МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ РАСТИТЕЛЬНЫХ ПОЛИМЕРОВ»

Кафедра прикладной математики и информатики

Н.Л. ЛЕОНОВА

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Конспект лекций

Санкт-Петербург

2015

УДК 519.8

Исследование операций / Н.Л. Леонова; СПбГТУРП. – СПб., 2015. − 44 с.

В пособии излагаются основы курса «Теория игр и исследование операций».

Учебное пособие предназначено для использования студентами, обучающимися на кафедре прикладной математики и информатики по направлениям подготовки бакалавров: 010400 (01.03.02) «Прикладная математика и информатика».

Рецензент:
профессор кафедры государственного и муниципального управления Санкт-Петербургского государственного института кино и телевидения, д-р техн. наук В.М. Пестриков.

Подготовлено и рекомендовано к печати кафедрой прикладной математики и информатики СПбГТУРП (протокол № 2 от 14.10.2014 г.).

Утверждено к изданию методической комиссией факультета АСУТП СПбГТУРП (протокол № 6 от 11.12.2014 г.).

Редактор и корректор В.А. Басова
Технический редактор Л.Я. Титова Темплан 2015, поз. 2

Подп. к печати 18.02.2015. Формат 60x84/16. Бумага тип № 1.
Печать офсетная. Объем 2,75 печ.л.; 2,75 уч. изд.л. Тираж 30 экз. Изд. № 2
Цена “С”. Заказ

Ризограф Санкт-Петербургского государственного технологического университета растительных полимеров, СПб., 198095, ул. Ивана Черных,4.

© Леонова Н.Л., 2015
© Санкт-Петербургский государственный технологический университет растительных полимеров, 2015

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ.

ЛЕКЦИЯ 1.

ВВЕДЕНИЕ.

За последние годы наука уделяет все большее внимание вопросам организации и управления; это обусловлено целым рядом причин. Быстрое развитие и усложнение техники; увеличение масштабов и стоимостей проводимых мероприятий; широкое внедрение автоматизации в сферу управления — все это приводит к необходимости научного анализа сложных целенаправленных процессов под углом зрения их структуры и организации. От науки требуются рекомендации по наилучшему (оптимальному) управлению такими процессами.

Под названием «Исследование операций» подразумевается применение математических, количественных методов для обоснования решений во всех областях целенаправленной человеческой деятельности.

Возьмем пример: человек вышел утром из дому, чтобы ехать на работу. По ходу дела ему приходится принять целый ряд решений: брать ли с собой зонтик? В каком месте перейти улицу? Каким видом транспорта воспользоваться? И так далее.

Разумеется, все эти решения человек принимает без специальных расчетов, просто опираясь на имеющийся у него опыт и на здравый смысл. Для обоснования таких решений никакая наука не нужна, да вряд ли понадобится и в дальнейшем.

Возьмем другой пример. Допустим, организуется работа городского транспорта. В нашем распоряжении имеется какое-то количество транспортных средств. Необходимо принять ряд решений, например: какое количество и каких транспортных средств направить по тому или другому маршруту? Как изменять частоту следования машин в зависимости от времени суток? Где разместить остановки? И так далее.

Эти решения являются гораздо более ответственными, чем решения предыдущего примера. В силу сложности явления последствия каждого из них не столь ясны; для того, чтобы представить себе эти последствия, нужно провести расчеты. А главное, от этих решений гораздо больше зависит. В первом примере неправильный выбор решения затронет интересы одного человека; во втором — может отразиться на деловой жизни целого города.

Конечно, и во втором примере при выборе решения можно действовать интуитивно, опираясь на опыт и здравый смысл. Но решения окажутся гораздо более разумными, если они будут подкреплены количественными, математическими расчетами. Эти предварительные расчеты помогут избежать длительного и дорогостоящего поиска правильного решения «наощупь».

Такими математическими расчетами, облегчающими людям принятие правильных решений, и занимается наука «Исследование операций». Ее возникновение обычно относят к годам второй мировой войны, когда в вооруженных силах США и Англии были сформированы специальные научные группы для подготовки решений по способам организации и обеспечения боевых действий. Справедливость требует отметить, что подобными исследованиями (правда, не под таким названием) занимались и до войны, в частности, в нашей стране, где были широко развиты математические методы оценки эффективности стрельбы, представляющие собой, в современном понимании, часть исследования операций.

Зародившись в области преимущественно военных задач, исследование операций с течением времени вышло из этой узкой сферы. В настоящее время исследование операций — одна из самых быстро развивающихся наук, завоевывающая все более обширные области применения: промышленность, сельское хозяйство, торговля, транспорт, здравоохранение и т. д.

Чтобы ближе познакомиться со спецификой задач исследования операций и их характерными особенностями, приведем несколько примеров таких задач.

Пример 1. Завод выпускает определенного вида изделия. Для обеспечения высокого качества этих изделий организуется система выборочного контроля. Требуется рациональным образом организовать этот контроль, т. е. выбрать:

— размер контрольной партии;
— последовательность контрольных операций;
— правила браковки изделий

и т. д. так, чтобы обеспечить заданный уровень качества при минимальных расходах.

Пример 2. Для реализации определенной массы сезонных товаров создается сеть временных торговых точек. Требуется выбрать параметры этой сети:

— число точек;
— их размещение;
— количество персонала;
— продажные цены товаров

и т. д. так, чтобы обеспечить максимальную экономическую эффективность распродажи.

Пример 3. Организуется воздушный налет группы самолетов-бомбардировщиков на промышленный район противника. В нашем распоряжении — определенное количество самолетов с известными, летно-тактическими данными и вооружением. Требуется выбрать, параметры налета:

— высоту полета;
— эшелонирование самолетов в строю;
— точки прицеливания отдельных самолетов и групп;
— способ выполнения бомбометания (залпом, серией)

и т. д. так, чтобы в результате налета максимально снизить промышленный потенциал района.

Пример 4. Организуется снабжение сырьем группы промышленных предприятий. Возможные поставщики сырья размещены в различных географических пунктах страны и связаны с группой предприятий различными путями сообщения (с разными тарифами). Требуется ра- циональным образом разместить заказы на сырье, так, чтобы потребности группы предприятий были удовлетворены в заданные сроки и при минимальных затратах на перевозки.

Пример 5. Сложное техническое устройство время от времени может отказывать (выходить из строя), Для того, чтобы ликвидировать аварию, необходимо локализовать неисправность (обнаружить ее причину). Требуется разработать систему тестов, позволяющую с определенной, достаточно большой вероятностью локализовать неисправность за минимальное время.

Пример 6. Организуется медицинское обследование группы населения с целью выявления некоторых заболеваний. На обследование выделены определенные материальные средства, оборудование и медицинский персонал. Требуется разработать план обследования:

— количество пунктов;
— их размещение;
— последовательность осмотров;
— вид и количество анализов

и т. д. с тем, чтобы к заданному сроку выявить максимальный процент заболевших.

Несмотря на то, что примеры относятся к самым разным областям практики, в них легко просматриваются сходные черты. В каждом из них идет речь о каком-то мероприятии (или системе мероприятий), преследующем определенную цель. Заданы некоторые условия, характеризующие обстановку мероприятия, изменять которые мы не вправе (например, отпущенные средства). В рамках этой системы условий, требуется принять какое-то решение с тем, чтобы мероприятие в некотором смысле было наиболее выгодным (или наименее убыточным).

Для решения практических задач исследование операций располагает целым арсеналом математических средств. К ним относятся: теория вероятностей с ее новейшими разделами (теория случайных процессов, теория информации, теория массового обслуживания); математические методы оптимизации, начиная от простейших способов нахождения экстремумов (максимумов и минимумов), знакомых каждому инженеру, и кончая современными методами, такими, как линейное программирование, динамическое программирование, принцип максимума Л. С. Понтрягина и многие другие.

ЛЕКЦИЯ 2

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ
ОПЕРАЦИЯ. ЭФФЕКТИВНОСТЬ ОПЕРАЦИИ

Под операцией мы будем понимать любое мероприятие (или систему действий), объединенное единым замыслом и направленное к достижению определенной цели.

Примеры операций.

— Система мероприятий, направленная к повышению надежности технического устройства.
— Отражение воздушного налета средствами ПВО.
— Размещение заказов на производство оборудования.
— Разведывательный поиск группы самолетов в тылу противника.
— Запуск группы искусственных спутников Земли для установления системы телевизионной связи.
— Система перевозок, обеспечивающая снабжение ряда пунктов определенного вида товарами.

Операция всегда является управляемым мероприятием, т. е. от нас зависит выбрать тем или другим способом какие-то параметры, характеризующие способ ее организации.

«Организация» здесь понимается в широком смысле слова, включая и выбор технических средств, применяемых в операции. Например, организуя отражение воздушного налета средствами ПВО, мы можем, в зависимости от обстановки, выбирать тип и свойства применяемых технических средств (ракет, установок) или же, при заданных технических средствах, решать только задачу рациональной организации самой процедуры отражения начета (распределение целей между установками, количество ракет, направляемых на каждую цель и т. д.).

Всякий определенный выбор зависящих от нас параметров мы будем называть р е ш е н и е м .

Решения могут быть удачными и неудачными, разумными и неразумными.

О п т и м а л ь н ы м и называются решения, которые, по тем или иным соображениям, предпочтительнее других.

Основная задача исследования операций—*предварительное количественное обоснование оптимальных решений. З*адача исследования операций — подготовить количественные данные и рекомендации, облегчающие человеку принятие решения*).

Наряду с основной задачей — обоснованием оптимальных решений — к области исследования операций относятся и другие задачи, такие как сравнительная оценка различных вариантов организации операции;

— оценка влияния на результат операции различных параметров (элементов решения и заданных условий);

— исследование так называемых «узких мест», то есть элементов управляемой системы, нарушение работы которых особенно сильно сказывается на успехе операции, и т. д.

Рассмотрим отдельную операцию *О.* Размышляя над организацией операции, мы стремимся сделать ее наиболее эффективной. Под эффективностью операции разумеется степень ее приспособленности к выполнению стоящей перед ней задачи. Чем лучше организована операция, тем она эффективнее.

Чтобы судить об эффективности операции и сравнивать между собой по эффективности различно организованные операции, нужно иметь некоторый численный к р и т е р и й о ц е н к и или п о к а з а т е л ь э ф ф е к т и в н о с т и (в некоторых руководствах показатель эффективности называют «целевой функцией»).

Будем в дальнейшем обозначать показатель эффективности буквой *W.*

Конкретный вид показателя эффективности *W,* которым следует пользоваться при численной оценке эффективности, зависит от специфики рассматриваемой операции, ее целевой направленности, а также от задачи исследования, которая может быть поставлена в той или другой форме.

Многие операции выполняются в условиях, содержащих элемент случайности (например, операции, связанные с колебаниями спроса и предложения, с движением народонаселения, заболеваемостью, смертностью, а также все военные операции). В этих случаях исход операции, даже организованной строго определенным образом, не может быть точно предсказан, остается случайным. Если это так, то в качестве показателя эффективности *W* выбирается не просто характеристика исхода операции, а ее среднее значение {математическое ожидание). Например, если задача операции — получение максимальной прибыли, то в качестве показателя эффективности берется средняя прибыль.

В других случаях, когда задачей операции является осуществление вполне определенного события, в качестве показателя эффективности берут вероятность этого события (например, вероятность того, что в результате воздушного налета данная группа целей будет поражена).

Правильный выбор показателя эффективности — необходимое условие полезности исследования, применяемого для обоснования решения.

Рассмотрим ряд примеров, в каждом из которых показатель эффективности *W* выбран в соответствии с целевой направленностью операции.

Пример 1. Рассматривается работа промышленного предприятия под углом зрения его рентабельности, причем проводится ряд мер с целью повышения этой рентабельности. Показатель эффективности — прибыль (или средняя прибыль), приносимая предприятием за хозяйственный год.

Пример 2. Группа истребителей поднимается в воздух для перехвата одиночного самолета противника. Цель операции — сбить самолет. Показатель эффективности — вероятность поражения (сбитня) самолета.

Пример 3. Ремонтная мастерская занимается обслуживанием машин; ее рентабельность определяется количеством машин, обслуженных в течение дня. Показатель эффективности — среднее число машин, обслуженных за день («среднее» потому, что фактическое число случайно).

Пример 4. Группа радиолокационных станций в определенном районе ведет наблюдение за воздушным пространством. Задача группы — обнаружить любой самолет, если он появится в районе. Показатель эффективности — вероятность обнаружения любого самолета, появившегося в районе.

Пример 5. Предпринимается ряд мер по повышению надежности электронной цифровой вычислительной машины (ЭЦВМ). Цель операции — уменьшить частоту появления неисправностей («сбоев») ЭЦВМ, или, что равносильно, увеличить средний промежуток времени между сбоями («наработку на отказ»). Показатель эффективности — среднее время безотказной работы ЭЦВМ (или среднее относительное время исправной работы).

