней границей выделенной площади является парабола $y = 5x^2$, верхней – прямая $y = x + 3$. Находим точки пересечения кривых:

$$\begin{cases} y = 5x^2 \\ y = x + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 3 = 5x^2 \\ y = x + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x^2 - x - 3 = 0 \\ y = x + 3 \end{cases}.$$

Решая квадратное уравнение, получаем корни:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{61}}{2 \cdot 5} \approx 0,1 \pm 0,78;$$

$$x_1 \approx 0,88, \quad x_2 \approx -0,68 \quad .$$

Получили пределы интегрирования. Дальше считаем саму площадь:

$$s_{\text{фигуры}} = \int\limits_{\frac{1-\sqrt{61}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{61}}{2}} \left((x+3) - \left(5x^2\right) \right) dx = \int\limits_{\frac{1-\sqrt{61}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{61}}{2}} \left(-5x^2 + x + 3 \right) dx =$$

$$= \left(-5\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 3x \right) \Bigg|_{\frac{1-\sqrt{61}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{61}}{2}} \approx \left(-5\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 3x \right) \Bigg|_{-0,68}^{0,88} \approx$$

$$\approx \left(-5\frac{(0,88)^3}{3} + \frac{(0,88)^2}{2} + 3 \cdot 0,88 \right) -$$

$$- \left(-5\frac{(-0,68)^3}{3} + \frac{(-0,68)^2}{2} + 3 \cdot (-0,68) \right) \approx$$

$$\approx 1,89 - 1,28 = 0,61 \, (ед)^2 .$$

Библиографический список

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для ВТУЗов.– М.: Наука, 2010. Т 2.

2. Сборник задач по высшей математике. С контрольными работами. /сост.: К.Н. Лунгу, Д.Т. Письменный, С.Н. Федин, Ю.А. Шевченко – М.: Айрис-Пресс, 2008.

3. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. Полный курс. – М.: Айрис-Пресс, 2009.

4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. – М.: Высшая школа, 2005. Ч. 2.

Содержание