МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРОМЫШЛЕННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ДИЗАЙНА»

ВЫСШАЯ ШКОЛА ТЕХНОЛОГИИ И ЭНЕРГЕТИКИ

И.Э. Апакова, Н.Л. Белая, Е.Г. Иванова, О.Е. Куляхтина

РЯДЫ

Учебно-методическое пособие
для студентов-заочников ускоренной формы
обучения

Санкт-Петербург
2019

ББК 22.1
УДК 51(07)
Р-988

Ряды: учебно-методическое пособие для студентов всех форм обучения; И.Э. Апакова, Н.Л. Белая, Е.Г. Иванова, О.Е. Куляхтина. ВШТЭ СПбГУПТД. – СПб., 2019.-21 с.

В пособии приводится теоретический материал и рассматриваются решения типичных примеров. Предназначено для студентов технических специальностей всех форм обучения.

Рецензент: зав.кафедрой высшей математики № 1 СПбГЭТУ «ЛЭТИ», д-р физ.-мат. наук. Н.А. Бодунов

Подготовлено и рекомендовано к изданию кафедрой высшей математики ВШЭ СПбГУПТД (протокол № 2 от 1.10.2019 г.).

Утверждено к изданию методической комиссией ВШТЭ СПбГУПТД (протокол №1 от 2.10.2018 г.).

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом ВШТЭ СПбГУПТД в качестве учебно-методического пособия.

Редактор и корректор Басова В.А.
Техн. редактор Титова Л.Я. Темплан 2019 г., поз.66

Подп. к печати 20.10.2019 г. Формат 60x84/16. Бумага тип №1.
Печать офсетная. Объем 1,25 печ.л.; 1,25 уч.-изд.л.
Тираж 70 экз. Изд. № 66. Цена «С». Заказ

Ризограф Высшей школы технологии и энергетики ВШТЭ СПбГУПТД, 198095, Санкт-Петербург, ул. Ивана Черных, 4.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящем пособии рассмотрены теоретические вопросы, соответствующие первому разделу второго семестра заочной индивидуальной формы обучения: ряды. Дается материал для подготовки к решению задач по рядам из контрольной работы №3. Рассматриваются типовые задания контрольных работ.

Настоящее пособие написано для помощи студентам заочной индивидуальной формы обучения в решении задач, а также лучшего усвоения ими теоретического материала по указанным темам и помощи в сдаче экзаменов и зачетов.

Для более детального и глубокого изучения материала по теме «Ряды» авторы рекомендуют студентам изучить литературу, приведенную в библиографическом списке. Теоретический материал имеет лишь справочный характер.

Особое внимание в данной брошюре уделено разбору примеров, теоретический материал имеет лишь справочный характер.

Для успешного решения задач контрольных работ следует основательно изучить терминологию, важные теоретические положения раздела “Ряды”, которые приведены в данном пособии.

Перед началом выполнения контрольной работы рекомендуем изучить теорию по данному разделу в учебниках [1],[2]. Не следует приступать к выполнению контрольного задания, не решив достаточного количества задач, соответствующих этому заданию, которые можно найти в задачниках [3],[4].

1 Числовые ряды

Определение 1: *Бесконечным рядом* или, короче, *рядом* называется выражение вида $a_1+a_2+a_3+...+a_n+...$. Числа $a_1, a_2,..,a_n$ называются членами ряда.

Ряд задан, если задано правило, позволяющее для любого натурального n найти соответствующий член ряда a_n.

Ряд часто записывают в форме

$$a_1+a_2+a_3+...+a_n+...=\sum_{n=1}^{\infty} a_n . \qquad (1)$$

Определение 2: Сумму ***n*** первых членов ряда называют частичной суммой ряда:

$$S_n = a_1+a_2+a_3+...+a_n . \qquad (2)$$

Определение 3: Сумма ряда есть предел последовательности его частичных сумм. Иными словами, если существует конечный предел частичной суммы ряда, $S=\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, то говорят, что ряд (1) сходится, а S – сумма ряда. Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, т.е. сумма бесконечна, или её вовсе нет, ряд называется ***расходящимся***.

Пример 1: Исследовать сходимость числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_1\cdot q^n \quad (|q|\neq 1)$.

Решение. Данный ряд является суммой элементов геометрической прогрессии. По известной формуле $S_n = b_1\cdot\dfrac{1-q^n}{1-q}$.

