МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПРОМЫШЛЕННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ДИЗАЙНА»

ВЫСШАЯ ШКОЛА ТЕХНОЛОГИИ И ЭНЕРГЕТИКИ

РЯДЫ

Учебно-методическое пособие
для студентов-заочников ускоренной формы
обучения

Санкт-Петербург
2019

УДК 51(07)
ББК 22.1р
О-627

Ряды: учебно-методическое пособие для студентов-заочников ускоренной формы обучения/ сост.: И.Э. Апакова, Н.Л. Белая, Е.Г. Иванова, О.Е. Куляхтина; ВШТЭ СПбГУПТД. – СПб., 2019. – 22 с.

В пособии приводится теоретический материал по теме «Ряды» и рассматриваются решения типичных примеров. Предназначено для студентов-заочников всех специальностей ускоренной формы обучения.

Рецензент: зав. кафедрой высшей математики № 1 СПбГЭТУ ЛЭТИ, д-р физ.-мат. наук. Н.А. Бодунов.

Подготовлены и рекомендованы к печати кафедрой высшей математики ВШТЭ СПбГУПТД (протокол № 2 от 01.10.2018 г.).

Утверждено к изданию методической комиссией ВШТЭ СПбГУПТД (протокол №1 от 02.10.2018 г.).

Редактор и корректор Басова В.А.
Техн. редактор Титова Л.Я. Темплан 2019 г., поз.77

Подп. к печати 26.09.2019 г. Формат 60х84/16. Бумага тип №1.
Печать офсетная. Объем 1,5 печ.л.; 1,5 уч.-изд.л.
Тираж 70 экз. Изд. № 77. Цена «С». Заказ

Ризограф Высшей школы технологии и энергетики ВШТЭ СПбГУПТД, 198095, Санкт-Петербург, ул. Ивана Черных, 4.

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящем пособии рассмотрены теоретические вопросы, соответствующие первому разделу второго семестра заочной индивидуальной формы обучения: ряды. Дается материал для подготовки к решению задач по этой теме из контрольной работы №3. Рассматриваются типовые задания контрольных работ.

Настоящее пособие написано для помощи студентам заочной индивидуальной формы обучения в решении задач, а также лучшего усвоения ими теоретического материала по указанным темам и помощи в сдаче экзаменов и зачетов.

Для более детального и глубокого изучения материала по теме «Ряды» авторы рекомендуют студентам литературу, приведенную в библиографическом списке. Теоретический материал, содержащийся в настоящем пособии, имеет лишь справочный характер.

Особое внимание в данной брошюре уделено разбору примеров. Для успешного решения задач контрольных работ следует основательно изучить терминологию и важные теоретические положения, которые приведены в данном пособии.

Перед началом выполнения контрольной работы рекомендуем изучить теорию по данному разделу в учебниках [1],[2]. Не следует приступать к выполнению контрольного задания, не решив достаточного количества задач, соответствующих этому заданию, которые можно найти в задачниках [3],[4].

1. Числовые ряды

Определение 1: Пусть дана бесконечная последовательность чисел $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$. Выражение вида $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$ называется ***числовым рядом***, а числа $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ называются членами ряда.

Ряд задан, если задано правило, позволяющее для любого натурального n найти соответствующий член ряда a_n, который называется ***общим членом*** этого ряда.

Ряд часто записывают в форме

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n . \qquad (1)$$

Определение 2: Сумму ***n*** первых членов ряда называют ***частичной суммой ряда***:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n . \qquad (2)$$

Определение 3: Если при $n \to \infty$ существует конечный предел последовательности частичных сумм членов данного ряда $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, то ряд (1) называется ***сходящимся***, а число S – его суммой. Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ или его вовсе нет, ряд называется ***расходящимся***.

Пример 1: Исследовать сходимость числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_1 \cdot q^n$ ($|q| \neq 1$).

Решение. Данный ряд является суммой членов геометрической прогрессии. Частичную сумму членов такого ряда найдем по известной формуле: $S_n = b_1 \cdot \dfrac{1-q^n}{1-q}$.

Если $|q|<1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, и поэтому $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{b_1}{1-q}$, следовательно, ряд сходится.

Если же $|q|>1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$, и $S_n \to \infty$, следовательно, ряд расходится.

Рассмотрим частный случай этой задачи, когда $b_1 = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{2}$.