Пример 6. Проводится борьба за экономию средств при производстве определенного вида товаров. Показатель эффективности — количество (или среднее количество) сэкономленных средств.

Во всех рассмотренных примерах показатель эффективности, каков бы он ни был, требовалось обратить в максимум («чем больше, тем лучше»).
Очевидно, что случай, когда показатель эффективности W надо обратить в минимум, легко сводится к задаче максимизации (для этого достаточно, например, изменить знак величины W), Поэтому в дальнейшем, рассматривая в общем виде задачу исследования операций, мы будем для простоты говорить только о случае, когда W требуется обратить в м а к с и м у м . Что касается практических конкретных задач, то мы будем пользоваться как показателями эффективности, которые требуется максимизировать, так и теми, которые требуется минимизировать.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ.

Линейное программирование - это направление математического программирования, изучающее методы решения экстремальных задач, которые характеризуются линейной зависимостью между переменными и линейным критерием.

В общей постановке задачи линейного программирования формулируется следующим образом.

Имеются какие-то переменные $\bar{x}=(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ и линейная функция этих переменных, которая носит название целевой функции. Ставится задача: найти экстремум (максимум или минимум) целевой функции при условии, что переменные $\bar{x}$ удовлетворяют системе линейных равенств и/или неравенств.

Классическими примерами практических задач, сводящихся к задаче линейного программирования, являются задача о диете, а также задача о составлении плана производства.

В задаче о диете составляется наиболее экономный (т.е. наиболее дешевый) рацион питания животных, удовлетворяющий определенным медицинским требованиям. При этом в качестве переменных x_1, x_2,…, x_n выступают количества продуктов питания, используемых в рационе.

Задачу о составлении плана производства рассмотрим более подробно.

Пусть некоторая производственная единица (предприятие, цех, отдел и т.д.) может производить n видов товаров G_1, G_2,…, G_n, используя при этом m видов сырьевых ресурсов R_1, R_2,…,R_m, запасы которых ограничены величинами b_1, b_2,…,b_m.

Технологией производства товара G_j назовем набор чисел a_{ij}, показывающий, какое количество i-го ресурса необходимо для производства единицы товара G_j. Это можно записать в виде технологической матрицы, которая полностью описывает технологические потребности производства и элементами которой являются числа a_{ij}.

	G_1	G_2	…	$G_{\text{тп}}$
R_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{11}
R_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…
R_{m}	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{nm}

Предположим также, что известны цены реализации единицы каждого товара c_1, c_2, …, c_n.

Обозначим через x_1, x_2,…, x_n планируемое производство единиц товаров G_1, G_2,…, G_n. В силу имеющейся технологической матрицы для этого потребуется:

$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n$ – ресурса R_1,

$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n$ – ресурса R_2,

…….

$a_{\text{m}1}x_1+a_{\text{m}2}x_2+\ldots+a_{\text{m}n}x_n$ – ресурса R_m.

С учетом ограничений на запасы ресурсов, а также очевидных условий неотрицательности переменных x_1, x_2,…, x_n получим следующую систему линейных неравенств:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m. \end{cases}$$

Естественно предположить, что целью производственной единицы является получение максимальной выручки за произведенную продукцию, т.е. максимизация функции:

$$F=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n.$$

Таким образом, с учетом естественного требования неотрицательности переменных получаем линейную оптимизационную задачу, которая может быть представлена в следующей формальной записи:

$$F=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n\to\max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n\le b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n\le b_m, \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0,\ldots,x_n\ge 0. \end{cases}$$

Мы не будем рассматривать примеры других задач линейного программирования. Отметим лишь, что они встречаются очень часто при оптимизации самых разнообразных производственных и экономических задач.

ЛЕКЦИЯ 3
ФОРМЫ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И УТВЕРЖДЕНИЯ.

Задача линейного программирования математически может быть представлена в различных формах.

Общей задачей ЛП называется задача, которая состоит в определении максимального (минимального) значения функции

$$L=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n \tag{1.1}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\le b_i,\qquad i=1,2,\ldots,k; \tag{1.2}$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i,\qquad i=k+1,k+2,\ldots,m. \tag{1.3}$$

где a_{ij}, b_i, c_j - заданные постоянные величины и k m.

Функция (1.1) называется *целевой функцией* задачи (1.1)-(1.3), а условия (1.2)-(1.3) - *ограничениями* данной задачи.

Таким образом, ограничения в общей задаче ЛП заданы в виде линейных неравенств и/или линейных уравнений. При этом заметим, что в неравенствах, вообще

говоря, могут применяться оба знака, как "≤", так и "≥". Однако домножением при необходимости обеих частей какого-либо неравенства на (-1) можно свести их все к единому виду (1.2).

Вектор $\bar{x}=(x_1, x_2, ..., x_n)$, компоненты которого удовлетворяют ограничениям (1.2)-(1.3), называется *допустимым планом (или допустимым решением).*

Совокупность всех допустимых планов задачи линейного программирования образует *допустимое множество* решений этой задачи. Будем обозначать его через X.

Допустимый план $\bar{x}^*=(x_1^*, x_2^*, ...x_n^*)$, при котором целевая функция задачи (1) принимает свое максимальное (минимальное) значение, называется *оптимальным.*

Решить задачу линейного программирования - это значит, найти все ее оптимальные планы или доказать их отсутствие.

Помимо общей формы различают еще две частные задачи линейного программирования - стандартную и основную.

Особенностью *стандартной задачи ЛП* является то, что ее ограничения представлены в виде линейных неравенств, а также условий неотрицательности на переменные, присутствующие в задаче:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \qquad (i=1,2,...,m), \\ x_j \ge 0 \qquad (j=1,2,...,n). \end{cases}$$

(1.4)

Ограничения *основной задачи ЛП* представляют собой линейные ограничения-равенства, а также условия неотрицательности на переменные:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad (i=1,2,...,m), \\ x_j \ge 0 \qquad (j=1,2,...,n). \end{cases}$$

(1.5)

Между различными формами задач линейного программирования существует тесная взаимосвязь, в смысле возможности перехода от одной формы записи к другой.

Например, сведение задачи минимизации функции к задаче максимизации осуществляется простым домножением целевой функции на (-1). То есть, если в задаче линейного программирования функция

$$L = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n \to \min,$$

то, введя в рассмотрение функцию $\tilde{L} = -L(x_1, x_2, ..., x_n)$, получим:

$$\tilde{L} = -c_1 x_1 - c_2 x_2 - ... - c_n x_n \to \max.$$

Переход от стандартной задачи к основной связан с введением дополнительных переменных x_{n+i}, $i=1,\ldots,m$. Покажем это на примере.

Пример 1.1. Исходная задача ЛП имеет вид:

$$L = 2x_1 + x_2 + 5x_3 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 - 7x_2 + 4x_3 \le 11, \\ 2x_1 + 9x_2 - x_3 \ge 7, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0. \end{cases}$$

В первом из неравенств левая часть не больше правой части. Поэтому добавлением в левую часть некоторого неотрицательного слагаемого x_4 можно свести это неравенство к равенству. Аналогично во втором неравенстве левая часть не меньше правой. Следовательно, вычитая из левой части некоторое неотрицательное число x_5, можно также свести данное неравенство к равенству. Итак, получим новую форму записи задачи ЛП (основную):

$$L = 2x_1 + x_2 + 5x_3 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 - 7x_2 + 4x_3 + x_4 = 11, \\ 2x_1 + 9x_2 - x_3 - x_5 = 7, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0, \quad x_4 \ge 0, \quad x_5 \ge 0. \end{cases}$$

Основные утверждения теории линейного программирования касаются, в первую очередь, вида допустимого множества решений X, а также существования и свойств оптимальных решений задачи. Изложим эти утверждения в интерпретации, близкой к наглядной.

Возможные случаи допустимого множества решений

задачи линейного программирования

1) Допустимое множество решений пусто.

Данному случаю соответствует взаимная противоречивость ограничений, входящих в задачу.

2) Допустимое множество - выпуклый ограниченный многогранник.

3) Допустимое множество - выпуклое неограниченное многогранное множество.

Два последних случая достаточно легко представить в двух- или трехмерном измерении. В пространстве большей размерности понятие многогранника (многогранного множества) вводится абстрактно как пересечение гиперплоскостей и гиперполуплоскостей, определяемых соответствующими линейными уравнениями и неравенствами, входящими в состав ограничений задачи. Характерным свойством многогранника является наличие в нем особых точек - *вершин*.

Возможные случаи оптимальных решений (планов) задачи

линейного программирования.

1) Задача *не имеет оптимальных решений*.

Данный случай может возникнуть: либо тогда, когда допустимое множество решений пусто ("не из чего выбирать" оптимальный план),

либо когда допустимое множество представляет собой неограниченное многогранное множество, и целевая функция на нем неограниченно возрастает (если $L \to \max$) или неограниченно убывает (при $L \to \min$).

2) Задача имеет *единственное решение* (единственный оптимальный план).

Это решение обязательно совпадает с одной из вершин допустимого множества.

3) Задача имеет *бесконечное множество* оптимальных решений, заданное некоторым линейным образованием - ребром, гранью, гипергранью и т.д. Среди точек этого линейного образования имеются и вершины допустимого множества.

Таким образом, основное утверждение теории линейного программирования, в конечном итоге определяющее специфические способы его решения, можно сформулировать следующим образом:

Если задача линейного программирования имеет хотя бы один оптимальный план, то его следует искать среди вершин допустимого множества решений.

ЛЕКЦИЯ 4
ГРАФИЧЕСКИЙ СПОСОБ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ.

Графоаналитический (графический) способ решения задач линейного программирования обычно используется для решения задач с двумя переменными, когда ограничения выражены неравенствами, а также задач, которые могут быть сведены к таким задачам.

Пусть задача линейного программирования имеет вид:

$$L = c_1 x_1 + c_2 x_2 \to \max(\min) \tag{1.6}$$

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \le (\ge) b_1, \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{1m} x_1 + a_{m2} x_2 \le (\ge) b_m, \end{cases} \tag{1.7}$$

где c_1, c_2, a_{i1}, a_{i2}, b_i - заданные действительные числа; знаки в неравенствах произвольны; целевая функция либо максимизируется, либо минимизируется.

Каждое из неравенств (1.7) системы ограничений задачи геометрически определяет полуплоскость соответственно с граничными прямыми $a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 = b_i$; i=1,…,m. В том случае, если система неравенств (1.7) совместна, допустимая область решений задачи есть множество точек, принадлежащих всем указанным полуплоскостям. Так как множество точек пересечения данных полуплоскостей – выпуклое, то областью допустимых значений является выпуклое множество, которое называют *многоугольником* решений. Стороны этого многоугольника лежат на прямых, уравнения которых получаются из исходной системы ограничений заменой знаков неравенств на знаки равенств.

Множеством допустимых решений для данной частной задачи может быть:

- пустая область;
- выпуклый многоугольник, включая вырожденные случаи - отрезок и единственную точку;
- выпуклая многоугольная неограниченная область, включая вырожденные случаи - луч и прямую.

Практическая реализация решения задачи линейного программирования (1.6) – (1.7) на основе ее геометрической интерпретации включает следующие этапы:

1. Построить прямые, уравнения которых получаются в результате замены в ограничениях (1.7) знаков неравенств на знаки равенств.

2. Найти полуплоскости, определяемые каждым из ограничений.

Соответствующая полуплоскость может быть найдена подстановкой в неравенство координат какой-нибудь «простой» точки - (0,0), (0,1) или (1,0). Главное - чтобы эта точка не принадлежала границе полуплоскости. Если после подстановки неравенство окажется справедливым, то выбирается та полуплоскость, где содержится эта точка. Если неравенство не справедлива, то выбирается альтернативная полуплоскость.

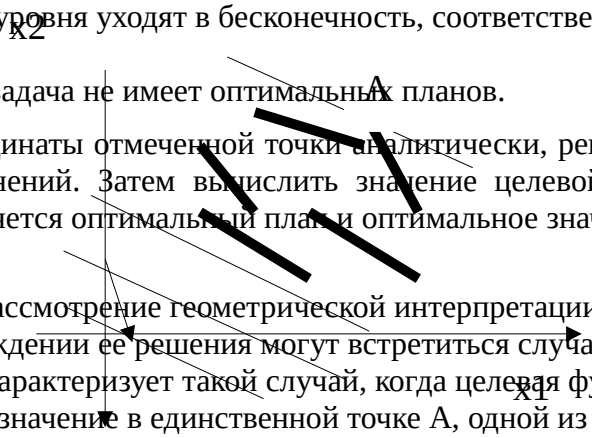
3. Определить многоугольник решений, как пересечение найденных полуплоскостей.

4. Построить градиент целевой функции, т.е. вектор $grad(L) = (c_1, c_2)$, координатами которого служат коэффициенты целевой функции *L*.

Этот вектор определяет направление наискорейшего возрастания целевой функции.