Если $|q|<1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, и поэтому $S=\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{b_1}{1-q}$, следовательно, ряд сходится.

Если же $|q|>1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$, и $S_n \to \infty$, следовательно, ряд расходится.

Рассмотрим частный случай этой задачи, когда $b_1 = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{2}$

Пример2: Найдем сумму: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$,

Этот ряд состоит из членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом $b_1 = \frac{1}{2}$ и знаменателем $q = \frac{1}{2}$. Т.к. $q = \frac{1}{2} < 1$, то ряд сходится. Найдем сумму по формуле: $S = \frac{b_1}{1-q}$. Для данного примера получаем $S = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$. Сумма ряда, являющегося бесконечно убывающей геометрической прогрессией, равна 1.

Замечание: Вопрос о сходимости ряда лишь в редких случаях решается путём непосредственного нахождения суммы ряда, т.к. это обычно затруднительно; в основном же сходимость рядов устанавливается с помощью свойств и признаков, сформулированных для положительных рядов.

Положительным называется ряд $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$, в котором все члены положительны

2. Необходимый признак сходимости ряда

Пусть дан числовой ряд

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Если числовой ряд (1) сходится, то ***n***-член ряда стремится к 0, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Замечание 1:

Нужно отметить, что это условие не является достаточным, т.е. нарушение этого условия гарантирует расходимость ряда, но его выполнение не гарантирует сходимости. Т.е., обратное верно не всегда: если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд может быть как сходящимся, так и расходящимся.

Пример 1: Рассмотрим ряд, называемый гармоническим:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \qquad (3)$$

Хотя $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, тем не менее, ряд является расходящимся.

Пример 2: Рассмотрим ряд

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \qquad (4)$$

В этом ряде $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ и ряд является сходящимся.

Замечание 2: Вывод сходимости рядов в примерах 1 и 2 рассмотрим в следующих разделах.

Замечание 3: Стремление к нулю ***n***-го члена ряда не означает сходимость ряда, но при этом, если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд является расходящимся.

Ответ на вопрос о сходимости числового ряда (1) дают достаточные признаки сходимости. Один из самых применимых признаков является признак Даламбера.

3 Признак сходимости Даламбера

Для числового ряда

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Рассмотрим $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_{n+1}} = l$.

Сходимость ряда зависит от значения $\boldsymbol{l}$.

Если $\begin{cases} l < 1, \textit{сходится} \\ l > 1, \textit{расходится} \\ l = 1, ? \end{cases}$.

Пример 1: Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{3^n}$ с помощью признака Даламбера. $a_n = \dfrac{n}{3^n}$, тогда $a_{n+1} = \dfrac{n+1}{3^{n+1}} = \dfrac{n+1}{3^n \cdot 3}$.

$l = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{3^{n+1}} : \dfrac{n}{3^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)\cdot 3^n}{3^n \cdot 3 \cdot n} = \dfrac{1}{3} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n} = \dfrac{1}{3} < 1.$ Ряд сходится.

Пример 2: Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^3}{(2n+1)!}$.

Решение .Здесь $a_n = \dfrac{n^3}{(2n+1)!}$. Воспользуемся признаком Даламбера:

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{(2(n+1)+1)!} : \frac{n^3}{(2n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3 \cdot (2n+1)!}{(2n+3)! \cdot n^3} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3 (1+\frac{1}{n})^3 (2n+1)!}{(2n+1)!(2n+2)(2n+3)n^3} = 0 < 1$$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^3}{(2n+1)!}$ сходится.

4 Интегральный признак сходимости

Пусть ряд $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$ и некоторая функция $f(x)$, задана при $x \geq 1$, связаны так, что при всех натуральных n $f(n) = a_n$, и кроме того, $f(x)$ - непрерывная и убывающая. Тогда ряд и несобственный интеграл $\int f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно. Исследование сходимости в примерах 1 и 2 из раздела 2 проводится с помощью интегрального признака.

***Пример 1*:** Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^k}$ $(k \geq 1)$.

Решение.

Отдельно рассмотрим два случая:

1. $k=1$, (гармонический ряд): $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + ... + \dfrac{1}{n} + ... = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$.

Применим интегральный признак сходимости:

$f(x) = \dfrac{1}{x}$ $\left(f(n) = \dfrac{1}{n} \right)$, $f(x)$ - непрерывная и убывающая для $x \geq 1$.