Пример 2: Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$. Найдем его сумму.

Решение. Этот ряд состоит из членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом $b_1 = \frac{1}{2}$ и знаменателем $q = \frac{1}{2}$.

Так как $q = \frac{1}{2} < 1$, то ряд сходится. Используя полученную выше формулу: $S = \frac{b_1}{1-q}$, получим $S = \dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$. Таким образом, сумма данного ряда, являющегося бесконечно убывающей геометрической прогрессией, равна 1.

Замечание: Вопрос о сходимости ряда лишь в редких случаях решается путём непосредственного нахождения суммы ряда, так как это обычно затруднительно; в основном же сходимость рядов устанавливается с помощью свойств и признаков, сформулированных для положительных рядов.

Определение 4: Положительным называется ряд $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$, все члены которого положительны $(a_n > 0, n = 1, 2, 3, \ldots)$.

2. Необходимый признак сходимости ряда

Пусть дан числовой ряд

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

Если этот числовой ряд сходится, то общий член ряда стремится к нулю при неограниченном возрастании его номера, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Замечание 1:

Нужно отметить, что это условие не является достаточным, т.е. нарушение этого условия гарантирует расходимость ряда, но его выполнение не гарантирует сходимости. Т.е., обратное верно не всегда: если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд может быть как сходящимся, так и расходящимся.

Пример 1: Рассмотрим ряд, называемый гармоническим:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \qquad (3)$$

Хотя $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, тем не менее, гармонический ряд является расходящимся.

Пример 2: Рассмотрим ряд

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \qquad (4)$$

Для этого ряда $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, и ряд является сходящимся.

Замечание 2: Исследование сходимости рядов в примерах 1 и 2 рассмотрим в разделе 4.

Замечание 3: Стремление к нулю общего члена ряда не означает сходимость ряда, но при этом, если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд является расходящимся.

Ответ на вопрос о сходимости числового ряда (1) дают достаточные признаки сходимости. Одним из самых применимых признаков является признак Даламбера.

3. Признак сходимости Даламбера

Пусть дан ряд с положительными членами

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n > 0, n = 1, 2, \ldots .$$

Рассмотрим $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = l$.

Если $l < 1$, то рассматриваемый ряд сходится, если $l > 1$, ряд расходится. При $l = 1$ ряд может быть как сходящимся, так и расходящимся.

Пример 1: Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{3^n}$ с помощью признака Даламбера.

Решение. Общий член данного ряда задается формулой: $a_n = \dfrac{n}{3^n}$, тогда

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{3^{n+1}} = \frac{n+1}{3^n \cdot 3}.$$

Найдем предел отношения последующего члена к предыдущему при $n \to \infty$:

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3^{n+1}}:\frac{n}{3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 3^n}{3^n\cdot 3\cdot n}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\frac{1}{3}<1.$$

Следовательно, данный ряд сходится по признаку Даламбера, так как $l=\frac{1}{3}<1$.

Пример 2: Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(2n+1)!}$.

Решение. Здесь общий член ряда задается формулой: $a_n=\frac{n^3}{(2n+1)!}$. Воспользуемся признаком Даламбера:

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3}{(2(n+1)+1)!}:\frac{n^3}{(2n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3\cdot(2n+1)!}{(2n+3)!\cdot n^3}=$$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3(1+\frac{1}{n})^3(2n+1)!}{(2n+1)!(2n+2)(2n+3)n^3}=0<1$. Следовательно, данный ряд сходится по признаку Даламбера, так как $l=0<1$.

4. Интегральный признак сходимости

Пусть дан ряд $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots$ $(a_n>0,\ n=1,2,\ldots)$, члены которого являются значениями непрерывной функции $f(x)$ при натуральных значениях аргумента x: $f(1)=a_1$, $f(2)=a_2$, …, $f(n)=a_n$, …, и пусть $f(x)$ монотонно убывает в интервале $(1,\infty)$. Тогда данный ряд и несобственный интеграл $\int\limits_1^{\infty}f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно. Исследование сходимости в примерах 1 и 2 из раздела 2 проводится с помощью интегрального признака.

***Пример 1*:** Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ $(k \geq 1)$.

Решение. Отдельно рассмотрим два случая:

1. $k=1$ (гармонический ряд): $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

Применим интегральный признак сходимости.