5. Построить ряд линий уровня целевой функции *L*, т.е. прямых перпендикулярных градиенту *L*. При этом построение линий уровня следует вести в направлении градиента, если решается задача на максимум, и в противоположном направлении (в направлении «антиградиента»), если решается задача на минимум. В результате отмечается точка (точки), в которой линии уровня в последний раз касаются допустимого множества.

Если допустимое множество неограниченно, то точки последнего касания может и не быть. Линии уровня уходят в бесконечность, соответственно значение $L \to +\infty$ или $L \to -\infty$, и задача не имеет оптимальных планов.



6. Определить координаты отмеченной точки аналитически, решая соответствующую систему линейных уравнений. Затем вычислить значение целевой функции в этой точке. Тем самым, определяется оптимальный план и оптимальное значение целевой функции задачи.

Заканчивая рассмотрение геометрической интерпретации задачи (1.6) – (1.7), отметим, что при нахождении ее решения могут встретиться случаи, изображенные на рис. 1.1 – 1.3. Рис. 1.1 характеризует такой случай, когда целевая функция принимает оптимальное значение в единственной точке А, одной из вершин допустимого множества. На рис. 1.2 оптимальное значение целевая функция принимает в любой точке отрезка АВ. На рис. 1.3 изображен случай, когда оптимальное значение целевой функции недостижимо.

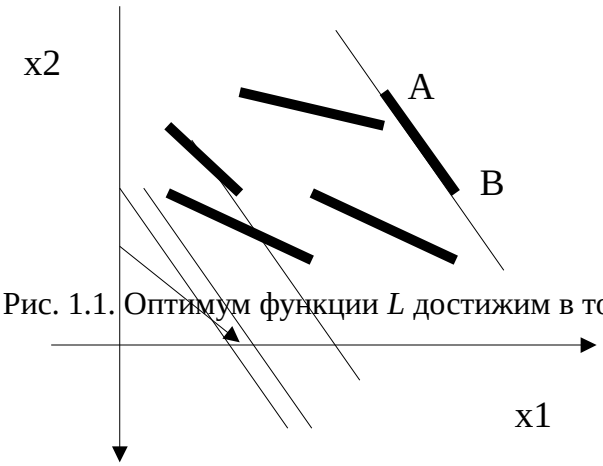


Рис. 1.1. Оптимум функции *L* достижим в точке А

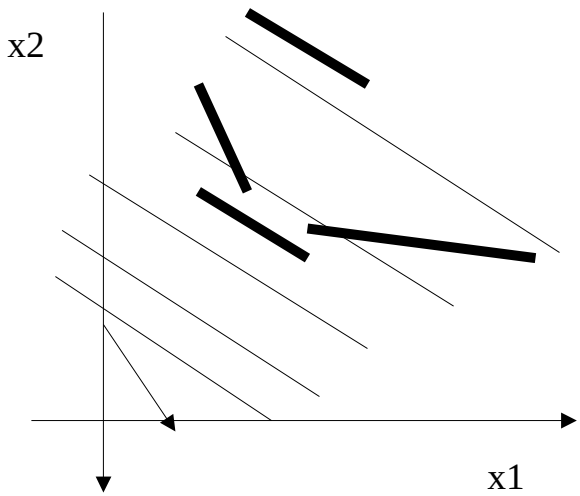


Рис. 1.2. Оптимум функции *L* достигается в любой точке отрезка **АВ**

Рис. 1.3. Оптимум функции L недостижим

ЛЕКЦИЯ 5

СИМПЛЕКС-МЕТОД

Симплекс-метод является универсальным методом решения задач линейного программирования с любым числом переменных и с любым числом ограничений.

Тем не менее, исходная форма задачи, к которой непосредственно применим симплекс-метод, должна иметь специальный вид. Эта форма является частным случаем основной формы (1.5) задач линейного программирования. Здесь также система ограничений представлена ограничениями-равенствами (линейными уравнениями) и условиями неотрицательности. Однако в равенствах, кроме того, выделяются так называемые *базисные переменные*. В каждом из равенств присутствует одна определенная базисная переменная, взятая с единичным коэффициентом, а в других равенствах ее нет. Число базисных переменных, таким образом, совпадает с числом ограничений-равенств в системе и обычно строго меньше общего числа переменных. Остальные переменные называются небазисными или свободными. Еще одно требование заключается в выполнении условия неотрицательности свободных членов b_i в равенствах. Наконец, целевая функция задачи должна быть выражена только через небазисные переменные. Некоторые авторы называют такую форму представления задачи линейного программирования *канонической*.

Отметим, что во многих случаях каноническая форма задачи получается автоматически при переходе от стандартной формы (1.4) к основной с помощью введения новых переменных. Для этого требуется, чтобы свободные члены в неравенствах были неотрицательными, и все неравенства в (1.4) имели единственный знак « ». Отметим, что модель задачи о составлении производственного плана, рассмотренная в параграфе 1.1 вполне соответствует этим требованиям.

Пример 1.2. Рассмотрим задачу линейного программирования вида:

$$L=3x_1+4x_2+6x_3\to\max$$

$$\begin{cases} 2x_1+5x_2+2x_3\le 12, \\ 7x_1+x_2+2x_3\le 18, \\ x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0,\quad x_3\ge 0. \end{cases}$$

Преобразуем первое и второе неравенства в равенства, введя новые неотрицательные переменные x_4 и x_5. Получим новую систему ограничений:

$$\begin{cases} 2x_1+5x_2+2x_3+x_4=12, \\ 7x_1+x_2+2x_3+x_5=18, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\ge 0. \end{cases}$$

Переменная x_3 входит с единичным коэффициентом только в первое уравнение, переменная x_4 – только во второе уравнение. Именно они и составляют базис задачи. Целевая функция выражена лишь через небазисные переменные x_1, x_2, x_3. Таким образом, имеем каноническую форму представления.

Решение задачи при помощи симплекс-метода распадается на ряд шагов. На каждом шаге от данного базиса переходят к другому, новому базису с таким расчетом, чтобы значение функции L улучшалось, т. е. увеличивалось (по крайней мере, не уменьшалось), если $L \to \max$, и уменьшалось (не увеличивалось), если $L \to \min$. Для перехода к новому базису из старого базиса удаляется одна из переменных и вместо нее вводится другая из числа небазисных. После конечного числа шагов находится некоторый базис, на котором достигается искомый максимум (минимум) для линейной функции L, а соответствующее базисное решение является оптимальным либо выясняется, что задача не имеет решения.

С геометрической точки зрения каждому каноническому представлению задачи линейного программирования (каждому базису) соответствует определенная вершина допустимого множества (многогранника решений), которая, согласно утверждениям параграфа 1.2, является «претендентом» на возможность быть оптимальным планом. Таким образом, решение задачи симплекс-методом заключается в последовательном и целенаправленном переходе от одной вершины допустимого множества к другой.

Абстрактным аналогом понятия вершины допустимого множества является понятие *опорного плана*.

Если задача линейного программирования представлена в канонической форме, то опорный план $\bar{x}=(x_1, x_2,..., x_n)$,, может быть получен с помощью простого правила: его базисные компоненты равны свободным членам ограничений-равенств, его небазисные компоненты равны нулю.

Итак, предположим, что исходная задача линейного программирования задана в канонической форме. Практическая реализация симплекс-метода обычно сводится к последовательному построению так *называемых симплекс-таблиц*, в которых отражается очередная каноническая форма представления исходной задачи, а также содержится проверка условия оптимальности соответствующего опорного плана. В многочисленных учебных пособиях по линейному программированию представлены весьма различные варианты оформления этих таблиц. Ниже дается один из таких вариантов.

Таблица 1.1.

Базис	x_1	…	x_n	x_{n+1}	…	x_{n+m}	*Свободные члены*
x_{n+1}	a_{11}	…	a_{1n}	1	…	0	b_1
…	…	…	…	…	…	…	…
x_{n+m}	a_{m1}	…	a_{mn}	0	…	1	b_m
	$-c_1$	…	$-c_n$	0	…	0	

В первой строке обозначены названия столбцов. В следующих m строках отображаются коэффициенты перед переменными в ограниченях-равенствах задачи, а также свободные члены. В последней строке содержатся коэффициенты целевой функции, если решается задача на минимум, и коэффициенты целевой функции, взятые с

противоположными знаками, если решается задача на максимум. В первом столбце перечисляются базисные переменные в соответствии с присутствием их в том или ином равенстве. Если симплекс-таблица составлена правильно, то в ней имеется *m* единичных столбцов (один элемент - единица, остальные элементы - нули), а свободные члены в ней неотрицательны.

Алгоритм симплекс-метода рассмотрим на решении задачи из примера 1.2. Соответствующая симплекс-таблица имеет вид:

Таблица 1.2.

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	*Свободные члены*	*Симплекс-отношения* θ_i
x_4	2	5	**2**	1	0	12	6*
x_5	7	1	2	0	1	18	9
	-3	-4	-6*	0	0		

По сравнению с таблицей 1.1 здесь добавлен еще столбец для симплекс-отношений, о чем речь пойдет ниже. В последней строке записаны коэффициенты целевой функции, взятые с противоположными знаками, так как $L \to \max$.

Данной симплекс-таблице, согласно выше приведенному правилу, соответствует опорный план (вершина) вида

$$\bar{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 12 & 18 \end{pmatrix}.$$

Условие оптимальности состоит в следующем: если в последней строке симплекс-таблицы все элементы неотрицательны, то соответствующий опорный план является оптимальным, и задача решена. В нашем случае условие оптимальности не выполняется, так как в последней строке имеется три отрицательных элемента. Поэтому необходимо перейти к новому опорному плану и соответственно построить новую симплекс-таблицу.

Алгоритм симплекс-метода

1. В последней строке исходной симплекс-таблицы выбираем наименьший отрицательный элемент. Он отмечен знаком *. Столбец, соответствующий этому элементу, называется *ведущим*. Он определяет переменную, которая будет введена в базис на данном этапе. Это - переменная x_3.

2. Вычисляют отношения свободных членов к элементам ведущего столбца (симплекс-отношение): θ_1=12/2=6, θ_1=18/2=9. Находят наименьшее ***неотрицательное*** из этих симплекс-отношений. Оно соответствует *ведущей* строке, которая определяет переменную, выводимую из базиса. Это - переменная x_4.

3. Если все симплекс-отношения окажутся отрицательными, то задача не имеет решений (оптимум целевой функции не достигается).

4. На пересечении ведущей строки и ведущего столбца находится ведущий элемент.

5. Если имеется несколько одинаковых по величине симплекс-отношений, то выбирают любое из них. То же самое относится к отрицательным элементам последней строки симплекс-таблицы.

6. После нахождения ведущего элемента переходят к следующей таблице (табл. 1.3). Для этого вначале заполняем первый столбец, записывая новые базисные элементы: x_3 и x_5.
7. Далее, элементы ведущей строки табл. 1.2, за исключением симплекс-отношения, делим на ведущий элемент.
8. Остальные элементы ведущего столбца делаем равными нулю.

8. Оставшиеся элементы симплекс-таблицы вычисляются по правилу прямоугольника: мысленно вычерчиваем прямоугольник в табл. 1.2, одна вершина которого совпадает с разрешающим элементом, а другая - с элементом, образ которого мы ищем; остальные две вершины определяются однозначно. Тогда искомый элемент из табл. 1.3 будет равен соответствующему элементу табл. 1.2 минус дробь, в знаменателе которой стоит разрешающий элемент, а в числителе - произведение элементов из двух неиспользованных вершин прямоугольника.

Таблица 1.3.

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	*Свободные члены*	*Симплекс-отношения* θ_i
x_3	1	2,5	1	0,5	0	6	
x_5	5	-4	0	-1	1	6	
	3	11	0	3	0		

Например, элемент, стоящий на пересечении строки x_3 и столбца x_1 находим так: 7-2·2/2=5; свободный член в строке x_5: 18-2·12/2=6; первый элемент последней строки: -3-2·(-6)/2=3 и т.д.

9. Записываем соответствующий опорный план:

$$\bar{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

и снова проверяем условие оптимальности. На этот раз условие выполнено: в последней строке все элементы неотрицательны. Значит найденный опорный план оптимален. Чтобы получить оптимальный план исходной, стандартной задачи, нужно отбросить последние два элемента из $\bar{x}^{(1)}$: $\bar{x}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

9. Вычисляем оптимальное значение целевой функции: L^*=3·0+4·0+6·6=36.

Метод искусственного базиса (М-метод)

М-метод применяется для решения любых задач линейного программирования, в том числе и тех, где начальная каноническая форма не задана.

М-метод состоит во введении новых искусственных переменных, которые сразу можно взять в качестве базисных, и дальнейшем решении полученной задачи симплекс-методом.

Предположим, что исходная задача линейного программирования представлена в основной форме:

$$L = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad (i = 1,2,\ldots,m), \\ x_j \geq 0 \qquad (j = 1,2,\ldots,n). \end{cases}$$

Алгоритм М-метода:

В каждое *i*-ое ограничение вводим искусственную переменную x_{n+i} >0. Всего *m* новых искусственных переменных.