Рассмотрим несобственный интеграл:

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{x}=\lim_{b\to+\infty}\ln|x|\Big|_1^b=\lim_{b\to+\infty}\ln|b|=+\infty$$

т.е. гармонический ряд расходится.

2. $k>1$. Снова, применяя интегральный признак, имеем:

$f(x)=\frac{1}{x^k}$ $\left(f(n)=\frac{1}{n^k}\right)$, $f(x)$ - непрерывная, убывающая при $x\geq 1$.

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^k}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{x^k}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b x^{-k}dx=\lim_{b\to+\infty}\frac{x^{1-k}}{1-k}\Big|_1^b=$$

$$\lim_{b\to\infty}\frac{1}{-(k-1)x^{k-1}}\Big|_1^b=\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{(k-1)b^{k-1}}\right)=\frac{1}{k-1}$$

следовательно ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}$ сходится ($k\geq 1$).

Замечание: В примере 2 , когда $k=2$, ряд сходится, т.к.сходится интеграл.

Пример 2: Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\cdot\sqrt[3]{\ln(n+1)}}$.

Решение. Здесь $a_n=\frac{1}{(n+1)\cdot\sqrt[3]{\ln(n+1)}}$.

Применим интегральный признак:

$f(x)=\frac{1}{(x+1)\cdot\sqrt[3]{\ln(x+1)}}$ $\left(f(n)=\frac{1}{(n+1)\cdot\sqrt[3]{\ln(n+1)}}\right)$, $f(x)$ - непрерывная убывающая при $x\geq 1$.

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)\cdot\sqrt[3]{\ln(x+1)}}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b(\ln(x+1))^{-\frac{1}{3}}d(\ln(x+1))=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\frac{3}{2}(\ln(x+1))^{\frac{2}{3}}\Big|_1^b=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{3}{2}(\ln(b+1))^{\frac{2}{3}}-\frac{3}{2}(\ln 2)^{\frac{2}{3}}\right)=+\infty$$

Так как рассмотренный несобственный интеграл расходится, следовательно, расходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\cdot\sqrt[3]{\ln(n+1)}}$.

5 Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница

Определение 1 Ряд называется ***знакочередующимся***, если любые два его соседних члена имеют разные знаки**.**

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots (-1)^n a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \ . \qquad (5)$$

Определение 2: Рядом из абсолютных значений называют ряд, состоящий из абсолютных значений ряда (1):

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + \ldots |a_n| + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \ . \qquad (6)$$

Для знакопеременных рядов вводится понятие абсолютной сходимости ряда.

Определение 3: Говорят, что ряд (5) сходится абсолютно, если сходится ряд из его абсолютных значений.

Если же ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а $\sum\limits_{n=1}^{\infty} | \ a_n \ |$ расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется условно или не абсолютно сходящимся рядом.

Признак Лейбница

Если для ряда (1) выполняются условия

1) $|a_1| > |a_2| > |a_3| > \ldots > |a_n| > \ldots$,

2) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$,

тогда ряд (1) **сходится условно**. Если условия 1), 2) не выполняются, то ряд (5) расходится.

Пример 1: Исследуем на сходимость ряд

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-...(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+...=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}. \qquad (*)$$

Соответствующим положительным рядом будет гармонический расходящийся ряд: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+...=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Выясним, будет ли ряд (*) условно сходиться. Для этого рассмотрим условия (1),(2).

1) $1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>...>\frac{1}{n}>...$, выполняется

2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, выполняется. Ряд (*) сходится условно.

Пример 2: Исследуем на сходимость ряд:

$$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-...(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}+...=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}.$$

Соответствующим положительным рядом будет сходящийся ряд: $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}+...=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Таким образом, ряд из абсолютных значений сходится, значит, исходный знакочередующийся ряд будет сходиться абсолютно.

6 Степенные ряды. Область сходимости

Определение 1: Степенными рядами называются ряды вида:

$$c_0+c_1(x-a)+\ldots+c_n(x-a)^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n \quad (7)$$

Определение 2: Интервалом сходимости ряда (1) называется такой интервал $|x-a|<R$ с центром в точке $x=a$, внутри которого ряд сходится абсолютно, а вне интервала расходится. Вопрос о сходимости на границе решается с помощью признака Лейбница.

Находить область сходимости можно также с помощью признака Даламбера. Рассмотрим это на примере.