Рассмотрим функцию $f(x)=\frac{1}{x}$ $\left(f(n)=\frac{1}{n}=a_n\right)$, которая является непрерывной и убывающей при $x \geq 1$.

Вычислим несобственный интеграл:

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^b\frac{dx}{x}=\lim_{b\to+\infty}\ln|x|\Big|_1^b=\lim_{b\to+\infty}\ln|b|=+\infty.$$

Данный несобственный интеграл расходится, следовательно, расходится и гармонический ряд по интегральному признаку сходимости.

2. $k>1$. Применим интегральный признак сходимости.

Рассмотрим функцию $f(x)=\frac{1}{x^k}$ $\left(f(n)=\frac{1}{n^k}=a_n\right)$, которая является непрерывной и убывающей при $x \geq 1$.

Вычислим несобственный интеграл:

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^k}=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^b\frac{dx}{x^k}=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^b x^{-k}dx=\lim_{b\to+\infty}\frac{x^{1-k}}{1-k}\Big|_1^b=$$

$$\lim_{b\to\infty}\frac{1}{-(k-1)x^{k-1}}\Big|_1^b=\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{(k-1)b^{k-1}}\right)=\frac{1}{k-1}.$$

Данный несобственный интеграл сходится, следовательно, и ряд при $k>1$ сходится по интегральному признаку сходимости.

Замечание: В примере 2 раздела 2 рассматривается ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Так как в этом случае $k=2$, то ряд сходится по интегральному признаку сходимости.

Пример 2: Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\cdot\sqrt[3]{\ln(n+1)}}$.

Решение. Применим интегральный признак сходимости.

Рассмотрим функцию $f(x)=\frac{1}{(x+1)\cdot\sqrt[3]{\ln(x+1)}}$ $\left(f(n)=\frac{1}{(n+1)\cdot\sqrt[3]{\ln(n+1)}}=a_n\right)$,

которая является непрерывной и убывающей при $x\geq 1$.

Вычислим несобственный интеграл:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\cdot\sqrt[3]{\ln(x+1)}} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b (\ln(x+1))^{-\frac{1}{3}} d(\ln(x+1)) =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \frac{3}{2}(\ln(x+1))^{\frac{2}{3}}\Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty} (\frac{3}{2}(\ln(b+1))^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2}(\ln 2)^{\frac{2}{3}}) = +\infty$$

Так как рассмотренный несобственный интеграл расходится, следовательно, расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\cdot\sqrt[3]{\ln(n+1)}}$ по интегральному признаку сходимости.

5. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница

Определение 1: Ряд называется ***знакочередующимся***, если любые два его соседних члена имеют разные знаки**:**

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^n a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n, \qquad (5)$$

где $a_n > 0, n = 1, 2, 3, \ldots$.

Условием сходимости знакочередующегося ряда (5) является следующее утверждение:

Теорема Лейбница. Знакочередующийся ряд (5) сходится, если выполняются два условия: 1) $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_n > \ldots$ и 2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0.$

Если условия 1) и 2) не выполняются, то ряд (5) расходится.

Для знакопеременных рядов (знакочередующихся и рядов с произвольным чередованием знаков членов) вводится понятие абсолютной сходимости ряда.

Определение 2: Рядом из абсолютных значений называют ряд, состоящий из абсолютных значений ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с произвольным чередованием знаков членов:

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + \ldots + |a_n| + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| . \qquad (6)$$

Определение 3: Говорят, что ряд (5) ***сходится абсолютно***, если сходится ряд из его абсолютных значений.

Если же ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а $\sum\limits_{n=1}^{\infty} | a_n |$ расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется ***условно сходящимся рядом***.

Пример 1: Исследуем на сходимость ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{n} . \qquad (*)$$

Соответствующим положительным рядом будет гармонический расходящийся ряд: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Выясним, будет ли ряд (*) условно сходиться. Для этого рассмотрим условия 1) и 2) теоремы Лейбница.

1) $1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\ldots>\frac{1}{n}>\ldots$ – выполняется;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ – выполняется.

Следовательно, ряд (*) сходится. А поскольку соответствующий положительный гармонический ряд расходится, то ряд (*) сходится условно.

Пример 2: Исследуем на сходимость ряд:

$$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}.$$

Соответствующим положительным рядом будет сходящийся ряд: $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Таким образом, ряд из абсолютных значений сходится, значит, исходный знакочередующийся ряд будет сходиться абсолютно.