Если $L \to \max$, то в целевую функцию *L* вводим *m* дополнительных слагаемых вида: -M·x_{n+1}, -M·x_{n+2}, ..., -M·x_{n+m}; если же $L \to \min$, то слагаемые вида: M·x_{n+1}, M·x_{n+2}, ..., M·x_{n+m}, где M - произвольная очень большая константа.

Получим новую, вспомогательную задачу линейного программирования:

$$L = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad (i = 1,2,\ldots,m), \\ x_j \geq 0 \qquad (j = 1,2,\ldots,n). \end{cases}$$

$F(X) = c_1X_1 + \ldots + c_nX_n - M*X_{n+1} - \ldots - M*X_{n+m} \Rightarrow \max$

$a_{i,1}X_1 + \ldots + a_{i,n}X_n + X_{n+i} = b_i$, (i=1,m)

$X_j > 0$, (j=1,n+m)

Новая система ограничений характерна тем, что искусственные переменные сразу можно взять в качестве базисных:

Формируем начальное базисное решение новой М-задачи :

$X' = (0, \ldots 0, b_1, \ldots b_m)$

Решаем М-задачу симплекс-методом

Анализируем решение М-задачи в соответствии со следующими правилами :

Если в оптимальном решении М-задачи:

$X'' = (X''_1, \ldots X''_n, X''_{n+1}, \ldots X''_{n+m})$

все искусственные переменные равны 0, то вектор

$X'' = (X''_1, ... X''_n)$

является оптимальным решением исходной ЗЛП.

Если в оптимальном решении М-задачи хотя бы одна искусственная переменная не равна 0, то исходная ЗЛП не имеет решения в силу несовместимости ограничений.

Если М-задача не имеет решения , то исходная ЗЛП также не имеет решения в силу неограниченности целевой функции на допустимом множестве.

Исходная ЗЛП:

$F(X) = 4X_1 +4X_2 +2X_3 +4X_4 +3X_5 +1X_6 \Rightarrow \max$

$-3X_1 +0X_2 +2X_3 +3X_4 +3X_5 +4X_6 = 1$
$3X_1 -2X_2 -1X_3 +4X_4 +3X_5 -3X_6 = 2$
$4X_1 -2X_2 +1X_3 -1X_4 -1X_5 -1X_6 = 2$
$2X_1 +3X_2 +3X_3 +1X_4 +2X_5 -3X_6 = 3$

Вводим в ограничения искусственные переменные :

$-3X_1 +0X_2 +2X_3 +3X_4 +3X_5 +4X_6 +X_7 = 1$
$3X_1 -2X_2 -X_3 +4X_4 +3X_5 -3X_6 +X_8 = 2$
$4X_1 -2X_2 +X_3 -X_4 -X_5 -X_6 +X_9 = 2$
$2X_1 +3X_2 +3X_3 +X_4 +2X_5 -3X_6 +X_{10} = 3$

Вводим в целевую функцию дополнительные слагаемые:

$F(X) = 4X_1 +4X_2 +2X_3 +4X_4 +3X_5 +X_6 - MX_7 - MX_8 - MX_9 - MX_{10} \Rightarrow \max$

Т.о. мы получили новую ЗЛП.

Сформируем начальное базисное решение новой М-задачи :

$X'=(0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 3)$;

После решения М-задачи симплекс методом мы получили следующее оптимальное решение : $X''=(1.2, 0.77, 0.00, 0.54, 0.00, 0.75, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00)$; В этом решении все искусственные переменные равны 0, следовательно мы нашли оптимальное решение и для исходной ЗЛП : $X = (1.2, 0.77, 0.00, 0.54, 0.00, 0.75)$.

ЛЕКЦИЯ 6
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ДВОЙСТВЕННОСТИ

Каждой задаче ЛП соответствует некоторая другая задача, которую называют двойственной (сопряженной) к исходной.

Предположим, что исходная задача представлена в стандартной форме:

$$L = c_1 \cdot x_1 + \ldots + c_n \cdot x_n \to \max$$

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n \le b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} \cdot x_1 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n \le b_m, \\ x_1, \ldots, x_n \ge 0 \end{cases} \tag{1.8}$$

Задачей ЛП, ***двойственной*** к задаче (8), называется задача, представленная в виде:

$$T = b_1 \cdot y_1 + \ldots + b_n \cdot y_n \to \min$$

$$\begin{cases} a_{11} \cdot y_1 + \ldots + a_{m1} \cdot x_m \ge c_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n} \cdot y_1 + \ldots + a_{mn} \cdot y_m \ge c_n, \\ y_1, \ldots, y_m \ge 0 \end{cases}$$

(1.9)

Обратно, если рассматривается задача (1.9), то задача (1.8) называется двойственной к (1.9).

Отметим основные соотношения между двойственными задачами:

- количество переменных в двойственной задаче равно количеству основных ограничений неравенств;
- коэффициенты целевой функции одной из задач являются свободными членами в ограничениях двойственной задачи $(c_j \Leftrightarrow b_j)$;
- если первая задача (1.8) является задачей на максимум целевой функции, то задача (1.9) - задачей на минимум целевой функции;
- матрицы коэффициентов перед переменными в левых частях ограничений-неравенств обеих двойственных задач являются транспонированными друг к другу;
- знаки в основных ограничениях-неравенствах меняются на противоположные.

Пример 1.7. Записать задачу, двойственную к задаче:

$$L = 2 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 - 3 \cdot x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2 \cdot x_2 + x_3 \le 8, \\ 4x_1 + x_2 - 3 \cdot x_3 \ge 6, \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

Решение. Прежде всего, приведем исходную задачу к стандартному виду (1.8). Для этого умножим обе части второго неравенства на (-1). Получим новую систему ограничений:

$$\begin{cases} x_1 + 2 \cdot x_2 + x_3 \le 8, \\ -4x_1 - x_2 + 3 \cdot x_3 \le -6, \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

Данная система содержит два основных ограничения-неравенства. Поставим им в соответствие переменные y_1 и y_2. Запишем целевую функцию двойственной задачи; используя в качестве ее коэффициентов свободные члены 8 и -6:

$$T = 8 \cdot y_1 - 6 \cdot y_2 \to \min$$

Матрица коэффициентов перед переменными в левых частях основных ограничений имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Транспонируя матрицу А, запишем ограничения-неравенства двойственной задачи:

$$\begin{cases} y_1 - 4 \cdot y_2 \ge 2 \\ 2 \cdot y_1 - y_2 \ge 6 \\ y_1 + 3 \cdot y_2 \ge -3 \\ y_1, y_2 \ge 0 \end{cases} \qquad (1.11)$$

Свободные члены ограничений-неравенств соответствуют коэффициентам целевой функции L.

Пара двойственных задач связана определенными соотношениями, составляющими предмет теории двойственности.

Основная теорема двойственности

Если одна из двойственных задач имеет оптимальное решение, то вторая задача также имеет оптимальное решение, причем экстремальные значения целевых функций на этих решениях совпадают:

$$\max\{L\} = \min\{T\}$$

.

Если же одна из задач неразрешима из-за неограниченности целевой функции ($L \to +\infty$ или $T \to -\infty$), то допустимое множество решений второй задачи пусто.

Из двух задач (1.8) и (1.9) первая решается симплекс-методом обычно легче.

Если в (1.8) все $b_j \ge 0 \; (i = 1, \ldots, m)$, то, приводя исходную задачу к основной форме, получим следующую систему ограничений:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n + x_{n+1} = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} \cdot x_1 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n + x_{n+m} = b_m, \\ x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m} \geq 0 \end{cases}$$

Тем самым, сразу становится известен первый опорный план:

$$\overline{x}^{(0)} = (0, \ldots, 0, b_1, \ldots, b_m)$$

и, соответственно, первая симплекс-таблица:

Базис	x_1	…	x_n	x_{n+1}	…	x_{n+m}	b_i
x_{n+1}	a_{11}	…	a_{1n}	1	…	*0*	b_1
…	…	…	…	…	…	…	…
x_{n+m}	a_{m1}	…	a_{mn}	*0*	…	1	b_m
	$-c_1$	…	$-c_n$	*0*	…	*0*	

Предположим, что данная задача имеет единственное решение. Можно показать, что последняя симплекс-таблица, по которой был рассчитан оптимальный план задачи $\overline{x}^*$, определяет также и оптимальный план $\overline{y}^*$ двойственной задачи. Его компоненты $y_1^*, \ldots, y_m^*$ находятся в правом нижнем углу этой симплекс-таблицы в столбцах, соответствующих добавленным компонентам $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$:

Базис	x_1	…	x_n	x_{n+1}	…	x_{n+m}	b_i
…	…	…	…	…	…	…	…
	…	…	..	y_1^*	…	y_m^*	

Вторая теорема двойственности

Для того, чтобы два допустимых решения $\overline{x}^*$ и $\overline{y}^*$ были оптимальными решениями пары двойственных задач, необходимо и достаточно, чтобы они удовлетворяли системе уравнений:

$$x_j^* \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot y_i^* - c_j \right) = 0 \quad (j = 1,...,n)$$

$$y_i^* \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j^* - b_i \right) = 0 \quad (i = 1,...,m)$$

Третья теорема двойственности

Значения компонент в оптимальном решении двойственной задачи представляет собой коэффициенты чувствительности к изменениям значений свободных членов в исходной задаче.

Иначе говоря, пусть наряду с задачей ЛП (1.8) рассматривается также задача вида:

$$L = c_1 \cdot x_1 + ... + c_n \cdot x_n \to \max$$

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + ... + a_{1n} \cdot x_n \le b_1 + \Delta b_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} \cdot x_1 + ... + a_{mn} \cdot x_n \le b_m + \Delta b_m, \\ x_1,...,x_n \ge 0 \end{cases} \tag{1.12}$$

Пусть также $L_{\max}$ и $L_{\max}^{нов}$ - оптимальные значения целевых функций соответственно задач (1.8) и (1.12), $\bar{y}^* = (y_1^*,...,y_m^*)$ - оптимальный план задачи (1.9). Тогда значения $L_{\max}$ и $L_{\max}^{нов}$ связаны соотношением:

$$L_{\max}^{нов} = L_{\max} + y_i^* \cdot \Delta b_1 + ... + y_m^* \cdot \Delta b_m \tag{1.13}$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ

«ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ»

Задача 1. Найти максимум целевой функции L =-x+2y при следующих ограничениях:

$$\begin{cases} x - y \geq 0; \\ x + 2y \leq 12; \\ x \leq 6; \\ y \geq 1; \\ x \geq 0; \quad y \geq 0. \end{cases}$$

Решить задачу при дополнительном условии (ДУ):

ДУ: Найти минимум целевой функции L=3x+y при тех же ограничениях.

Решение:

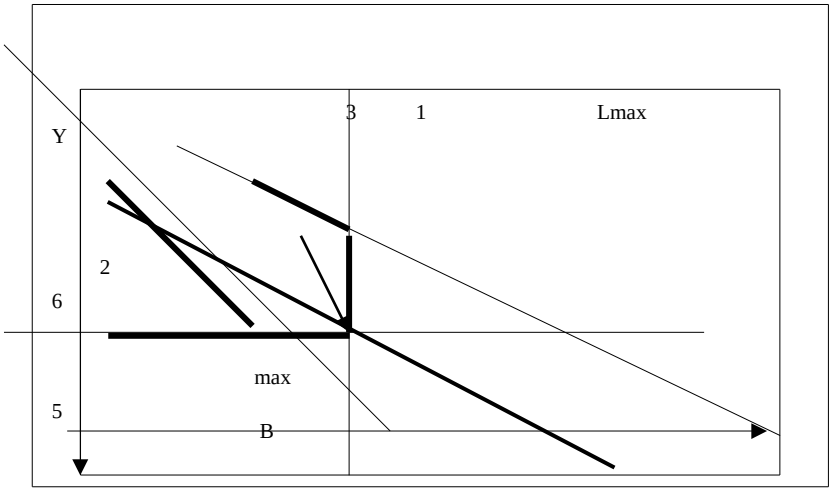
Решим неравенство графическим способом. Введем на плоскости прямоугольную систему координат XOY, в которой точки с координатами $x \geq 0, y \geq 0$ находятся в первом квадранте этой координатной плоскости.

Графическое решение неравенства типа $ax + by \leq c$ определяет одну из полуплоскостей, на которые прямая $ax + by = c$ делит координатную плоскость. Решением неравенства будет та полуплоскость все точки которой будут ему удовлетворять.