Пример: Определить область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n\cdot 2^n}$.

Распишем подробнее этот ряд:

$$\frac{x+1}{1\cdot 2}+\frac{(x+1)^2}{2\cdot 2^2}+\frac{(x+1)^3}{3\cdot 2^3}\ldots+\frac{(x+1)^n}{n\cdot 2^n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n\cdot 2^n}.$$

Для этого ряда $f_n(x)=\frac{(x+1)^n}{n\cdot 2^n}$, тогда $f_{n+1}(x)=\frac{(x+1)^{n+1}}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}=\frac{(x+1)^n\cdot(x+1)}{(n+1)\cdot 2^n\cdot 2}$. Исследуем ряд на абсолютную сходимость. Для этого рассмотрим ряд из абсолютных значений $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|f_n(x)\right|$. Тогда $\left|f_n(x)\right|=\frac{|x+1|^n}{n\cdot 2^n}$, $\left|f_{n+1}(x)\right|=\frac{|x+1|^n}{n\cdot 2^n\cdot 2}\cdot|x+1|$. Найдем

$$\frac{\left|f_{n+1}(x)\right|}{\left|f_n(x)\right|}=\frac{\left|x+1\right|^{n+1}}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}:\frac{\left|x+1\right|^n}{n\cdot 2^n}=\frac{\left|x+1\right|^n\cdot\left|x+1\right|}{(n+1)\cdot 2^n\cdot 2}\cdot\frac{n\cdot 2^n}{\left|x+1\right|^n}=\frac{\left|x+1\right|\cdot n}{2\cdot(n+1)}.$$

Пусть $n\to\infty$. Тогда рассмотрим $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left|f_{n+1}(x)\right|}{\left|f_n(x)\right|}=\frac{\left|x+1\right|}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\frac{\left|x+1\right|}{2}$. Для того, чтобы ряд сходился абсолютно, по признаку Даламбера, этот предел должен быть $\frac{\left|x+1\right|}{2}<1$.

$$\frac{\left|x+1\right|}{2}<1\leftrightarrow\left|x+1\right|<2\leftrightarrow(-2<x+1<2)\leftrightarrow(-3<x<1).$$

Получен интервал абсолютной сходимости ряда. Но для окончательного определения интервала сходимости, необходимо исследовать ряд на границах интервала, т.к. признак Даламбера не дает ответа, когда $l=1$.

Пусть $x=-3$. Тогда $f_n(-3)=\frac{(-3+1)^n}{n\cdot 2^n}=\frac{(-2)^n}{n\cdot 2^n}=\frac{(-1)^n}{n}$.

Получился знакочередующийся ряд, $f(x)$ соответствующий гармоническому, который является условно сходящимся. Значит, точка $x=-3$ входит в область сходимости ряда.

Пусть теперь $x=1$. Тогда $f_n(1)=\frac{(1+1)^n}{n\cdot 2^n}=\frac{2^n}{n\cdot 2^n}=\frac{1}{n}$.

Гармонический ряд. Расходится, поэтому точка $x=1$ не входит в область сходимости ряда. В итоге получаем интервал сходимости $-3\leq x<1$. Вне этого интервала ряд расходится.

7 Формулы Тейлора и Маклорена

Известно, что для функции $f(x)$, имеющей производные до $n+1$ порядка включительно в окрестности точки a, имеет место формула Тейлора:

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+R_n(x),$$

где $R_n(x)=\dfrac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(t)\quad ,a<t<x$.

Если функция $f(x)$ имеет производные всех порядков в окрестности точки a, допустим, что $\lim\limits_{n\to\infty} R_n=0$, тогда

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\ldots$$

или $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)$.

Если в ряде Тейлора $a=0$, получаем частный случай - ряд Маклорена:

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\ldots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\ldots$$

Приведём разложение некоторых функций в ряд Маклорена.

$$y=e^x,\ y=\cos x,\ y=\sin x\ .$$

Для разложения в ряд Маклорена элементарных функций

$y=e^x,\ y=\cos x,\ y=\sin x$ запишем ряд Маклорена:

$$.\ f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$$

1. Разложим в ряд Маклорена функцию $y=e^x$ или $f(x)=e^x$.

Тогда $f(0)=e^0=1, f'(0)=e^0=1,\ldots,f^{(n)}(0)=e^0=1$.