6. Степенные ряды. Область сходимости

Определение 1: Степенными рядами называются ряды вида:

$$c_0+c_1(x-a)+\ldots+c_n(x-a)^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n, \quad (7)$$

где $a, c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n$ – действительные числа.

Определение 2: Интервалом сходимости ряда (7) называется такой интервал $|x-a|<R$ с центром в точке $x=a$, внутри которого ряд сходится абсолютно, а вне интервала расходится. Число R называется ***радиусом сходимости*** данного ряда. О концах интервала сходимости (точках $x=a\pm R$) общего утверждения сделать нельзя – там, смотря по случаю, может иметь место и сходимость, и расходимость.

Находить область сходимости ряда (7) можно с помощью признака Даламбера. Рассмотрим это на примере.

Пример: Определить область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n\cdot 2^n}$.

Распишем подробнее этот ряд:

$$\frac{x+1}{1\cdot 2}+\frac{(x+1)^2}{2\cdot 2^2}+\frac{(x+1)^3}{3\cdot 2^3}...+\frac{(x+1)^n}{n\cdot 2^n}+...=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n\cdot 2^n}.$$

Для этого ряда $f_n(x)=\frac{(x+1)^n}{n\cdot 2^n}$, тогда $f_{n+1}(x)=\frac{(x+1)^{n+1}}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}=\frac{(x+1)^n\cdot(x+1)}{(n+1)\cdot 2^n\cdot 2}$. Исследуем ряд на абсолютную сходимость. Для этого рассмотрим ряд из абсолютных значений $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|f_n(x)\right|$.

Тогда $\left|f_n(x)\right|=\frac{|x+1|^n}{n\cdot 2^n}$, $\left|f_{n+1}(x)\right|=\frac{|x+1|^n}{n\cdot 2^n\cdot 2}\cdot|x+1|$.

Найдем

$$\frac{\left|f_{n+1}(x)\right|}{\left|f_n(x)\right|}=\frac{|x+1|^{n+1}}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}:\frac{|x+1|^n}{n\cdot 2^n}=\frac{|x+1|^n\cdot|x+1|}{(n+1)\cdot 2^n\cdot 2}\cdot\frac{n\cdot 2^n}{|x+1|^n}=\frac{|x+1|\cdot n}{2\cdot(n+1)}.$$

Пусть $n\to\infty$. Тогда рассмотрим $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|}=\dfrac{|x+1|}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}=\dfrac{|x+1|}{2}$. Для того чтобы ряд сходился абсолютно, этот предел должен быть меньше единицы (признак Даламбера),

т. е. $\dfrac{|x+1|}{2}<1$; $\dfrac{|x+1|}{2}<1\Rightarrow|x+1|<2\Rightarrow-2<x+1<2\Rightarrow-3<x<1$.

Получен интервал абсолютной сходимости ряда. Но для окончательного определения интервала сходимости, необходимо исследовать ряд на границах интервала, так как признак Даламбера не дает ответа, когда $l=1$.

Пусть $x=-3$. Подставив это значение x в формулу $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+1)^n}{n\cdot 2^n}$, получим знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$, который является условно сходящимся. Значит, точка $x=-3$ входит в область сходимости ряда.

Пусть теперь $x=1$. Подставив это значение x в формулу $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+1)^n}{n\cdot 2^n}$, получим гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$, который является расходящимся. Поэтому точка $x=1$ не входит в область сходимости ряда.

В итоге получаем интервал сходимости $-3\le x<1$. Вне этого интервала ряд расходится.

7. Формулы Тейлора и Маклорена

Известно, что для функции $f(x)$, имеющей производные до $(n+1)$-го порядка включительно в окрестности точки a, имеет место формула Тейлора:

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+R_n(x),$$

где $$R_n(x)=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(t) \quad ,a<t<x.$$

Всякая функция $f(x)$, бесконечно дифференцируемая в окрестности точки a, может быть разложена в этой окрестности в сходящийся к ней степенной ***ряд Тейлора***:

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\ldots \qquad (8)$$

или $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)$, если в окрестности точки a выполнятся условие $\lim\limits_{n\to\infty}R_n=0$.

Если в ряде Тейлора $a=0$, получаем частный случай – ***ряд Маклорена***:

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\ldots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\ldots. \qquad (9)$$

Приведём разложение некоторых функций в ряд Маклорена.

Пример 1: Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)=e^x$.