Исходя из этого, рассмотрим каждое, из приведенной выше системы, неравенство. Решением каждого из них будет соответствующая ему полуплоскость, а решением системы будет область, образованная пересечением всех найденных полуплоскостей. Графическое решение нашей системы приведено на рисунке 1. Здесь прямая (1), соответствует уравнению $x - y = 0$. Построена она по двум точкам ($x_1 = 0, y_1 = 0$) и ($x_2 = 1, y_2 = 1$) и точка O(2,1), удовлетворяющая нашему первому неравенству $x - y \geq 0$, определяет в качестве решения полуплоскость ,лежащую ниже прямой (1). Аналогично решением второго неравенства $x + 2y \leq 12$ является полуплоскость, лежащая ниже прямой (2), соответствующей уравнению $x + 2y = 12$, решением третьего неравенства является полуплоскость , находящаяся слева от прямой (3) - $x =$ 6, а решением четвертого, полуплоскость выше прямой (4)- $y = 1$.Решением же системы является в нашем случае область АВСД , которая была образована пересечением четырех, выше найденных полуплоскостей. Область АВСД образует область допустимых решений или допустимых планов нашей задачи, в которой мы и будем искать оптимальное решение L= $-x + 2y \to$

max. Для этого построим вектор $\vec{n}$ = grad L(x,y) , который укажет направление наибольшего возрастания целевой функции.

Рисунок 1.



Линии, перпендикулярные этому вектору - L(x,y)=const, которые называются линиями уровня, задают одно из возможных значений целевой функции. На графике одно из этих уравнений, например L=-x+2y=6, задает прямую, которой соответствует значение L=6. Максимальное же значение целевой функции будет соответствовать, такой линии уровня, которая будет получена путем параллельного переноса одной из линий уровня, проходящей через область допустимых планов АВСД, в пограничную область АВСД в направлении вектора $\vec{n}$ =(-1,2)=grad L. В нашем случае максимум целевой функции достигается в точке В, которая является точкой пересечения прямых 1 и 2. Решив систему уравнений, соответствующих этим прямым:

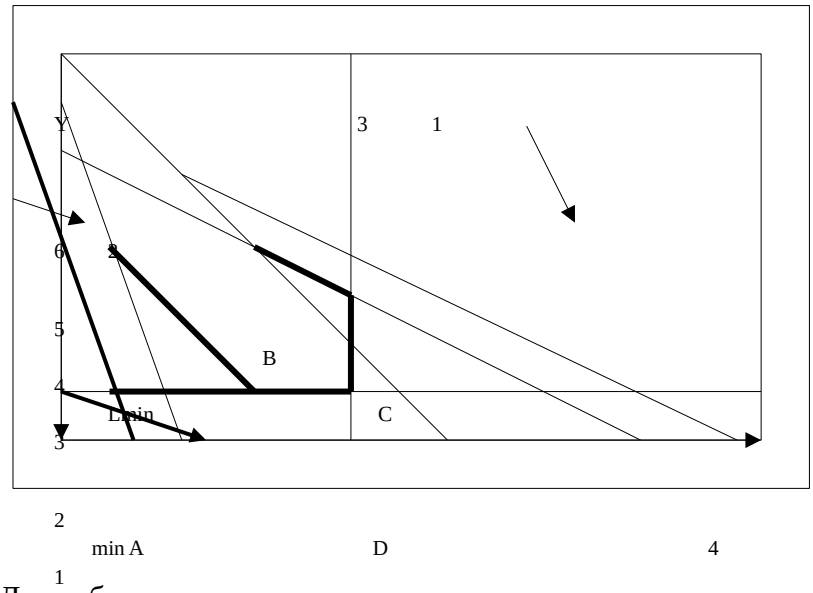
$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + 2y = 12 \end{cases}$$

получим координаты точки В=(4,4) и Lmax=-4+2x4=4.

Аналогично будем искать минимум целевой функции L=3x+y.

Для этого построим вектор $\vec{n}$ =grad L=(3,1) и одну из линий уровня L, имеющую уравнение 3x+1=6 (см. рисунок 2).

Рисунок 2



Далее будем параллельно перемещать ее в направлении , противоположном направлению вектора $\vec{n}$ (3,1) до границы области допустимых планов АВСД. Последней точкой этой области, через которую проходит наша прямая L и в которой она достигает своего минимального значения будет точка А. Эта точка является пересечением прямых 1 и 3. Решив систему уравнений, соответствующих этим прямым:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

получим координаты этой точки А=(1,1) и Lmin=3x1+1=4.

<u>Задача 2</u>.

Для изготовления изделия А и В предприятие использует три вида сырья. На производство одного изделия А, требуется 2 единицы сырья первого вида и 2 единицы – второго, а на производство одного изделия В соответственно 3 единицы первого, 1 единица второго и 3 единицы третьего. Производство обеспечено сырьем первого вида в количестве 19 единиц, второго - 13 единиц и третьего - 15 .Производство одного изделия А дает предприятию 7 млн. руб. прибыли, а изделие В – 5 млн. руб. прибыли. Составить план производства изделий А и В, максимизирующий общую прибыль предприятия.

<u>Решение:</u>

Сведения из задачи о количестве ресурсов, необходимых для производства единицы каждого товара, обеспеченности предприятия этими ресурсами и размерах прибыли, данной каждым из товаров представим в виде следующей таблицы :

Ресурсы	Товары		Запас ресурсов
	А	В	
S_1	2	3	19
S_2	2	1	13
S_3	0	3	15
Прибыль	7	5	

Составим план производства изделий А и В, максимизирующий общую прибыль предприятия.

Обозначим через x_1 и x_2 запланированный объем производства товаров А и В. Из экономического смысла величин x_1 и x_2 следует, что $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$. Тогда, учитывая количество единиц ресурсов, затрачиваемых при производстве товаров А и В, а также запасы этих ресурсов, получим следующую систему ограничений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 19, \\ 2x_1 + x_2 \le 13, \\ 3x_2 \le 15. \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

При этом реализация товаров А и В дает прибыль:

$$f(x) = 7x_1 + 5x_2 \to \max$$

Функция $f(x)$ - называется целевой функцией, которая совместно с описанной выше системой ограничений представляет собой математическую модель приведенной задачи. Решим ее симплекс-методом.

В начале приведем нашу задачу к канонической форме. Для этого от системы неравенств перейдем к системе линейных уравнений, введя дополнительные переменные : x_3, x_4, x_5, экономический смысл которых заключается в том, что это остатки ресурсов при производстве товаров А и В. В итоге получим следующую задачу:

$$f(x) = 7x_1 + 5x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 19 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 13 \\ 3x_2 + x_5 = 15 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0, \quad x_4 \ge 0, \quad x_5 \ge 0.$$

Проведем решение с помощью симплексных таблиц. Первая симплексная таблица имеет вид:

Таблица 1

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	b_i/a_{ij}

x_3	2	3	1	0	0	19	$19/2$
x_4	**2**	1	0	1	0	13	$13/2$
x_5	0	3	0	0	1	15	-
f	-7	-5	0	0	0	0	

Здесь x_3, x_4, x_5 - базисные переменные (именно в этом порядке столбцы образуют единичный базис) и заполняют столбец “B” нашей симплексной таблицы. А переменные x_1 и x_2 - свободные

Вектор x^1 = (0,0,19,13,15), является начальным решением нашей исходной задачи. Значение целевой функции на этом плане - $f(x^1)$=0.

Сформулируем *правило заполнения последней строки, которая называется индексной.* В индексной строке записываются коэффициенты целевой функции с противоположным знаком (эти числа называются оценками опорного плана), и ее значение (в столбце b).

Решение задачи начинается с анализа индексной строки. Наличие отрицательных оценок δ_1=-7 и δ_2=-5 означает, что этот опорный план - x^1 не является оптимальным. Выбор минимальной из отрицательных оценок, которой в нашем случае будет δ_1=-7 позволяет определить разрешающий столбец - A^1 и переменную - x_1, которую будем вводить в базис, а выбор мини-мальной из оценок b_i/a_{1j},которой будет min $\{19/2,13/2\}$ = $13/2$ позволяет определить разрешающую строку A_2 и переменную x_4, которую выведем из базиса, для того чтобы получить новый опорный план. На пересечении выделенных серым цветом в таблице 1 разрешающего столбца - A^1 и разрешающей строки A_2 находится разрешающий элемент a_{21}=2. Далее для перехода к новому базису применяется способ элементарных преобразований метода Гаусса. При этом в преобразование включается и индексная (последняя) строка симплексной таблицы в результате чего происходит вычисление новых оценок. После несложных действий, а именно, делим разрешающую строку на “2” и последовательно умножая полученную новую разрешающую строку на “-2” и складывая с первой и затем на “7” и складывая с последней (третья строка при этом в нашем случае останется без изменений) - получаем следующую таблицу:

Таблица 2

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	b_i/a_{ij}
x_3	0	**2**	1	-1	0	6	$6/2$ =3
x_1	1	$1/2$	0	$1/2$	0	$13/2$	$13*2/2$ =13
x_5	0	3	0	0	1	15	$15/3=5$
f	0	$3/2$ -	0	$7/2$	0	$91/2$	

Новый опорный план x^2 =(13, 2, 3, 0, 15/3) невырожденный , но и неоптимальный, так в последней строке симплексной таблицы 2 имеется отрицательная оценка $\delta_2=-3/2$. Значение целевой функции на этом плане - $f(x^2)$ =91/2. Из анализа таблицы 2 следует, что новой базисной переменной нужно сделать x_2. А сравнивая отношения b_1/a_{12} =3, $b_2/a_{22}=$ 13 и $b_3/a_{32}=$ 5, заключаем, что из базиса нужно вывести переменную x_3. Очередная таблица будет иметь вид:

Таблица 3

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	b_i/a_{ij}
x_2	0	1	$1/2$	$1/2$ -	0	3	
x_1	1	0	$1/4$ -	$3/4$	0	5	
x_5	0	0	$3/2$ -	$3/2$	1	6	
f	0	0	$3/4$	$11/4$	0	50	

Третий опорный план x^3 =(5,3,0,0,6) – оптимальный (отрицательных оценок в нижней строке таблицы больше нет). Так как нулевых оценок в столбцах свободных переменных

(на данном опорном плане это - x_3 и x_4) нет, то найденное оптимальное решение единственное. Оптимальное значение целевой функции $f^{opt} = f(x^3) = 50$.

Следовательно оптимальным планом, дающим максимальную прибыль в 50 единиц является производство 5 единиц товара А и 3 единиц товара В. Решение задачи закончено.

Задача 3.

По\Пн	b_1 =28	b_2 =17	b_3 =28	b_4 =20
a_1 =15	c_{11} =7	c_{12} =3	c_{13} =4	c_{14} = 2
a_2 =31	c_{21} =6	c_{22} =1	c_{23} =4	c_{24} =6
a_3 =25	c_{31} =6	c_{32} =9	c_{33} =5	c_{34} =3
a_4 =22	c_{41} =10	c_{42} =4	c_{43} =7	c_{44} =9

В 4 пунктах отправления (По) имеется однородный груз в количествах a_1 =15, a_2 =31, a_3 =25, a_4 =22 . Груз нужно перевести в 4 пункта назначения (Пн), потребности которых равны - b_1 =28, b_2 =17, b_3 =28, b_4 =20. Стоимость перевозки единицы груза из i – го По в j – ый Пн равна c_{ij} .

Требуется составить план перевозки грузов из По в Пн, при котором суммарные расходы на перевозку будут минимальными.

<u>Решение:</u>

Решение транспортной задачи начинается с нахождения первого опорного плана. Существует несколько методов построения опорного плана перевозок. Рассмотрим один из них – метод наименьшей стоимости.

В опорном плане должно быть n+m-1, базисных переменных, а значит в таблице столько же занятых клеток, где n – количество По, а m – Пн. В нашем случае n+m-1=4+4-1=7, значит столько заполненных клеток должно быть в нашей транспортной таблице.

При построении опорного плана методом наименьшей стоимости первой заполняется клетка с минимальной стоимостью. При этом либо удовлетворяется заявка соответствующего Пн, либо исчерпывается запас По.

В нашей задаче минимальную стоимость - c_{22} =1 мы имеем в клетке (a_2, b_2). За счет запаса По a_2 =31 можно удовлетворить всю заявку Пн b_2 =17. Поэтому записываем 17 в клетку (a_2, b_2). При этом заявка Пн - b_2 теперь полностью удовлетворена. Но надо запомнить, что запас По- a_2 уменьшился на 17 единиц и теперь составляет 14 единиц. Следующую по величине стоимость равную c_{14} =2 мы имеем в клетке (a_1, b_4). Но поскольку запас По- a_1 =15, что меньше заявки Пн- b_4 =20, в эту клетку мы можем записать только 15 единиц товара. При этом запас По- a_1 =15 полностью исчерпан, но помним, в Пн b_4 - необходимо доставить еще 5 единиц товара, используя возможности оставшихся По. Так как в клетке (a_1, b_2) имеющей следующую по величине стоимость c_{12} =3, уже стоит прочерк, то далее будет заполнена клетка (a_3, b_4) с такой же стоимостью c_{34} =3, куда мы запишем оставшиеся для полного выполнения заявки 5 единиц товара. Рассуждая аналогично заполняем остальные клетки в такой последовательности:

(a_2, b_3), (a_3, b_3), (a_3, b_1), (a_4, b_1).Нетрудно убедиться, что сумма перевозок в каждой строке равна запасу соответствующего По, а в каждом столбце – заявке соответствующего Пн. В результате получим следующую транспортную таблицу соответствующую первому опорному плану:

.По\Пн	b_1 =28	b_2 =17	b_3 =28	b_4 =20
a_1 =15	7 -	3 -	4 -	2 **15**
a_2 =31	6 -	1 **17**	4 **14**	6 -
a_3 =25	6 **6**	9 -	5 **14**	3 **5**
a_4 =22	10 **22**	4 -	7 -	9 -

Сам первый опорный имеет вид- x^1 =(0,0,0,15,0,17,14,0,6,0,14,0,14,5,22,0,0,0).