Подставляем полученные результаты в формулу Маклорена, олучаем:

$$f(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + \ldots$$

Или окончательно:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \qquad (10)$$

2. Разложим в ряд Маклорена функцию $y = \cos x$ или $f(x) = \cos x$. Тогда

$$f(0) = \cos 0 = 1,\ f'(0) = -\sin 0 = 0,\ f''(0) = -\cos 0 = -1$$
$$f'''(0) = \sin(0) = 0,\ f''''(0) = \cos 0 = 1.$$

Подставляем полученные результаты в формулу Маклорена,

получаем:

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \ldots$$

Или окончательно:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \qquad (11)$$

3. Разложим в ряд Маклорена функцию $y = \sin x$ или $f(x) = \sin x$.

$$f(0) = \sin 0 = 0,\ f'(0) = \cos 0 = 1,\ f''(0) = -\sin 0 = 0,$$
$$f'''(0) = -\cos(0) = -1,\ f''''(0) = \sin 0 = 0,\ f'''''(0) = \cos 0 = 1.$$

Подставляем полученные результаты, получаем:

$$f(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \ldots$$

Или окончательно:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \qquad (12)$$

Рассмотрим несколько элементарных примеров.

Пример 1: Разложить в ряд Маклорена функцию $y=\sin\frac{x}{3}$. Для этого подставим $\frac{x}{3}$ вместо x в разложение по формуле Маклорена функции $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots$ Получаем

$$\sin\frac{x}{3}=\frac{x}{3}-\frac{\left(\frac{x}{3}\right)^3}{3!}+\frac{\left(\frac{x}{3}\right)^5}{5!}-\frac{\left(\frac{x}{3}\right)^7}{7!}+\dots$$

Пример 2: Разложить в ряд Маклорена функцию $y=cos2x$. Для этого подставим $2x$ вместо x в разложение по формуле Маклорена функции

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots$$

Получаем $cos2x=1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}-\frac{(2x)^6}{6!}+\dots$

Пример3: Разложить в ряд Маклорена функцию $y=e^{x^2}$. Для этого подставим x^2 вместо x в разложение по формуле Маклорена функции

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\dots$$

Получаем $e^{x^2}=1+x^2+\frac{\left(x^2\right)^2}{2!}+\frac{\left(x^2\right)^3}{3!}+\dots$

Замечание: Правильность примеров 1-3 можно проверить, находя производные при $a=0$ и подставляя их в формулу Маклорена.

8 Ряды Фурье

1. Пусть $\{a_n\},\{b_n\}$ - числовые последовательности.

Рядом Фурье называется функциональный ряд

$$\frac{a_0}{2}+(a_1\cos x+b_1\sin x)+(a_2\cos 2x+b_2\sin 2x)+\ldots+$$

$$(a_n\cos nx+b_n\sin nx)+\ldots=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

Сформулируем главное ***утверждение***.

Пусть $f(x)$ на интервале $(-\pi;\pi)$ удовлетворяет условием:

1) на этом интервале $f(x)$ имеет конечное число точек разрыва 1-го ряда.

2) интервал $(-\pi;\pi)$ содержит конечное число экстремумов функции $f(x)$.

3) существуют $\lim\limits_{x\to\pi-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to-\pi+0} f(x)$.

Тогда $f(x)$ может быть разложена в ряд Фурье, при этом сумма этого ряда равна:

1) $f(x)$ - в тех точках, где $f(x)$ непрерывна ;

2) $\frac{1}{2}(\lim\limits_{x\to a-0} f(x)+\lim\limits_{x\to a+0} f(x))$ в точке a - точке разрыва функции ;

3) $\frac{1}{2}(\lim\limits_{x\to-\pi+0} f(x)+\lim\limits_{x\to\pi-0} f(x))$ в точках $-\pi$ и π.

Кроме того, коэффициенты a_0, a_k, b_k ряда Фурье определяются по формулам:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx\ ;a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx\ ;b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kxdx\ .$$

Заметим, что если $f(x)$ - чётная функция, то её ряд Фурье ищем в виде

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx\ ,\ \text{где}\ a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nxdx\ ;$$

если же $f(x)$ нечётная, то её ряд Фурье- $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$, где

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\sin nx dx \quad .$$

***Пример1*:**

Разложить в ряд Фурье $f(x)=x^2$ в интервале $(-\pi;\pi)$.

Решение.