Для этой функции $f(0)=e^0=1, f'(0)=e^0=1,\ldots, f^{(n)}(0)=e^0=1$.

Подставляя полученные результаты в формулу Маклорена (9), получаем:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots. \qquad (10)$$

Пример 2: Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)=\cos x$.

Для этой функции

$$f(0)=\cos 0=1, f'(0)=-\sin 0=0, f''(0)=-\cos 0=-1$$

$$f'''(0)=\sin(0)=0, f''''(0)=\cos 0=1.$$

Подставляя полученные результаты в формулу Маклорена (9), получаем:

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots . \qquad (11)$$

Пример 3: Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)=\sin x$.

Для этой функции

$$f(0)=\sin 0=0, f'(0)=\cos 0=1, f''(0)=-\sin 0=0,$$

$$f'''(0)=-\cos(0)=-1, f''''(0)=\sin 0=0, f'''''(0)=\cos 0=1.$$

Подставляя полученные результаты в формулу Маклорена (9), получаем:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots . \qquad (12)$$

Формулы (10) – (12) имеют место при любом значении x.

Пример 4: Разложить в ряд Маклорена функцию $y=\sin\frac{x}{3}$.

Для этого в формулу Маклорена (12) для функции $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots$ вместо x подставим $\frac{x}{3}$. Получаем

$$\sin\frac{x}{3}=\frac{x}{3}-\frac{\left(\frac{x}{3}\right)^3}{3!}+\frac{\left(\frac{x}{3}\right)^5}{5!}-\frac{\left(\frac{x}{3}\right)^7}{7!}+\dots .$$

Пример 5: Разложить в ряд Маклорена функцию $y=\cos 2x$.

Для этого в формулу Маклорена (11) для функции $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots$ вместо x подставим $2x$. Получаем

$$\cos 2x=1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}-\frac{(2x)^6}{6!}+\dots$$

Пример 6: Разложить в ряд Маклорена функцию $y=e^{x^2}$.

Для этого в формулу Маклорена (10) для функции $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+...$ вместо x подставим x^2. Получаем

$$e^{x^2}=1+x^2+\frac{\left(x^2\right)^2}{2!}+\frac{\left(x^2\right)^3}{3!}+....$$

Замечание: Правильность примеров 4 – 6 можно проверить, находя значения производных рассматриваемых функций при $a=0$ и подставляя их в формулу Маклорена (9).

8. Ряды Фурье

Определение: Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *и* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ – числовые последовательности.

Рядом Фурье называется функциональный ряд

$$\frac{a_0}{2}+(a_1\cos x+b_1\sin x)+(a_2\cos 2x+b_2\sin 2x)+...+$$
$$+(a_n\cos nx+b_n\sin nx)+...=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx). \quad (13)$$

Сформулируем главное ***утверждение***.

Пусть функция $f(x)$ на интервале $(-\pi;\pi)$ удовлетворяет условиям:

1) на этом интервале $f(x)$ имеет конечное число точек разрыва 1-го рода;

2) интервал $(-\pi;\pi)$ содержит конечное число экстремумов функции $f(x)$;

3) существуют $\lim\limits_{x\to\pi-0}f(x)$ и $\lim\limits_{x\to-\pi+0}f(x)$.

Тогда функция $f(x)$ может быть разложена в ряд Фурье (13), при этом сумма этого ряда равна:

1) $f(x)$ – в тех точках, где $f(x)$ непрерывна;

2) $\frac{1}{2}\left(\lim\limits_{x\to a-0} f(x)+\lim\limits_{x\to a+0} f(x)\right)$ в точке a – точке разрыва функции;

3) $\frac{1}{2}\left(\lim\limits_{x\to -\pi+0} f(x)+\lim\limits_{x\to \pi-0} f(x)\right)$ в точках $-\pi$ и π.

Кроме того, коэффициенты $a_0, a_k, b_k, k=1,2,3,\ldots,$ ряда Фурье определяются по формулам:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \ ; a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx \ ; b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kxdx \ .$$

Заметим, что если $f(x)$ – чётная функция, то её ряд Фурье ищем в виде:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx \ , \text{ где } a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nxdx;$$

если же $f(x)$ – нечётная, то её ряд Фурье имеет вид:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin nx \ , \text{ где } b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nxdx \ .$$

***Пример 1*:**

Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=x^2$ в интервале $(-\pi;\pi)$.