А целевая функция задачи на этом плане равна

$f(x^1)$ =15x2+17x1+14x4+6x6+14x5+5x3+22x10=444.

Этот план можно улучшить, т.е. уменьшить стоимость перевозок за счет другого распределения товара в клетках. Для этого в пустую клетку помещается товар $"w"$ и далее, осуществляя его переброску по замкнутому циклу, используя только базисные, т.е. заполненные клетки, получаем новое распределение заполненных клеток, соответствующих плану с новой стоимостью перевозок, отличной от старой на величину $\Delta f = w \times \delta_{ij}$.Цикл – это замкнутая ломаная из горизонтальных и вертикальных отрезков, соединяющая несколько клеток таблицы и совершающая в каждой из них поворот на 90 градусов. Две последовательные вершины цикла лежат либо в одной строке, либо в одном столбце. В одной из них объем перевозки товара увеличивается (в клетке ставится знак +), в другой уменьшается на столько же единиц (в клетке ставится знак -), а δ_{ij} является оценкой этой клетки. Очевидно, что уменьшение стоимости будет только в том случае, если мы перебросим товар в пустую клетку с отрицательной оценкой.

Существует метод, который позволяет автоматически находить клетки, для которых оценка δ_{ij} будет отрицательной . Этот метод называется методом потенциалов Он состоит в следующем. Предположим, что мы построили первый опорный план перевозок. Далее сопоставим каждому По – число u_i и каждому Пн – число v_j так, чтобы для любой базисной клетки выполнялось условие: $u_i + v_j = c_{ij}$. Числа u_i и v_j называются потенциалами. Оценки - δ_{ij} , вычисляются для пустых клеток по формуле $\delta_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$. Так как в нашем опорном плане m+n-1=4+4-1=7 базисных переменных, то для нахождения потенциалов нужно решить систему из 7 уравнений с 8-ю неизвестными. Поскольку число неизвестных на 1 больше числа уравнений значение одного потенциала можно выбрать произвольно. В нашей задаче система уравнений для нахождения потенциалов имеет вид:

$$\begin{cases} u_1 + v_4 = 2 \\ u_2 + v_2 = 1 \\ u_2 + v_3 = 4 \\ u_3 + v_1 = 6 \\ u_3 + v_3 = 5 \\ u_3 + v_4 = 3 \\ u_4 + v_1 = 10 \end{cases}$$

Полагаем u_1=0 и сразу получаем значения остальных потенциалов: v_4=2, u_3=1, v_3=4, u_2=0, v_2=1, v_1=5, u_4=5.

Теперь можно вычислить оценки:

$\delta_{11} = c_{11} - (u_1 + v_1) = 7 - (5+0) = 2$ $\delta_{12} = c_{12} - (u_1 + v_2) = 3 - (1+0) = 2$, аналогично δ_{13}=0, δ_{21}=1, δ_{24}=4, δ_{32}=7, δ_{42}=-2, δ_{43}=-2, δ_{44}=-2. Данные оценки занесены в таблицу в свободные клетки слева от стоимостей перевозок и выделены серым цветом.

. По \Пн	b_1 = 28	b_2 =17	b_3 =28	b_4 = 20	u_i
a_1 =15	27 -	23 -	04 -	2 **15**	0
a_2 =31	16 -	1 **17**	4 **14**	46 -	0
a_3 =25	6 **6**	79 -	5 **14**	3 **5**	1
a_4 =22	10 **22**	**-2** 4 -	**-2** 7 -	**-2** 9 -	5
v_j	5	1	4	2	

Для перехода к новому опорному плану свободная переменная с отрицательной оценкой вводится в базис, а одна из базисных переменных переводится в свободные. Для этого построим цикл с началом (и концом) в клетке (4,2) с отрицательной оценкой δ_{42}=-2 и вершинами в занятых клетках. Ребра цикла могут проходить и через свободные, и через занятые клетки, но повороты на 90 градусов должны происходить только в занятых клетках. В нашем примере получается следующий цикл:

.По\Пн	b_1 =28	b_2 =17	b_3 =28	b_4 =20	u_i
a_1 =15	2 7 -	2 3 -	0 4 -	2 **15**	0
a_2 =31	1 6 -	1 **17**	4 **14**	4 6 -	0
a_3 =25	$+w$ 6 **6**	7 9 -	$-w$ 5 **14**	3 **5**	1
a_4 =22	$-w$ 10 **22**	**-2** 4 -	**-2** 7 $+w$	**-2** 9 -	5
v_j	5	1	4	2	

В начальной вершине цикла-клетка(4,3)помещаем символ “ $+w$ ”, в следующей вершине – клетка (3,3) ” $-w$ ”, потом – клетка (3,1) “ $+w$ ” и так далее по всем вершинам цикла: (4,3) $\rightarrow$ (3,3) $\rightarrow$ (3,1) $\rightarrow$ (4,1)(направление обхода не имеет значения). Значение клеток , отмеченных знаком “ $-w$ ”, уменьшается на величину w , а отмеченных знаком “ $+w$ ” – увеличивается на ту же величину. Для вывода из базиса выбирается клетка, помеченная знаком “ $-w$ ” и имеющая наименьшее значение. Это условие гарантирует не отрицательность нового опорного плана. Если наименьшее значение находится в нескольких клетках, то выбирается любая из них. В любом случае значение целевой функции уменьшается на величину $\Delta = |\delta_{ij} w|$.

В данном примере $w = \min\{x_{41} = 22, x_{33} = 14\} = 14$. Тогда новые значения переменных будут следующими: $x_{43} = 0 + 14 = 14$ (и пустая клетка становится занятой), $x_{33} = 14 - 14 = 0$ (занятая клетка становится пустой), $x_{41} = 22 - 14 = 8$, $x_{31} = 6 + 14 = 20$. Значение целевой функции на новом опорном плане будет равно $f(x^2)$ =444 - 2x14=416. Далее переходим к следующей таблице и вычисляем новые значения потенциалов и новые оценки, которые таким же образом заносим в эту таблицу.

.По\Пн	b_1 =28	b_2 =17	b_3 =28	b_4 =20	u_i
a_1 =15	2 7 4 3 2 4 2 0 - - - **15**				
a_2 =31	-1 6 1 4 2 6 2 $+w$ **17** $-w$ **14** -				
a_3 =25	6 9 9 2 5 3 1 **20** - **5**				
a_4 =22	10 0 4 7 2 9 5 $-w$ **8** - $+w$ **14** -				
v_j	5	-1	2	2	

В результате проведенных вычислений обнаруживаем, что новый опорный план x^2 =(0,0,0,15,0,17,14,0,20,0,0,5,8,0,14,0) также не оптимален так как оценка δ_{21} =-1, т.е. отрицательна и мы можем еще раз уменьшить значение нашей целевой функции. Построив цикл:(2,1) $\rightarrow$ (2,3) $\rightarrow$ (4,3) $\rightarrow$ (4,1), для которого w =8, получим новую таблицу и новое распределение товара, т.е. новый опорный план x^3 - =(0,0,0,15,8,17,6,20,0,0,5,0,0,22,0). На этом опорном плане новое значение целевой функции будет равно - $f(x^3)$ =416-1x8=408.

.По\Пн	b_1 =28	b_2 =17	b_3 =28	b_4 =20	u_i
a_1 =15	2 7 3 3 1 2 0 - - 4 **15** -				
a_2 =31	6 1 4 3 6 1 **8** **17** **6** -				
a_3 =25	6 8 9 1 3 1 **20** - 5 **5**				

-

a_4 1 10 0 4 3 9 4

=22 7

- - -

22

v_j 5 0 3 2

Новый же расчет потенциалов и соответствующих оценок показывает, что найденный нами план оптимален, так как среди оценок больше нет ни одной отрицательной. Однако, то обстоятельство, что оценка δ_{42} =0, говорит о том, что найденный опорный план не единственный. Построив цикл с вершинами в клетках (4,2) $\rightarrow$ (2,2) $\rightarrow$ (2,3) $\rightarrow$ (4,3), можно получить еще один оптимальный опорный план x^4 =(0,0,0,15,8,0,

23,0,20,0,0,5,0,17,5,0) с тем же значением целевой функции.

ЛЕКЦИЯ 7-8

ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

Формулировка транспортной задачи

Однородный груз сосредоточен у m поставщиков в объемах $a_1, a_{2,}, ..., a_m$. Данный груз необходимо доставить n потребителям в объемах $b_{1,}, b_2, ..., b_n$. Известны c_{IJ}, i=1,2,, …,m, j=1,2,…,n- стоимости перевозки единицы груза от каждого I-го поставщика каждому j-му потребителю. Требуется составить такой план перевозок, при котором запасы всех потребителей полностью удовлетворены и суммарные затраты на перевозку всех грузов минимальны.

Исходные данные транспортной задачи обычно записываются в таблице 1.

b_j a_i	b_1	b_2	…	b_n
a_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}
a_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n}
…	…	…	….	….

a_m	c_{m1}	c_{m2}	$\cdots$	c_{mn}

Таблица 1.

Исходные данные задачи могут быть представлены также в виде вектора запасов поставщиков A=($a_1, a_{2,}, ..., a_m$), вектора запросов потребителей B=($b_{1,}, b_2, ..., b_n$) и матрицы стоимостей $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & ... & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & ... & c_{2n} \\ ... & ... & .... & ... \\ c_{m1} & c_{m2} & ... & c_{mn} \end{pmatrix}$.

В транспортных задачах под поставщиками и потребителями понимаются различные промышленные и сельскохозяйственные предприятия, заводы, фабрики, слады, магазины и т.д. Однородными считаются грузы, которые могут быть перевезены одним видом транспорта. Под стоимостью перевозок понимаются тарифы, расстояния, время, расход топлива и т.п.

В транспортной задаче предполагается, что суммарные запасы поставщиков равны суммарным запросам потребителей, т.е. $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Такая задача называется *задачей с правильным балансом***,** а ее модель – *закрытой***.** Если же это равенство не выполняется, то задача называется *задачей с неправильным балансом,* а ее модель – *открытой* **.**

Опорное решение транспортной задачи

Опорным решением транспортной задачи называется любое допустимое решение, для которого вектор-условия, соответствующие положительным координатам, линейно независимы.

Ввиду того, что ранг системы векторов-условий транспортной задачи равен m+n-1, опорное решение не может иметь отличных от нуля координат более m+n-1. Число отличных от нуля координат невырожденного опорного решения равно m+n-1,а для вырожденного опорного решения меньше m+n-1

Любое допустимое решение транспортной задачи можно записать в ту же таблицу, что и исходные данные. Клетки таблицы транспортной задачи, в которых находится отличные от нуля или базисные нулевые перевозки, называются *занятыми*, остальные – *незанятыми* или *свободными.* Клетки таблицы нумеруются так, что клетка, содержащая перевозку x_{ij}, т.е. стоящая в i-й строке и j-м столбце, имеет номер (i,j). Каждой клетке с номером (i,j) соответствует переменная x_{ij}, которой соответствует вектор-условие A_{ij}.

Для того чтобы избежать трудоемких вычислений при проверке линейной независимости вектор-условий, соответствующих положительным координатам

допустимого решения, вводят понятие цикла. Циклы также используются для перехода от одного опорного решения к другому.

Циклом называется такая последовательность клеток таблицы транспортной задачи (i_1,j_1), (i_1,j_2), (i_2,j_2), … , (i_k,j_1), в которой две и только две соседние клетки расположены в одной клетке или столбце, причем первая и последняя клетки также находятся в одной строке или столбце.

Цикл изображают в таблице транспортной задачи в виде замкнутой ломаной линии. В любой клетке цикла происходит поворот звена ломаной линии на 90^0.

Методы построения начального опорного решения.

Метод северо-западного угла

Существует ряд методов построения начального опорного решения, наиболее простым из которых является метод северо-западного угла. В данном методе запасы очередного поставщика используются для обеспечения запросов очередных потребителей до тех пор, пока не будут исчерпаны полностью, после чего используются запасы следующего по номеру поставщика.