Функция $f(x)=x^2$ удовлетворяет всем условиям, сформулированным в главном утверждении. Кроме того, $f(x)=x^2$ чётная, поэтому:

$$x^2 = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \quad ; \quad a_0 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{3} \quad ;$$

Для вычисления a_n, два раза проинтегрируем по частям :

$$u = x^2; \quad dv = \cos nx dx \quad \Rightarrow du = 2x dx; \quad v = \frac{\sin nx}{n};$$

$$u_1 = x; \quad dv_1 = \sin nx dx \quad \Rightarrow du_1 = dx; \quad v_1 = -\frac{\cos nx}{n};$$

и учтем, что $\cos(n\pi) = (-1)^n$.

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{2}{\pi} x^2 \frac{\sin nx}{n}\Bigg|_0^{\pi} - \frac{4}{\pi n}\int\limits_0^{\pi} x \sin nx dx = \frac{4}{\pi n} x \frac{\cos nx}{n}\Bigg|_0^{\pi} -$$

$$- \frac{4}{\pi n^2}\int\limits_0^{\pi} \cos nx dx = (-1)^n \frac{4}{n^2} \quad .$$

Тогда: $x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}$.

***Пример2*:** Разложить в ряд Фурье $f(x)=x$ в интервале $(-\pi;\pi)$.

Решение. Функция $f(x)=x$ удовлетворяет всем условиям, сформулированным в главном утверждении. Кроме того, $f(x)=x$ нечётная, поэтому: $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$, где $b_n=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\sin nx dx$.

Для вычисления b_n, проинтегрируем по частям :

$u=x;\quad dv=\sin nxdx \quad \Rightarrow du=dx;\quad v=-\frac{\cos nx}{n}$

и учтем, что $\cos(n\pi)=(-1)^n$.

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x\sin nxdx=-\frac{2}{\pi n}x\cos nx\Big|_0^{\pi}+\frac{2}{\pi n}\int\limits_0^{\pi}\cos nxdx=\frac{2}{n}\left(-1\right)^{n+1}$$

Тогда: $x=2\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos nx}{n}$.

9 Применение рядов в практических задачах.

Процесс промывки осадка

Ряды находят огромное применение в технических и технологических расчетах. С помощью рядов выражаются результаты анализа некоторых процессов. В качестве наглядного примера рассмотрим последовательную промывку осадка с использованием каждый раз чистой воды.

Пусть начальная пульпа содержит m кг воды с y_0 кг растворенной соли на один кг воды. При каждой промывке пульпа интенсивно перемешивается со свежей водой, добавляемой в количестве p кг. После перемешивания раствор отстаивается и сливается, а в пульпе остается m воды. Если y_n - концентрация раствора после n -ой промывки, то $my_0=my_1+py_1$, откуда концентрация раствора после первой промывки:

$$y_1=\left(\frac{m}{m+p}\right)y_0 \quad .$$

Концентрация раствора после n-ой промывки :

$$y_n = \left(\frac{m}{m+p}\right)^n y_0 \quad .$$

Общее количество соли, извлекаемой промывной водой, можно выразить:

$$py_1 + py_2 + py_3 + \ldots + py_n = \left[\left(\frac{m}{m+p}\right)^1 + \left(\frac{m}{m+p}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{m}{m+p}\right)^n\right] py_0$$

Это количество соли после n промывок представляет собой многочлен n-ой степени относительно $\frac{m}{m+p}$. С увеличением числа промывок, т.е. при n, стремящемся к ∞, количество соли, остающейся в пульпе, будет стремиться к нулю, а количество извлеченной соли будет стремиться к my_0, и получится равенство:

$$my_0 = py_0\left[\left(\frac{m}{m+p}\right)^1 + \left(\frac{m}{m+p}\right)^2 + \left(\frac{m}{m+p}\right)^3 + \ldots\right] = py_0 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{m}{m+p}\right)^n$$

Выражение, стоящее в правой части этого равенства и является бесконечным рядом [5].

Библиографический список

1. Бермант А.Ф. Адамович И.Г. Краткий курс математического анализа для ВТУЗов.-М.: Наука, 1971.

2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для ВТУЗов.-М.: Наука, 1985.

3. Задачи и упражнения по математическому анализу /под ред. Демидовича Б.П. -М.: Наука, 1978.

4. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа.- М.: Наука, 1985.

Содержание