Решение: Функция $f(x)=x^2$ удовлетворяет всем условиям, сформулированным в главном утверждении. Кроме того, данная функция $f(x)=x^2$ – чётная, поэтому:

$$x^2=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx \quad ; \quad a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx=\frac{2\pi^2}{3} \quad ;$$

Для вычисления a_n два раза проинтегрируем по частям:

$$u=x^2; \quad dv=\cos nxdx \quad \Rightarrow du=2xdx; \quad v=\frac{\sin nx}{n};$$

$$u_1=x; \quad dv_1=\sin nxdx \quad \Rightarrow du_1=dx; \quad v_1=-\frac{\cos nx}{n};$$

и учтем, что $\cos(n\pi)=(-1)^n$.

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nxdx=\frac{2}{\pi}x^2\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi}-\frac{4}{\pi n}\int_0^{\pi}x\sin nxdx=\frac{4}{\pi n}x\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi}-$$

$$-\frac{4}{\pi n^2}\int_0^{\pi}\cos nxdx=(-1)^n\frac{4}{n^2} \quad .$$

Тогда искомое разложение имеет вид:

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2} \quad .$$

***Пример 2*:** Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=x$ в интервале $(-\pi;\pi)$.

Решение: Функция $f(x)=x$ удовлетворяет всем условиям, сформулированным в главном утверждении. Кроме того, данная функция $f(x)=x$ – нечётная, поэтому:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \quad \text{, где } b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx.$$

Для вычисления b_n проинтегрируем по частям:

$$u=x; \quad dv=\sin nx dx \quad \Rightarrow du=dx; \quad v=-\frac{\cos nx}{n}$$

и учтем, что $\cos(n\pi)=(-1)^n$.

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx dx=-\frac{2}{\pi n}x\cos nx\Big|_0^{\pi}+\frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}\cos nx dx=\frac{2}{n}\left(-1\right)^{n+1}.$$

Тогда: $$x=2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos nx}{n}.$$

9. Применение рядов в практических задачах

Процесс промывки осадка

Ряды находят огромное применение в технических и технологических расчетах. С помощью рядов выражаются результаты анализа некоторых процессов. В качестве наглядного примера рассмотрим последовательную промывку осадка с использованием каждый раз чистой воды.

Пусть начальная пульпа содержит m кг воды с y_0 кг растворенной соли на один кг воды. При каждой промывке пульпа интенсивно перемешивается со свежей водой, добавляемой в количестве p кг. После перемешивания раствор отстаивается и сливается, а в пульпе остается m воды. Если y_n – концентрация раствора после n-ой промывки, то $my_0 = my_1 + py_1$, откуда концентрация раствора после первой промывки:

$$y_1 = \left(\frac{m}{m+p}\right) y_0 \quad .$$

Концентрация раствора после n-ой промывки:

$$y_n = \left(\frac{m}{m+p}\right)^n y_0 \quad .$$

Общее количество соли, извлекаемой промывной водой, можно выразить:

$$py_1 + py_2 + py_3 + \ldots + py_n = \left[\left(\frac{m}{m+p}\right)^1 + \left(\frac{m}{m+p}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{m}{m+p}\right)^n\right] py_0 \, .$$

Это количество соли после n промывок представляет собой многочлен n-ой степени относительно $\frac{m}{m+p}$. С увеличением числа промывок, т.е. при n, стремящемся к ∞, количество соли, остающейся в пульпе, будет стремиться к нулю, а количество извлеченной соли будет стремиться к my_0, и получится равенство:

$$my_0 = py_0\left[\left(\frac{m}{m+p}\right)^1 + \left(\frac{m}{m+p}\right)^2 + \left(\frac{m}{m+p}\right)^3 + \ldots\right] = py_0 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{m}{m+p}\right)^n \quad .$$

Выражение, стоящее в правой части этого равенства и является бесконечным рядом [5].

Библиографический список

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для ВТУЗов.– М.: Наука, 2010. Т 2.

2. Сборник задач по высшей математике. С контрольными работами. /сост.: Лунгу К.Н., Письменный Д.Т., Федин С.Н., Шевченко Ю.А. – М.: Айрис-Пресс, 2008.

3. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. Полный курс. – М.: Айрис-Пресс, 2009.

4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. – М.: Высшая школа, 2005. Ч. 2.

Оглавление