Заполнение таблицы транспортной задачи начинается с левого верхнего угла и состоит из ряда однотипных шагов. На каждом шаге, исходя из запасов очередного поставщика и запросов очередного потребителя, заполняется только одна клетка и соответственно исключается из рассмотрения один поставщик или потребитель. Осуществляется это таким образом:

1. если $a_i < b_j$, то $x_{ij} = a_i$ и исключается поставщик с номером i, $x_{ik} = 0$, k=1, 2, …, n, $k \neq j$, $b'_j = b_j - a_i$;
2. если $a_i > b_j$, то $x_{ij} = b_j$ и исключается потребитель с номером j, $x_{kj} = 0$, k=1, 2, …, m, $k \neq i$, $a'_i = a_i - b_j$;
3. если $a_i = b_j$, то $x_{ij} = a_i = b_j$ и исключается либо i-й поставщик, $x_{ik} = 0$, k=1, 2, …, n, $k \neq j$, $b'_j = 0$, либо j-й потребитель, $x_{kj} = 0$, k=1, 2, …, m, $k \neq i$, $a'_i = 0$.

Нулевые перевозки принято заносить в таблицу только тогда, когда они попадают в клетку (i,j), подлежащую заполнению. Если в очередную клетку таблицы (i,j) требуется поставить перевозку, а i-й поставщик или j-й потребитель имеет нулевые запасы или запросы, то в клетку ставится перевозка, равная нулю (базисный нуль), и после этого, как обычно, исключается из рассмотрения соответствующий поставщик или потребитель. Таким образом, в таблицу заносят только базисные нули, остальные клетки с нулевыми перевозками остаются пустыми.

Во избежание ошибок после построения начального опорного решения необходимо проверить, что число занятых клеток равно m+n-1 и векторы-условия, соответствующие этим клеткам, линейно независимы.

Решение транспортной задачи, построенное методом северо-западного угла, является опорным.

Метод минимальной стоимости

Метод минимальной стоимости прост, он позволяет построить опорное решение, достаточно близкое к оптимальному, так как использует матрицу стоимостей транспортной задачи C=(c_{ij}), i=1,2,,…,m, j=1,2,…,n. Как и метод северо-западного угла, он состоит из ряда однотипных шагов, на каждом из которых заполняется только одна клетка таблицы, соответствующая минимальной стоимости min { c_{ij} }, и исключается из рассмотрения только одна строка (поставщик) или один столбец (потребитель).

Очередную клетку, соответствующую $\min\limits_{i,j}\{c_{ij}\}$, заполняют по тем же правилам, что и в методе северо-западного угла. Поставщик исключается из рассмотрения, если его запасы использованы полностью. Потребитель исключается из рассмотрения, если его запросы удовлетворены полностью. На каждом шаге исключается либо один поставщик, либо один потребитель. При этом если поставщик еще не исключен, но его запасы равны нулю, то на том шаге, когда от данного поставщика требуется поставить груз, в соответствующую клетку таблицы заносится базисный нуль и лишь, затем поставщик исключается из рассмотрения. Аналогично с потребителем.

Решение транспортной задачи, построенное методом минимальной стоимости, является опорным.

Переход от одного опорного решения к другому

В транспортной задаче переход от одного опорного решения к другому осуществляется с помощью цикла. Для некоторой свободной клетки таблицы строится цикл, содержащий часть клеток, занятых опорным решений. По этому циклу перераспределяются объемы перевозок. Перевозка загружается в выбранную свободную клетку и освобождается одна из занятых клеток, получается новое опорное решение.

Если таблица транспортной задачи содержит опорное решение, то для любой свободной клетки таблицы существует единственный цикл, содержащий эту клетку и часть клеток, занятых опорным решением.

Означенный цикл

Цикл называется *означенным*, если его угловые клетки пронумерованы по порядку и нечетным клеткам приписан знак «+», а четным – знак «-» (рис 2.)

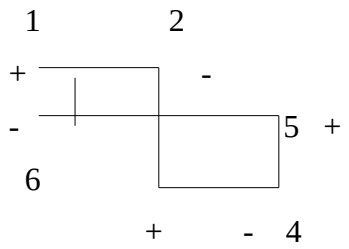


Рис 2.

Сдвигом по циклу на величину θ называется увеличение объемов перевозок во всех нечетных клетках цикла, отмеченных знаком «+», на θ и уменьшение объемов перевозок во всех четных клетках, отмеченных знаком «-», на θ.

Если таблица транспортной задачи содержит опорное решение, то при сдвиге по любому циклу, содержащему одну свободную клетку, на величину $\theta = \min\limits_{<<->>} \{x_{ij}\}$ *получится опорное решение.*

Метод потенциалов

Широко распространенным методом решения транспортных задач является метод потенциалов. Этот метод позволяет упростить наиболее трудоемкую часть вычислений – нахождение оценок свободных клеток.

Признак оптимальности опорного решения. *Если допустимое решение X=(*x_{ij}*), i=1,2,,…,m, j=1,2,…,n транспортной задачи является оптимальным, то существует потенциалы (числа) поставщиков* u_i*, i=1,2,,…,m и потребителей* v_j*, j=1,2,…,n, удовлетворяющие следующим условиям:*

$$u_i + v_j = c_{ij} \quad \text{при} \quad x_{ij} > 0,$$

$$u_i + v_j \le c_{ij} \quad \text{при} \quad x_{ij} = 0.$$

Алгоритм решения транспортной задачи методом потенциалов

Порядок решения транспортной задачи методом потенциалов следующий.

1. Проверяют выполнение необходимого и достаточного условия разрешимости задачи. Если задача имеет неправильный баланс, то вводят фиктивного поставщика или потребителя с недостающими запасами или запросами и нулевыми стоимостями перевозок.
2. Строят начальное опорное решение (методом минимальной стоимости или каким-либо другим методом) и проверяют правильность его построения, для чего подсчитывают количество занятых клеток (их должно быть m+n-1) и убеждаются в линейной независимости векторов-условий (методом вычеркивания).
3. Строят систему потенциалов, соответствующих опорному решению. Для этого решают систему уравнений $u_i + v_j = c_{ij}$ при $x_{ij} > 0$. Для того чтобы найти частное решение системы, одному из потенциалов (обычно тому, которому соответствует большее число занятых клеток) задают произвольно некоторое значение (чаще нуль). Остальные потенциалы однозначно определяются по формулам $u_i = c_{ij} - v_j$ при $x_{ij} > 0$, (24)

если известен потенциал v_j, и

$$v_j = c_{ij} - u_i \quad \text{при} \quad x_{ij} > 0, \qquad (25)$$

если известен потенциал u_i.

4. Проверяют, выполняется ли условие оптимальности для свободных клеток таблицы. Для этого вычисляют оценки для всех свободных клеток по формулам $\Delta_{lk} = u_i + v_j - c_{ij}$ и те оценки, которые больше нуля, записывают в левые нижние углы клеток. Если для всех свободных клеток $\Delta_{ij} \leq 0$, то вычисляют значение целевой функции, и решение задачи заканчивается, так как полученное решение является оптимальным. Если же имеется хотя бы одна клетка с положительной оценкой, то опорное решение не является оптимальным.
5. Переходят к новому опорному решению, на котором значение целевой функции будет меньше. Для этого находят клетку таблицы задачи, которой соответствует наибольшая положительная оценка $\max\{\Delta_{ij}\} = \Delta_{lk}$. Строят цикл, включающий в свой состав данную клетку и часть клеток, занятых опорным решением. В клетках цикла расставляют поочередно знаки «+» и «-», начиная с «+» в клетке с наибольшей положительной оценкой. Осуществляют сдвиг (перераспределение груза) по циклу на величину $\theta = \min_{<<->>}\{x_{ij}\}$. Клетка со знаком «-», в которой достигается $\min_{<<->>}\{x_{ij}\}$, остается пустой. Если минимум достигается в нескольких клетках, то одна из них остается пустой, а в остальных проставляют базисные нули, чтобы число занятых клеток оставалось равным m+n-1. Далее возвращаемся к пункту 3 алгоритма.

Пример решения транспортной задачи методом потенциалов

1. Закрытая транспортная задача.

	b1 = 150	b2 = 150	b3 = 300
a1 = 100	2	1	2
a2 = 200	5	7	6
a3 = 300	3	2	5

2. Строим 1-ое опорное решение методом наименьших стоимостей.

	b1 = 150	b2 = 150	b3 = 300	
a1 = 100	2	100 1	2	u_1
a2 = 200	5	7	200 6	u_2
a3 = 300	150 3	50 2	100 5	u_3

	v_1	v_2	v_3	

3, 4. Проверяем 1-ое опорное решение на оптимальность методом потенциалов.

$$\begin{cases} u_1 + v_2 = 1 \\ u_2 + v_3 = 6 \\ u_3 + v_1 = 3 \\ u_3 + v_2 = 2 \end{cases}$$

$u_3 + v_3 = 5$

$u_1 = 0 \quad v_1 = 2$

$u_2 = 2 \quad v_2 = 1$

$u_3 = 1 \quad v_3 = 4$

$\Delta_{11} = 2 - (0 + 2) = 0$

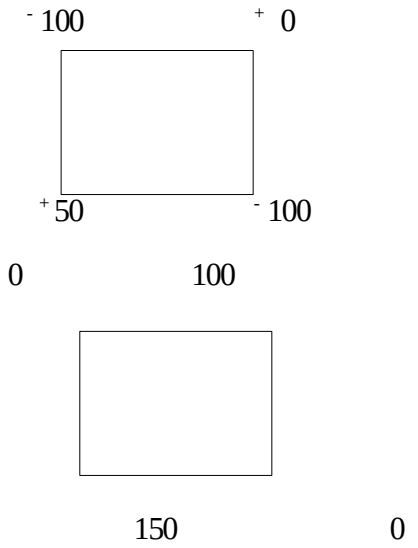
$\Delta_{13} = 2 - (0 + 4) = -2 < 0$

$\Delta_{21} = 5 - (2 + 2) = 1 > 0$

$\Delta_{22} = 7 - (2 + 1) = 4 > 0$

Вывод: 1-ый план не является оптимальным.

5. Переходим к новому опорному решению, на котором значение целевой функции будет меньше. Строим цикл.



	b1 = 150	b2 = 150	b3 = 300	
a1 = 100	2	0 1	100 2	u_1
a2 = 200	5	7	200 6	u_2
a3 = 300	150 3	150 2	5	u_3

	v_1	v_2	v_3	

Проверяем 2-ое опорное решение на оптимальность методом потенциалов.

$$\begin{cases} u_1 + v_2 = 1 \\ u_1 + v_3 = 2 \\ u_2 + v_3 = 6 \\ u_3 + v_1 = 3 \end{cases}$$

$u_3 + v_2 = 2$

$u_1 = 0 \quad v_1 = 2$

$u_2 = 4 \quad v_2 = 1$

$u_3 = 1 \quad v_3 = 2$

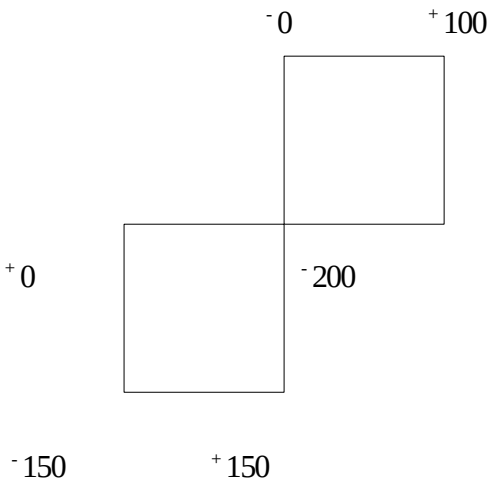
$\Delta_{11} = 2 - (0 + 2) = 0$

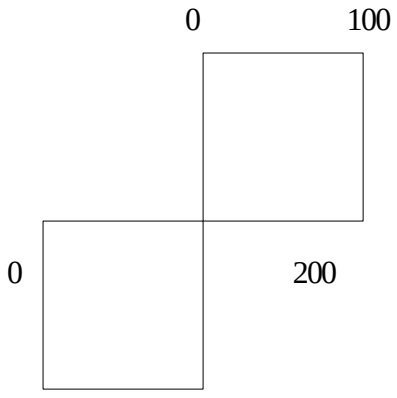
$\Delta_{21} = 5 - (4 + 2) = -1 < 0$

$\Delta_{22} = 7 - (4 + 1) = 2 > 0$

$\Delta_{33} = 5 - (1 + 3) = 2 > 0$

Вывод: 2-ий план не является оптимальным.





150 150

	b1 = 150	b2 = 150	b3 = 300	
a1 = 100	2	1	100 2	u_1
a2 = 200	0 5	7	200 6	u_2
a3 = 300	150 3	150 2	5	u_3
	v_1	v_2	v_3	

Проверяем 3-ье опорное решение на оптимальность методом потенциалов.

$$\begin{cases} u_1 + v_3 = 2 \\ u_2 + v_1 = 5 \\ u_2 + v_3 = 6 \\ u_3 + v_1 = 3 \end{cases}$$

$u_3 + v_2 = 2$

$u_1 = 0 \quad v_1 = 1$

$u_2 = 4 \quad v_2 = 0$

$u_3 = 2 \quad v_3 = 2$

$\Delta_{11} = 2 - (0 + 1) = 1 > 0$

$\Delta_{12} = 1 - (0 + 0) = 1 > 0$

$\Delta_{22} = 7 - (4 + 0) = 3 > 0$

$\Delta_{33} = 5 - (2 + 2) = 1 > 0$

Получили оптимальное решение.

$x_{11} = 0$

$x_{12} = 0$

$x_{13} = 100$

$x_{21} = 0$

$x_{22} = 0$

$x_{23} = 200$

$x_{31} = 150$

$x_{32} = 150$

$x_{33} = 0$

$L(x) = 100*2 + 0*5 + 200*6 + 150*3 + 150*2 = 2150$ (у. е.)

ЗАДАЧА 2

По\Пн	b_1 =28	b_2 =17	b_3 =28	b_4 =20
a_1 =15	c_{11} =7	c_{12} =3	c_{13} =4	c_{14} = 2
a_2 =31	c_{21} =6	c_{22} =1	c_{23} =4	c_{24} =6
a_3 =25	c_{31} =6	c_{32} =9	c_{33} =5	c_{34} =3
a_4 =22	c_{41} =10	c_{42} =4	c_{43} =7	c_{44} =9

В 4 пунктах отправления (По) имеется однородный груз в количествах a_1 =15, a_2 =31, a_3 =25, a_4 =22 . Груз нужно перевести в 4 пункта назначения (Пн), потребности которых равны - b_1 =28, b_2 =17, b_3 =28, b_4 =20. Стоимость перевозки единицы груза из i – го По в j – ый Пн равна c_{ij} .

Требуется составить план перевозки грузов из По в Пн, при котором суммарные расходы на перевозку будут минимальными.

<u>Решение:</u>

Решение транспортной задачи начинается с нахождения первого опорного плана. Существует несколько методов построения опорного плана перевозок. Рассмотрим один из них – метод наименьшей стоимости.

В опорном плане должно быть n+m-1, базисных переменных, а значит в таблице столько же занятых клеток, где n – количество По, а m – Пн. В нашем случае n+m-1=4+4-1=7, значит столько заполненных клеток должно быть в нашей транспортной таблице.

При построении опорного плана методом наименьшей стоимости первой заполняется клетка с минимальной стоимостью. При этом либо удовлетворяется заявка соответствующего Пн, либо исчерпывается запас По.

В нашей задаче минимальную стоимость - c_{22}=1 мы имеем в клетке (a_2, b_2). За счет запаса По a_2=31 можно удовлетворить всю заявку Пн b_2=17. Поэтому записываем 17 в клетку (a_2, b_2). При этом заявка Пн - b_2 теперь полностью удовлетворена. Но надо запомнить, что запас По- a_2 уменьшился на 17 единиц и теперь составляет 14 единиц. Следующую по величине стоимость равную c_{14}=2 мы имеем в клетке (a_1, b_4). Но поскольку запас По- a_1=15, что меньше заявки Пн- b_4=20, в эту клетку мы можем записать только 15 единиц товара. При этом запас По- a_1=15 полностью исчерпан, но помним, в Пн b_4 - необходимо доставить еще 5 единиц товара, используя возможности оставшихся По. Так как в клетке (a_1, b_2) имеющей следующую по величине стоимость c_{12}=3, уже стоит прочерк, то далее будет заполнена клетка (a_3, b_4) с такой же стоимостью c_{34}=3, куда мы запишем оставшиеся для полного выполнения заявки 5 единиц товара. Рассуждая аналогично заполняем остальные клетки в такой последовательности:

(a_2, b_3), (a_3, b_3), (a_3, b_1), (a_4, b_1).Нетрудно убедиться, что сумма перевозок в каждой строке равна запасу соответствующего По, а в каждом столбце – заявке соответствующего Пн. В результате получим следующую транспортную таблицу соответствующую первому опорному плану:

.По\Пн	b_1 =28	b_2 =17	b_3 =28	b_4 =20
a_1 =15	7 -	3 -	4 -	2 **15**
a_2 =31	6 -	1 **17**	4 **14**	6 -
a_3 =25	6 **6**	9 -	5 **14**	3 **5**
a_4 =22	10 **22**	4 -	7 -	9 -

Сам первый опорный имеет вид- x^1 =(0,0,0,15,0,17,14,0,6,0,14,0,14,5,22,0,0,0).

А целевая функция задачи на этом плане равна

$f(x^1)$ =15x2+17x1+14x4+6x6+14x5+5x3+22x10=444.

Этот план можно улучшить, т.е. уменьшить стоимость перевозок за счет другого распределения товара в клетках. Для этого в пустую клетку помещается товар $"w"$ и далее, осуществляя его переброску по замкнутому циклу, используя только базисные, т.е. заполненные клетки, получаем новое распределение заполненных клеток, соответствующих плану с новой стоимостью перевозок, отличной от старой на величину $\Delta f = w \times \delta_{ij}$.Цикл – это замкнутая ломаная из горизонтальных и вертикальных отрезков, соединяющая несколько клеток таблицы и совершающая в каждой из них поворот на 90 градусов. Две последовательные вершины цикла лежат либо в одной строке, либо в одном столбце. В одной из них объем перевозки товара увеличивается (в клетке ставится знак +), в другой уменьшается на столько же единиц (в клетке ставится знак -), а δ_{ij} является оценкой этой клетки. Очевидно, что уменьшение стоимости будет только в том случае, если мы перебросим товар в пустую клетку с отрицательной оценкой.

Существует метод, который позволяет автоматически находить клетки, для которых оценка δ_{ij} будет отрицательной . Этот метод называется методом потенциалов Он состоит в следующем. Предположим, что мы построили первый опорный план перевозок. Далее сопоставим каждому По – число u_i и каждому Пн – число v_j так, чтобы для любой базисной клетки выполнялось условие: $u_i + v_j = c_{ij}$. Числа u_i и v_j называются потенциалами. Оценки - δ_{ij} , вычисляются для пустых клеток по формуле $\delta_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$. Так как в нашем опорном плане m+n-1=4+4-1=7 базисных переменных, то для нахождения потенциалов нужно решить систему из 7 уравнений с 8-ю неизвестными. Поскольку число неизвестных на 1 больше числа уравнений значение одного потенциала можно выбрать произвольно. В нашей задаче система уравнений для нахождения потенциалов имеет вид:

$$\begin{cases} u_1 + v_4 = 2 \\ u_2 + v_2 = 1 \\ u_2 + v_3 = 4 \\ u_3 + v_1 = 6 \\ u_3 + v_3 = 5 \\ u_3 + v_4 = 3 \\ u_4 + v_1 = 10 \end{cases}$$

Полагаем u_1=0 и сразу получаем значения остальных потенциалов: v_4=2, u_3=1, v_3=4, u_2=0, v_2=1, v_1=5, u_4=5.

Теперь можно вычислить оценки:

$\delta_{11} = c_{11} - (u_1 + v_1) = 7 - (5 + 0) = 2$ $\delta_{12} = c_{12} - (u_1 + v_2) = 3 - (1 + 0) = 2$, аналогично δ_{13}=0, δ_{21}=1, δ_{24}=4, δ_{32}=7, δ_{42}=-2, δ_{43}=-2, δ_{44}=-2. Данные оценки занесены в таблицу в свободные клетки слева от стоимостей перевозок и выделены серым цветом.

.По\Пн	b_1 =28	b_2 =17	b_3 =28	b_4 =20	u_i
a_1 =15	2 7 -	2 3 -	0 4 -	2 **15**	0
a_2 =31	1 6 -	1 **17**	4 **14**	4 6 -	0
a_3 =25	6 **6**	7 9 -	5 **14**	3 **5**	1
a_4 =22	10 **22**	**-2** 4 -	**-2** 7 -	**-2** 9 -	5
v_j	5	1	4	2	

Для перехода к новому опорному плану свободная переменная с отрицательной оценкой вводится в базис, а одна из базисных переменных переводится в свободные. Для этого

построим цикл с началом (и концом) в клетке (4,2) с отрицательной оценкой δ_{42} =-2 и вершинами в занятых клетках. Ребра цикла могут проходить и через свободные, и через занятые клетки, но повороты на 90 градусов должны происходить только в занятых клетках. В нашем примере получается следующий цикл:

.По\Пн	b_1 =28	b_2 =17	b_3 =28	b_4 =20	u_i
a_1 =15	2 7 -	2 3 -	0 4 -	**15** 2	0
a_2 =31	1 6 -	**17** 1	**14** 4	4 6 -	0
a_3 =25	$+w$ 6 **6**	7 9 -	$-w$ 5 **14**	**5** 3	1
a_4 =22	$-w$ 10 **22**	**-2** 4 -	**-2** 7 $+w$	**-2** 9 -	5
v_j	5	1	4	2	

В начальной вершине цикла-клетка(4,3)помещаем символ “ $+w$ ”, в следующей вершине – клетка (3,3) ” $-w$ ”, потом – клетка (3,1) “ $+w$ ” и так далее по всем вершинам цикла: (4,3) $\rightarrow$ (3,3) $\rightarrow$ (3,1) $\rightarrow$ (4,1)(направление обхода не имеет значения). Значение клеток , отмеченных знаком “ $-w$ ”, уменьшается на величину w , а отмеченных знаком “ $+w$ ” – увеличивается на ту же величину. Для вывода из базиса выбирается клетка, помеченная знаком “ $-w$ ” и имеющая наименьшее значение. Это условие гарантирует не отрицательность нового опорного плана. Если наименьшее значение находится в нескольких клетках, то выбирается любая из них. В любом случае значение целевой функции уменьшается на величину $\Delta = |\delta_{ij} w|$.

В данном примере $w = \min\{x_{41} = 22, x_{33} = 14\} = 14$. Тогда новые значения переменных будут следующими: $x_{43} = 0 + 14 = 14$ $x_{33} = 14 - 14 = 0$ (и пустая клетка становится занятой), $x_{41} = 22 - 14 = 8$, $x_{31} = 6 + 14 = 20$ (занятая клетка становится пустой), . Значение целевой функции на новом опорном плане будет равно $f(x^2)$ =444 - 2x14=416. Далее переходим к

следующей таблице и вычисляем новые значения потенциалов и новые оценки, которые таким же образом заносим в эту таблицу.

.По\Пн	b_1 =28	b_2 =17	b_3 =28	b_4 =20	u_i
a_1 =15	2 7 -	4 3 -	2 4 -	**15**	2 0
a_2 =31	-1 6 $+w$	**17**	1 $-w$ **14**	4 2 6 -	2
a_3 =25	6 9 **20**	9 -	2 5	**5**	3 1
a_4 =22	10 $-w$ **8**	0 4 -	7 $+w$ **14**	2 9 -	5
v_j	5	-1	2	2	

В результате проведенных вычислений обнаруживаем, что новый опорный план x^2 =(0,0,0,15,0,17,14,0,20,0,0,5,8,0,14,0) также не оптимален так как оценка δ_{21} =-1, т.е. отрицательна и мы можем еще раз уменьшить значение нашей целевой функции. Построив цикл:(2,1) $\to$ (2,3) $\to$ (4,3) $\to$ (4,1), для которого w =8, получим новую таблицу и новое распределение товара, т.е. новый опорный план x^3 - =(0,0,0,15,8,17,6,20,0,0,5,0,0,22,0). На этом опорном плане новое значение целевой функции будет равно - $f(x^3)$ =416-1x8=408.

.По\Пн	b_1 =28	b_2 =17	b_3 =28	b_4 =20	u_i
a_1 =15	2 7 -	3 3 -	1 4 -	**15**	2 0
a_2 =31	6 **8**	**17**	1 **6**	4 3 6 -	1
a_3 =25	6 8	9	1 5		3 1

		20		**-**		**-**		**5**	
a_4 =22	1	10	0	4		7	3	9	4
		-		**-**		**22**		**-**	
v_j		5		0		3		2	

Новый же расчет потенциалов и соответствующих оценок показывает, что найденный нами план оптимален, так как среди оценок больше нет ни одной отрицательной. Однако, то обстоятельство, что оценка δ_{42} =0, говорит о том, что найденный опорный план не единственный. Построив цикл с вершинами в клетках (4,2) $\rightarrow$ (2,2) $\rightarrow$ (2,3) $\rightarrow$ (4,3), можно получить еще один оптимальный опорный план x^4 =(0,0,0,15,8,0, 23,0,20,0,0,5,0,17,5,0) с тем же значением целевой функции.

Учебное издание

Надежда Львовна Леонова

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Конспект лекций

Редактор и корректор В.А. Басова

Технический редактор Л.Я. Титова Темплан 2015, поз. 2

Подп. к печати 02.2015. Формат 60x84/16. Бумага тип № 1.
Печать офсетная. Объем 2,75 печ.л.; 2,75 уч. изд.л. Тираж 30 экз. Изд. № 2
Цена “С”. Заказ

Ризограф Санкт-Петербургского государственного технологического университета растительных полимеров, СПБ., 198095, ул. Ивана Черных,4.